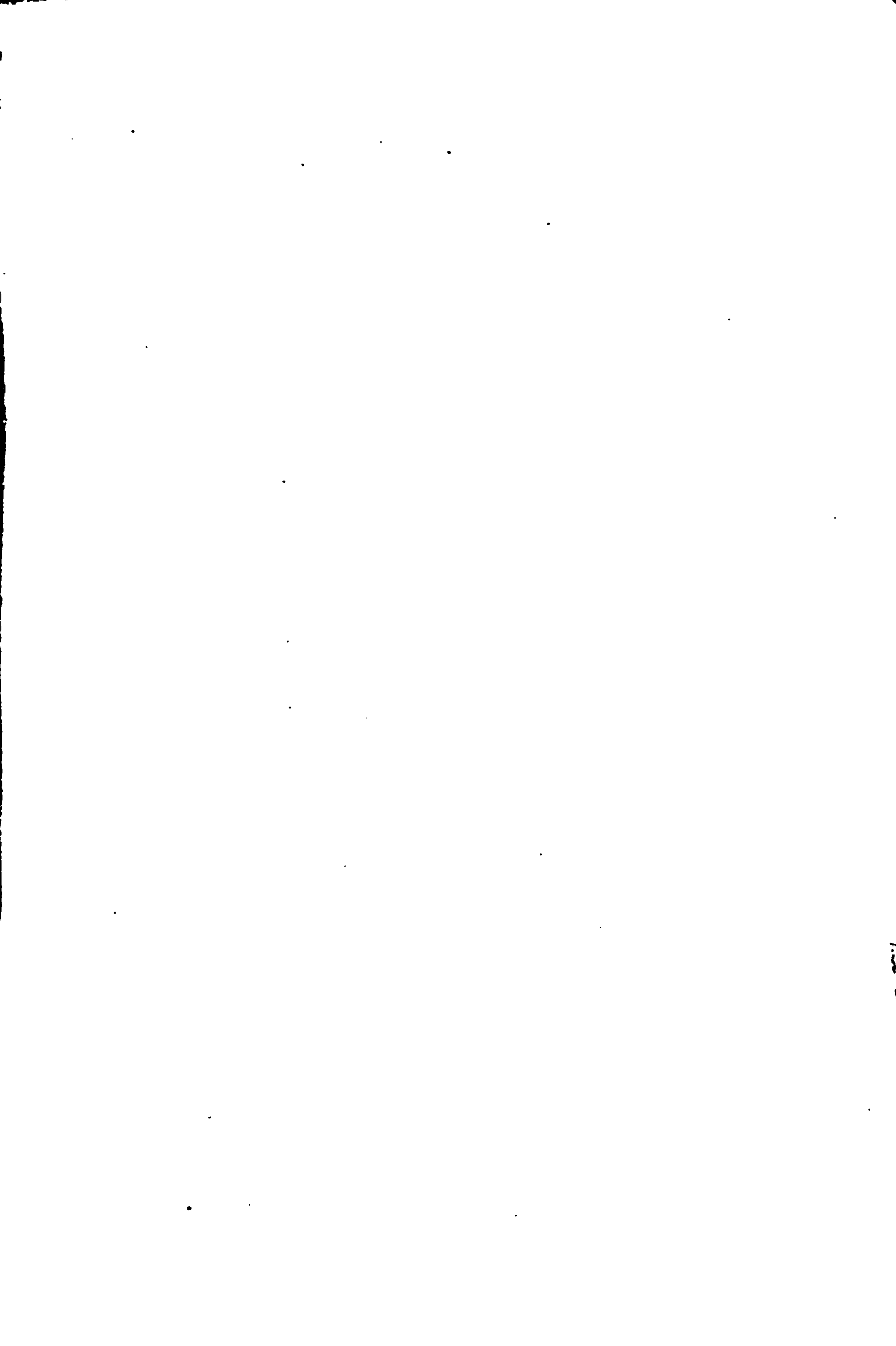
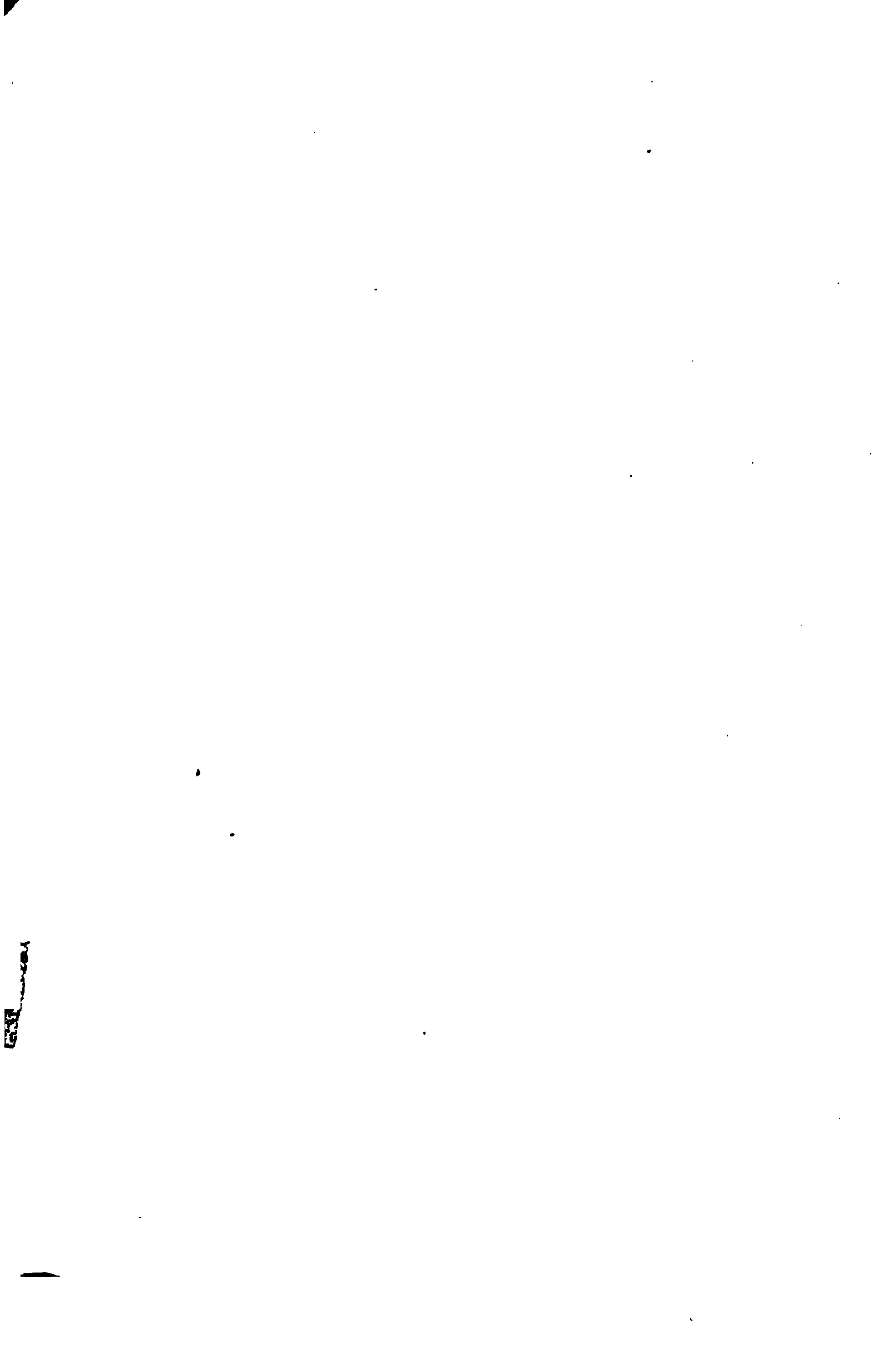

ROBERT WHEELER
WILLSON





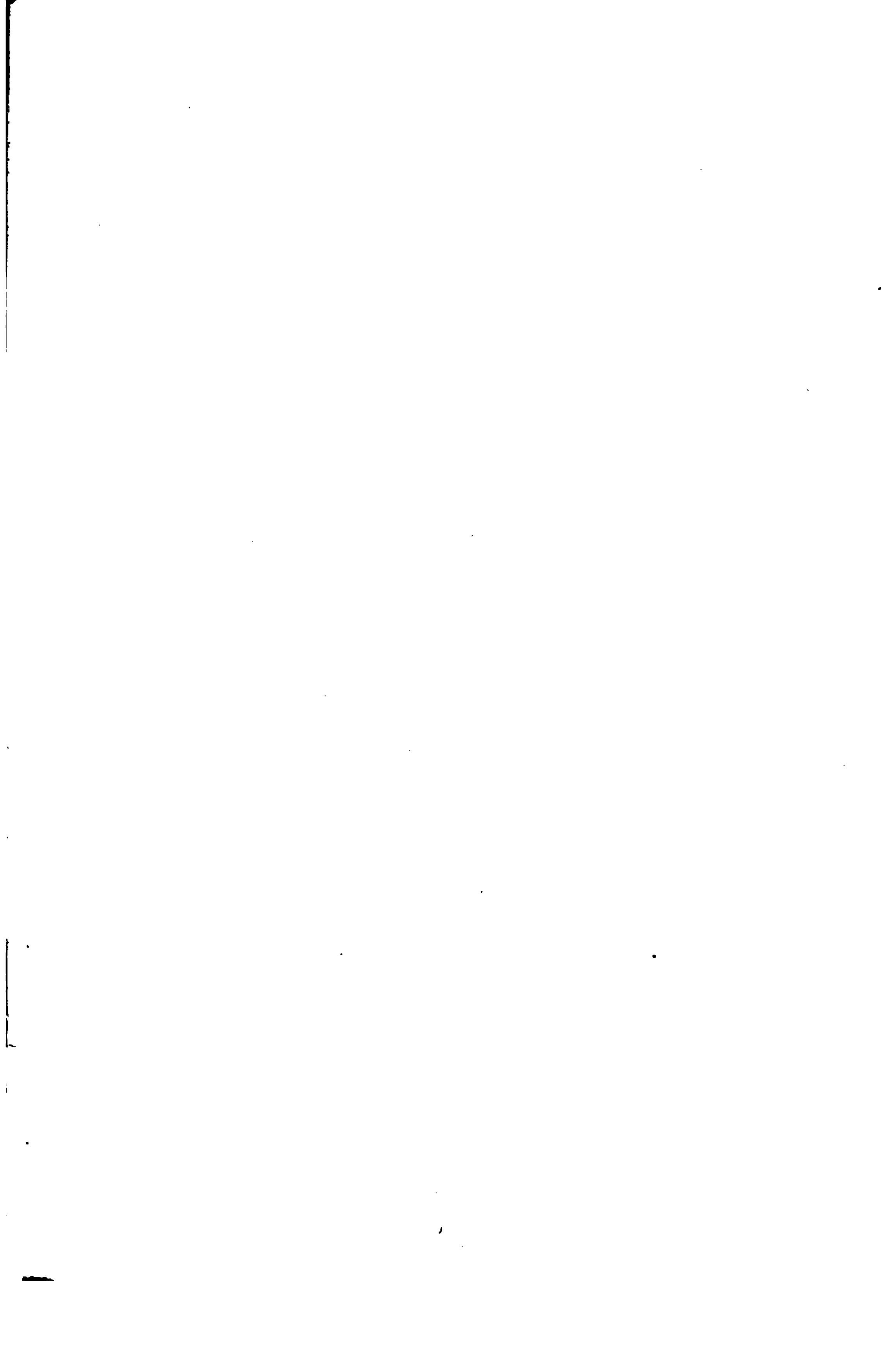




Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur.

In zwei Bänden.



Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur.

Von

Dr. Rudolf Wolf,

Professor in Zürich.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen.

In zwei Bänden.

Erster Halbband.

Zürich

Druck und Verlag von F. Schulthess

1890.

Vorwort.

Mein neues «Handbuch der Astronomie», von welchem ich hiemit den ersten Abschnitt vorlege und die drei übrigen möglichst rasch folgen lassen werde, ist sowohl für Studierende als für meine Fachgenossen bestimmt: Den Erstern soll es einen durch lange Erfahrung bewährten Weg weisen, sich nach und nach mit der Astronomie vertraut zu machen, — es soll ihnen zeigen, dass ohne eine gewisse Summe von Vorkenntnissen das Studium dieser Wissenschaft gar nicht begonnen werden soll, — dass sodann vor allem aus eine etwelche Übersicht über das ganze Gebiet zu gewinnen ist, — nachher Bekanntschaft mit den nötigen Instrumenten, Beobachtungs- und Rechnungs-Methoden erlangt werden muss, — und erst zum Schlusse, gewissermassen zur Krönung des Ganzen, die Mechanik und Physik des Himmels im Detail studiert werden darf; den Zweiten aber soll es auf allfälligen Reisen durch Inhalt und Tafeln ihre Bibliothek einigermassen ersetzen und bei Hause als bequemes Nachschlagebuch dienen, in dem sie auf einem gedrängten Raume eine Menge von sachlichen und historisch-litterarischen Angaben aller Art vereinigt finden, welche sie sonst aus Hunderten von Bänden zusammensuchen müssten, während sie hier dieselben, unter Benutzung des mein Werk einleitenden Inhaltsverzeichnisses und des dasselbe abschliessenden Generalregisters, in jedem vorkommenden Falle leicht auffinden können. Ich verkenne, wie ich schon am Schlusse des ersten Kapitels angedeutet habe, keineswegs,

dass ich mir beim Beginne dieses Werkes eine sehr schwierige Aufgabe stellte; aber da ich ihrer Lösung lange Jahre mit Liebe und Fleiss oblag, so hoffe ich dennoch, dass mir dieselbe wenigstens einigermassen gelungen sei, und dieses Handbuch, dessen Veröffentlichung ich bei meinem vorgerückten Alter nicht länger aufschieben darf, ja das ich wohl als meine letzte grössere litterarische Arbeit zu bezeichnen habe, eine freundliche Aufnahme und eine wohlwollende Beurteilung finden werde.

Zum Schlusse spreche ich gerne noch meinem Assistenten, Herrn Alfred Wolfer, meinen Dank für die Bereitwilligkeit aus, mit welcher er mich bei Redaktion einzelner Nummern, bei Zusammenstellung der Tafeln und bei Reinzeichnung der Figuren unterstützte, — ebenso ihm, sowie den Herren Direktor Billwiller und Dr. Maurer, für ihre Mithilfe bei den Korrekturen, — endlich meinem Herrn Verleger für die gute Ausstattung und sein fortwährendes Eingehen auf meine Wünsche.

Zürich, auf Neujahr 1890.

Rudolf Wolf.

Inhalt.

Erstes Buch: Aufgabe, Geschichte und Vorkenntnisse.

Zweites Buch: Einleitung in die Astronomie.

Drittes Buch: Theorie der Instrumente und Messungen.

Viertes Buch: Mechanik und Physik des Himmels.



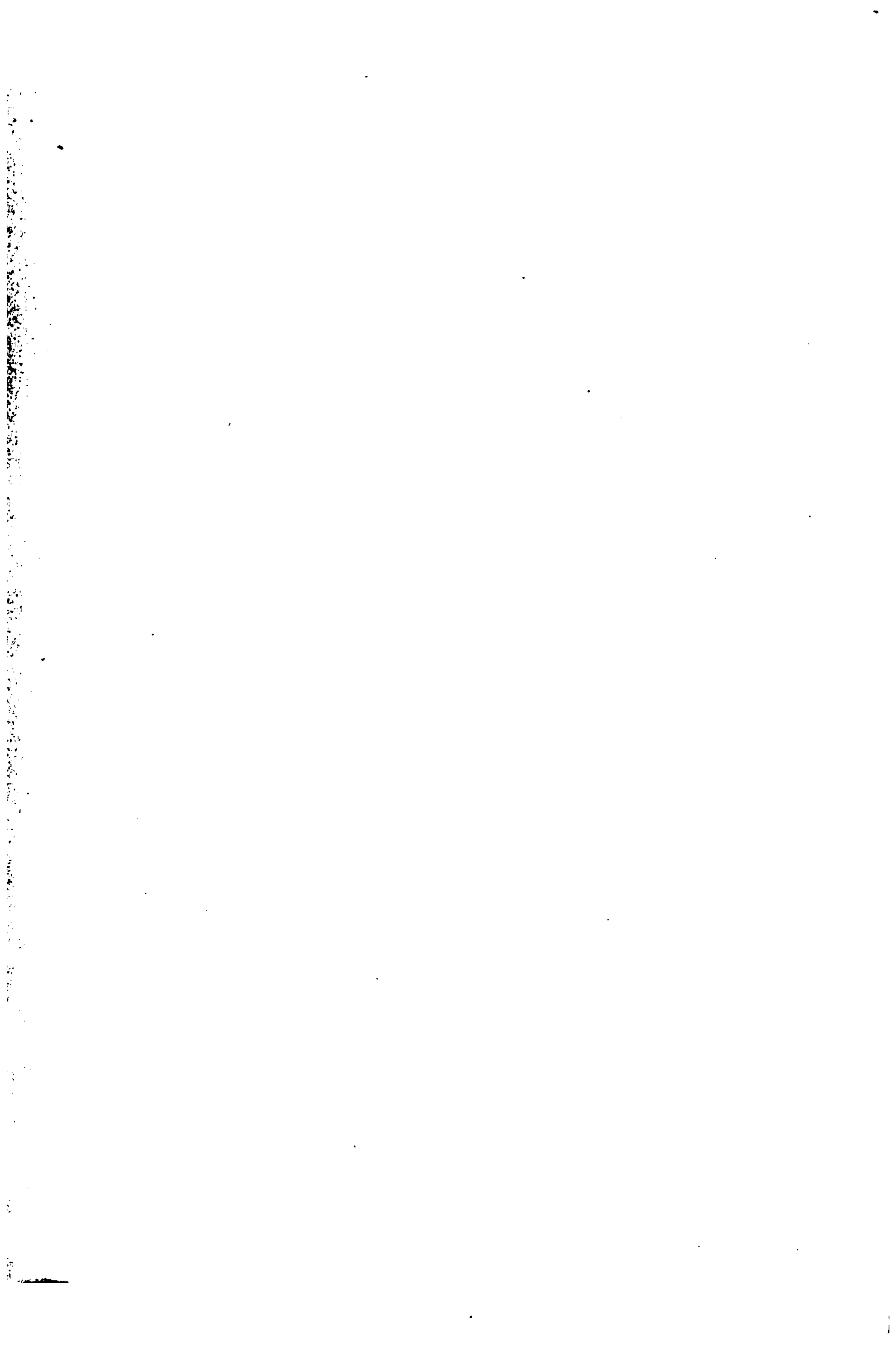
Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur

in vier Büchern.

Erstes Buch:

Aufgabe, Geschichte und Vorkenntnisse.



I. Die Aufgabe der Astronomie.

L'art d'enseigner, c'est l'art d'indiquer aux autres ce qu'ils doivent faire pour s'instruire.
(Jacotot.)

---

1. Erste Umschau. — Befindet sich jemand am frühen Morgen im Freien, so glaubt er unter einem Kugelgewölbe, dem sog. **Himmel**, zu stehen, — mitten auf einer zur Lotrichtung senkrechten Scheibe, die durch jenes Gewölbe in dem sog. **Horizonte** kreisförmig begrenzt erscheint [a]. Bald darauf sieht er das Tagesgestirn, die **Sonne**, aufsteigen und von einem vertikalen Stabe einen Schatten werfen, der sich fortwährend im Sinne des Uhrzeigers dreht, bis die Sonne ihren sog. **Tagbogen** durchlaufen hat und an einer ihrem Aufgangspunkte gegenüberliegenden Stelle des Horizontes wieder verschwindet [b]; dabei nimmt die Höhe der Sonne erst zu, dann wieder ab, wobei natürlich ihrer grössten Höhe der kürzeste Schatten entspricht, dessen Richtung die sog. **Mittagslinie** und damit die Vertikalebene der sog. **Culmination** der Sonne bestimmt, welche man **Meridian** genannt hat [c]. — Sobald nach Sonnenuntergang die Dämmerung in Nacht übergeht, tauchen nach und nach am ganzen Himmelsgewölbe leuchtende Punkte von verschiedenem Glanze, sog. **Sterne**, auf, welche, wenigstens ihrer grossen Mehrzahl nach, ihre gegenseitige Lage beizubehalten scheinen, dagegen eine gemeinschaftliche, derjenigen der Sonne analoge Bewegung zeigen: An der gegen Sonnenaufgang oder **Morgen** liegenden Seite des Horizontes steigen während der ganzen Nacht beständig neue Sterne auf, während andere im Meridiane ihre grösste Höhe erreichen, wieder andere gegen Sonnenuntergang oder **Abend** hin untertauchen, und nur Eine, in Beziehung auf den Mittagsstand der Sonne rückwärts liegende Stelle des Meridianes, zu ruhen und von den benachbarten Sternen umkreist zu werden scheint. — Wird diese Umschau an spätern Tagen wiederholt, so erhält man für Sonne und Sterne wesentlich wieder

dieselben Resultate, — nur haben sich für erstere Auf- und Untergangspunkt etwas verschoben, und die denselben Richtungen entsprechenden Schattenlängen etwas verändert; ferner lassen die nach Untergang der Sonne sichtbar werdenden Sterne eine etwelche Verspätung des Tagesgestirnes erkennen, und unter den Sternen selbst, die im allgemeinen immer noch ihre gegenseitige Lage beibehalten haben, zeigen sich einige mit etwas veränderter Stellung.

Zu 1: *a.* Der Ausdruck **Horizont** ist von ὁρίζειν = begrenzen abgeleitet. — *b.* Es liegt nahe, den Tagbogen durch einen Nachtbogen zu einem vollen Kreise zu ergänzen, und es kam dieser Gedanke auch wirklich frühe vielfach zur Geltung, während einzelne allerdings behauptet haben sollen, die Sonne lösche Abends, beim Eintauchen in den die Erdscheibe umgebenden Ocean, mit hörbarem Zischen aus, werde per Schiff zum Aufgangspunkte zurückgeführt, und sodann am folgenden Morgen wieder angezündet. — *c.* **Meridian** kömmt von meridies = Mitte des Tagbogens; bei den Griechen hiess er μεσημβρινὸς κύκλος

2. Die Aufgabe. — Die geschilderten Ergebnisse einer einfachen Umschau sind im grossen Ganzen genau so, wie sie sein müssten, wenn die grosse Mehrzahl der Sterne am Himmelsgewölbe fest wäre, und dieses sich in einer gewissen Zeit, einem sog. **Tage,** um jene ruhende Stelle als **Pol,** oder vielmehr um einen durch letztern gehenden, im Meridiane liegenden, gegen den Horizont geneigten Durchmesser, die sog. **Weltaxe,** umdrehen würde[a]. Aber dennoch drängt sich eine Reihe von Fragen auf, wie etwa: Sollten in der That die Sterne in ihrer Mehrzahl als **Fixsterne** an einer solchen, sich drehenden Kugel haften und nur Einzelne, zu denen auch die Sonne gehören dürfte, als **Wandelsterne,** neben der allgemeinen noch eine eigene Bewegung besitzen? Und wie verhält es sich sodann mit dieser scheinbaren Himmelskugel und mit ihrer sog. **täglichen Bewegung?** Welche Natur, Grösse, Masse, Gestalt, Distanz etc. besitzen diese Fixsterne und Wandelsterne, — welches sind die Gesetze, nach denen sich die letztern verschieben, — und welche Erscheinungen werden dadurch hervorgerufen? Wie ist unser Standpunkt, die Erde, beschaffen, und wie wird sie allfällig durch die umgebenden Gestirne influiert? Und so weiter und weiter. — Es ist nun bekanntlich in der Regel leichter zu fragen als zu antworten, und so hat auch diejenige Wissenschaft, welche letztere Aufgabe übernommen hat, die sog. **Astronomie**[b], zu ihrer Lösung bereits mehrere Jahrtausende verwendet, ohne dass es ihr gelungen wäre, dieselbe vollständig zu erzielen, — zumal jeweilen beim Versuche, eine Frage zu beantworten, wieder neue Fragen auftauchen; aber immerhin hat sie schon viel erreicht, und es gibt kaum eine andere Wissenschaft, deren Geschichte ein so ehrenvolles Zeugnis

für die geistige Begabung des Menschengeschlechtes und für seine Befähigung zu beständigem Fortschritte auf der Bahn der Erkenntnis ablegt, als diejenige der Astronomie. Um dies zu erweisen und zugleich das Interesse für die folgenden Auseinandersetzungen noch mehr zu wecken, werde ich vor allem aus, wenn auch ein Eingehen auf Einzelheiten spätern Abschnitten vorbehalten werden muss, eine kurze Übersicht dieser Geschichte geben. An dieselbe wird sich sodann eine gedrängte Zusammenstellung der nötigsten Vorkenntnisse aus der Mathematik und Physik anschliessen, und dieser eine Einleitung in die Astronomie selbst folgen. In einem zweiten Bande werde ich die Theorie der Instrumente und der Messungen mit denselben entwickeln, und zum Schlusse die Mechanik und Physik des Himmels vorführen. Dabei werde ich fortwährend ein grosses Gewicht darauf legen, nicht nur den neuesten Stand einer Untersuchung, sondern auch die successive zu ihm führende Entwicklung darzulegen, und durch litterarische Nachweise den Leser zu befähigen suchen, sich wünschendenfalls noch mit weiterm Detail bekannt zu machen, welchen mir der enge Rahmen des vorliegenden Werkes nicht aufzunehmen erlaubt [c]. Dem ersten Bande werde ich eine Sammlung von Tafeln beigeben, welche mit einer ausgedehnten historisch-litterarischen Tafel abschliesst, — dem zweiten Bande ein ausführliches Register, dessen Einrichtung erlaubt, das Ganze auch als bequemes Nachschlagebuch zu benutzen.

Zu 2: *a.* Die Bezeichnung **Pol** kömmt von πολεῖν = umwenden. Das bei uns sichtbare Ende der Weltaxe heisst **Nordpol** oder (von ἄρκτος = Bär) arktischer Pol, — das andere **Südpol** oder antarktischer Pol. — *b.* **Astronomie** ist aus ἄστρον = Stern und νόμος = Gesetz gebildet. Sie könnte ebensogut den Namen **Astrognosie** (von γνῶσις = Kenntnis) tragen, welchen einer ihrer untergeordnetsten Teile ohne eigentliche Berechtigung besitzt, — oder noch besser den Namen **Astrologie** (von λόγος = Lehre), welchen die Sterndeuterei usurpiert hat. — *c.* Wenn man in zwei Oktavbände alles wesentliche zusammendrängen soll, was zur Zeit von Lalande und Delambre in zehn Quartbänden gegeben wurde, und was seither geleistet worden ist, so darf man wohl von einem engen Rahmen sprechen, — auch Absolution verlangen, wenn mitunter die Schönheit der Form der Raumersparnis geopfert werden musste.

II. Geschichte der Astronomie.

Wer sich mit einer Wissenschaft bekannt machen will, darf nicht nur nach den reifen Früchten greifen, — er muss sich darum bekümmern, wie und wo sie gewachsen sind. *(Poggendorf.)*

---

3. Die Astronomie der ältesten Völker. — Ohne etwelche **Zeitrechnung** ist eine Geschichte nicht gedenkbar, und es müssen also bereits in vorhistorischer Zeit durch wiederholte Umschau nicht nur die uns schon bekannte **tägliche Bewegung**, sondern auch die regelmässige Folge der **Lichtgestalten** des Mondes und der sog. **Jahreszeiten** erkannt und so in **Tag**, **Monat** und **Jahr** vergleichbare Zeitabschnitte aufgefunden, d. h. erste Grundlagen für eine solche geschaffen worden sein. Sobald aber diese vorhanden, so war ermöglicht, bemerkte Erscheinungen in brauchbarer Weise zu registrieren, und das einfache Vergleichen solcher Aufzeichnungen ergab bereits manche wichtige Resultate: So wurden wohl schon frühe auf diesem Wege, neben Sonne und Mond, noch fünf andere Wandelsterne oder **Planeten** aufgefunden und annähernd deren Umlaufszeiten bestimmt [a], — vor allem aber einige längere Perioden ermittelt, wie z. B. die 223 Monate umfassende **Saros** (245), an welche die Wiederkehr entsprechender Finsternisse und Bedeckungen gebunden ist [b]. — Eigentliche Messungen wurden in jener ältesten Zeit nur ausnahmsweise gemacht, und es blieben wohl lange der uns (1) bereits bekannte, zur Bestimmung von Höhenwinkeln schattenwerfender Gestirne brauchbare, auch eine erste Sonnenuhr (195) repräsentierende Vertikalstab, der sog. **Gnomon** [c], und etwa eine **Wasseruhr** (122), die einzigen dafür dienlichen Hilfsmittel: Das älteste auf uns gekommene Messungsresultat, eine dem Jahre 1100 v. Chr. zugehörende Bestimmung der Schiefe der Ekliptik [d], ist unzweifelhaft mit ersterm Instrumente erhalten worden, und ebenso wurden wohl auch mit demselben die zur Orientierung der Pyramiden notwendigen Meridianbestimmungen ausgeführt [e]. — Auch ausserordent-

liche Erscheinungen am Himmel, wie Kometen, Sternschnuppenschauer und Meteorsteinfälle, wurden von diesen alten Völkern ziemlich regelmässig aufgezeichnet, und so manche noch für die Neuzeit wertvolle Notiz erhalten [f]. Ferner ist ihnen unzweifelhaft eine frühe Ausscheidung und Einteilung des Tierkreises, sowie wenigstens ein Anfang der mit Aufstellung von Sternbildern eng zusammenhängenden Gestirnbeschreibung zu verdanken. — Von litterarischer Thätigkeit auf dem hier in Betracht fallenden Gebiete scheinen sich dagegen keine sicheren Spuren erhalten zu haben [g].

Zu 3: *a.* Die Bezeichnung **Planet** kömmt von πλανήτης = Wandelstern. — *b.* Die Auffindung der **Saros** hat man den Babyloniern oder Chaldäern zu verdanken, deren Belus-Priester sich auf einem hohen Turme ihres Tempels eine Art Sternwarte eingerichtet haben sollen. Sie bildet den sichern Beweis für das hohe Alter der Aufzeichnungen dieser Völker, das z. B. auch dadurch belegt wird, dass sich eine chinesische Angabe über eine Sonnenfinsternis vom Jahre 2697 v. Chr. erhalten hat. — *c.* Der Name **Gnomon** ist von γνώμων = Schattenzeiger abgeleitet. — *d.* Auf die erwähnte Bestimmung, welche dem Chinesen **Tcheou-Kong** zugeschrieben wird, ist später (191) zurückzukommen. Dagegen mag hier beigefügt werden, dass die Chinesen schon frühe eigene Beamte hatten, um gewisse Epochen (z. B. die Eintritte der Jahreszeiten) und Erscheinungen (z. B. die Finsternisse) zum voraus anzukündigen. — *e.* Dass die an 3000 v. Chr. hinaufreichenden Pyramiden der Egypter genau nach den vier Weltgegenden orientiert sind, ist unzweifelhaft und von hohem Interesse; dagegen sind die von den sog. **Pyramidalisten** für jenes alte Kulturvolk erhobenen Ansprüche übertrieben und zum mindesten mit grosser Vorsicht aufzunehmen. Zu den eifrigsten dieser Forscher, welche in den Stellungen und Massverhältnissen der egyptischen Pyramiden alles Mögliche finden wollten, zählte z. B. Joh. Jak. **Wild** (Richtersweil 1806 — Zürich 1886), der erst Schneider, dann Ingenieur war und um seiner Schrulle willen als „Pyramiden-Wild" bezeichnet wurde. — *f.* So notierten z. B. die Chinesen, dass 2296 v. Chr. ein Komet gesehen worden sei. — *g.* Von dem sog. Papyrus Rhind wird besser später (15) gesprochen werden.

4. Die Astronomie der Griechen. — Während sich die ältesten Kulturvölker mehr um Ermittlung von Thatsachen, als um Aufstellung von wissenschaftlichen Systemen bemüht zu haben scheinen, schlugen die zur Spekulation geneigten Griechen zunächst den entgegengesetzten Weg ein: Sie begnügten sich, wenigstens anfänglich, mit den dürftigen Bausteinen, welche **Thales** [a] aus Egypten herübergeholt hatte, — suchten diese zu einem ihren übrigen Anschauungen entsprechenden Ganzen zu vereinigen, — waren aber dabei eher bereit, Thatsachen preiszugeben oder wenigstens unerklärt zu lassen, als z. B. von der vorgefassten Meinung abzugehen, es sei die Erde eine auf dem Oceane schwimmende Scheibe und der Himmel eine über sie gestülpte Glocke. Es bedurfte der grossen Unbefangenheit und Einsicht eines **Pythagoras** [b], um aus den Erscheinungen

nachzuweisen, dass die Erde, wie es schon (216) die Chaldäer vermutet zu haben scheinen, eine freischwebende Kugel sein müsse (253), — und wenn er auch unserm Wohnplatze noch eine hervorragende Stellung im Mittelpunkte des Ganzen vorbehielt, so hatte er wenigstens den Mut, schon damals die Mehrheit der Welten zu lehren. Dieses **geocentrische** System blieb sodann nicht etwa ausschliessliches Eigentum der pythagoräischen Schule, sondern wurde auch von **Plato** [c] und dessen Schülern betreffenden Untersuchungen zu Grunde gelegt und namentlich durch **Eudoxus**, unter Berücksichtigung der allmälig entdeckten Ungleichheiten in der Planetenbewegung, weiter ausgebildet (254), ja behielt naturgemäss, obschon bereits einzelne, welche sich an den von den Physikern nach dem Vorgange von **Aristoteles** den mathematischen Sphären substituierten Kristallsphären stiessen, vorübergehend daran dachten, den Mittelpunkt des All's in die Sonne zu verlegen (258), im ganzen Altertum so ziemlich die Alleinherrschaft [d]. Auf seiner Grundlage bauten, nachdem durch Gründung der Akademie in Alexandrien ein wissenschaftlicher Centralpunkt entstanden war, an dem besonders auch die mathematischen Wissenschaften gepflegt wurden [e], der grosse **Hipparch** [f] und der später ganz in dessen Fuss-Stapfen tretende **Ptolemäus** [g] ihre zu Tafeln führenden Theorien der Wandelsterne auf (204—10, 255—56), welche mit Recht für lange den Stolz der jungen Wissenschaft bildeten. — Die Fortschritte in der theoretischen Astronomie erforderten auch eine immer grössere Mannigfaltigkeit und Genauigkeit der Beobachtungen, folglich auch eine fortwährende Bereicherung und Vervollkommnung des Instrumentenvorrates, sowie eine mit ihr Schritt haltende Ausbildung der Mess- und Rechnungsmethoden, und so wurden in der That schon von den spätern Griechen, neben dem Gnomone, verschiedene Instrumente mit Gerad- und Kreisteilungen konstruiert (332—34), welche z. B. zur Bestimmung der von **Hipparch**, für Festlegung der Lage am Himmel und auf der Erde, eingeführten sphärischen Coordinaten benutzt wurden (176, 217, etc.) [h]. Besonders verdient ferner hervorgehoben zu werden, dass schon bei ihnen **geometrische Methoden** zur Anwendung kamen, um in sicherer Weise gewisse Verhältnisse zu ermitteln, die früher vergeblich durch **Spekulation** zu bestimmen versucht worden waren: So verdankt man z. B. **Eratosthenes** [i] eine geometrisch richtige Methode der Erdmessung (413), — **Aristarch** [k] und **Hipparch** aber sinnreiche geometrische Verfahren, um die Distanzen und Grössen von Sonne und Mond aufzufinden (437—38). — Die Gestirnbeschreibung machte, da sie auf Wahrnehmungen mit freiem Auge beschränkt blieb, bei den

Griechen natürlich nur geringe Fortschritte. Das wesentlichste war, dass man sich nach und nach (181—90) über die Einteilung der Sterne in Sternbilder verständigte, und begann Verzeichnisse der Sterne anzulegen, in welchen dieselben sowohl nach ihrer Lage im Bilde, als nach ihren Coordinaten und ihrer scheinbaren Grösse charakterisiert waren [l]. — Von den auf uns gekommenen Schriften der Griechen hat für die Astronomie die durch **Ptolemäus** verfasste „Μεγάλη Σύνταξις (Magna constructio, Almagest)" weitaus die grösste Bedeutung, da sie nicht nur die fundamentalen und durch den Verfasser ergänzten Arbeiten des grossen **Hipparch** auf uns gebracht hat, sondern überhaupt einen förmlichen Codex der griechischen Astronomie bildet, welche wohl ohne diese, in vielfachen Abschriften verbreitete Zusammenfassung, für uns grossenteils verloren gegangen wäre. Wir werden später wiederholt (z. B. in 256) auf dieses Kapitalwerk und den dasselbe betreffenden Kommentar von **Theon** [m] zurückzukommen und daneben auch einige andere schätzbare Werke griechischen und römischen Ursprungs zu erwähnen haben [n].

Zu 4: *a.* **Thales** (Milet 639 — Athen 548?) war Gründer der jonischen Schule und einer der sog. sieben Weisen Griechenlands. Vgl. „**Canaye**, Recherches sur Thales (Mém. Acad. inscript. 10)". — *b.* **Pythagoras** (Samos 580? — Megapontum 500?) war Gründer der nach ihm benannten Philosophenschule zu Kroton in Unter-Italien. — *c.* **Plato** (Athen 429 — ebenda 348) war Schüler von Socrates und Gründer der unter dem Namen „Akademie" bekannten Philosophenschule in Athen. — *d.* **Eudoxus** (Knidos 409 — Athen 356), ein Schüler von Plato, zeichnete sich als Philosoph, Mathematiker, Astronom, Arzt und Staatsmann aus. Vgl. „Friedrich Wilhelm **Blass** (Osnabrück 1843 geb.; Prof. philos. Kiel), Eudoxi ars astronomica qualis in charta ægyptiaca superest. Kiliæ 1887 in 4., und: Hans **Künssberg**, Eudoxos von Knidos. Dinkelsbühl 1888 in 8.". — **Aristoteles** (Stagyra in Macedonien 384 — Chalcis auf Euboea 322) war Arzt und Gründer der sog. peripatetischen Schule in Athen. Vgl. seine „Opera omnia. Venetiis 1495—98, 5 Vol. in fol.", und viele spätere Ausgaben. — *e.* Als **Alexander** der Grosse um 332 v. Chr., nach Eroberung von Egypten, Alexandrien mit der Bestimmung, Mittelpunkt des Welthandels zu werden, gegründet hatte, erhob sich diese Stadt unter den sog. Ptolemäern bald zu grosser Blüte, und, da überdies berühmte Gelehrte, wie die Geometer **Euklid** (um 300 v. Chr.) und **Apollonius** von Perga (um 200 v. Chr.), die Astronomen **Aristyll** und **Tymocharis** (Zeitgenossen von Euklid), etc., nicht nur herbeigezogen, sondern auch durch Bau der sog. Akademie und Anlage einer reichen Bibliothek in ihren Arbeiten unterstützt wurden, so entstand nach kurzer Zeit ein eigentliches Centrum wissenschaftlicher Thätigkeit. — *f.* **Hipparch** (Nicäa 180? — Rhodus 125?) scheint zuweilen in Alexandrien beobachtet zu haben, meistens aber auf der Insel Rhodus, wohin auch einige seinen Geburtsort verlegen. Die erste ihm zugeschriebene Beobachtung bezieht sich auf das Herbstequinoctium 161 v. Chr. (Almag. Halma I 153), — die erste ihm ganz sicher zugehörende betrifft eine Mondfinsternis von 146 (I 156), — die letzte, im Almagest gegebene Beobachtung Hipparchs aber ist eine Mondbeobachtung von 126 (I 295).

— *g.* **Ptolemäus** (Ptolemais 87? — Alexandrien 165?) scheint meistens in Alexandrien gelebt zu haben und die frühere Verlegung seines Geburtsortes nach Pelusium auf einem Missverständnisse zu beruhen. Die letzte seiner in den Almagest aufgenommenen Beobachtungen ist eine Venusbeobachtung von 151 (Almag. Halma II 194). — *h.* Über die Fortschritte der Messungs- und Rechnungsmethoden wird im 3. Buche speciell eingetreten werden. — *i.* **Eratosthenes** (Cyrene in Afrika 276 — Alexandrien 195) war Bibliothekar der Akademie in Alexandrien. Als er erblindete, gab er sich den Hungertod. — *k.* **Aristarch** (Samos 310? — Alexandrien 250?) soll in der Olympiade 125 (also zwischen 280 und 277) in Alexandrien astronomische Beobachtungen angestellt haben. — *l.* Auf die noch für die Gegenwart wichtigen Sternkataloge von **Hipparch** und **Ptolemäus** werden wir noch wiederholt zurückkommen. — *m.* **Theon** (um 370), zur Unterscheidung von einem zur Zeit von Ptolemäus lebenden Namensgenossen „der jüngere" genannt, war Vater der ausgezeichneten, bei einem Volksauflaufe in Alexandrien gemeuchelten **Hypatia** (375? — 415), welche einen leider verloren gegangenen „Ἀστρονομικὸς κανών" verfasste. Er beobachtete die Sonnenfinsternis von 365. — *n.* Vorläufig nenne ich die Lehrbücher „**Geminus** (Rhodus 100? — Rom 40?), Elementa astronomiæ, — und: **Kleomedes** (etwas später als Geminus zu Rom lebend), Cyclica consideratio meteorum", von welchen das erstere „Altorfii 1590 in 8." durch Edo **Hildericus** (Jever in Ostfriesland 1533 — Altorf 1599; Prof. math. et theol. Heidelberg, Altorf, etc.), und später, — das zweite, welches wesentlich über die Arbeiten von Posidonius referiert, „Paris 1539 in 4." durch Konrad **Neobarius**, und dann namentlich wieder „Bardigalæ (Bordeaux) 1605 in 4." unter Beigabe eines Kommentars durch Robert **Balforeus** herausgegeben wurde. Ferner bemerke ich, dass schon im 3. Jahrhundert v. Chr. fast gleichzeitig Tyrtanus, genannt **Theophrastus** (Eresos auf Lesbos 371 — Athen 286; Lehrer philos. Athen) und **Eudemus** (von Rhodus gebürtig) erste Versuche machten, die Geschichte der Mathematik und Astronomie zu schreiben, dass aber ihre Schriften bis auf wenige Bruchstücke, vgl. z. B. „Leon. **Spengel**, Eudemi fragmenta. Berol. 1866 in 8.", verloren gingen. Dagegen sind die uns erhaltenen Sammelwerke „Lucius Annæus **Seneca** (Corduba in Spanien 4 v. Chr.? — Rom? 65; Lehrer von Nero), Naturalium quæstionum libri VII, — und: Cajus secundus **Plinius** (Como 23 — 79 VIII 25, wo er am Vesuv ein Opfer seiner Wissbegierde wurde), Historiæ naturalis libri XXXVII" für die Geschichte der ältern Astronomie von Bedeutung: Das erstere erschien schon „Venet. 1522 in 8." und seither wiederholt, — das zweite sogar schon „Parma 1481 in fol." und seither namentlich mit einlässlichem Kommentar „Paris 1771—82, 12 Vol. in 4." durch L. **Poinsinet** de Sivry (Versailles 1733 — ? 1804; Litterat). Endlich mag anhangsweise noch an die Schriften „**Pomponius Mela** (um 50 n. Chr.), De orbis situ libri III, — **Strabo** (Amasia 66 v. Chr. — ? 24 n. Chr.), Rerum geographicarum libri XVII, — und: Marcus **Vitruvius** Pollio (Baumeister in Rom unter Augustus und Tiberius), De architectura libri X" erinnert werden, die uns ebenfalls manche wertvolle Notiz erhalten haben: Das erstere Werk wurde z. B. mit Kommentar „Paris 1530 in fol." durch Joachim v. Watt oder **Vadian** (St. Gallen 1484 — ebenda 1551; erst Prof. art. lib. Wien, dann Bürgermeister und Reformator in seiner Vaterstadt) herausgegeben, — das zweite „Basil. 1571 in fol." durch Wilhelm Holtzmann oder **Xylander** (Augsburg 1532 — Heidelberg 1576; Prof. philol. Heidelberg, ebenso gelehrt als durstig), — und das dritte namentlich durch A. **Marinio** „Romæ 1836, 4 Vol. in fol."

5. Die Astronomie bei den Arabern. — Da die Akademie in Alexandrien schon im 5. Jahrhundert durch Kriege und religiöse Wirren in Zerfall geraten, der grösste Teil ihrer Bibliothek durch Feuersbrünste vernichtet und der Rest der Gelehrten zerstreut war, so fand der Khalife **Omar**, als ihm 641 Alexandrien zufiel, kaum mehr viel zu zerstören, und es fällt somit die Nachricht, er habe die Bäder mit Handschriften heizen lassen, so ziemlich in das Gebiet unbegründeter Sage. Dagegen ist es sicher, dass, als der Khalife **Al-Mansor** um 764 Bagdad erbaute, sich diese äusserst günstig gelegene Stadt nicht nur rasch zu hoher materieller Blüte erhob, sondern auch unter Begünstigung des Herrscherhauses zu einem neuen Sitze der Gelehrsamkeit, von welchem aus sich dann alsbald die Wissenschaften nach allen Seiten hin ausbreiteten: Schon der Ebengenannte, welchem die Astronomie zur Regulierung des Kultus und Kalenders besonders wichtig erschien, liess ein, unter dem Namen „Sindhind“ oder „Sûrya-Siddhânta“ aus Indien erhaltenes, manche dorthin durch exilierte Griechen eingeführte oder zum Teil auch in jenem alten Kulturlande aus früherer Zeit noch vorhandene Kenntnisse enthaltendes, spätestens im 5. Jahrhundert verfasstes Lehrbuch der Astronomie ins Arabische übersetzen, — sein Sohn Harun **Al-Raschid** beauftragte, unbekümmert um die Vorwürfe orthodoxer Mohammedaner, christliche Sirier die heidnischen Bücher der Griechen auf Staatskosten ebenfalls ins Arabische zu übertragen, — und als seinem Enkel **Al-Mamum** [a] eine der Kopien der Ptolemäischen Syntaxis als Beute zufiel, veranstaltete er auch von dieser eine Übersetzung in die Landessprache [b], welche sodann den Hauptausgangspunkt für die astronomischen Arbeiten dieses neuen Kulturvolkes bildete, das sich mit einer merkwürdigen Leichtigkeit in die ihm bisdahin ganz fremden Wissenschaften hineinlebte. Dass die Araber an dem griechischen Lehrgebäude festhielten, sich im allgemeinen darauf beschränkten, jene erste Übersetzung zu revidieren und zu kommentieren [c], und sich z. B. ihr **Albategnius** [d] höchstens erlaubte, da und dort Einzelnes besser zu konstatieren oder weiter auszubauen (206), darf ihnen nicht, wie es zur Zeit Mode war, zum Vorwurfe gemacht werden [e]. Es zeugt im Gegenteil von ihrem richtigen Verständnisse des damaligen Zustandes der Astronomie, dass sie den Schwerpunkt ihrer Thätigkeit nicht auf die Theorien, sondern auf die Beobachtungen und deren Berechnung legten, und in dieser letztern Richtung haben sie geradezu Grosses geleistet: Bei ihnen entstanden nicht nur bereits durch die Munificenz ihrer Fürsten eigentliche Sternwarten, wie z. B. diejenigen zu Bagdad, Kairo, Meragah und Samarkand [f], auf welchen die **Abulwefa**, **Ibn Junis**,

Nassir Eddyn und **Ulugbegh**[g] die Grundlagen für ihre Berechnungen und ihre sich beständig vervollkommnenden Kataloge und Tafeln bestimmten, — sondern sie besassen namentlich schon die Mauerkreise und Azimutalquadranten (349 und 376), welche im Abendlande erst nach der Mitte des 16. Jahrhunderts als Vorläufer unserer gegenwärtigen Hauptinstrumente auftauchten. Ferner wurde von ihnen in Konstruktion von Astrolabien, Sonnen- und Wasseruhren, etc., ganz vorzügliches geleistet, und manches noch jetzt geschätzte Beobachtungs- und Rechnungsverfahren fand sich, wenigstens seiner Grundidee nach, schon bei diesem merkwürdigen Volke. Auch der von **Almamum** angeordneten Gradmessung (414) mag hier vorläufig gedacht werden. — In Betreff der Gestirnbeschreibung blieben die Araber natürlich im allgemeinen auf der Stufe der Griechen stehen; doch ist bemerkenswert, dass sich bei ihnen die Kunst weiter ausbildete, den Sternhimmel auf Globen darzustellen (190). Ferner ist die meisterhafte Revision zu erwähnen, welcher **Al-Sufi**[h] die griechischen Sternverzeichnisse unterwarf: Seine sorgfältigen Bestimmungen der Sterngrössen haben noch für die Neuzeit Bedeutung. — Auch die litterarische Thätigkeit der Araber ist nicht zu unterschätzen: Schon die „Rudimenta astronomiæ“ von **Alfragan**[i] und das „Liber de motu stellarum“ von **Albategnius** sind von hohem Interesse[k] und es lässt sich aus denselben evident die Selbständigkeit der arabischen Astronomen gegenüber ihren griechischen Meistern nachweisen, die auch aus dem durch **Abul Wefa** geschriebenen, aber leider noch nicht publizierten „neuen“ Almagest entschieden hervorgehen soll. Ganz hervorragende Wichtigkeit aber hat das von den beiden **Sédillot**[l], diesen unermüdlichen Vorkämpfern für eine bessere Würdigung der Araber, unter dem Titel „Traité des instruments astronomiques des Arabes, intitulé: Collection des commencements et des fins. Paris 1834—35, 2 Vol. in 4.“ herausgegebene Werk von **Aboul-Hhassan**[m], da dasselbe als erster Versuch einer praktischen Astronomie und einer Sammlung astronomischer Hilfstafeln, gerade als arabische Leistung, charakteristisch ist[n].

Zu 5: *a.* Abdallah **Al-Mamum** (Bagdad 786 — Tarsus 833) war nicht nur materieller Förderer der mathematischen Wissenschaften, sondern kultivierte sie auch selbst. — *b.* Dieselbe wurde durch den Arzt **Honein** ben Ishak (gest. 873) und dessen Sohn **Ishak** ben Honein (gest. 910/1) besorgt. — *c.* Es sollen sich hiemit namentlich Tabit-ben-Korra oder **Thebit** (836—901) und **Al-Farabi** (Balah 890 — Damaskus 953; Astronom des Fürsten Seïf-el-Daulah) befasst haben. Vgl. für letztern „**Steinschneider**: Al-Farabi, des arabischen Philosophen Leben und Schriften, mit besonderer Berücksichtigung der Geschichte der griechischen Wissenschaft unter den Arabern. St. Petersburg 1869 in 4.“ — *d.* Mohammed ben-Geber ben-Senan Abu Abdallah Al-Batani oder **Albategnius**

(Batan in Mesopotamien 850? — Damaskus 928?) war ein arabischer Prinz, der in Aracta und Damaskus beobachtete, auch Statthalter von Syrien gewesen sein soll. — *e.* Noch **Marie** ist den Arabern nicht grün, ja versteigt sich (Hist. II 118) zu dem unqualifizierbaren Ausspruche: „En admettant que nous devions 1 aux Arabes, nous devons bien 100 000 aux Grecs". — *f.* Schon **Al-Mamum** liess in der Nähe von Bagdad eine Sternwarte bauen, auf welcher er selbst häufig beobachtete und für die er ein ganzes Kollegium von tüchtigen Männern unterhielt, welche Instrumente zu konstruieren, in den Beobachtungen abzuwechseln und ihre Berechnung zu besorgen hatten. In Kairo liess der Khalife **Hakem** mit fürstlichem Aufwande auf dem Berge Mocattan eine Sternwarte erbauen, — in Meragah der Mongolenfürst **Holâgou**, vgl. „**Jourdain**, Mémoire sur l'Observatoire de Méragah. Paris 1810 in 8."; in Samarkand schuf der persische Fürst **Ulugbegh** eine Sternwarte, mit welcher er eine Art astronomischer Akademie verband, etc. (Tab. XII). — *g.* **Abulwefa** (Bouzdjan in Persien 939 — Bagdad 998) beobachtete, lehrte und schrieb zu Bagdad. Sein Schüler **Ibn Junis** (960? — Kairo 1008) war Astronom von Hakem, — **Nassyr-Eddyn** (Thus in Khorassan 1201 — Meragah 1274) derjenige von Holâgou. **Ulugbegh** (Sultanich 1394 — Samarkand 1449) war auf seiner Sternwarte selbst vielfach thätig. — *h.* Abd-Al Rahman **Al-Sufi** (Raï in Teheran 903 — Bagdad 986) lebte lange Jahre am Hofe zu Bagdad im höchsten Ansehn. — *i.* Achmed Mohammed Ebn Kothair, genannt **Al-Fergani** oder der Rechner, war Zeitgenosse von Al Mamum und dessen Hauptastronom. — *k.* Philipp Schwarzert oder **Melanchthon** (Bretten in der Pfalz 1497 — Wittenberg 1560; Prof. philol. Wittenberg) erwarb sich das Verdienst, die beiden Schriften „Norimbergæ 1537 in 4." aus dem Nachlasse Regiomontans herauszugeben. Er war überhaupt nicht nur um die Reformation der Kirche und des Schulwesens, sondern auch speciell um die mathematischen Wissenschaften hochverdient. Vgl. „**Bernhardt**: Philipp Melanchthon als Mathematiker und Physiker. Wittenberg 1865 in 8." — *l.* Jean-Jacques-Emmanuel **Sédillot** (Montmorency 1777 — Paris 1832; Prof. orient. Paris) besorgte die Übersetzung des Traité, — sein Sohn Louis-Pierre-Eugène-Amélie **Sédillot** (Paris 1808 — ebenda 1875; Prof. hist. Paris) dagegen die Herausgabe. Überdies lieferte letzterer in seinem „Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes. Paris 1841 in 4." noch viele wertvolle Ergänzungen. — *m.* Ali **Aboul Hhassan** lebte um 1250 als Astronom in Marocco. — *n.* Noch mag die von El **Kazwini** (Kastin in Persien 1210? — Irak 1283; Kadi in Irak) geschriebene „Kosmographie" erwähnt werden, von welcher Herm. **Ethe** „Leipzig 1868" eine deutsche Übersetzung herauszugeben begann, welche aber nicht über den ersten Halbband herausgekommen zu sein scheint. Ferner die von Oswald **Schreckenfuchs** (Merkenstein 1511 — Freiburg 1579; Prof. math. et hebr. Tübingen und Freiburg) „Basileæ 1546 in 4." herausgegebene „Sphæra mundi" des im 12. Jahrhundert in Spanien lebenden Rabbiners **Abraham** fil. Haija, welche die Arbeiten der Araber ziemlich gut schildern soll.

6. Das Aufleben der Wissenschaften im Abendlande. — Während im christlichen Abendlande die Wissenschaften anfänglich nur in einzelnen Klöstern Eingang gefunden, überdies deren Insassen sich fast ausschliesslich damit befasst hatten, die ihnen zugänglichen Handschriften mit echtem Hamsterfleisse neuerdings abzuschreiben und nur wenige, wie voraus **Beda** venerabilis [a], als Lehrer ihrer

Zeit aufgetreten waren, — wurde gegen Ende des 8. Jahrhunderts, d. h. ungefähr zu derselben Zeit, wo die Kultur ihren Einzug bei den Arabern hielt, durch **Karl** den Grossen und den von ihm zur Hilfe beigezogenen **Alcuin** [b] mit Erfolg versucht, derselben auch den Westen in grösserm Masse zu erschliessen, und es ist wesentlich diesem Einflusse zu verdanken, dass damals die **Klosterschulen** in Fulda, Reichenau, St. Gallen, Lyon, Bologna etc. entstanden, durch welche die Bildung sich über weitere Kreise zu verbreiten begann [c]. Als sodann später die Berührungen mit den alten Kulturvölkern durch Handelsreisen nach dem Osten, durch das Vordringen der Araber nach Spanien, durch die sog. Kreuzzüge, etc., häufiger wurden, — als sich im 13. Jahrhundert an die Klosterschulen, namentlich unter dem Schutze des edeln **Friedrich** v. Hohenstaufen, noch sog. **Hohe Schulen** anzuschliessen begannen, welche bei höhern Zielen auch freiere Benutzung erlaubten [d], — als **Alfons** von Castilien ungefähr zu derselben Zeit bei 50 arabische, jüdische und christliche Gelehrte nach Toledo rief, um durch sie die Grundlagen der Astronomie prüfen und neue Tafeln berechnen zu lassen [e], — als ebenfalls nahe gleichzeitig die sog. **Encyklopädisten** die zerstreuten Kenntnisse sammelten und einem grössern Publikum zugänglich machten [f], — etc., vollzog sich nach und nach der Einzug der Wissenschaften ins Abendland, und nun ging es rasch vorwärts, zumal das Bedürfnis nach bequemerm und rascherm wissenschaftlichem Verkehr der Erfindung der Buchdruckerkunst rief [g] und die im engsten Zusammenhange mit der Steigerung der Kenntnisse und Hilfsmittel stehenden Entdeckungsreisen den Horizont erweiterten [h]. — Ein sehr folgewichtiges Ereignis war, dass zur Zeit der Kreuzzüge eine der arabischen Übersetzungen des Almagest in das Abendland gebracht und nun durch **Gherardo** Cremonese ins Lateinische übertragen wurde [i]. Hatten sich auch durch Abschrift und Übersetzung viele Irrtümer eingeschlichen, so gelang es doch Einzelnen, sich an diesem Werke zur Höhe der griechischen Wissenschaft emporzuarbeiten, und in diesem Sinne verdienen namentlich **Purbach** und **Regiomontan** als „Wiederhersteller der Wissenschaften“ genannt zu werden [k]: Nachdem diese beiden Männer durch den Kardinal **Bessarion** [l] auch noch in Besitz der griechischen Originale der Syntaxis und des Theon'schen Kommentares gekommen waren, arbeiteten sie gemeinschaftlich eine „Epitoma in Almagestum Ptolemæi“ aus, und es ist zunächst dieses Werk, welches 1496 zu Venedig als eines der ersten astronomischen Druckwerke erschien, das die Astronomie der Griechen in weitern Kreisen bekannt machte und in das Verständnis des dann alsbald ebenfalls auf die Presse gelegten Hauptwerkes einleitete [m]. — Die

durch **Regiomontan** auf Grundlage des geocentrischen Systemes für 1475—1506 berechneten und spätestens 1475 in Druck ausgegebenen Ephemeriden spielten bei der Entwicklung der Nautik eine hervorragende Rolle, — und wenn auch sonst im allgemeinen die praktische Astronomie zu jener Zeit im Abendlande noch keine erheblichen Fortschritte machte, so ist doch immerhin an den grossen Gnomon zu erinnern, welchen **Toscanelli**[n] im Jahre 1468 im Dome zu Florenz etablierte (164), — an den „Baculus astronomicus", welchen **Regiomontan** zu Gunsten seiner Alignementsmethode konstruierte und in geschickter Weise auf Ortsbestimmungen des Kometen von 1472 anwandte (333, 389), — an die scharfsinnige Methode, durch welche dessen Schüler Bernhard **Walther**[o] den Einfluss der Refraktion zu eliminieren suchte (453), — etc. Auch die Gestirnbeschreibung erhielt wenigstens Einen, sich auf die Entdeckungen der Seefahrer am Südhimmel beziehenden neuen Abschnitt (186). — In litterarischer Beziehung war das erste Bestreben des Abendlandes naturgemäss darauf gerichtet, die Schriften der Alten durch Kopien, Übersetzungen und Kommentare allgemeiner zugänglich und verständlich zu machen, und nach Erfindung der Buchdruckerkunst wurde diese auf profanem Gebiete zunächst ebenfalls in dieser Richtung zur Anwendung gebracht. Aber immerhin fallen auf diese Periode auch zwei didaktische Werke von grosser Bedeutung: Das erste ist ein Lehrbegriff der sphärischen Astronomie, welchen **Sacrobosco**[p] im 13. Jahrhundert unter dem Titel „Sphæra mundi" zusammenstellte. Er machte keine wissenschaftlichen Ansprüche, sondern sollte dem Bedürfnisse nach einem Schulbuche gerecht werden, und diesen Zweck erreichte er in so hohem Masse, dass er sich rasch einbürgerte, mehrere Jahrhunderte lang als klassisch betrachtet, in allen Schulen gelesen, in alle Sprachen übersetzt und vielfach kommentiert wurde, auch zu den ersten astronomischen Büchern gehörte, welche durch die Presse vervielfältigt wurden[q], — ein Erfolg, der die abschätzigen Urteile mancher neuern reichlich kompensiert[r]. Das zweite ist die von **Purbach** verfasste „Theoricæ planetarum", eine für etwas höhere Schulstufen berechnete Darstellung der griechischen Planetentheorien, welche **Regiomontan** schon 1472 zu Nürnberg auf eigener Presse auflegte, die noch später sehr häufig abgedruckt und kommentiert wurde[s] und bis zur definitiven Annahme des heliocentrischen Systemes die fast ausschliessliche Grundlage für den astronomischen Unterricht an den Hohen Schulen bildete[t]. — Einige andere didaktische Werke, sowie einige erste Versuche des Abendlandes in historischen Arbeiten, unterlasse ich vorläufig einlässlicher zu besprechen, da sie bei aller

Verdienstlichkeit nicht wesentlich in die Entwicklung jener Zeit eingriffen".

Zu 6: *a.* **Beda** venerabilis (Monkton bei Girvey in Northumberland 672? — Girvey 735) war Presbyter in Girvey. Man verdankt ihm auch Traktate über Kosmologie und Zeitrechnung (vgl. 316), die nebst andern, zum Teil unterschobenen Schriften als „Opera omnia" wiederholt, z. B. 1583 zu Basel in 8 Folianten, aufgelegt wurden. — *b.* Für **Karl** den Grossen (Karlsberg in Oberbaiern 742 — Aachen 814) auf dessen „Vita" durch Einhard „Hannover 1829 in 8." verweisend, bleibt zu erwähnen, dass er das Glück hatte, in dem der Schule von Beda angehörenden **Alcuin** (York 735 — Tours 804; früher Lehrer an der Klosterschule in York) einen ganz ausgezeichneten Gehilfen für seine civilisatorischen Bestrebungen zu finden. — *c.* In den Klosterschulen folgte dem sog. **Trivium**, das Grammatik, Dialektik und Rhetorik umfasste, ein **Quadrivium** mit Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik, — jedoch wurden die mathematischen Fächer in der Regel nur so weit dociert, als es für das Verständnis der Zeit- und Festrechnung notwendig erschien. Zu den berühmtesten Lehrern derselben zählten **Hrabanus** Maurus (776—856) zu Fulda, **Walafrid** Strabo (810—894) zu Reichenau, **Gerbert** (Auvergne 940? — Rom 1003, wo er von 999 an als Papst Sylvester II. lebte) zu Bobbio bei Pavia, **Wilhelm** (1026—1091) zu Hirschau, etc., und zwar wirkten sie nicht nur segensreich an ihren Schulen, sondern erhoben sich auch als Schriftsteller weit über gewöhnliche Kompilatoren. — *d.* Für ein Verzeichnis derselben vgl. Tab. XII. — *e.* **Alfons** (Toledo 1223 — Sevilla 1284) war später als Regent sehr unglücklich. Als junger Mann hatte er dagegen den Namen „il Sabio" erhalten, und das unter seiner Leitung entstandene Sammelwerk, welches durch Don Manuel **Rico** y Sinobas unter dem Titel „Libros del Saber de Astronomia del Rey D. Alfonso X. de Castilla. Madrid 1863—67, 5 Vol. in fol." auf Staatskosten herausgegeben wurde, kann man als einen förmlichen Codex des astronomischen Wissens im 13. Jahrhundert bezeichnen, der durchaus nicht etwa eine blosse Kompilation ist, sondern auch manche originelle Arbeiten enthält. — *f.* Nachdem, abgesehen von der um 470 durch Martianus **Capella** geschriebenen und noch von Coppernicus citierten „Satira (Ed. Hugo Grotius, Lugd. Batav. 1599 in 8., — und mehrfach später)" und einigen ähnlichen Schriften, schon ziemlich frühe, so z. B. am Ende des 9. Jahrhunderts durch den Abt-Bischof **Salomon** III. von St. Gallen, versucht worden war, das menschliche Wissen in sog. **Glossarien** zusammenzustellen, verbreiteten sich Graf Albrecht von Bollstädt, genannt **Albertus magnus** (Lauingen 1205 — Köln 1280; Provinzial der Dominikaner und später Bischof zu Regensburg), in seinen „Opera (Leyden 1651, 21 Vol. in fol.)", und der als „Doctor mirabilis" bezeichnete Roger **Baco** (Ilchester 1214 — Oxford 1294; Franziskaner; Prof. math. et astr. Oxford) in seinem „Opus majus (London 1733 in fol.)" bereits einlässlich über alle möglichen Gegenstände; dann folgten sich die drei grossen **Encyklopädien**, der „Quadruple miroir (Strassburg 1473, 7 Vol. in fol.)" des Vincent de **Beauvais** (etwa 1264 verstorben; Dominikaner), der „Trésor (Treviso 1474 in fol.)" des Brunetto **Latini** (Florenz 1220 — ebenda 1295; Stadtschreiber in Florenz), und die „Acerba vita (Venezia 1476 in fol.)" des Francesco degli Stabili oder **Cecco d'Ascoli** (Ascoli in der Romagna 1257? — Florenz 1327; Prof. philos. et astrol. Bologna); und an diese schlossen sich noch zwei verwandte Schriften an, nämlich die „Divina Commedia" (seit 1472 bis auf die neueste Zeit in vielen

Hunderten von Ausgaben und Übersetzungen erschienen)" des bei Leben verfolgten und nachher vergötterten **Dante** Alighieri (Florenz 1265 — Ravenna 1321), und die „Margarita philosophica (vielleicht schon Heidelberg 1486 in fol., jedenfalls Friburgi 1503 in 4. und seither vielfach erschienen)" des Gregor **Reisch** (1450? — 1520?; Prior der Karthause zu Freiburg). — *g.* Nachdem schon gegen Ende des 14. Jahrhunderts wiederholt Versuche gemacht worden waren, Zeichnungen dadurch zu vervielfältigen, dass man sie erhaben in Holz ausschnitt, mit Farbe bestrich und dann abdruckte, so hatte Johann Gensfleisch **Gutenberg** (Mainz 1398? — ebenda 1468) etwa 1440 den guten Gedanken, die einzelnen Buchstaben in Holz zu schneiden, durch Kombination derselben ein Schriftstück darzustellen und dann diesen sog. Satz abzudrucken. Nachdem er sich sodann mit dem reichen Goldschmid Joh. **Fust** (1460 gest.) und dessen späterm Tochtermanne, dem ingenieusen Peter **Schöffer** aus Gernsheim (1503 gest.) verbunden hatte, wurden bald die hölzernen durch gegossene Metalltypen ersetzt, erste Pressen erfunden, etc., und schon 1456 gelang es. eine lateinische Bibel durch Druck zu vervielfältigen. Zuerst als Geheimnis gehütet, verbreitete sich die neue und immer mehr ausgebildete Kunst dennoch bald über weitere Kreise, und bereits 1459 sollen in Basel, 1466 in Strassburg, 1469 in Paris und Nürnberg, 1472 in Ferrara, etc., Druckereien entstanden sein. Für weitern Detail muss auf „K. **Falkenstein**, Geschichte der Buchdruckerkunst. Leipzig 1840 in 4." und ähnliche Werke verwiesen werden. — *h.* Die Ratschläge und Tafeln der **Toscanelli** (vgl. n) und **Regiomontan** (vgl. k) hatten bekanntlich grossen Anteil an den Erfolgen der ersten Entdeckungsreisen. — *i.* **Gherardo** Cremonese (Cremona 1114 — ebenda 1187) lebte als Arzt, Mathematiker und Astrolog zu Cremona und andern Orten der Lombardei. Vgl. „Baldassare **Boncompagni** (Rom 1821 geb.; mathemat. Litterarhistoriker), Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese e di Gherardo da Sabbionetta. Roma 1851 in 8.". — *k.* Georg v. Peurbach oder **Purbach** (Peurbach in Ober-Östreich 1423 — Wien 1461) wurde in der durch Joh. v. Gmunden in Wien hinterlassenen Schule und dann noch durch eine Reise nach Italien befähigt, den Lehrstuhl der Mathematik und Astronomie in Wien mit solcher Auszeichnung zu bekleiden, dass sein Ruf sich weit verbreitete und dadurch unter andern Johannes Müller oder **Regiomontan** (Unfind bei Königsberg in Unterfranken 1436 — Rom 1476) herbeigezogen wurde, der aus seinem Schüler bald sein Mitarbeiter und Freund werden sollte. Nach Purbachs frühzeitigem Tode hielt sich letzterer lange in Italien, Ungarn etc., namentlich aber von 1471—75 in Nürnberg auf, wo ihm Bernh. Walther (vgl. o) eine Sternwarte, mechanische Werkstätte und Druckerei einrichtete. Vgl. für ihn die Artikel von **Stern** in Ersch und Gruber, von **Günther** in Deutsch. Biogr., sowie „**Ziegler**, Regiomontanus. Dresden 1874 in 8." — *l.* Johannes **Bessarion** (Trapezunt 1395 — Ravenna 1472), Patriarch von Konstantinopel, wurde, nach Übertritt zur katholischen Kirche, zum Kardinal ernannt. — *m.* Für die Ausgaben des Almagest vgl. 256. — *n.* Paolo **Toscanelli** (Florenz 1397 — ebenda 1482) lebte als Arzt und Bibliothekar in Florenz und war auch unter dem Namen „Paolo fisico" bekannt. — *o.* Bernhard **Walther** (Nürnberg 1430 — ebenda 1504) war ein reicher Patrizier, der nicht nur Regiomontans Arbeiten unterstützte, sondern nach dessen Tod auch bestmöglich fortführte. — *p.* Johannes v. Halifax, genannt **Sacrobosco** (Holywood oder Halifax in Yorkshire 1200? — Paris 1256?) war Prof. math. Paris. — *q.* Eine erste Ausgabe der „Sphæra mundi", der bald zahllose andere folgten, besorgte Andreas **Gallus** „Ferrariæ 1472 in 4."

Der erste Kommentar scheint von **Cecco d'Ascoli** (Basileæ 1485 in fol.) herzurühren, — den letzten und dickleibigsten liess Christoph Schlüssel oder **Clavius** (Bamberg 1538 — Rom 1612; Jesuit und Lehrer der Mathematik in seinem Ordenshause zu Rom) „Romæ 1570 in 4." erscheinen. Als eine freie Bearbeitung ist die um die Mitte des 14. Jahrhunderts durch den Domherrn **Konrad v. Megenberg** in Regensburg (er soll von 1309—74 gelebt und in jüngern Jahren in Paris studiert haben) verfasste Schrift „Die deutsche Sphära" zu erwähnen, welche als erste mathematische Schrift in mittelhochdeutscher Sprache betrachtet wird und wohl der, zum Teil in schauerliche Verse gebrachten „Sphæra materialis. Nürnberg 1516 in 4." zu Grunde lag, welche Konrad **Heynvogel** (Nürnberg 1470? — ebenda 1535?; Kapellan und Mathematikus Maximilian I.) publizierte. — *r.* **Melanchthon** sagte 1531 in der Vorrede zu einer Wittenberger Ausgabe ganz richtig: „Da dies Buch schon Jahrhunderte hindurch in allen Schulen, bei der grössten Verschiedenheit der Ansprüche, günstige Beurteilung gefunden hat, so muss die Auswahl des Lehrstoffes sehr zweckmässig sein". — *s.* Die „Theoricæ" von **Purbach** wurden schon „Norimbergæ 1472 in fol." durch **Regiomontan** auf eigener Presse aufgelegt, und dieser jetzt äusserst selten gewordenen Ausgabe folgten dann viele andere, von welchen ich beispielsweise diejenige anführen will, welche „Basileæ 1568 in 8." durch Christian Wursteisen oder **Urstisius** (Basel 1544 — ebenda 1588; Prof. math. Basil., später Stadtschreiber; vgl. Biogr. II) unter Beigabe von „Quæstiones" besorgt wurde. — *t.* Ein untergeordnetes Verdienst von **Purbach** war, dass er die Kristallsphären der Alten, wenn auch nicht wegliess, doch wenigstens zum Teil aushöhlte und damit seinen Nachfolgern das Zerschlagen erleichterte. — *u.* Ich habe zunächst den gegen Ende des 13. Jahrhunderts geschriebenen „Tractatus Sphæræ" des **Bartolomeo da Parma** im Auge, von welchem Enrico **Narducci** (Bull. Boncomp. 1884) die zwei ersten Bücher publiziert hat; sodann den „Traité de la sphère (Paris 1508 in 4.)" des Nicole **Oresme** (1320? — Lisieux 1382; Bischof von Lisieux); ferner den „Libellus de auctoribus mathematicis", welchen Andreas Stöberl oder **Stiborius** (Vilshofen in Bayern 1465? — Wien 1515; Prof. math. und Domherr zu Wien), ein Hauptmitglied des von Kaiser Maximilian unter dem Namen „Donaubruderschaft" gebildeten gelehrten Kränzchens, verfasste und sodann sein Schüler Georg **Tanstetter** oder Collimitius (Rhain in Bayern 1481 — Wien 1530; k. Leibarzt und Prof. astr. Wien) für die Notizen benutzte, welche er der 1514 besorgten Ausgabe der Tafeln von Purbach und Regiomontan beifügte; etc.

7. Die Reformation der Sternkunde. — Der geschilderte geistige Aufschwung äusserte sich naturgemäss namentlich auch in dem Bestreben, die Fesseln verknöcherter Tradition zu sprengen und das Recht freier Forschung auf allen Gebieten menschlichen Wissens zu erkämpfen. So brach mit dem Anfange des 16. Jahrhunderts auch für die Astronomie das Zeitalter der Reformation an, und es wird Nikolaus **Coppernicus** [a] für alle Zeiten der Ruhm bleiben, gleichsam wie ein zweiter Arnold v. Winkelried, mit ebensoviel Mut als Verständnis eine erste Bresche in die wohlverwahrte Festung alter Wissenschaft gelegt zu haben, indem er dem seit zwei Jahrtausenden herrschenden geocentrischen Systeme ein **heliocentrisches**

System substituierte. Wohl hatten schon im Altertum einzelne, wie namentlich **Aristarch** (258), an eine solche Transformation gedacht, die tägliche Bewegung als eine Rotation der Erde, die jährliche als eine Revolution derselben um die Sonne aufgefasst, ja sogar durchgefühlt, dass sich sodann auch für die, der Sonne als Trabanten zuzuteilenden Planeten, alles viel einfacher gestalten müsste; aber jene Ideen glichen einem Samenkorn, das auf dafür untauglichen Boden geworfen wird, und erst **Coppernicus** war es vergönnt, dieselben in lebensfähiger Form vorzuführen und zugleich den Beweis zu leisten, dass die von Hipparch und Ptolemäus unter Grundlage des geocentrischen Systemes entwickelten Theorien sich unter Voraussetzung des heliocentrischen Systemes nicht nur ebensogut, sondern zugleich in viel natürlicherer und einfacherer Weise ergeben. Als das fundamentale Werk „De revolutionibus orbium cœlestium", in welchem er seine neue Theorie dargelegt hatte, im Jahre 1543 zu Nürnberg erschien [b], wurde dasselbe von einzelnen mit Enthusiasmus, von der Mehrzahl aber kühl aufgenommen, — später sogar die neue Lehre, deren Wahrheit damals nur plausibel gemacht werden konnte, von Vermittlungssystemen bedroht, ja von beiden Kirchen als ketzerisch angefeindet, und es wickelte sich das bekannte Drama ab, in welchem einer der Hauptanhänger des Reformators eine so ungemütliche Rolle zu spielen hatte, aber schliesslich (261) den Feinden ein zweites St. Jakob bereitete. — Was die Ausbildung der praktischen und beschreibenden Astronomie zur Zeit der Coppernicanischen Reform anbelangt, so war sie im Vergleich zu dieser ziemlich unbedeutend: **Coppernicus** selbst verfügte nur über ganz unzureichende Instrumente und sein etwas jüngerer Zeitgenosse, Peter **Apian** [c], der in dieser Beziehung wesentlich besser situiert gewesen wäre, auch entschieden mechanisches Talent besass, verrannte sich allzusehr in die später von Kepler als „industria miserabilis" bezeichnete Aufgabe, sog. **Scheibeninstrumente** zu konstruieren, welche alle Tafeln und Rechnungen ersparen sollten. Sein Hauptwerk, das „Astronomicum Cæsareum. Ingolstadii 1540 in fol.", wimmelt von den verschiedensten Kombinationen drehbarer, mit Teilungen und Spiralen versehener Kreise, durch welche er jene Aufgabe mit grossem Scharfsinn zu lösen suchte, — hat aber für unsere Zeit fast nur noch durch eine Reihe darin mitgeteilter Beobachtungen Wert, welche sich auf den Kometen von 1531 und einige später erschienene Körper dieser Art beziehen und zunächst die Berechnung derselben ermöglicht haben. Bemerkenswert ist überdies, dass **Apian** die Längenbestimmung durch Monddistanzen (407) einführen wollte, obschon dieselbe allerdings damals wegen Mangel an guten Mondtafeln noch

ebensowenig zuverlässige Resultate geben konnte, als die nahe gleichzeitig von Rainer **Gemma**[d] empfohlene direkte Zeitübertragung mittelst der durch Peter **Henlein**[e] kurz zuvor erfundenen tragbaren Uhren. — In litterarischer Beziehung war die erste Hälfte des 16. Jahrhunderts noch stark durch die Herausgabe der Klassiker und anderer vor Erfindung der Buchdruckerkunst verfasster Werke in Anspruch genommen, und es liegt wohl zunächst hierin der Grund, dass aus dieser Zeit keine didaktischen Werke von grösserer Bedeutung zu verzeichnen sind[f]; dagegen war gerade damals die von Konrad **Gessner**[g] mit eisernem Fleisse und stupender Gelehrsamkeit angelegte „Bibliotheca universalis. Tiguri 1545 in fol." ein sehr zeitgemässes Unternehmen, dessen Ausführung noch jetzt von allen Bibliographen nicht nur bewundert wird, sondern ihnen erlaubt, jenes Werk wie eine Quelle zu benutzen.

Zu 7: *a.* Nikolaus Köppernigk oder **Coppernicus** (Thorn 1473 — Frauenburg 1543) begann seine Studien in Krakau, wo zwar damals der ausgezeichnete Albertus Blar gen. **Brudzewski** (Brudzewo 1445 — Wilna 1497; Prof. math. et theol. Krakau, zuletzt Sekretär des Fürsten Alexander von Lithauen) keine mathematischen Vorlesungen mehr gab, aber noch seine Schüler lehrten, und ihn z. B. mit der Handhabung des Astrolabiums vertraut machten; dann setzte er dieselben in Italien fort, wo ihn **Domenico Maria** di Novara (Ferrara 1454 — Bologna 1504; Prof. math. et astron. Bologna) noch vollends in die praktische Astronomie einführte. Für weitern Detail, sowie für sein späteres Wirken in Frauenburg als Arzt und Domherr, verweise ich auf „Leopold **Prowe** (Thorn 1821 — ebenda 1887; Gymnasialprofessor in Thorn), Nikolaus Coppernicus. Berlin 1883—84, 2 Teile in 3 Bdn. in 8." Auf den unfruchtbaren Streit, ob Coppernicus ein Deutscher oder ein Pole gewesen sei, trete ich nicht näher ein; aber immerhin scheint die Existenz des Ortnamens „Köppernik (bei Frankenstein im schlesischen Erzgebirge)" dafür zu sprechen, dass seine Familie ursprünglich deutscher Herkunft war. — *b.* Für weitern Detail und die verschiedenen spätern Ausgaben und Übersetzungen vgl. 260. — *c.* Peter Bienevitz gen. **Apian** (Leissnig in Sachsen 1495 — Ingolstadt 1552) war Schüler von Tanstetter in Wien und wurde 1527 Prof. math. et astr. Ingolstadt, wo er nebenbei eine „Officina" errichtete. Vgl. für ihn und seinen Sohn Philipp (Ingolstadt 1531 — Tübingen 1589; Prof. math. Ingolstadt und Tübingen) die Schrift „Sigm. **Günther**, Peter und Philipp Apian. Prag 1882 in 4." — *d.* Rainer **Gemma-Frisius** (Dockum in Friesland 1508 — Löwen 1555) war Prof. med. Löwen und Vater von Cornelis **Gemma-Frisius** (Löwen 1535 — ebenda 1577; Arzt und Prof. med. et astr. Löwen). — *e.* Peter **Henlein** (Nürnberg 1480? — ebenda 1542) war Schlosser in Nürnberg. Vgl. für seine Erfindung 122 und die Artikel von C. **Friedrich** im Jahrg. 1886 des Journ. f. Uhrenmacherkunst. — *f.* Ich erwähne die anonyme Schrift „La théorique des cielz mouvemēs et termes pratiques des sept planetes, nouvellement et très clairement redigée en language fräçois. Paris 1528 in fol.", die von Oront. **Finäus** herrühren könnte, da 1557 zu Paris aus dessen Nachlass eine ganz ähnlich betitelte Schrift erschien. — Ferner „Alessandro **Piccolomini** (Siena 1508 — ebenda 1578; Koadjutor des Erzbischofs von Siena), Della sfera del mondo libri IV, con libro uno delle

stelle fisse. Venezia 1540 in 4.", — ein (188) nicht unwichtiges Buch, das mehrere Auflagen erlebte, auch von Jacq. **Goupyl** „Paris 1550" in französischer, durch Nikolaus **Stupanus** (Pontresina 1542 — Basel 1621; Prof. philos. et med. Basel) aber „Basileæ 1568" in lateinischer Übersetzung herausgegeben wurde. — Sodann die „Teutsch Astronomei. Frankfurt 1545 in fol.", von welcher der anonyme Herausgeber sagt, dass es „eyn seer alt geschrieben buch" sei, welches ihm sein Freund Hans **Orth** von Bacharach zugestellt habe; obschon meist astrologischen Inhalts, hat es einigen später zu benutzenden interessanten Detail und hat jedenfalls mehr Wert, als die bald nachher unter wesentlich gleichem Titel „Augsburg 1569 in 4." durch Nik. **Rensberg** und „Franckfort 1583 in 4." anonym herausgegebenen Bücher. — Endlich „Josias **Simmler** (Kappel 1530 — Zürich 1576; Prof. theol. Zürich), De principiis astronomiæ libri duo. Tiguri 1559 in 8.", ein Leitfaden, welchen Simmler schrieb, als er in Stellvertretung Gessners die Lektionen in Math. et astr. zu geben hatte. — *g.* Konrad **Gessner** (Zürich 1516 — ebenda 1565) war Stadtarzt und Prof. philos. Zürich. Vgl. Biogr. I.

8. Die Zeit von Landgraf Wilhelm und Tycho Brahe. — Während zur Zeit von Coppernicus, wie bereits angedeutet wurde, die praktische Astronomie im Abendlande noch auf einer ziemlich niedrigen, weit unter der von den spätern Arabern eingenommenen Stufe stand und die Mittel nicht liefern konnte, welche das neue System zu Stütze und Ausbau bedurfte, so entwickelte sie sich dagegen in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts auf das Schönste: Was für die ältere Zeit Abul Wefa und Ibn Junis, und dann wieder Nassir-Eddin und Ulugbegh gewesen waren, wurden nunmehr Landgraf **Wilhelm** [a] und **Tycho Brahe** [b] für die neuere, — an die Stelle der Sternwarten in Bagdad und Kairo, oder wieder in Meragah und Samarkand, traten die Sternwarte in Kassel und die Uranienburg auf Hveen, — ja, um den Parallelismus vollkommen zu machen, wurden Mauer- und Azimuthal-Quadrant, welche schon in Meragah die Hauptinstrumente gewesen waren, für die neuen Sternwarten ebenfalls rekonstruiert. Ich muss es dem spätern Detailberichte überlassen, die nötigen Grundlagen zu liefern, um die Einzelverdienste des häufig zu wenig gewürdigten, bescheidenen, gefürsteten Astronomen **Wilhelm** und des meistens überschätzten, anspruchsvollen, sich gern als Fürst der Astronomen betrachtenden **Tycho**, gegen einander abwägen zu können, und beschränke mich hier darauf, als Facit meiner betreffenden Untersuchung hervorzuheben, dass die Hauptleistung jener Zeit, **die Aufstellung und Ausnutzung von bessern Methoden und Instrumenten zur Ortsbestimmung der Gestirne**, gerade aus dem **Zusammenwirken** jener beiden, durch ihre ebenso tüchtigen Gehülfen **Bürgi** [c] und **Longomontan** [d] sekundierten Männer hervorging, so dass sie **neben einander** genannt werden müssen, aber der ältere, der die Arbeiten begann und den jüngern nach sich zog, natürlich **voraus**. — Abgesehen von der eben besprochenen Mit-

wirkung an der Lösung der Hauptaufgabe seiner Zeit, erwarb sich dann allerdings **Tycho** auch noch auf andern Gebieten der Astronomie erhebliche Verdienste; namentlich ist es zunächst ihm zu verdanken, dass die Kometen, als über dem Monde stehend, definitiv den Gestirnen zugeteilt wurden, und was wir von dem merkwürdigen, sog. „neuen" Sterne von 1572 wissen, beruht zunächst auf seinen Untersuchungen, während dagegen diejenigen von David **Fabricius** [e] die Grundlage für unsere Kenntnis eines ersten „veränderlichen" Sternes, der sog. „Mira Ceti", bilden. — Als ein an diese Zeit anlehnendes didaktisches Werk von grösserer Wichtigkeit sind die von Simon **Stevin** [f] verfassten „Wisconstige gedachtnissen. Leyde 1605—08, 2 Vol. in fol." zu erwähnen [g], deren erster Teil unter dem Titel „Weereltschrift (Cosmographia)" eine uns Stevin als entschiedenen Coppernicaner erweisende, ganz nette Einführung in die Trigonometrie, sowie in die sphärische und theoretische Astronomie enthält [h].

Zu 8: *a.* Landgraf **Wilhelm** IV. von Hessen (Kassel 1532 — ebenda 1592) war vor seinem Regierungsantritte im Jahre 1567 selbst eifriger Beobachter und wusste sich nachher Gehilfen zu verschaffen, welche in seinem Sinne fortarbeiteten. Vgl. für ihn **Zachs** Notiz in Bd. 12 der Mon. Korr. und die unten (Note c) angegebene Litteratur. — *b.* Tycho **Brahe** (Knudstrup bei Helsingfors 1546 — Prag 1601) kam 1575 zu Wilhelm auf Besuch, wurde sodann auf dessen Empfehlung hin von seinem Landesfürsten Friedrich II. mit der Insel Hveen belehnt, sowie mit den Mitteln zur Erbauung und Ausrüstung einer grossen Sternwarte versehen, — residierte auch wirklich von 1576—1597 auf Hveen wie ein Fürst, fiel dann aber nicht ohne eigene Schuld bei Christian IV. in Ungnade und wurde schliesslich von Kaiser Rudolf II. nach Prag berufen. Vgl. „F. R. **Friis**, Tyge Brahe. Kiöbenhavn 1871 in 8." — *c.* Joost **Bürgi** (Lichtensteig 1552 — Kassel 1632) war Hofuhrmacher Wilhelm IV. und Rudolf II. und durch Genie, Kunstfertigkeit und Bescheidenheit gleich ausgezeichnet. Vgl. meinen Vortrag „Joh. Keppler und Joost Bürgi. Zürich 1872 in 8.", sowie Biogr. I und verschiedene Nummern meiner Mitth. und Notizen. — Neben ihm war während einer Reihe von Jahren Christoph **Rothmann** (Bernburg 1550? — ebenda 1605?), „Mathematikus" des Landgrafen, thätig, — ein Mann, der ebenfalls nicht ohne Talent, aber äusserst arrogant war und gerne fremdes Wasser auf seine Mühle lenkte. — *d.* Christian Severin gen. **Longomontan** (Longberg in Jütland 1562 — Kopenhagen 1647) war langjähriger Hauptgehilfe von Tycho und nach dessen Tod Prof. math. Kopenhagen. Ausser ihm hatte Tycho noch viele andere Gehilfen, wie namentlich Franz Gansneb oder **Tengnagel** (Westphalen 1573? — Prag oder Wien 1636; später Tochtermann von Tycho und k. Rat) und Willem Janszoon **Blaeu** (Alkmaar 1571 — Amsterdam 1638; später Kartograph und Buchdrucker in Amsterdam). — *e.* David **Fabricius** (Esens in Ostfriesland 1564 — Osteel 1617) war successive Pfarrer in Resterhaave und Osteel, und wurde an letzterm Orte durch einen Bauer, welchen er von der Kanzel bezichtigte, ihm Gänse gestohlen zu haben, erschlagen. Sein Sohn Johannes **Fabricius** (Resterhaave 1587 — Marienhafe bei Osteel 1615) studierte von 1605 an in Helmstedt Medicin, promovierte 1613 zu Wittenberg und liess sich sodann als Arzt zu Marienhafe nieder. Vgl. für Vater und Sohn

„L. **Häpke**, Fabricius und die Entdeckung der Sonnenflecke. Bremen 1888 in 8., — und: **Bunte**, Über David Fabricius (Emder Jahrbuch 1885—88)“. — *f.* Simon **Stevin** (Brügge 1548 — Haag 1620) war erst Steuerverwalter in Brügge, dann Ober-Bauinspektor von Holland. Vgl. „**Steichen**, Vie et travaux de Simon Stevin. Bruxelles 1846 in 8.“ — *g.* Gleichzeitig erschien eine durch Willebrord **Snellius** besorgte lateinische Übersetzung unter dem Titel „Hypomnemata mathematica. Lugd. Batav. 1605—08, 2 Vol. in fol.“, und später gab Albert **Girard** als „Oeuvres mathématiques de S. Stevin. Leyde 1634 in fol.“ eine freie französische Bearbeitung heraus. — *h.* Als erste Versuche in ihrer Art mögen noch „Konrad **Dasypodius** (Strassburg 1531 — ebenda 1600; Prof. math. Strassburg; vgl. Biogr. III), Dictionarium mathematicum. Argentorati 1573 in 8., — und: Egnatio **Danti** (Perugia 1537 — Rom 1586; Kosmograph des Grossherzogs von Toskana, dann Prof. Bologna; zuletzt Bischof von Alatri), Le scienze matematiche ridotte in 45 tavole. Bologna 1577 in fol.“ erwähnt werden.

9. Die Zeit von Kepler und Galilei. — Nachdem in vorgeschilderter Weise ein nach Qualität und Quantität genügendes Beobachtungsmaterial geschaffen war, unterzog sich der unvergleichliche Johannes **Kepler** [a] mit schönstem Erfolge der Aufgabe, das heliocentrische System auf Grund desselben weiter auszubauen: Nachdem er nämlich, gestützt auf gründliches und jede vorgefasste Meinung ausschliessendes Studium der scheinbaren Eigenbewegungen, die Notwendigkeit eingesehen hatte, einen ihn von der ganzen Vergangenheit ablösenden Schritt zu wagen und die bislang festgehaltene Kreisbewegung über Bord zu werfen, gelang es ihm (266—67), das coppernicanische System von den ihm gebliebenen ptolemäischen Anhängseln zu reinigen und dasselbe durch Aufstellung seiner drei berühmten **Gesetze** auf eine so feste Basis zu stellen, dass jede weitere Bekämpfung als nutzlos erkannt wurde und die Reformation der Sternkunde definitiv vollzogen war. — Fast gleichzeitig mit dieser Epoche machenden Leistung erfolgte die Erfindung des holländischen **Kykers** (134) und bald darauf diejenige des eigentlichen **Fernrohrs** (135), wodurch zuerst die beschreibende, dann auch die messende Astronomie neue Hilfsmittel von grosser Tragweite erhielt: Mit einem selbst konstruierten Kyker konnte Galileo **Galilei** [b] auf dem Monde festen Detail nachweisen, — die Konstitution der Milchstrasse und die Existenz verschiedener Sternhaufen demonstrieren, — bei Venus die von Coppernicus geforderten Phasen erkennen, — und namentlich bei Jupiter vier Trabanten auffinden, womit er den faktischen Beweis für den von den Peripatetikern bestrittenen Satz leistete, dass ein sich bewegender Körper auch selbst wieder Centrum von Bewegungen sein könne. Dagegen war ihm allerdings in dem Nachweise der Rotation der Sonne, durch Entdeckung von Sonnenflecken und Verfolgung ihrer Bewegung, Johannes **Fabricius** zuvorgekommen, und in das Verdienst, das Fleckenphänomen näher er-

gründet zu haben, musste er sich mit Christoph **Scheiner** [c] teilen. Die sonderbaren Gestaltänderungen Saturns bemerkte er, hatte aber ihre Deutung einer spätern Zeit zu überlassen, — und die von Simon **Marius** [d] und Joh. Baptist **Cysat** [e] in Andromeda und Orion aufgefundenen Himmelsnebel waren ihm ganz entgangen. Auch die eigentliche Selenographie darf man kaum schon von Galileis ersten Wahrnehmungen her datieren, sondern es sind wesentlich (234) die etwas spätern **Langren** [f] und **Hevel** [g], welche dieselbe geschaffen haben. — Die Anhandnahme neuer fundamentaler Aufgaben der messenden Astronomie und die volle Ausnutzung des Fernrohrs zu Messungszwecken blieb im allgemeinen einer spätern Zeit vorbehalten; doch mag noch an die von Willebrord **Snellius** [h] ausgedachte neue Methode zur Bestimmung der Grösse der Erde erinnert werden, obschon auch sie erst in der folgenden Periode reife Früchte trug, — ferner an das durch Pierre **Vernier** [i] erfundene und nach ihm benannte neue Ablesemittel (339), — und endlich an den durch William **Gascoigne** [k] gemachten ersten Versuch, teils feste, teils messbar bewegliche Faden in das Fernrohr einzuführen (331). — Nach Abschluss der im Eingange erwähnten fundamentalen Arbeiten entwarf **Kepler** unter dem Titel „Epitome astronomiæ copernicanæ" einen Lehrbegriff der Astronomie [l], der nicht nur als erste, allgemeiner verständliche Darstellung der neuen Lehren von hoher Bedeutung war, sondern überhaupt alle bisherigen Schriften dieser Art in jeder Beziehung weit überragte [m] und auch, trotz der sich nun rasch steigernden litterarischen Thätigkeit, bei einem Jahrhundert nicht wieder erreicht wurde [n].

Zu 9: *a.* Johannes **Kepler** (Weil der Stadt 1571 — Regensburg 1630) absolvierte zwar in Tübingen die Theologie, fand aber an den astronomischen Vorlesungen von Michael **Mästlin** (Göppingen 1550 — Tübingen 1631; Prof. math. Heidelberg und Tübingen) mehr Geschmack als an der damaligen Orthodoxie und übernahm schliesslich eine mathematische Lehrstelle in Graz. Von dieser als Protestant vertrieben, ging er als Gehilfe von **Tycho** nach Prag, folgte ihm als k. Mathematikus und versah überdies noch eine Lehrstelle in Linz. Vgl. für weitern Detail, ausser zahlreichen Biographien durch **Breitschwert** (Stuttgart 1831 in 8.) und andere, namentlich die von Christian **Frisch** (Stuttgart 1807 — ebenda 1881; Gymnasialprofessor Stuttgart) besorgten „Opera omnia Jo. Kepleri. Francofurti 1858—71, 8 Vol. in 8.", welche auch eine „Vita" und viele Auszüge aus der Korrespondenz enthalten; ferner „Leop. **Schuster**: Joh. Kepler und die grossen kirchlichen Streitfragen seiner Zeit. Graz 1888 in 8., — etc." — *b.* Galileo **Galilei** (Pisa 1564 — Arcetri bei Florenz 1642) war folgeweise Prof. math. Pisa und Padua, sowie grossherzogl. Mathematikus in Florenz; 1633 wurde er in bekannter Weise (261) von der Inquisition verurteilt und zum Märtyrer gestempelt; 1637 erblindete er an beiden Augen. Vgl. die zahlreichen Biographien, deren bis in die neueste Zeit führende Reihe schon 1654 durch seinen Lieblingsschüler Vincenzo **Viviani** eröffnet wurde, — ferner die verschiedenen Ausgaben seiner Werke, von welchen bislang die

„Firenze 1842—56, 16 Vol. in 8." durch Eug. **Alberi** besorgte die vollständigste war, bald jedoch durch die Ant. **Favaro** übertragene weit übertroffen werden dürfte. — *c.* Christoph **Scheiner** (Walda 1575 — Neisse 1650) trat frühe in den Jesuitenorden, lehrte dann successive zu Freiburg i. B., Ingolstadt und Rom Mathematik und alte Sprachen, und bekleidete schliesslich lange Jahre das Rektorat des Jesuitenkollegiums zu Neisse in Schlesien. — *d.* Simon Mayr oder **Marius** (Gunzenhausen 1570 — Ansbach 1624) war erst Musiker, hielt sich dann einige Zeit bei Tycho (vielleicht schon auf Hveen, jedenfalls 1601 in Prag) auf, studierte nachher in Padua Medicin, wo er auch Galilei hörte, und lebte von 1605 an als Hofmathematikus in Ansbach. — *e.* Joh. Baptist **Cysat** (Luzern 1588 — ebenda 1657), Sohn des Stadtschreibers Rennward Cysat, war Schüler und Nachfolger des Pater Scheiner in Ingolstadt, dann Rektor der Jesuitenschulen in Insbruck, Eichstädt und Luzern. Vgl. Biogr. I. — *f.* Michael Florent van **Langren** (Antwerpen 1600? — Brüssel 1660?) lebte als Mathematikus des spanischen Königs Philipp IV. meist in Brüssel. — *g.* Johannes Höwelke oder **Hevel** (Danzig 1611 — ebenda 1687) lebte, nach Studien in Leyden und längern Reisen, als Bierbrauer und Ratsherr in seiner Vaterstadt, wo er sich 1641 eine Sternwarte erbaute, die 1679 mit dem grössten Teile seines Besitztums in Flammen aufging. In seiner zweiten Frau, Margaretha **Koopman**, fand er für seine Arbeiten eine vortreffliche Assistenz. Vgl. die „Danzig 1861 in 8." durch **Brandstätter**, und „Zittau 1864 in 4." durch **Seidemann** publizierten Biographien. — *h.* Willebrord **Snellius** (Leyden 1580 — ebenda 1626) folgte 1613 seinem Vater Rudolf, für welchen er schon einige Jahre vikarisiert hatte, als Prof. math. Leyden. Vgl. die „Notice (Arch. Neerl. 18)" durch P. van **Geer**, wo endlich das früher fälschlich auf 1591 gesetzte Geburtsjahr aktenmässig festgestellt wurde. — *i.* Pierre **Vernier** (Ornans 1580 — ebenda 1637) war Münzdirektor der Grafschaft Burgund. — *k.* William **Gascoigne** (Middleton 1621? — Marston Moor 1644) war Sohn des Esquire von Middleton und fiel als Parteigänger Karl I. in der Schlacht bei Marston Moor. — *l.* Die 4 ersten Bücher der „Epitome" erschienen 1618—20 zu Linz, — die 3 letzten Bücher aber 1621 zu Frankfurt. — *m.* Speciell mag erwähnt werden, dass **Kepler** im ersten Buche der „Epitome" die Bewegung der Erde mit derjenigen eines Kreisels (turbo puerorum) vergleicht, — im 4. Buche die Rotation der Sonne und die Bewegungen der Planeten um dieselbe durch eine der Sonne innewohnende, mit der Entfernung variierende Kraft erklärt, — im 6. Buche, wie übrigens schon in seinen „Paralipomena" von 1604, für die Vorausbestimmung der Finsternisse und Bedeckungen ähnliche Methoden entwickelt, wie sie jetzt noch gebräuchlich sind, — etc. Das ganze Werk, in welchem nach damaliger Sitte die Theoreme in Form von Fragen und Antworten abgewickelt werden, ist klar und anregend geschrieben und verdiente es vollständig, schon 1619 auf den Index gesetzt zu werden. — *n.* Neben der „Epitome" mögen noch folgende, ebenfalls ganz verdienstliche didaktische Werke jener Zeit erwähnt werden: „Chr. **Longomontan**, Astronomia danica. Amstelodami 1622 in 4. (2 ed. 1640 in fol.", namentlich wegen Reminiscenzen an die Tychonische Schule von Interesse, — „Ismael **Boulliau** (Laudun 1605 — Paris 1694; früher viel auf gelehrten Reisen, zog er sich später in die Abtei St-Victor in Paris zurück), Astronomia philolaica. Paris 1645 in fol.", ein gut angelegtes Buch, das jedoch an dem Umstande leidet, dass der Verfasser nicht wagt, sich offen als Coppernicaner zu bekennen und z. B. die elliptische Bewegung der Planeten durch eine gleichförmige Bewegung um den zweiten Brennpunkt ersetzen will, — und: „Pierre

Gassendi (Champtercier bei Digne 1592 — Paris 1655; Prof. math. Paris), Institutio astronomica juxta Hypotheses tam Veterum quam Copernici et Tychonis. Parisiis 1647 in 8. (Auch Londini 1653 und später)", obschon sie nicht viel mehr als ein Index gehaltener Vorlesungen ist. Wichtiger als die „Institutio" sind **Gassendis** „Opera omnia. Lugduni 1658, 6 Vol. in fol.", welche viele Beobachtungen und Auszüge aus seiner Korrespondenz enthalten, — ferner seine Schrift „Tychonis Brahei vita. Accessit Nic. Copernici, G. Peurbachii et Jo. Regiomontani vita. Parisiis 1654 in 4.", welche man als einen der wichtigern Vorläufer der historischen Litteratur zu bezeichnen hat. Die Schriften „Giuseppe **Biancono** (Bologna 1566? — Parma 1624; Jesuit; Prof. math. Parma), Clarorum Mathematicorum chronologia. Bononiæ 1613 in 4., — und: Bernardino **Baldi** (Urbino 1553 — ebenda 1617; Abt von Guastalla), Cronica de' Matematici. Urbino 1707 in 4.", kommen ihr, auch wenn man die von E. **Narducci** nachträglich (Bull. Bonc. 1886) publizierten „Vite inedite di Matematici italiani" des letztern mit einbezieht, an Interesse nicht bei. Sehr wertvoll durch seinen Reichtum an Daten aller Art ist endlich das Sammelwerk „Giovanni Battista **Riccioli** (Ferrara 1598 — Bologna 1671; Jesuit; Lehrer im Ordenshause zu Bologna), Almagestus novus. Bologna 1651, 2 Vol. in fol.", obschon es unvollendet geblieben und durch die Werke „Astronomia reformata. Bononiæ 1665 in fol., — und: Chronologia reformata. Bononiæ 1669 in fol." desselben Verfassers nur einigermassen ergänzt worden ist.

10. Die Zeit von Huygens und Newton. — In früherer Zeit war der Gelehrte bei seinen Untersuchungen fast ausschliesslich auf sich selbst und seine eigenen Mittel angewiesen, — über Arbeiten anderer auf demselben Gebiete konnte er sich höchstens durch Korrespondenz belehren und erfuhr oft jahrelang nichts darüber, — und an Aufgaben, deren Lösung das Zusammenwirken Verschiedener oder grössere Geldmittel erforderte, durfte er sich kaum wagen; als dann aber im 16. und 17. Jahrhundert nach und nach, erst durch freie Vereinigung, dann sogar mit staatlicher Unterstützung, gelehrte Körperschaften entstanden, von welchen voraus die 1666 in Frankreich gegründete Academie des Sciences genannt werden muss [a], — als im Anschlusse an dieselben periodische Publikationen ins Leben gerufen [b], öffentliche Bibliotheken und wissenschaftliche Sammlungen angelegt [c], ja sogar von Staats wegen eigene Laboratorien, Sternwarten und dergleichen erbaut wurden [d], schwanden jene Schwierigkeiten immer mehr und es entwickelte sich rasch ein reges wissenschaftliches Leben, wie es sich die frühere Zeit kaum geträumt hätte. — Dass diese Verhältnisse auch speciell für die weitere Entwicklung der Astronomie sehr günstig waren, liegt auf der Hand, und in der That machten alle Teile derselben in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts grosse Fortschritte: Die theoretische Astronomie erhielt durch die Isaac **Newton** [e] gelungene Aufstellung des Gravitationsgesetzes eine neue Grundlage, und die von ihm mit seltenem Geschick unternommene Entwicklung seiner Konsequenzen

verschaffte ihm und seinen nächsten Nachfolgern die Mittel, eine Reihe von Aufgaben mit Erfolg an die Hand zu nehmen, welche bisdahin als unlösbar erscheinen mussten, wie z. B. die Vergleichung verschiedener Weltkörper nach ihrer Masse, die Theorie der Präcession und des Phänomenes der Ebbe und Flut, die Bestimmung der Bahnen der Wandelsterne aus einer beschränkten Anzahl geocentrischer Beobachtungen, etc. — Die praktische Astronomie verdankte spätestens Christian **Huygens** [f] die Pendeluhr und ebendemselben auch eine wesentliche Verbesserung des Fernrohrs, das man nun nach dem Vorgange von Jean **Picard** [g] an Stelle der frühern Diopter zu setzen und zu Tagesbeobachtungen der Gestirne zu brauchen begann; Olaus **Römer** [h] gesellte dem Mauerkreise das Passageninstrument bei, ja dachte bereits daran, beide zu einem Meridiankreise zu vereinigen, und konstruierte auch erste Equatoreale; **Thévenot** [i] erfand die nachmals das Lot verdrängende Röhrenlibelle, — **Newton** neben dem Spiegelteleskope einen ersten Spiegelsextanten zu Gunsten der Nautik, — etc. Nachdem es sodann Dominique **Cassini** [k] gelungen war, mit Hilfe des Brechungsgesetzes eine etwas zuverlässige Refraktionstafel zu berechnen, wurde die Genauigkeit der Ortsbestimmungen auf der Erde und am Himmel wesentlich vergrössert; anderseits nahm **Picard** unter Anwendung der Snellius'schen Methode eine erste zuverlässige Erdmessung vor, während Jean **Richer** [l] auf einer Expedition nach Cayenne die nötigen Daten holte, um in Vergleichung mit korrespondierenden Pariser-Beobachtungen eine bessere Bestimmung der Sonnenparallaxe vornehmen zu können, und **Römer** mit Hilfe der Verfinsterungen der Jupiters-Trabanten die endliche Geschwindigkeit des Lichtes erwies. — Die beschreibende Astronomie machte in diesem Zeitraume in Beziehung auf Sonne und Mond keine erheblichen Fortschritte; dagegen gelang es **Huygens**, die so lange rätselhaft gebliebenen Erscheinungen an Saturn durch einen ihn umschwebenden Ring zu erklären und auch bei diesem obersten Planeten die Existenz von Monden nachzuweisen, während Cassini die Rotation von Mars und Jupiter feststellte, sowie in Gemeinschaft mit Nikolaus **Fatio** [m] das früher kaum beachtete Zodiakallicht studierte. Überdies erwuchs der Astronomie durch den, Edmond **Halley** [n] gelungenen Nachweis der Periodicität eines Kometen ein neues Gebiet, und endlich erhielt die Stellar-Astronomie durch die höchst verdienstlichen Arbeiten von John **Flamsteed** [o] die für sie längst wünschbare neue Grundlage. — Auch die litterarische Thätigkeit nahm nach allen Richtungen zu und es entstanden, ausser den schon erwähnten periodischen und einigen später zu besprechenden monographischen Schriften, manche für ihre Zeit bemerkenswerte

Lehr- und Hilfsbücher, die noch gegenwärtig mit Nutzen konsultiert werden können, wenn man sich ein Bild von dem damaligen Bestande der Wissenschaft zu erwerben wünscht *p*.

Zu 10: *a.* Die ersten Korporationen solcher Art entstanden in Italien, wo schon 1540 zu Padua eine „Accademia degli Infiammati" gegründet wurde, der bald manche andere folgten, wie zu Rom 1603 die durch den Fürsten Federigo **Cesi** (1585—1630) gestiftete „Accademia dei Lyncei", — die zu Florenz 1657 durch Grossherzog **Ferdinand** (1610—70) unter dem Vorsitze seines Bruders **Leopold** (1617—75) ins Leben gerufene „Accademia del Cimento", deren „Saggio di naturali esperienze. Firenze 1667 in 4. (auch 1691 und 1841, sowie lat. durch Muschenbroek: Lugd. 1731)" höchlich bedauern lässt, dass schon nach 10 Jahren die Unverträglichkeit ihrer Mitglieder zur Auflösung führte, — etc. Später bildeten sich auch in andern Ländern ähnliche Vereinigungen, so z. B. 1635 zu Paris ein mathematisches Kränzchen, aus dem später der grosse Staatsmann Jean-Baptiste **Colbert** (Rheims 1619 — Paris 1683) die Pariser-Akademie schuf, — 1648 zu London die Muttergesellschaft der noch blühenden „Royal Society", — 1652 durch den Schweinfurter Bürgermeister Joh. Lorenz **Bausch** (1605—65) die nachmalige „Academia Leopoldina Naturæ Curiosorum", — und so (vgl. XII) noch manche andere, die sich sämtlich um die Wissenschaften verdient machten, wenn auch der Académie des Sciences der erste Rang zugeteilt werden muss. — *b.* Im Jahre 1665 gründete Denis de **Sallo** (Paris 1626 — ebenda 1669; Parlamentsrat in Paris) das „Journal des Savans", welches, wenn auch mit Ausnahme der Revolutionsjahre 1793—1815, bis auf die Gegenwart regelmässig erschienen ist, — im gleichen Jahre Heinrich **Oldenburg** (Bremen 1626 — Charlton bei Woolwich 1678; erst bremischer Konsul, dann Sekretär der Roy. Society) die ebenfalls noch gegenwärtig ausgegebenen „Philosophical Transactions", — im Jahre 1682 Otto **Mencke** (Oldenburg 1644 — Leipzig 1707; Prof. der Moral in Leipzig) die sodann durch seine Familie bis 1774 fortgeführten „Acta Eruditorum", — etc. — *c.* Neben den allgemeinen entstanden bald auch Fachbibliotheken, ja Sir Henry **Savile** gründete schon 1619 in Oxford eine mathematische Bibliothek. — *d.* Für die nach und nach entstandenen öffentlichen Sternwarten vgl. XII. — *e.* Isaac **Newton** (Whoolstorpe in Lincolnshire 1642 — London 1727) war erst Prof. math. Cambridge, dann k. Münzmeister in London und Präsident der Roy. Society. Vgl. „Dav. **Brewster**, Life of Is. Newton. London 1831 in 4., — und: Memoirs of the life, writings and discoveries of Sir Is. Newton. Edinburgh 1855, 2 Vol. in 8. (2. ed. 1860)", — ferner die durch Jean **Castillon** gesammelten „Opuscula. Lausannæ 1744, 3 Vol. in 4." und die durch Sam. **Horsley** besorgten „Opera quæ extant omnia. London 1779—85, 5 Vol. in 4." — *f.* Christian **Huygens** (Haag 1629 — ebenda 1695) lebte, abgesehen von einigen Reisen und dem 1666—81 als Mitglied der Académie des Sciences gemachten Aufenthalte in Paris, meist in seiner Vaterstadt als Privatgelehrter. Vgl. „P. **Harting,** Chr. Huygens in zijn leven en werken. Groningen 1868 in 8." Von einer Gesamtausgabe seiner Werke ist bis jetzt der erste, einen Teil der Korrespondenz enthaltende Band unter dem Titel „Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences. La Haye 1888 in 4." erschienen. — *g.* Jean **Picard** (La Flèche in Anjou 1620 — Paris 1682) lebte als Abbé und Akademiker in Paris, — durch Verdienst und Bescheidenheit gleich ausgezeichnet. — *h.* Olaus **Römer** (Aarhus 1644 — Kopenhagen 1710) war erst Akademiker in Paris, dann Prof. math.

und Bürgermeister in Kopenhagen. Vgl. die von Pet. **Horrebow** herausgegebene „Basis astronomiæ. Hafniæ 1735 in 4.", in welcher er die von seinem Meister getroffenen Einrichtungen beschreibt, sowie dessen Beobachtungen von 1706 X 21—23 giebt, welche Römer als seine „Dreitagsarbeit" bezeichnete und die noch neuerlich in „**Galle,** Olai Römeri triduum observationum astronomicarum. Berolini 1845 in 4." besprochen worden sind: Sie sind so ziemlich das einzige, was bei der Feuersbrunst von 1728 von Römers Beobachtungsschatz nicht zu Grunde ging. — *i.* Melchisedec **Thévenot** (Paris 1620 — Issy bei Paris 1692) war früher französischer Geschäftsträger in Genua und Rom, später Kustos der k. Bibliothek in Paris. — *k.* Giovanni Domenico **Cassini** (Perinaldo bei Nizza 1625 — Paris 1712) war erst Prof. astr. Bologna, später Akademiker und Direktor der Sternwarte in Paris, in welch letztern Eigenschaften ihm successive sein Sohn Jacques (Paris 1677 — Thury bei Clermont 1756), dessen Sohn César-François (Paris 1714 — ebenda 1784, speciell „Cassini de Thury" genannt), und nochmals dessen Sohn Jacques Dominique (Paris 1748 — Thury 1845) folgten. Letzterer quittierte 1793 und schrieb die für die Geschichte seiner Familie wichtigen „Mémoires pour servir à l'histoire des sciences et à celle de l'observatoire roy. de Paris. Paris 1810 in 4." — *l.* Jean **Richer** (1640? — Paris 1696) war erst Elève, dann Mitglied der Pariser Akademie. — *m.* Nicolaus **Fatio** (Basel 1664 — Worcester 1753) lebte bald auf seiner Herrschaft Duillier bei Genf, bald in Frankreich, Holland und England, und ging schliesslich in letzterm Lande im Mysticismus unter. Vgl. Biogr. IV. — *n.* Edmond **Halley** (Haggerston bei London 1656 — Greenwich 1742) war erst Prof. geom. Oxford, dann Astronomer royal. Vgl. „Eloge" durch Mairan in Mém. Par. 1742. — *o.* John **Flamsteed** (Derby 1646 — Greenwich 1719) war Pfarrer zu Burstow in Surrey, dann erster Astronomer royal. Vgl. „**Baily,** An account of Flamsteed. London 1835 in 4." — *p.* Als Lehrbücher aus dieser Zeit erwähne ich: „Abdias **Trew** (Ansbach 1597 — Altorf 1669; Prof. math. et phys. Altorf), Compendium compendiorum astronomiæ et astrologiæ, d. i. kurze doch klare Verfassung der ganzen Sternkunst. Altorf 1660 in 4., — Jean-Baptiste **Duhamel** (Vire in Normandie 1624 — Paris 1706; Prof. philos. und Sekretär Akad. Paris), Astronomia physica. Parisiis 1660 in 4., — Thomas **Streete,** Student in Astronomy and Mathematics: Astronomia Carolina, A new Theory of the celestial motions. Londini 1661 in 4. (mit geschätzten Tafeln; latein. durch Doppelmayr, Nürnberg 1708), — Joh. Christoph **Sturm** (Hippoltstein 1635 — Altorf 1703; erst Pfarrer zu Deiningen, dann Prof. math. Altorf, wo Joh. Jak. Scheuchzer sein Schüler war), Scientia cosmica. Norimbergæ 1670 in fol. (ein bemerkenswertes Kompendium), — Claude-François Milliet **Deschales** (Chambéry 1621 — Turin 1678; Jesuit; Prof. hydrogr. et math. Marseille und Lyon), Cursus, seu Mundus mathematicus. Lugd. 1674, 3 Vol. in fol. (2. ed. 1690, 4 Vol.), — Bernard le Bovier de **Fontenelle** (Rouen 1657 — Paris 1757; Litterat und Sekretär Akad. Paris; vgl. seine „Oeuvres, Paris 1742, 6 Vol. in 8.), Entretiens sur la pluralité des mondes. Paris 1686 in 12. (viele spätere Ausgaben und Übersetzungen; eine Art Fortsetzung bildet: H. Favre, Fontenelle et la Marquise de G. dans les mondes, Genève 1821 in 8.), — David **Gregory** (Aberdeen 1661 — Maidenhead 1710; Prof. math. Edinburgh, dann Prof. astr. Oxford), Astronomiæ physicæ et geometricæ Elementa. Oxonii 1702 in fol. (2. ed. Genevæ 1726, 2 Vol. in 4.; von Wert als Darstellung der Arbeiten Newtons und seiner engl. Zeitgenossen), — Christian **Wolf** (Breslau 1679 — Halle 1754; Prof. math. et phys. Halle), Elementa matheseos universæ. Halæ 1713—41, 5 Vol. in 4. (2. ed. durch Gabr.

Cramer, Genevæ 1743; auch verschiedene deutsche Ausgaben; handelt auch die Astronomie ganz gut ab, ja giebt in einem Anhange eine bemerkenswerte Übersicht der Litteratur), — Leonhard **Rost** (Nürnberg 1688 — ebenda 1727; Rechtsgelehrter und Litterat), Astronomisches Handbuch. Nürnberg 1718 in 4. 2. A. 1726 mit Supplement: Der aufrichtige Astronomus; Gesamtausg. durch G. F. Kordenbusch 1771—74 in 4 Quartbänden), — John **Keill** (Edinburgh 1671 — Oxford 1721; Prof. phys. et astr. Oxford), Introductio ad veram astronomiam. Oxonii 1718 in 8. (durch Lemonnier franz. als „Institutions astronomiques. Paris 1746 in 4." unter Beigabe eines „Essai sur l'histoire de l'astronomie moderne"), — etc." Ferner als Versuche von historisch-litterarischen Schriften und Hilfsbüchern: „Joh. Gerhard **Voss** (Heidelberg 1577 — Amsterdam 1649; Prof. eloqu. et hist. Leyden und Amsterdam), De universæ matheseos natura et constitutione liber; cui subjungitur chronologia mathematicorum, Amstelodami 1660 in 4. (ohne grosse Bedeutung), — Geronimo **Vitale** (Capua 1635? — Rom 1698; Theatiner-Mönch), Lexicon mathematicum astronomicum geometricum. Paris 1668 in 8., — Ferdinand **Verbiest** (Brügge 1623 — Peking 1688; Jesuit und Präsident des math. Kollegiums für China), Astronomia Europæa sub imperatore tartaro sinico Câm Hy'. Dilingæ 1687 in 4., — Cornelius a **Beughem** (aus Emmerich, wo er nach Mitte des 17. Jahrhunderts als Buchhändler florierte), Bibliographia mathematica. Amstelodami 1688 in 12., — Jacques **Ozanam** (Bouligneux 1640 — Paris 1717; Prof. math. und Akad. Paris), Dictionaire mathématique. Paris 1691 in 4. (ziemlich unbedeutend), — Christian **Wolf**, Mathematisches Lexikon. Leipzig 1716 in 8. (ein brauchbares Buch, von dem 1734 ohne Beihilfe von Wolf eine 2. Ausgabe erschien, der 1742 durch G. Fr. Richter noch ein zweiter Band mit Tafeln beigegeben wurde), — etc."

11. Die Zeit von Euler und Bradley. — So reich der Ertrag war, welchen Newton aus seiner Entdeckung des Gravitationsgesetzes zog, so blieb dennoch ungemein viel zu thun übrig, um die von demselben natürlich grossenteils erst skizzierten Theorien wirklich auszuführen und die für ihre Verwertung notwendigen Konstanten mit der entsprechenden Sicherheit zu bestimmen, wobei ein edler Wettstreit zwischen Theorie und Praxis entstand, bei welchem bald die eine, bald die andere Partie Oberwasser hatte: Während die Daniel **Bernoulli** [a], Leonhard **Euler** [b], Alexis **Clairaut** [c], Jean-le-Rond d'**Alembert** [d], etc., mit Hilfe der sich damals rasch entwickelnden Analysis die schwierigsten Probleme der Mechanik des Himmels mit dem schönsten Erfolge an die Hand nahmen und die sog. Störungen der Planetenbewegung, die Theorie des Mondes, die mit der Gestalt der Erde zusammenhängenden Verhältnisse, etc., zu bewältigen wussten, vervollkommneten die James **Bradley** [e], Tobias **Mayer** [f], etc., die Beobachtungskunst ungemein, so dass auch kleinere systematische Abweichungen, wie solche z. B. durch die von ersterm entdeckte und zugleich die Revolution der Erde endgiltig erweisende Aberration, oder durch den von dem zweiten konstatierten Einfluss der übrig bleibenden Aufstellungsfehler repräsentiert sind, erkannt und in Anschlag gebracht werden konnten, wodurch dann je wieder

den Theoretikern teils neue Anhaltspunkte für ihre Rechnungen gegeben, teils weitere Aufgaben unterbreitet wurden. — Zu der Entwicklung der praktischen Astronomie trug es wesentlich bei, dass nach und nach, besonders in England durch die George **Graham** [g], John **Bird** [h], etc., eigene Werkstätten für Feinmechanik entstanden, deren vorzügliche Arbeiten den Beobachtern exaktere Bestimmungen und feinere Untersuchungen erlaubten, so dass das Gebiet der zufälligen Fehler immer mehr beschränkt wurde; auch die von John **Dollond** [i] erfundene, oder wenigstens zuerst mit grösserem Erfolge praktizierte Erstellung von achromatischen Linsen, — die John **Harrison** [k] zuerst gelungene Konstruktion von wirklichen tragbaren Zeithaltern oder Chronometern, — die Thomas **Simpson** [l] zu verdankende Ausbildung der Refraktionstheorie, — die von Pierre **Bouguer** [m] begründete und durch Joh. Heinrich **Lambert** [n] weiter entwickelte Photometrie, — etc., trugen nicht wenig zu diesen und ähnlichen Erfolgen bei. Diesen Fortschritten entsprechend, vervollkommneten sich die Ortsbestimmungen am Himmel, sowie diejenigen auf der Erde zu Wasser und zu Land, ungemein, und namentlich konnten, gestützt auf dieselben, teils unter der Leitung von **Bouguer**, **La Condamine** [o] und **Maupertuis** [p] in Peru und Lappland die grossen Operationen mit Erfolg ausgeführt werden, durch welche der langjährige Streit über die Gestalt der Erde mit allgemeiner Annahme der durch die Theorie geforderten Abplattung an den Polen seinen Abschluss fand, — teils die bald darauf folgenden Expeditionen von **Lacaille** [q] ans Kap und von **Lalande** [r] nach Berlin, durch welche unter anderm die Mondparallaxe definitiv ermittelt wurde. — Auch die Topographie des Himmels machte erhebliche Fortschritte, indem die Beobachtungen an der Sonne, voraus durch Christian **Horrebow** [s], wieder mehr in Aufnahme kamen, — die Mondlandschaften, und speciell die Erscheinungen der sog. Libration, durch Tob. **Mayer** eingehend studiert wurden, — und das wirkliche Eintreffen des durch Halley angekündigten Kometen auch dem betreffenden, bis dahin immer noch etwas stiefmütterlich behandelten Gebiete ein grösseres Interesse, und so z. B. in Charles **Messier** [t] einen unermüdlichen Specialisten zuführte. Überdies wurde durch die bereits erwähnte Expedition von **Lacaille** die Kenntnis des südlichen Himmels ungemein gefördert, und endlich durch die scharfsinnigen Betrachtungen von Thomas **Wright** [u] ein erster Einblick in den Bau des Himmels gewonnen. — Die litterarische Thätigkeit endlich entfaltete sich ebenfalls mehr und mehr und es mag hier namentlich noch an die durch **Lacaille** verfassten „Leçons élémentaires d'astronomie physique et géométrique. Paris 1746 in 8. (noch später in vielen Auflagen und Über-

setzungen)" erinnert werden, welche ein erstes, unsern neuern Anforderungen entsprechendes, wissenschaftlich gehaltenes und doch leicht verständliches Kompendium der Astronomie darstellen, — an die durch Friedrich **Weidler** [v] mit staunenswertem Fleisse gesammelte „Historia astronomiæ. Vitembergæ 1741 in 4." und dessen dieselbe ergänzende „Bibliographia astronomica. Vitembergæ 1755 in 8.", welche die Grundlage aller spätern Arbeiten dieser Art bilden und noch jetzt von jedem Geschichtsforscher und Bibliographen konsultiert werden müssen, — und zum Schlusse an das durch Michael **Adelbulner** [w] herausgegebene „Commercium litterarium ad astronomiæ incrementum. Norimbergæ 1733—35, 2 Vol. in 4." als einen ersten Versuch eines astronomischen Fachjournales [x].

Zu 11: *a.* Der Ratsherr Nikolaus **Bernoulli** in Basel (1623—1708), welcher einer durch Albas Religionsverfolgungen aus Antwerpen vertriebenen Familie entstammte, hatte unter anderm drei Söhne: **Jakob** (1654—1705; Prof. math. Basel), **Nikolaus** (1662—1716; Maler) und **Johannes** (1667—1748; Prof. math. Gröningen und sodann Nachfolger von Jakob). Unser **Daniel Bernoulli** (Gröningen 1700 — Basel 1780) war nun Sohn von Johannes, hielt sich erst mit seinem ältern Bruder Nikolaus (Basel 1695 — Petersburg 1726; früher Prof. jur. Bern), der zum Unterschiede von seinem Vetter **Nikolaus** (Basel 1687 — ebenda 1759; Sohn des Malers; Prof. math. Padua, dann Prof. jur. Basel) als **Nikolaus II.** bezeichnet wird, in Petersburg als Akademiker auf, erhielt dann in Basel die Prof. anat. et bot., zuletzt die ihm gebührende Prof. phys., während sein jüngerer Bruder **Johannes II.** (Basel 1710 — ebenda 1790) dem Vater folgte. Letzterm entstammten **Johannes III.** (Basel 1744 — Köpnick bei Berlin 1807; Dir. Observ. und Akad. Berlin), **Daniel II.** (Basel 1751 — ebenda 1834; Prof. eloqu. Basel, Vikar des Oheims Daniel und Vater des Technologen Christoph) und **Jakob II.** (Basel 1759 — Petersburg 1789; Prof. math. und Akad. Petersburg). Vgl. für die ganze Familie „Peter **Merian** (Basel 1795 — ebenda 1883; Prof. phys. Basel und Ratsherr), Die Mathematiker Bernoulli. Basel 1860 in 4.", und die 4 Bände meiner Biographien, — speciell Vol. III für Daniel. — *b.* Leonhard **Euler** (Basel 1707 — Petersburg 1783) war folgeweise Akademiker in Petersburg (1727—41), Berlin (1741—66) und wieder in Petersburg (1766 bis 1783), — dabei nicht nur ein grosser, den grössten Mathematikern aller Zeiten ebenbürtiger Gelehrter, der wie kaum ein Zweiter mit der höhern Analysis auf „Du und du" stand, sondern auch ein Lehrer seiner Zeitgenossen und noch vieler folgender Generationen, — ferner wohl der fruchtbarste wissenschaftliche Schriftsteller, der je gelebt hat, da (obschon er 1735 am einen und 1766 auch noch am andern Auge erblindete) eine Gesamtausgabe seiner Arbeiten bei 16 000 Quartseiten füllen würde, — endlich ein Beispiel für das Wort „Der Verstand ist ein Edelstein, der am schönsten glänzt, wenn er in Demut gefasst ist". Er hinterliess drei Söhne: **Albrecht** (1734—1800; Sekretär der Petersb. Akademie), **Karl** (1740—90; k. Leibarzt) und **Christoph** (1743—1812; General der Artillerie). Vgl. für ihn Biogr. IV. — *c.* Alexis-Claude Clairault oder **Clairaut** (Paris 1713 — ebenda 1765) war ein Wunderkind, das schon mit 18 Jahren Mitglied der Pariser Akademie wurde, leider aber später mit seinen Kräften nicht gut haushielt. **Terquem** sagte (Bull. VII 50) von ihm: „L'illustre géomètre était lié avec la Marquise du Châtelet; il a

donné des chagrins domestiques à l'honnête Bezout; les petits soupers de Paris ont abrégé ses jours", und verweist auf Proverbes XXXI 2. Vgl. sein „Eloge" durch Fouchy in Mém. Par. 1765. — *d.* Jean-le-Rond d'**Alembert** (Paris 1717 — ebenda 1783) war ein auf die Stufen der Kirche „Jean-le-Rond" in Paris gelegtes Findelkind, das von der Frau des Glasers „Alembert" auferzogen wurde, sich zum Sekretär der Pariser Akademie, sowie zum Pensionär Friedrich des Grossen aufschwang und durch die von ihm mit dem Litteraten Denis **Didérot** (Langres 1713 — Paris 1784) herausgegebene „Encyclopédie. Paris 1751—80, 33 Vol. in fol." auch allgemein bekannt wurde. Vgl. sein „Eloge" durch Condorcet in Mém. Par. 1783. — *e.* James **Bradley** (Shireborn 1692 — Chalford 1762) war successive Pfarrer, Prof. astr. Oxford und Astronomer Royal. Vgl. „S. P. **Rigaud,** Miscellaneous works and correspondance of J. Bradley. Oxford 1832 in 4." — *f.* Tobias **Mayer** (Marbach 1723 — Göttingen 1762) war Autodidakt, dann Mitarbeiter am Homan'schen Landkarteninstitute in Nürnberg, zuletzt Prof. math. Göttingen. Vgl. „**Kästner,** Elogium Tob. Mayeri. Gottingæ 1762 in 4.", ferner die Bände 3, 8, 9 und 11 der Mon. Korrespondenz. Sein, namentlich durch eine „Praktische Geometrie" weitbekannter Sohn **Tobias II.** (1752—1830) war Prof. math. et phys. Erlangen und Göttingen. — *g.* George **Graham** (Horsgills in Cumberland 1675 — London 1751) war Uhrmacher und Mechaniker in London. — *h.* John **Bird** (London 1709 — ebenda 1776) war Mechaniker in London. — *i.* John **Dollond** (Spitalfields bei London 1706 — London 1761) war erst Seidenweber, dann Optiker. Die von ihm 1752 in London errichtete Werkstätte wurde von seinem Sohne **Peter** (1730—1820) und seinem Neffen George **Huggins** (1774—1852), der später auch den Namen Dollond annahm, fortgeführt. — *k.* John **Harrison** (Foulby 1693 — London 1776) war erst Zimmermann zu Foulby, dann Uhrmacher in London. — *l.* Thomas **Simpson** (Market-Bosworth in Leicestershire 1710 — ebenda 1761) war erst Weber und Schulmeister in Derby, dann Prof. math. an der Militärschule in Woolwich. — *m.* Pierre **Bouguer** (Croisic 1698 — Paris 1758) war erst Prof. hydrogr. in Croisic, dann Akad. Paris. Vgl. sein „Eloge" durch Fouchy in Mém. Par. 1758. — *n.* Joh. Heinrich **Lambert** (Mülhausen im Elsass 1728 — Berlin 1777) schwang sich vom Schneiderlehrling zum Akademiker und Oberbaurat in Berlin auf. Vgl. Biogr. III. — *o.* Charles-Marie de **La Condamine** (Paris 1701 — ebenda 1774) war erst Militär, dann Führer wissenschaftlicher Expeditionen und Akad. Paris. Vgl. sein „Eloge" durch Fouchy in Mém. Par. 1774. — *p.* Pierre-Louis Moreau de **Maupertuis** (St-Malo 1698 — Basel 1759) war erst Militär, dann Akad. Paris und Berlin. Vgl. „Angliviel de la **Beaumelle,** Vie de Maupertuis. Paris 1856 in 8.", und Biogr. II bei Sam. König. — *q.* Nicolas-Louis de **Lacaille** (Rumigny 1713 — Paris 1762) war Abbé, Prof. math. und Akad. Paris, — ein nach Leistungen und Charakter ganz ausgezeichneter Mann. Vgl. sein „Eloge" durch Fouchy in Mém. Par. 1762 und den „Discours" von Carlier im „Journal historique du voyage au Cap. Paris 1763 in 8." — *r.* Jérôme Le Français de **Lalande** (Bourg-en-Bresse 1732 — Paris 1807) war Prof. astron. und Akad. Paris. Vgl. sein „Eloge" durch Delambre in Mém. de l'Inst. 1807, auch meine Note „Einige Notizen über Name und Familie des Astronomen Lalande (Zürch. Viert. 1883)". — *s.* Der bereits erwähnte Peter **Horrebow** (Lögstör in Jütland 1679 — Kopenhagen 1764; erst Adjunkt, dann Nachfolger von Ol. Römer) hatte 20 Kinder, von denen ihm Christian (Kopenhagen 1718 — ebenda 1776) folgte. — *t.* Charles **Messier** (Badonviller in Lothringen 1730 — Paris 1817) schwang sich vom Schreiber bei Jos. Nic. Delisle

mit dessen Hilfe zum Astronom der Marine und Akad. Paris auf. Vgl. Delambre in Mém. de l'Inst. II. — *u.* Thomas **Wright** (Byers Green bei Durham 1711 — ebenda 1786) war successive Uhrmacher, Nautiker, Mechaniker, Lehrer, Kupferstecher, Schriftsteller, etc. Vgl. meine Notiz in Astr. Viert. 15. — *v.* Joh. Friedrich **Weidler** (Gross-Neuhausen in Thüringen 1692 — Wittenberg 1755) war erst Prof. math., dann jur. Wittenberg. Vgl. das „Elogium", welches Ebert 1784 der Neuausgabe von dessen Instit. mathem. beigab. — *w.* Michael **Adelbulner** (Nürnberg 1702 — ebenda 1779) war Buchdrucker und Lehrer in Nürnberg. — *x.* Von andern Schriften jener Zeit erwähne ich: „Joh. Gabriel **Doppelmayr** (Nürnberg 1671 — ebenda 1750; Prof. math. Nürnberg), Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern. Nürnberg 1730 in fol.", — Joh. Christoph **Heilbronner** (Ulm 1706 — Leipzig 1747; Privatlehrer Leipzig), Versuch einer Geschichte der Mathematik. Frankfurt 1739 in 8., und: Historia matheseos universæ. Lipsiæ 1742 in 4., — Jacques **Cassini,** Elémens d'astronomie et tables astronomiques. Paris 1740, 2 Vol. in 4. (sehr interessant für die Anschauungen und Methoden der Pariser Schule), — Roger **Long** (Norfolk 1680? — Pembroke 1770; Prof. astr. Cambridge), Astronomy in five books. Cambridge 1742—84, 2 Vol. in 4. (Band 2 posthum), — Tobias **Mayer,** Mathematischer Atlas. Augsburg 1745, 60 Tab. in fol. (die Astronomie wird auf 19 Tafeln in bemerkenswerter Weise dargestellt), — Joh. Jakob v. **Marinoni** (Wien 1676 — ebenda 1755; Dir. Akad. Kriegswiss.), De astronomica specula domestica. Viennæ 1745 in fol. (für die Kenntnis der damals gebräuchlichen Instrumente von Interesse), — Ralph **Heathcote,** Historia astronomiæ. Cambridge 1746 in 8., — Eustachio **Manfredi** (Bologna 1674 — ebenda 1739; Prof. math. Bologna), Instituzione astronomiche. Bologna 1749 in 4. (posth.), — Alexandre **Savérien** (Arles 1720 — Paris 1805; erst Marine-Ingenieur Marseille, dann Litterat Paris), Dictionaire universel de mathématiques et de physique. Paris 1752, 2 Vol. in 4., und: Histoire des philosophes modernes. Paris 1760, 2 Vol. in 4. (letzteres Werk spielte in dem Chasles-Handel, vgl. 268, eine Hauptrolle), — Joh. Friedrich **Stockhausen** (Gladenbach in Hessen 1718 — Kirdorf 1776; Prediger in Kirdorf), Historische Anfangsgründe der Mathematik. Berlin 1752 in 8. (soll ziemlich unbedeutend sein), — Friedrich **Weidler,** Institutiones astronomiæ. Vitembergæ 1754 in 4., — **Estève,** Histoire générale et particulière de l'astronomie. Paris 1755, 3 Vol. in 8. (zeichnet sich durch die Unverfrorenheit aus, mit welcher der Verfasser beständig über Weidler schimpft, aber ihn fortwährend auszieht), — Alexandre Guy **Pingré** (Paris 1711 — ebenda 1796; Dir. Obs. bei St-Geneviève und Akad. Paris; vgl. Prony in Mém. de l'Inst. I), Projet d'une histoire de l'astronomie du 17e siècle. Paris 1756 in 4. (das Mss. soll schon 1786 druckfertig gewesen und der Druck begonnen, dann aber wieder sistiert worden sein; über den Verbleib des Mss. verlautet nichts), — Antoine Yves de **Goguet,** De l'origine des loix, des arts et des sciences, et de leurs progrès chez les anciens peuples. Paris 1758, 3 Vol. in 4., — George **Costard** (Shrewsbury 1710? — Twickenham 1782; Vikar von Twickenham), History of Astronomy. Oxford 1767 in 4., — etc."

12. Die Zeit von Laplace und Herschel. — Die sog. Mechanik des Himmels wurde auch in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts nach allen Richtungen weiter ausgebildet. Namentlich erwarben sich die **Lagrange** *a* und **Laplace** *b* um dieselbe grosse Verdienste, — ja letzterer liess sich durch die Stürme der französischen

Revolution nicht abhalten, seine vortreffliche „Exposition du système du monde. Paris 1796, 2 Vol. in 8." zu schreiben und sodann die sämtlichen, teils durch sie beide, teils durch ihre uns bereits bekannten Vorgänger ausgeführten Untersuchungen, in seinem „Traité de Mécanique céleste. Paris 1799, 2 Vol. in 4." zu einem Ganzen zu verarbeiten [c]. Unterdessen gelang es Wilhelm **Herschel** [d], durch Entdeckung des Uranus die seit alten Zeiten unser Sonnensystem abschliessende Mauer zu durchbrechen, ja durch wirklichen Nachweis der namentlich von **Lambert** geahnten fortschreitenden Bewegung der Sonne unsere Weltanschauung überhaupt wesentlich zu berichtigen und zu erweitern. Da überdies **Guglielmini** [e] durch Fallversuche die tägliche Rotation der Erde zur Anschauung bringen konnte, so war vor Abschluss des Jahrhunderts auch noch der letzte Einwurf, welcher gegen die Realität des Coppernicanischen Systemes erhoben worden war, definitiv beseitigt. — Die praktische Astronomie erhielt immer vollkommenere Instrumente zur Disposition [f] und da sich gleichzeitig auch die Beobachtungsmethoden fortwährend verfeinerten und vervielfältigten, so wurde die Zuverlässigkeit aller Bestimmungen wesentlich grösser. Überdies fallen auf diese Zeit die grossen Expeditionen, welche 1761 und 1769 zur Beobachtung der sog. Venus-Durchgänge angeordnet wurden, um nach einem frühern Vorschlage von **Halley** die Sonnenparallaxe sicherer ermitteln zu können, — ferner verschiedene Versuche zur Bestimmung der mittlern Dichte der Erde, — endlich die, zur Grundlage des metrischen Systemes in Frankreich angeordnete neue Gradmessung [g]. — Die durch **Herschel** ausgeführte konsequente Durchmusterung des Himmels, deren erste grössere Frucht jene Entdeckung des Uranus gewesen war, hatte noch viele andere Folgen, und überdies fand er auf den verschiedenen Gebieten tüchtige Mitarbeiter: Während er z. B. Mars studierte und dessen Polarflecken deutete, gelang es Hieron. **Schröter** [h], die Rotationen von Merkur und Venus zu bestimmen, — während er sich die Konstitution der Sonne zum Vorwurfe nahm, bemühte sich **Chladni** [i], richtigere Ansichten über die Meteore zur Geltung zu bringen, — während er durch sog. „Aichungen" die Verteilung der Sterne und den Bau des Himmels zu ergründen suchte, inaugurierte **Lalande** sog. „Zonenbeobachtungen", — während er seine grossen Register über Doppelsterne, Sternhaufen und Nebel anlegte, suchten die beiden Freunde Edward **Pigott** und John **Goodricke** [k] veränderliche Sterne und deren Eigentümlichkeiten auf, — etc., etc., und es nahm so auch die beschreibende Astronomie einen früher ungeahnten Aufschwung. — Die litterarische Thätigkeit war ebenfalls eine sehr umfassende und

intensive: So gab, um nur einige ganz hervorragende Leistungen zu erwähnen, **Lalande** in seiner „Astronomie. Paris 1764, 2 Vol. in 4. (2 éd. 1771 und 3 éd. 1791 je in 3 Vol.)" ein eigentliches Kapitalwerk, durch das er zum Lehrer vieler Generationen wurde, indem er nicht nur den Leser in allen Abschnitten auf die Höhe der Zeit stellte, sondern ihm auch, unter Beifügung der nötigen litterarischen Nachweise, ein Bild von der betreffenden historischen Entwicklung gab, ja fügte ihm noch zur Ergänzung eine für seinen stupenden Fleiss zeugende „Bibliographie astronomique avec l'histoire de l'astronomie depuis 1781 jusqu'en 1802. Paris 1803 in 4." bei, — so schrieb **Montucla** [l] seine vortreffliche „Histoire des Mathématiques. Paris 1758, 2 Vol. in 4. (2 éd. Paris 1799—1802, 4 Vol. in 4.)", die, namentlich in ihrer zweiten Auflage [m], auch für die Geschichte der Astronomie höchst wertvoll, und überhaupt noch jetzt als unentbehrlich und unübertroffen bezeichnet werden muss, — so publizierte Charl. **Hutton** [n] „A mathematical and philosophical Dictionary. London 1796, 2 Vol. in 4. (2 ed. 1815)", ein noch jetzt höchst brauchbares, ebenfalls noch nicht ersetztes Nachschlagebuch, — etc. [o].

Zu 12: *a.* Joseph-Louis **Lagrange** (Turin 1736 — Paris 1813) war folgeweise Prof. math. und Akad. in Turin (1753—66), Berlin (1766—86) und Paris (1786—1813). Vgl. Delambre in Mém. de l'Inst. 1812, sowie „P. **Cossali**, Elogio di L. Lagrange. Padova 1813 in 8., — und: A. **Forti**, Intorno alla vita ed alle opere di L. Lagrange. Pisa 1868 in 8."; ferner seine, seit 1870 zu Paris erscheinenden „Oeuvres". — *b.* Pierre-Simon **Laplace** (Beaumont-en-Auge 1749 — Paris 1827) war Prof. math. und Akad. Paris, auch unter Bonaparte kurze Zeit Minister des Innern. Vgl. Fourier in Rev. encyclop. 43 von 1829, auch seine seit 1878 erscheinenden „Oeuvres". — *c.* Für die Fortsetzungen, Neuausgaben und Übersetzungen vgl. 507. — *d.* Wilhelm **Herschel** (Hannover 1738 — Slough 1822) war erst Musiklehrer, dann Privatastronom Georg III. von England. Vgl. für ihn Arago in Annuaire 1852 und meine Mitth. 23 von 1867, — für seinen Sohn **John** (Slough 1792 — London 1871), der meist als Privatgelehrter in London lebte, Proceedings Vol. 20, — für seine Schwester **Caroline** (Hannover 1750 — ebenda 1848), welche ihm lange Jahre als Assistent diente, die Schrift „Memoirs and correspondence of Caroline Herschel. London 1876 in 8." — *e.* Giovanni Battista **Guglielmini** (Bologna 1740? — ebenda 1817) war Prof. math. et astron. Bologna. — *f.* Ganz vorzügliche Werkstätten dirigierten z. B. Georg Friedrich **Brander** (Regensburg 1713 — Augsburg 1783), dessen 1734 zu Augsburg etabliertes Geschäft unter seinem Tochtermann Christoph Kaspar **Höschel** (Augsburg 1744 — ebenda 1820) noch bis in den Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts blühte, — Jesse **Ramsden** (Halifax in Yorkshire 1735 — Brighthelmstone 1800), der successive Tuchmacher, Graveur und Arbeiter bei John Dollond war, dann des letztern Tochter heiratete und nun ein eigenes Geschäft gründete, — Etienne **Lenoir** (Mer bei Blois 1744 — Paris 1832), der Mechaniker in Paris und Mitglied des Bureau des longitudes war, — William **Cary** (? 1759 — London 1825), der Arbeiter bei Ramsden war und dann in London ein eigenes Geschäft begann, welches noch sein Sohn **John** (1789—1852)

weiter fortführte, ja das noch jetzt durch einen frühern Arbeiter des letztern, Henry **Porter**, betrieben werden soll, — etc. — *g.* Für den Detail muss auf die Nummern 449, 222 und 426 verwiesen werden. — *h.* Joh. Hieronymus **Schröter** (Erfurt 1745 — ebenda 1816) stand lange Jahre als Oberamtmann in Lilienthal bei Bremen, wo er sich eine Sternwarte erbaute, auf der unter seiner Leitung sich z. B. **Harding** und **Bessel** als sog. „Inspektoren" in die praktische Astronomie hineinlebten. — *i.* Ernst Florens Friedrich **Chladni** Wittenberg 1756 — Breslau 1827) war meist auf Reisen, Vorträge über seine akustischen Entdeckungen haltend. Vgl. „Autobiographie (Akustik, Leipzig 1802 in 4.), und: W. **Bernhardt**, Chladni der Akustiker. Wittenberg 1856 in 8., sowie: Fr. **Melde**, Chladni's Leben und Wirken. Marburg 1888 in 8." — *k.* Edward **Pigott** (York 1750? — ebenda 1810?) wurde durch seinen Vater **Nathaniel** (Whitton in Middlesex 1725? — York? 1804) in die Astronomie eingeführt und scheint meistens in York gelebt zu haben, wo er auch einen jungen, taubstummen Freund, John **Goodricke** (York 1765? — ebenda 1786) für seine Lieblingswissenschaft begeisterte. — *l.* Etienne **Montucla** (Lyon 1725 — Versailles 1799) war Mitglied der Pariser Akademie. — *m.* Bei dem Hinschiede von **Montucla** war der Druck der 2. Ausgabe bis in das 2. Alphabet des 3. Bandes fortgeschritten, — für das folgende nur noch fragmentarisches Material vorhanden: **Lalande** erwarb sich nun das grosse Verdienst, in die Lücke zu treten und das Ganze zu gutem Ende zu führen. — *n.* Charles **Hutton** (New-Castle 1737 — London 1823) war Prof. math. Woolwich. Vgl. auch seine „Tracts. London 1812, 3 Vol. in 8." — *o.* Nicht ohne Interesse sind auch die Schriften: „Abraham Gotthelf **Kästner** (Leipzig 1719 — Göttingen 1800; Prof. math. et phys. Leipzig und Göttingen), Mathematische Anfangsgründe. Göttingen 1766 bis 1791, 10 Vol. in 8. (viele eingestreute wertvolle Notizen), und: Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des 18. Jahrhunderts. Göttingen 1796—1800, 4 Bde. in 8. (bricht in der Mitte des 17. Jahrhunderts ab und ist keine Geschichte, aber eine sehr reiche Sammlung historisch-litterarischer Notizen), — Joh. Elert **Bode** (Hamburg 1747 — Berlin 1826; erst astron. Rechner, dann Dir. Obs. Berlin; vgl. Encke in Berl. Abh. 1827), Anleitung zur Kenntnis des gestirnten Himmels. Hamburg 1768 in 8. (11. A. durch Bremiker, Berlin 1858), und: Kurzgefasste Erläuterung der Sternkunde. Berlin 1778, 2 Vol. in 8. (3. A. 1808), — Joh. Ephraim **Scheibel** (Breslau 1736 — ebenda 1809; Prof. math. et phys. Breslau), Einleitung zur mathematischen Bücherkenntnis. Breslau 1769—98, 20 Stücke in 8. (sehr wertvoll), — Johann III. **Bernoulli**, Lettres astronomiques. Berlin 1771 in 8., ferner: Recueil pour les astronomes. Berlin 1771—79, 3 Vol. in 8., ferner: Nouvelles littéraires de divers pays. Berlin 1776—79, 6 Cah. in 8., und: Lettres sur différens sujets. Berlin 1777—79, 3 Vol. in 8., — Jean-Silvain **Bailly** (Paris 1736 — ebenda 1793, wo er in der Schreckenszeit wegen seiner Verdienste als Maire von Paris gemeuchelt wurde; früher Akad.; vgl. Arago in Oeuvres II), Histoire de l'Astronomie ancienne (1775), moderne (1779—82), indienne et orientale (1787). Paris 1775—87, 5 Vol. in 4. (leidet etwas an der vorgefassten Meinung, dass schon das vorsintflutliche Volk der „Atlantiden" so ziemlich alle unsere gegenwärtigen astronomischen Kenntnisse besessen habe, aber ist dennoch als erster gelungener Versuch, im Gegensatze zu Weidler, nicht nur eine chronologisch geordnete Sammlung von Notizen zu geben, sondern den Aufbau der Astronomie nach allen Hauptmomenten zu schildern, von grossem Wert), — Karl Friedrich **Hindenburg** (Dresden 1741 — Leipzig 1808; Prof. philos. et phys.

Leipzig), Leipziger Magazin für Naturkunde, Mathematik und Ökonomie. Leipzig 1781—85 in 8., ferner: Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik. Leipzig 1786—88 in 8., und: Archiv der reinen und angewandten Mathematik. Leipzig 1795—1800 in 8. (bei dem 2. dieser Journale war Joh. III. Bernoulli Mitredaktor), — Encyclopédie méthodique: Mathématiques. Paris 1784—89, 3 Vol. in 4. (eine durch d'Alembert, Lalande, Bossut, etc. unternommene Neubearbeitung eines Teiles der frühern Encyklopädie, von der namentlich der durch Bossut verfasste „Discours préliminaire“ Interesse hat), — R. G. **Boscovich**, Notice abrégée de l'Astronomie pour un Marin (Opera 1785, V 270—337; eine ganz artige populäre Astronomie), — Friedrich **Meinert** (Göllschau bei Hainau 1757 — Schweidnitz 1828; erst Prof. philos. Halle, später Lehrer an der Kriegsschule in Berlin), Über die Geschichte der ältern Astronomie. Halle 1785 in 8., — Joh. Samuel Traugott **Gehler** (Görlitz 1751 — Leipzig 1795; Ratsherr und Docent in Leipzig), Physikalisches Wörterbuch. Leipzig 1785—95, 5 Vol. in 8. (2. A. von Bd. 1—2, 1798, Registerband 1801; ganz neue Bearbeitung durch Brandes, Gmelin, Horner, Littrow, Muncke und Pfaff, mit zum Teil höchst interessanten astronomischen Artikeln, 1825—45 in angeblich 11, eigentlich 20 Bdn.), — C. G. F. (Füchsel?), Geschichte der Astronomie von den ältesten bis auf gegenwärtige Zeiten. Chemnitz 1792 in 8. (es erschien nur ein erster Band und von diesem 1819 eine neue Titelausgabe), — Gottfried Erich **Rosenthal** (Nordhausen 1745 — ebenda 1814; erst Bäcker, dann Bergkommissär), Encyklopädie aller mathematischen Wissenschaften, ihre Geschichte und Litteratur in alphabetischer Ordnung. Erste Abteilung: Reine Mathematik und praktische Geometrie. Bd. 1—3 (A—D). Gotha 1794—96 in 8. (es soll noch ein 4. Band erschienen, aber jedenfalls also lange nicht einmal die erste Abteilung zum Abschlusse gebracht worden sein: Die Aufgabe war zu gross und die Zeit zu ungünstig), — Thomas **Bugge** (Kopenhagen 1740 — ebenda 1815; erst Landmesser, dann Prof. astr. und Dir. Obs. Kopenhagen), De forste Grunde til den sphæriske og theoretiske Astronomie. Kiöbenhavn 1796 in 8. (deutsch durch Tobiesen, Altona 1816—17), — Christian Friedrich **Rüdiger** (Leipzig 1760 — ebenda 1809; Prof. math. und Observ. Leipzig), Handbuch der rechnenden Astronomie. Leipzig 1796—99, 3 Bde. in 8., — Friedrich Theodor **Schubert** (Helmstädt 1758 — St. Petersburg 1825; Akad. und Dir. Observ. Petersburg), Theoretische Astronomie. Petersburg 1798, 3 Vol. in 4. (franz. Paris 1822), ferner: Geschichte der Astronomie. Petersburg 1804 in 8., und: Populäre Astronomie. Petersburg 1804—10, 3 Vol. in 8., — etc.“

13. Die Zeit von Gauss und Bessel. — Am ersten Tage des laufenden Jahrhunderts entdeckte Giuseppe **Piazzi**[a] infolge konsequenter Fixsternbeobachtungen einen Wandelstern, welcher sich nachmals als ein Planetchen entpuppte, das in der längst auffälligen Lücke zwischen Mars und Jupiter stand, — ja in wenigen Jahren kannte man dank den Bemühungen der **Olbers** und **Harding**[b] noch drei andere solche Körperchen und hatte überdies den grossen Gewinn, dass durch diese Entdeckungen **Gauss**[c] veranlasst wurde, die Methoden zur Bahnberechnung oder die sog. „Theoria motus“ neu zu bearbeiten und die schon etwas früher durch ihn und **Legendre**[d] aufgefundene „Methode der kleinsten Quadrate (52)“

weiter zu entwickeln. — Die praktische Astronomie erhielt durch die Fortschritte der Feinmechanik und der technischen Optik [e] immer vorzüglichere Hilfsmittel: Die Kreise wurden schärfer geteilt und mit Ablesemikroskopen versehen, die Visiermittel und mikrometrischen Vorrichtungen verbessert, die Universalinstrumente, Meridiankreise, Equatoreale etc., in immer befriedigenderer Weise erstellt [f], — während zugleich die sog. „Sternwarten", für die man bislang hohe Türme oder gar monumentale Bauten erstellt hatte, in rationellerer Weise, mit ausschliesslicher Rücksicht auf zweckmässigere Aufstellung der Instrumente, angelegt wurden. Die Astronomen ihrerseits aber suchten durch passende Beobachtungsmethoden die unvermeidlichen Beobachtungsfehler zu eliminieren, die Aufstellungsfehler zu bestimmen und in Rechnung zu bringen, etc., und es ist namentlich **Bessel** [g] als Begründer der neuern Beobachtungskunst in hohen Ehren zu halten: Der Erfolg tritt in den genauern Bestimmungen aller Konstanten und Coordinaten, in den sicherern Angaben über die Gestalt und Grösse der Erde, sowie über die Distanzen der Wandelsterne, etc., klar zu Tage, — ist es ja sogar möglich geworden, die von der frühern Zeit vergeblich an die Hand genommene Aufgabe der Ermittlung der Fixstern-Distanzen wenigstens (607) bis zu einem gewissen Grade zu lösen. — Die Topographie des Himmels wurde ebenfalls fast in allen ihren Teilen wesentlich gefördert: Namentlich gelang es Heinrich **Schwabe** [h], durch langjährige konsequente Aufzeichnungen wenigstens für einen gewissen Zeitraum eine Periodicität in der Häufigkeit der Sonnenflecken nachzuweisen, — Heinrich **Mädler** [i] durch eine neue „Mappa selenographica" dem Detailstudium unsers Begleiters eine sichere Basis zu geben, — **Brandes** und **Benzenberg** [k] die kosmische Natur der Sternschnuppen ausser Zweifel zu stellen, — **Encke** und **Biela** [l] uns mit Kometen von kurzer Umlaufszeit bekannt zu machen, — **Bessel** und **Argelander** [m] durch Zonenbeobachtungen und Sternkarten die Kenntnis des Sternhimmels mächtig zu fördern, — Wilhelm **Struve** [n], die Herschel'schen Arbeiten über die Doppelsterne in grossartiger Weise fortzuführen, sowie **Savary** [o], eine erste Methode aufzufinden, um deren Bahnen zu berechnen, — etc. — Auch die Thätigkeit auf litterarischem Gebiete war nicht unbedeutend, und dabei kam nach und nach immer mehr das Bestreben zur Geltung, einerseits die Hauptergebnisse der Wissenschaft grössern Kreisen mundgerecht zu machen und sich dafür anderseits in ganz specielle Untersuchungen zu vertiefen, sowie durch geeignete Publikationsmittel die Fachgenossen rasch mit deren Ergebnissen bekannt zu machen. So mögen beispielsweise die Schriften und Journale „Jos. Joh. v. **Littrow** [p],

Die Wunder des Himmels. Stuttgart 1834, 3 Vol. in 8. (A. 3—6 durch Sohn Karl, A. 7 durch E. Weiss: Berlin 1886)", die eine sehr gute Aufnahme fanden, — „Jos. **Delambre** [q], Histoire de l'Astronomie ancienne (I—II), au moyen âge (III), moderne (IV—V) et au 18me siècle (VI). Paris 1817—27, 6 Vol. in 4.", welche zwar keine Geschichte, dagegen ein umfangreiches Quellenbuch von grosser Bedeutung ist, — „Franz v. **Zach** [r], Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde. Gotha 1800—13, 28 Bde. in 8.", das namentlich zur Zeit der Entdeckung der Planetoiden ganz ausgezeichnete Dienste leistete, — und: „Heinr. **Schumacher** [s], Astronomische Nachrichten. Altona 1821 u. f. in 4.", ein Journal, das noch gegenwärtig das unentbehrliche Korrespondenzblatt der Astronómen aller Länder bildet, — genannt werden [t].

Zu 13: *a.* Giuseppe **Piazzi** (Ponte im Veltlin 1746 — Neapel 1826) war Theatiner und Prof. math., sowie Dir. Obs. Palermo. Vgl. Biogr. IV. — *b.* Heinrich Wilhelm Mathias **Olbers** (Aarbergen bei Bremen 1758 — Bremen 1840) war praktischer Arzt in Bremen. Vgl. „Biograph. Skizzen verstorbener bremischer Ärzte und Naturforscher. Bremen 1844 in 8." — Karl Ludwig **Harding** (Lauenburg 1765 — Göttingen 1834) war erst Theologe, dann Inspektor in Lilienthal, zuletzt Prof. astr. Göttingen. — *c.* Karl Friedrich **Gauss** (Braunschweig 1777 — Göttingen 1855) war Prof. math. und Dir. Obs. Göttingen. Vgl. „**Sartorius**, Gauss zum Gedächtnis. Leipzig 1856 in 8., — **Winnecke**, Gauss. Braunschweig 1877 in 8., — etc."; ferner Briefwechsel mit Schumacher, Altona 1860—63, 6 Bde. in 8., — mit Humboldt, Leipzig 1877 in 8., — mit Nicolai, Karlsruhe 1877 in 4., — mit Bessel, Leipzig 1880 in 8.; endlich seine „Werke. Göttingen 1863—74, 7 Vol. in 4." — *d.* Adrien-Marie **Legendre** (Paris 1752 — ebenda 1833) war Prof. math. und Akad. Paris. Vgl. „Eloge" durch Elie de Beaumont in Mém. Par. 1864. — *e.* Als bedeutende Mechaniker und Optiker erwähne ich folgende: Georg v. **Reichenbach** (Durlach 1772 — München 1826) gründete 1804 mit Liebherr und Utzschneider in München und Benediktbeuern ein mechanisch-optisches Institut und übernahm dann später die mechanische Abteilung, welche nach seinem Tode Traugott Lebrecht **Ertel** (Forchheim in Sachsen 1778 — München 1858) und dessen Sohn Georg (1813—1863) mit Erfolg fortführten. — Joseph **Fraunhofer** (Straubing 1787 — München 1826) war erst Zögling von Guinand (142), dann die Seele der optischen Abteilung, welche nach seinem Tode Georg **Merz** (Benediktbeuern 1793 — München 1867) und dessen Söhne Ludwig (1817—58) und Sigmund (1824 geb.) ebenfalls mit bestem Erfolge betrieben. Vgl. für Fraunhofer sein „Leben. München 1865 in 8." durch Jolly, — und „Gesammelte Schriften. München 1888 in 4." — Edward **Troughton** (Corney in Cumberland 1753 — London 1835) trat in die zu London durch seinen ältern Bruder John errichtete Werkstätte ein und führte sodann dieselbe nach dessen Tod zuerst allein, dann mit William **Simms** (Birmingham 1793 — Carlshalton 1860) gemeinschaftlich fort. — Joh. Georg **Repsold** (Wremen in Hannover 1771 — Hamburg 1830) etablierte sich gegen Ende des 18. Jahrhunderts in Hamburg als Mechaniker. Nachdem er als Spritzenmeister verunglückt war, wussten seine Söhne Georg (1804—85) und Adolf (1806—71), sowie seine Enkel Johann Adolf (1838 geb.) und Oskar Philipp (1842 geb.) den Kredit der Firma zu erhalten, ja noch zu erhöhen.

Vgl. für die ganze Familie den Artikel von **Löwenherz** in Zeitschr. f. Instr. 1887. — Henri-Prudence **Gambey** (Troyes 1787 — Paris 1847) war Mech. und Akad. Paris. — Johannes **Brunner** (Solothurn 1804 — Paris 1863) etablierte sich 1828 in Paris und seine Werkstätte wird noch jetzt durch seine Söhne Emil und Otto mit Erfolg fortgeführt, — etc. — *f.* Für Regulatoren und Chronometer vgl. 123. — *g.* Friedrich Wilhelm **Bessel** (Minden 1784 — Königsberg 1846) war erst Kaufmannslehrling, dann Inspektor in Lilienthal, von 1810 hinweg aber Prof. astr. und Dir. Obs. Königsberg. Vgl. „**Encke**, Gedächtnisrede auf Bessel. Berlin 1846 in 4., — **Durège**, Bessels Leben und Wirken. Zürich 1861 in 8., — etc."; ferner Briefwechsel mit Olbers. Leipzig 1852, 2 Bde. in 8.; endlich die Sammelwerke „Astronomische Untersuchungen. Königsberg 1841—42, 2 Bde. in 4., — Populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände. Herausgeg. von Schumacher. Hamburg 1848 in 8., — Abhandlungen. Herausgeg. von R. Engelmann. Leipzig 1875—76, 3 Vol. in 4." — *h.* Samuel Heinrich **Schwabe** (Dessau 1789 — ebenda 1875) war Apotheker in Dessau. Vgl. Mitth. 40 von 1876. — *i.* Joh. Heinrich **Mädler** (Berlin 1791 — Hannover 1874) war erst Schreiblehrer, dann Observator auf Beers Sternwarte in Berlin, von 1840 hinweg Dir. Obs. Dorpat und lebte schliesslich im Ruhestand zu Bonn und Hannover. — *k.* Heinrich Wilhelm **Brandes** (Graden bei Ritzebüttel 1777 — Leipzig 1834) war erst Deichinspektor in Oldenburg, dann Prof. math. Breslau, zuletzt Prof. phys. Leipzig. — Joh. Friedrich **Benzenberg** (Schöller 1777 — Bilk 1846) war Prof. math. et phys. Düsseldorf und zog dann auf seine Besitzung in Bilk, wo er sich eine Sternwarte erbaute, welche er auch für die Folgezeit fundierte. — *l.* Joh. Franz **Encke** (Hamburg 1791 — Spandau 1865) war erst Observator auf dem Seeberge, dann Prof. astr. und Dir. Obs. Berlin. Vgl. „C. **Bruhns**, Joh. Franz Encke, sein Leben und Wirken. Leipzig 1869 in 8., — und: Gesammelte math. und astron. Abhandlungen. Berlin 1888—89, 3 Bde. in 8." — Wilhelm v. **Biela** (Rosslau am Harz 1782 — Venedig 1856) stand längere Zeit als Hauptmann zu Josephstadt in Böhmen, dann als Platzkommandant zu Rovigo. — *m.* Friedrich Wilhelm **Argelander** (Memel 1799 — Bonn 1875), Schüler von Bessel, war erst Dir. Obs. Abo und Helsingfors, dann Prof. astr. und Dir. Obs. Bonn. Vgl. Note von Schönfeld in Astr. Viert. von 1875. — *n.* Friedrich Wilhelm **Struve** (Altona 1793 — Pulkowa 1864) war erst Prof. astr. und Dir. Obs. Dorpat, dann Erbauer und erster Vorsteher der grossen Nikolai-Sternwarte in Pulkowa bei Petersburg. Vgl. die von seinem Sohne und Nachfolger Otto (Dorpat 1819 geb.) verfasste „Übersicht der Thätigkeit der Nikolai-Sternwarte während der ersten 25 Jahre ihres Bestehens. St. Petersburg 1865 in 4.", und Argelander in Astr. Viert. von 1866. — *o.* Félix **Savary** (Paris 1797 — Estagel 1841) war Prof. astr. und Akad. Paris. — *p.* Joseph Johann v. **Littrow** (Bischof-Teinitz in Böhmen 1781 — Wien 1840) war successive Prof. astr. und Dir. Obs. in Krakau, Kasan, Ofen und Wien; er war ein höchst anregender Lehrer, dem auch ich speciell viel verdanke. Vgl. die von seinem Sohne und Nachfolger Karl (Kasan 1811 — Venedig 1877) herausgeg. „Vermischten Schriften. Stuttgart 1846, 3 Bde. in 8." In Karls Sohn Otto (1843—64) schien eine dritte Generation zu folgen, als ein tückisches Nervenfieber die schönsten Hoffnungen zerstörte. Andere Schriften von Littrow finden sich in Note t erwähnt. — *q.* Jean-Baptiste-Joseph **Delambre** (Amiens 1749 — Paris 1822; vgl. Fourier in Mém. de l'Inst. IV) war Prof. astr. und Akad. Paris. — Der 6. Band seiner „Histoire" erschien posthum, von Claude-Louis **Mathieu** (Mâcon 1788 — Paris 1875; Examinator der Ecol. pol.) zum

Drucke besorgt; er leidet etwas weniger an Formeln-Überladung als die 5 ersten Bände, aber enthält dafür mehr Klatsch. — *r.* Franz Xaver v. **Zach** (Pressburg 1754 — Paris 1832) trat als Oberst-Wachtmeister in Dienste des Herzog Ernst von Sachsen-Gotha, der für ihn die Sternwarte auf dem Seeberge erbaute, und hielt sich später als Oberhofmeister von dessen Wittwe lange Jahre in Genua auf. Vgl. Mitth. 35 von 1874 und die vielen, höchst interessanten Briefe von Zach an Horner und Schiferli, welche ich in Zürch. Viert. publizierte. — Als Vorläufer seiner „Mon. Korresp." sind die von Zach redigierten 4 ersten Bände der „Allgemeinen geographischen Ephemeriden (Weimar 1798—99)" zu betrachten, — als Nachläufer seine „Correspondance astronomique et géographique. Gênes 1818—26, 14 Vol. in 8." — *s.* Christian Heinrich **Schumacher** (Bramstedt 1780 — Altona 1850) war Dir. Obs. Mannheim und Altona, nominell auch Prof. astr. Kopenhagen. Vgl. A. N. Bd. 36. — Nach Schumachers Tod besorgten successive **Petersen**, **Peters** und **Krüger** die Redaktion. Von den „Astronomischen Abhandlungen", welche neben den „Nachrichten" erscheinen sollten, wurden von 1823—25 drei Hefte ausgegeben, dann nichts mehr; auch ein 1836 begonnenes, sehr wertvolles, gemeinverständliche Aufsätze enthaltendes „Jahrbuch" erlosch schon 1844 wieder. — *t.* Von andern Publikationen erwähne ich noch, mit Ausschluss der nur in untergeordneter Weise der Astronomie dienenden Journale und Sammelschriften, folgende: „Charles **Bossut** (Tartaras 1730 — Paris 1814; Prof. math. Mézières, später Exam. der Ecole polyt. und Akad. Paris; vgl. Delambre in Mém. de l'Inst. 1816), Essai sur l'histoire générale des mathématiques. Paris 1802, 2 Vol. in 8. (2 éd. 1810; ital. durch G. Fontana, Milano 1802; engl. durch Bonnycastle, London 1803; deutsch durch Reimer, Hamburg 1804), — Ferdinand **Berthoud** (Plancemont bei Neuchâtel 1727 — Groslay bei Montmorency 1807; Uhrmacher und Akad. Paris; vgl. Biogr. IV), Histoire de la mesure du temps par les horloges. Paris 1802, 2 Vol. in 4., — Georg Simon **Klügel** (Hamburg 1739 — Halle 1812; Prof. math. Helmstädt und Halle), Mathematisches Wörterbuch. Leipzig 1803—31, 5 Vol. in 8. (nach Klügels Tod wurde das Wörterbuch erst von Mollweide, dann von Grunert fortgesetzt; letzterer gab 1833—36 mit seiner gewöhnlichen Weitschweifigkeit noch 2 Supplementbände, — sodann Jahn 1855 auch 2, die angewandte Mathematik, aber in ziemlich oberflächlicher Weise behandelnde Bände), — Jean Baptiste **Biot** (Paris 1774 — ebenda 1862; Prof. phys. et astr. und Akad. Paris), Traité élémentaire d'astronomie physique. Paris 1805 in 8. (3 éd. 1841—57 in 5 Vol.), auch: Recherches sur l'astronomie égyptienne. Paris 1823 in 8., ferner: Précis de l'histoire de l'astronomie planétaire. Paris 1847 in 4., und: Etudes sur l'astronomie indienne et chinoise. Paris 1862 in 8., — Analyse des travaux de l'Institut: Partie mathématique par **Delambre** 1805 à 1821, par **Fourier** 1822—28 (Mém. de l'Inst. I 7 à II 11), und: **Delambre**, Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789. Paris 1810 in 8., — Christian Ludwig **Ideler** (Gross-Brese bei Perleberg 1766 — Berlin 1846; Prof. astr. und Akad. Berlin), Historische Untersuchungen über die Astronomie der Alten. Berlin 1806 in 8., und: Über die Sternkunde der Chaldäer, den Cyklus des Meton und die Zeitrechnung der Perser. Berlin 1817 in 4., — Joh. Konrad **Schaubach** (Meiningen 1764 — ebenda 1849; Gymnasialdirektor Meiningen), Geschichte der griechischen Astronomie bis auf Eratosthenes. Göttingen 1809 in 8., — Joh. Gottlieb Friedrich **Bohnenberger** (Simmozheim im Schwarzwald 1765 — Tübingen 1831; erst Vikar seines Vaters in Simmozheim, dann Zögling von Zach, zuletzt Prof. math. et astron. Tübingen), Astronomie.

Tübingen 1811 in 8. (ein für seine Zeit ganz vortreffliches Lehrbuch), — H. W. **Brandes**, Die vornehmsten Lehren der Astronomie in Briefen an eine Freundin dargestellt. Leipzig 1811—16, 3 Bde. in 8., — Louis-Benjamin **Francœur** (Paris 1773 — ebenda 1849; Prof. math. und Akad. Paris), Uranographie. Paris 1812 in 8. (5 éd. 1837), und: Astronomie pratique. Paris 1830 in 8. (2 éd. 1840), — **Delambre**, Astronomie théorique et pratique. Paris 1814, 3 Vol. in 4. (ein ungeniessbares Formeln-Meer), — Gottlieb **Gamauf** (Güns im Komitat Eisenburg 1772 — Ödenburg 1841; Prediger in Ödenburg), Erinnerungen aus Lichtenbergs Vorlesungen über Astronomie. Wien 1814 in 8. (für Tob. Mayer von Interesse), — Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften. Herausgeg. durch **Bohnenberger** und B. v. **Lindenau**. Tübingen 1816—18, 6 Vol. in 8. (füllt einigermassen den Raum zwischen den beiden Zach'schen Korrespondenzen aus), — **Piazzi**, Lezioni di astronomia. Palermo 1817, 2 Vol. in 4. (deutsch von Westphal, Berlin 1822, 2 Vol. in 8.), — Alfred **Gautier** (Genf 1793 — ebenda 1881; Prof. astr. und Dir. Obs. Genf), Essai historique sur le problème des trois corps. Paris 1817 in 4., — Giovanni **Santini** (Caprese 1787 — Padua 1877; Prof. astr. Padua; vgl. „G. Lorenzoni: G. Santini. Padova 1877 in 8.“), Elementi di astronomia. Padova 1820, 2 Vol. in 4. (2 ed. 1830), — Kaspar **Hirzel** (Zürich 1786 — ebenda 1823; Litterat in Zürich), Astronomie de l'amateur. Genève 1820 in 8. (2 éd. 1829), — J. J. v. **Littrow**, Theoretische und praktische Astronomie. Wien 1821—27, 3 Vol. in 8., ferner: Populäre Astronomie. Wien 1825, 2 Vol. in 8. (ital. durch Bernardi, Bologna 1839), und: Vorlesungen über Astronomie. Wien 1830, 2 Vol. in 8., — Memoirs of the Roy. Astronomical Society. London 1822 u. f. in 4., — J. **Bentley**, Historical view of the Hindu Astronomy. Calcutta 1823, 2 parts in 4., — William **Pearson** (Whitbeck in Cumberland 1767 — South Kilworth in Leicestershire 1847; Pfarrer zu South Kilworth, wo er sich eine Sternwarte erbaut hatte), Practical Astronomy. London 1824—29, 2 Vol. in 4., — Lambert-Adolphe-Jacques **Quételet** (Gent 1796 — Brüssel 1874; Dir. Obs. und Sekretär Akad. Brüssel), Astronomie populaire. Bruxelles 1827 in 8., und: Histoire des sciences math. et phys. chez les Belges. Bruxelles 1864—66, 2 Vol. in 8., — Joh. Heinrich Moritz **Poppe** (Göttingen 1776 — Tübingen 1854; erst Uhrmacher, dann Prof. math. et phys. Frankfurt, Prof. technol. Tübingen), Geschichte der Mathematik. Tübingen 1828 in 8., — Franz Paula v. **Gruithuisen** (Haltenberg am Lech 1774 — München 1852; erst Chirurg, dann Heiduck, zuletzt Prof. astr. München), Analekten für Erd- und Himmelskunde. München 1828—36, 15 Hefte in 8., ferner: Naturgeschichte des gestirnten Himmels. München 1836 in 8., und: Astronomisches Jahrbuch für 1839 bis 1850. München 1838—51 in 8., — Bernhard **Studer** (Büren bei Bern 1794 — Bern 1887; Prof. math. und geol. Bern), Anfangsgründe der mathematischen Geographie. Bern 1836 in 8. (schon wegen Anklängen an die Gauss'schen Vorlesungen von Interesse), — Eduard **Schmidt** (Leipzig 1803 — Tübingen 1832; Lieblingsschüler von Gauss; Prof. math. et astr. Tübingen), Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie. Göttingen 1829—30, 2 Bde. in 8., — Nicolas **Halma** (Sédan 1756 — Paris 1830; Abbé; Prof. math. und Biblioth. Paris), Examen historique et critique des monumens astronomiques des anciens. Paris 1830 in 8., — F. P. **Stuhr**, Untersuchungen über die Sternkunde unter den Chinesen und Indiern. Berlin 1831 in 8., — Monthly Notices of the Roy. Astronomical Society. London 1831 u. f. in 8., — Mary **Somerville**-Fairfax (Jedburgh 1780 — Neapel 1872; vgl. „Personal Recollections. London 1874 in 8.), Mechanism of the Heavens. London 1832 in 8., — George Biddel **Airy** (Alnwick

in Northumberland 1801 geb.; Prof. astr. Cambridge, dann Astronomer Royal), Report on the progress of Astronomy during the present century (Brit. Assoc. 1832; deutsch durch C. v. Littrow, Wien 1835), — Alexis **Sawitsch** (Bjelowodsk im Gouv. Charkow 1811 — Petersburg 1883; Prof. astr. Petersburg; vgl. Struve in Astr. Viert. 1884), Abriss der praktischen Astronomie (russisch), Moskau 1833 in 8., und: Praktische Astronomie (russisch), Petersburg 1845 in 8. (2. A. 1868—71; 1 A. deutsch durch Götze, Hamburg 1850—51; 2 A. deutsch von Peters, Leipzig 1879), — John **Herschel,** Treatise on Astronomy. London 1833 in 8. (später unter dem Titel „Outlines of Astronomy", 12. ed. 1875; deutsch von Nicolai, Heilbronn 1838; franz. durch Vergnaud, Paris 1853), — Baden **Powell** (Stamford Hill in Middlesex 1796 — Oxford 1860; Prof. geom. Oxford), An historical view of the progress of the physical and mathematical sciences from the earliest ages to the present times. London 1834 in 8., — Alexandre-Victor de **Montferrier** (Paris 1792 geb.), Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées. Paris 1834—40, 3 Vol. in 4. (2 éd. 1845), — Alex. v. **Humboldt,** Examen critique de l'histoire de la géographie du nouveau continent et des progrès de l'astronomie nautique au 15 et 16 siècles. Paris 1836—37, 4 Vol. in 8. (deutsch durch Ideler, Berlin 1852), — William **Whewell** (Lancaster 1794 — Cambridge 1866; Prof. miner. et theol. Cambridge; vgl. Todhunter: London 1876, 2 Vol. in 8.), History of the inductive Sciences. London 1837—38, 3 Vol. in 8. (3. ed. 1847; deutsch durch J. J. v. Littrow, Stuttgart 1840—41), — Michel **Chasles** (Epernon 1793 — Paris 1880; Prof. geom. und Akad. Paris), Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Bruxelles 1837 in 4. (2 éd. Paris 1875; deutsch durch Sohncke, Halle 1839 in 8.), — Guglielmo **Libri** (Florenz 1803 — ebenda 1869; Prof. math. und Akad. Paris bis 1848, wo er sich als Bibliomane grosser Veruntreuungen schuldig machte und flüchtig wurde), Histoire des sciences mathématiques en Italie. Paris 1838—41, 4 Vol. in 8., — etc."

14. Die Astronomie der Gegenwart. Dass auch die Astronomie in der neuesten Zeit, wo ja auf allen Gebieten der Wissenschaft eine fast fieberhafte Thätigkeit herrscht, grosse Fortschritte gemacht hat, ist beinahe selbstverständlich; jedoch liegt es im naturgemässen Gange der Entwicklung unserer Sternkunde, dass die meisten dieser neuesten Fortschritte in einer, erst in der Detailbehandlung verständlichen Vertiefung in die bereits früher aufgedeckten Arbeitsgebiete bestanden, und nur eine geringere Anzahl derselben so allgemeiner Natur war, um schon in dieser vorläufigen Übersicht berührt zu werden. Zunächst dürfte in diese letztere Kategorie das den Stolz der Mechanik des Himmels bildende Faktum gehören, dass es ziemlich gleichzeitig **Adams** und **Leverrier** [a] gelang, aus gewissen Anomalien, welche sich im Gange des Uranus zeigten, die Existenz und Lage eines bis dahin unbekannten Weltkörpers, des nachmals, gestützt auf die erhaltenen Angaben, durch **Galle** [b] wirklich am Himmel aufgefundenen Neptun, nachzuweisen und damit dem Gravitationsgesetze zu einem eklatanten, auch den weitesten Kreisen imponierenden Siege zu verhelfen. — Die praktische Astro-

nomie hatte sich, neben der Verbreitung der Sternwarten über die ganze Erde [c] und der gelungenen Erstellung noch mächtigerer optischer Hilfsmittel [d], zunächst der durch **Steinheils** [e] Entdeckung der Leitungsfähigkeit der Erde ermöglichten telegraphischen Verbindungen und der hiedurch hervorgerufenen, durch **Walker** und **Bond** [f] in die Astronomie eingeführten Registrierapparate zu erfreuen, womit nicht nur eine genauere Bestimmung der geographischen Länge ermöglicht, sondern überhaupt die Einführung der Zeit als Beobachtungselement ausserordentlich erleichtert wurde. — Die beschreibende Astronomie erhielt ebenfalls bedeutenden Zuwachs, indem es z. B. Jul. **Schmidt** [g] gelang, die Mondtopographie wesentlich zu vervollkommnen, während **Kaiser, Terby** etc. [h] sich mit Erstellung einer Marskarte befassten, — Asaph **Hall** [i] bei diesem Planeten zwei Duodez-Möndchen auffand, — **Hencke** [k] eine neue Serie von Entdeckungen weiterer Glieder des zwischen Mars und Jupiter liegenden Planetenringes begann, — **Schiaparelli** [l] die Häufigkeitsgesetze der sporadischen Sternschnuppen feststellte und die Verwandtschaft der Meteorregen mit den Kometen nachwies, — die Schule von Argelander, und voraus **Schönfeld** [m], die Studien über die Veränderlichen fortsetzte, — Andere, wie namentlich die Brüder **Henry** [n], die Photographie für Aufnahme von Sternkarten dienstbar machten, — etc. Und ausserdem kam die bis dahin nur wenig berührte Erforschung der eigentlichen Natur der verschiedenen Welten in Aufnahme, wozu wesentlich der erste Anstoss dadurch gegeben wurde, dass es mir [o] nicht nur gelang, die von Horrebow und Schwabe (518) vermutete Häufigkeitsperiode der Sonnenflecken definitiv zu ermitteln, sondern deren bis ins Detail gehende Übereinstimmung mit der Periode der im Erdmagnetismus auftretenden täglichen Variationen zu erweisen; denn dieser Erfolg führte dem bis dahin nur stiefmütterlich bedachten Studium der Sonnenphysik plötzlich zahlreiche Kräfte zu, — ja regte auch dazu an, auf diese letztere die neuen Hilfsmittel der Photographie und Spektroskopie anzuwenden: Während die **Carrington, Spörer** etc. [p] ihre schönen Arbeiten über die Rotation der Sonne und die Eigenbewegungen ihrer Flecken ausführten, studierten die **Huggins, Secchi** etc. [q] das Sonnenspektrum, — zeigten die **Janssen** und **Lockyer** [r], dass man die, früher höchstens bei totalen Sonnenfinsternissen sichtbaren „Protuberanzen“ jederzeit beobachten könne, — ja dieselben neuen Mittel wurden teils durch die soeben genannten, teils durch die **Draper, Vogel** etc. [s], auch für die Planeten, Kometen, Fixsterne und Himmelsnebel fruchtbar gemacht, so dass sich bereits ein schöner Anfang einer kosmischen Physik gebildet hat, in deren weiterer Verfolgung die wich-

tigsten Aufschlüsse zu erwarten sind. — Auch die litterarische Thätigkeit ist in der Neuzeit eine sehr lebhafte geblieben, hat sich aber dieser entsprechend mehr auf Journalartikel und Specialabhandlungen geworfen, als auf hier in Betracht kommende Schriften allgemeinerer Natur: Immerhin mag beispielsweise als ein neueres Lehrbuch von grösserer Bedeutung „**Chauvenet**[t], A Manual of spherical and practical Astronomy. Philadelphia 1863, 2 Vol. in 8. (5 ed. 1885)" genannt werden, — ferner glaube ich meine „Geschichte der Astronomie. München 1877 in 8." als einen ersten Versuch, den verschiedenen Gebieten durch eine passende Gliederung gleichmässig gerecht zu werden, anführen zu dürfen, — sodann als Beispiel einer ebenso nützlichen, als von stupendem Fleisse zeugenden Arbeit „**Poggendorf**[u], Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Leipzig 1863, 2 Bde. in 8." namhaft machen, — und zum Schlusse an die zur Zeit von den sog. Gebildeten verschlungene, fast in alle Sprachen übergetragene und zum Teil noch kommentierte Schrift „**Humboldt**[v], Cosmos: Entwurf einer physischen Weltbeschreibung. Stuttgart 1845—62, 5 Bde. in 8." erinnern zu sollen[w].

Zu 14: *a.* John Cough **Adams** (Lancast in Cornwallis 1819 geb.) ist Prof. astr. und Dir. Obs. Cambridge. — Jean-Joseph **Leverrier** (Saint-Lô in La Manche 1811 — Paris 1877) war Dir. Obs. und Akad. Paris. Vgl. sein „Eloge" durch J. Bertrand und F. Tissérand in Annal. de l'Obs. (Mém. 15). — *b.* Joh. Gottfried **Galle** (Pabsthaus bei Wittenberg 1812 geb.) war damals Adjunkt der Berliner Sternwarte und ist jetzt Prof. astr. Breslau. — *c.* Diese Verbreitung wurde namentlich auch durch grossartige Schenkungen ermöglicht; so z. B. entstand auf diese Weise die Sternwarte in Athen durch Baron **Sina**, diejenige bei Nizza durch den Banquier Raphael **Bischoffsheim**, diejenige auf Mount Hamilton durch den kalifornischen Krösus James **Lick**, etc.; auch zu der Sternwarte in Zürich gab eine durch mich angeregte Schenkung der Erben des sog. Spinnerkönigs Heinrich **Kunz** die erste Veranlassung. — Vgl. XII. — *d.* Vgl. 142. — *e.* Karl August **Steinheil** (Rappoltsweiler im Elsass 1801 — München 1870) war Prof. math. et phys. München, wo er später mit seinem Sohne eine optische Werkstätte gründete. — *f.* Sears Cook **Walker** (Wilmington in Massachusetts 1805 — East Walnut Hills in Ohio 1853) war erst Schulvorsteher, dann Adjunkt der Coast Survey. — William Cranch **Bond** (Falmouth in Maine 1789 — Cambridge 1859) schwang sich vom Uhrmacher zum Dir. Obs. Cambridge (U. S.) auf. Vgl. Monthly Not. 20. Ihm folgte sein Sohn **George** (1826 — 1865). — *g.* Julius **Schmidt** (Eutin 1825 — Athen 1884) war folgeweise Obs. Bilk, Adj. Bonn, Obs. Olmütz und Dir. Obs. Athen. — *h.* Frederik **Kaiser** (Amsterdam 1808 — Leyden 1872) war Prof. astr. und Dir. Obs. Leyden. Vgl. „Oudemans, Levensschets. 1873 in 8." — Franz **Terby** (Löwen 1846 geb.) lebt als Privatgelehrter in Löwen. — *i.* Asaph **Hall** (Goshen U. S. 1829 geb.) war erst Zimmermann und ist jetzt Prof. astr. Washington. — *k.* Karl Ludwig **Hencke** (Driesen 1793 — Marienwerder 1866) stand lange Jahre als Postmeister in Driesen. — *l.* Giovanni Virginius **Schiaparelli** (Savigliano im Piemont

1835 geb.) ist Dir. Obs. Mailand. — *m.* Eduard **Schönfeld** (Hildburghausen 1828 geb.) war Assist. Bonn, dann Dir. Obs. Mannheim und ist jetzt Prof. astr. und Dir. Obs. Bonn. — *n.* Die Brüder Paul und Prosper **Henry** (1848 und 1849 zu Nancy geb.) arbeiten auf der Pariser Sternwarte. — *o.* Im Pfarrhause zu Fällanden bei Zürich 1816 geb., stand ich von 1839—55 als Lehrer math. et phys. an der Realschule in Bern, erhielt dort 1847 die Direktion der kleinen Sternwarte, wurde nach der erwähnten Entdeckung 1852 zum Ehrendoktor, bald darauf auch zum Prof. math. an der Berner Hochschule ernannt und kehrte 1855 bei Gründung des schweiz. Polytechnikums als Prof. astr. in meine Vaterstadt Zürich zurück. — *p.* Richard Christopher **Carrington** (Chelsea 1826 — Churt? 1875) war Bierbrauer und Privatastronom in Redhill und Churt bei Farnham. — Gustav **Spörer** (Berlin 1822 geb.), früher Prof. math. Anclam, ist jetzt Vorsteher der Sonnenwarte in Potsdam. — *q.* William **Huggins** (London 1824 geb.) scheint als Privatgelehrter in London zu leben. — Angelo **Secchi** (Reggio in der Lombardei 1818 — Rom 1878) war Jesuit und Prof. math. et phys. am Georgetown-College bei Washington, seit 1849 Dir. Obs. des Collegio romano. — *r.* Pierre-Jules-César **Janssen** (Paris 1824 geb.) ist Dir. Obs. Meudon bei Paris und Akad. — Norman **Lockyer** (Rugby in Warwickshire 1836 geb.) scheint als Privatgelehrter in London zu leben. — *s.* Henry **Draper** (Virginien 1837 — New York 1882) war Sohn und Nachfolger von William (St. Helens bei Liverpool 1811 — New York 1886), der früher Prof. chem. am Hampden Sidney College in Virginien, dann in New York war. — Hermann Karl **Vogel** (Leipzig 1842 geb.) war früher neben seinem Freunde Wilhelm Oswald **Lohse** (Leipzig 1845 geb.) Obs. Bothkamp. Nach Errichtung des astro-physik. Obs. Potsdam wurden beide an dasselbe berufen. — *t.* William **Chauvenet** (Milford 1819 — St. Paul 1870) war Prof. math. Annapolis und Washington. — *u.* Joh. Christian **Poggendorf** (Hamburg 1796 — Berlin 1877) war Prof. phys. und Akad. Berlin und namentlich durch die von ihm 1824 gegründeten Annalen der Physik und Chemie, von welchen 1874 ein „Jubelband" erschien, allgemein bekannt. — *v.* Alexander v. **Humboldt** (Berlin 1769 — ebenda 1859) war erst Bergbeamter, ging dann auf Reisen und privatisierte später abwechselnd in Paris und Berlin, deren Akademien er angehörte. Vgl. „Bruhns, Alex. v. Humboldt. Leipzig 1872, 3 Vol. in 8." — *w.* Von andern Publikationen erwähne ich: „J. H. **Mädler**, Populäre Astronomie. Berlin 1841 in 8. (ein mit Recht beliebtes Buch, von dem Klein, Strassburg 1885, A. 8 besorgte), und: Geschichte der Himmelskunde. Braunschweig 1873, 2 Bde. in 8. (eine ungeordnete und nicht sehr zuverlässige Arbeit), — Fr. **Kaiser**, De Sterrenhemel. Amsterdam 1844—45, 2 Vol. in 8. (4. A. durch Oudemans, Deventer 1884), — Adolf **Jahn** (Leipzig 1804 — ebenda 1857; Privatgelehrter), Geschichte der Astronomie von 1801—42. Leipzig 1844, 2 Bde. in 8. (viele gute Notizen), und: Wöchentliche Unterhaltungen (später Wochenschrift) für Astronomie und Witterungskunde. Leipzig 1848 u. f., später von Heis, dann von Klein redigiert, — Joseph Emil **Nürnberger** (Magdeburg 1779 — Landsberg 1848; Postmeister in Landsberg), Populäres astronomisches Handwörterbuch. Kempten 1846—48, 2 Bde. in 8., — Karl Theodor **Anger** (Danzig 1803 — ebenda 1858; Gehilfe von Bessel, dann Gymnasialprof. Danzig), Grundzüge der astronomischen Beobachtungskunst. Danzig 1847 in 4., und: Populäre Vorträge über Astronomie. Herausgeg. von G. Zadbach. Danzig 1862 in 8., — J. M. F. **Guérin**, Astronomie indienne, suivie de l'examen de l'astronomie des anciens peuples de l'orient. Paris 1847 in 8., — Thomas-Henry **Martin** (Bellesme in Orne 1813 geb.; Prof. philol. Rennes), Histoire des sciences

physiques dans l'antiquité. Paris 1849, 2 Vol. in 8., — Ludwig **Öttinger** (Edelfingen an der Tauber 1797 geb.; Prof. math. Freiburg i. B.), Die Vorstellungen der alten Griechen und Römer über die Erde als Himmelskörper. Freiburg 1850 in 4., — John **Narrien**, A historical account of the origin and progress of Astronomy. London 1850 in 8., — Elias **Loomis** (Connecticut 1811 geb.; Prof. math. New York), Recent progress of Astronomy, especially in the United States. New York 1850 in 8., — Benjamin Apthorp **Gould** (Boston 1824 geb.; Dir. Obs. Albany und Cordoba), The astronomical Journal. Cambridge U. S. 1851 u. f. in 4. (Bd. 6 erschien 1861; Bd. 7 begann erst 1886 nach seiner Rückkehr aus Argentinien), — Franz Friedrich Ernst **Brünnow** (Berlin 1821 geb.; successive Dir. Obs. Bilk, Ann Arbor und Dublin), Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Berlin 1851 in 8. (4. A. 1881; engl. durch ihn selbst, Berlin 1865; franz. durch Lucas und André, Paris 1869—71), — Joh. **Lamont**, Astronomie und Erdmagnetismus. Stuttgart 1851 in 8., — Robert **Grant**, History of physical Astronomy. London 1852 in 8., — Hervé-Auguste **Faye** (St-Bénoit du Sault 1814 geb.; Prof. astr. und Akad. Paris), Leçons de Cosmographie. Paris 1852 in 8. (2 éd. 1854), ferner: Cours d'astronomie nautique. Paris 1880 in 8., und: Cours d'astronomie de l'école polytechnique. Paris 1881—83, 2 Vol. in 8., — Arthur **Arneth** (Heidelberg 1802 — ebenda 1858; Gymnasialprof. Heidelberg), Geschichte der reinen Mathematik. Stuttgart 1852 in 8., — Ernst Friedrich **Apelt** (Reichenau in der Ober-Lausitz 1812 — Oppelsdorf bei Görlitz 1859; Prof. philos. Jena), Die Reformation der Sternkunde. Jena 1852 in 8., — Ch. E. **Delaunay**, Cours élémentaire d'astronomie. Paris 1853 in 8. (7 éd. par A. Lévy 1884), — D. Fr. **Arago**, Astronomie populaire. Paris 1854—57, 4 Vol. in 8. (deutsch durch W. G. Hankel, mit Noten von d'Arrest, Leipzig 1855—59; engl. durch Smyth und Grant, London 1855—58; die unter Aragos Namen erschienenen „Leçons d'astronomie. Paris 1834 in 12. [und später]" sind von ihm nie anerkannt worden), — Rud. **Wolf**, Astronomische Mittheilungen (seit 1856 in Zürch. Viert.; darin seit 1873 Verz. der Sammlung der Zürch. Sternw.), ferner: Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. Zürich 1858—62, 4 Vol. in 8. (dazu mehrere hundert Nachträge als „Notizen zur schweiz. Kulturgesch." in Zürch. Viert. seit 1861), ferner: Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Zürich 1869—72, 2 Bde. in 8., und: Geschichte der Vermessungen in der Schweiz. Zürich 1879 in 4., — Edmond **Dubois** (Brest 1822 geb.; erst Prof. an der Ecole navale in Brest, dann Examinator der Marine), Cours d'astronomie. Paris 1858 in 8. (3 éd. 1876), — C. A. **Peters**, Zeitschrift für populäre Mittheilungen aus dem Gebiete der Astronomie und verwandter Wissenschaften. Altona 1858—69, 3 Vol. in 8., — L. **Hoffmann**, Mathematisches Wörterbuch. Berlin 1858—67, 7 Vol. in 8. (beendigt durch L. Natani), — James David **Forbes** (Colinton bei Edinburgh 1809 — Edinburgh 1869; Prof. phys. Edinburgh), A Review of the Progress of mathematical and physical Sciences in more recent times. Edinburg 1858 in 4., — Otto **Ule** (Lossow in Nassau 1820 — Halle 1876; Privatg. Halle), Die Wunder der Sternenwelt. Leipzig 1859 in 8. (2. A. durch Klein 1877), — Otto **Struve**, Librorum in Bibliotheca Speculæ Pulcovensis contentorum Catalogus systematicus. Petropoli 1860—80, 2 Vol. in 8. (ein äusserst schätzbares bibliographisches Hilfsmittel), — George Cornwall **Lewis**, An historical survey of the Astronomy of the Ancients. London 1862 in 8., — Oskar **Peschel** (Dresden 1826 — Leipzig 1875; Prof. geogr. Leipzig), Geschichte der Erdkunde. München 1865 in 8. (2. A. durch S. Ruge 1877), — Moritz **Cantor** (Mannheim 1829 geb.; Prof. math. Heidelberg),

Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Halle 1863 in 8., und: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. 1. Leipzig 1880 in 8., — Robert **Main** (Upnor bei Rochester 1808 — Oxford 1878; erst Assist. Greenwich, dann Radcliffe Observer), Practical and spherical Astronomy. Cambridge 1863 in 8., — Georg **Hoffmann**, Die Astronomie der Griechen bis auf Euripides. Triest 1865 in 8., — Camille **Flammarion** (Montigny le Roi 1842 geb.; Schriftsteller in Paris), Les merveilles célestes. Paris 1865 in 8., ferner: Etudes et lectures sur l'astronomie. Paris 1867—80, 9 Vol. in 12., und: L'Astronomie. Paris 1882 u. f. in 4., — Emanuel **Liais**, Traité d'astronomie appliquée à la géographie et à la navigation. Paris 1867 in 8., — Balth. **Boncompagni**, Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Roma 1868 u. f. in 4., — Rud. **Falb**, Sirius: Zeitschrift für populäre Astronomie. Gratz 1868 u. f. in 8. (später von Klein redigiert und in Leipzig ausgegeben), — James **Watson** (Elgin in Kanada 1838 — Madison 1880; Prof. astr. und Dir. Ann Arbor, dann Dir. Washburn Obs. in Madison), Theoretical Astronomy. Philadelphia 1868 in 8. (2. ed. 1885), — Hermann **Klein** (Köln 1842 geb.; früher Buchhändler, dann Litterat in Köln), Handbuch der allg. Himmelsbeschreibung. Braunschweig 1869—71, 2 Bde. in 8., und: Astronomisches Handwörterbuch. Berlin 1871 in 8. (2. A. Stuttgart 1888), — Wilfried de **Fonvielle** (Paris 1828 geb.; Schriftsteller in Paris), L'astronomie moderne. Paris 1869 in 8. (streift an die verwerfliche Litteratur), — Pietro **Riccardi** (Modena 1828 geb.; Prof. geod. Modena und Bologna), Biblioteca matematica italiana. Modena 1870, 2 Vol. in 4., — Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Rédig. par **Darboux** et **Hoüel**. Paris 1870 u. f. in 8., — Pietro **Tacchini** (Modena 1839 geb.; früher Obs. Palermo, jetzt Dir. der ehemaligen Sternwarte des Collegio romano), Memorie della Società degli Spettrocopisti italiani. Palermo und Rom 1872 u. f. in 4. (eine sehr wichtige Publikation), — Ferdinand **Höfer** (Döschnitz in Schwarzburg-Rudolstadt 1811 — Sannois in Seine-et-Oise 1878; Litterat in Paris und Redaktor der Biographie générale), Histoire de l'astronomie. Paris 1873 in 8., und: Histoire des mathématiques. Paris 1874 in 8., — Heinrich **Suter** (Hedingen bei Zürich 1848 geb.; Gymnasialprof. Zürich), Geschichte der mathem. Wissenschaften. Zürich 1873—75, 2 Vol. in 8., — Isaac **Todhunter**, A History of the mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the time of Newton to that of Laplace. London 1873, 2 Vol. in 8., — Hermann **Hankel** (Halle 1839 — Schramberg 1873; Prof. math. Tübingen), Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig 1874 in 8. (vom Vater, Prof. Wilh. Gottl. Hankel in Leipzig, aus dem Nachlasse publizierte, höchst wertvolle Fragmente, während sein Vortrag „Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Tübingen 1869 in 8." verschiedene Inkonsequenzen und harte Urteile enthält), — F. W. **Loeff**, Geschichte der Astronomie. Langensalza 1875 in 8., und: Die Himmelskunde in ihrer geschichtlichen Entwicklung. Langensalza 1886 in 8. (eigentlich eine 2. A. der erstern Schrift und wie diese ziemlich unbedeutend), — Sigmund **Günther** (Nürnberg 1848 geb.; lange Prof. math. Ansbach, jetzt Prof. geogr. München), Ziele und Resultate der neuern mathematisch-historischen Forschung. Erlangen 1876 in 8., ferner: Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1876 in 8., ferner: Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie. Halle 1877—79, 6 Hefte in 8., und: Geschichte des mathem. Unterrichts im deutschen Mittelalter (Kehrbach, Monumenta Germaniæ pædagogica, Bd. 3), Berlin 1887 in 8., — Karl Immanuel **Gerhardt** (Herzberg 1816 geb.; Gymnasialprof. Eisleben),

Geschichte der Mathematik in Deutschland. München 1877 in 8., — David **Bierens** de Haan (Amsterdam 1822 geb.; Prof. math. Leyden), Bouwstoffen voor de Geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden. 1878—87, 2 Vol. in 8., — Hugo **Gyldèn** (Helsingfors 1841 geb.; erst Obs. Pulkowa, jetzt Dir. Obs. Stockholm), Die Grundlehren der Astronomie nach ihrer geschichtlichen Entwicklung dargestellt. Leipzig 1877 in 8., — Simon **Newcomb** (Wallace in Nova Scotia 1835 geb.; Prof. astr. Washington), Popular Astronomy. London 1878 in 8. (2. ed. 1883; deutsch durch R. Engelmann, Leipzig 1881), — W. H. M. **Christie**, The Observatory, a monthly review of Astronomy. London 1878 u. f. in 8., — Jos. **Bonnel**, Etude sur l'histoire de l'astronomie occidentale au moyen-age. Lyon 1879 in 8., — Adolf **Drechsler** (Waldkirchen im Erzgebirge 1815 — Dresden 1888; Dir. math. Salon in Dresden), Lexikon der Astronomie und Chronologie. Leipzig 1881 in 8., — Ralph **Copeland** and J. L. E. **Dreyer**, Copernicus: An international Journal of Astronomy. Dublin 1881—84, 3 Vol. in 4., — Ciel et terre: Revue populaire d'astronomie et de physique du globe. Bruxelles 1881 u. f. in 8., — Jean-Charles **Houzeau** (Mons 1820 — Schaerbeck bei Brüssel 1888; kurze Zeit Dir. Obs. Brüssel), Vademecum de l'astronome. Bruxelles 1882 in 8., und (in Verbindung mit A. Lancaster): Bibliographie générale de l'astronomie. Bruxelles 1882 u. f. in 8. (bis jetzt II$^{a, b}$ und I^{a} mit bemerkenswerter historischer Einleitung erschienen), — Abel **Souchon**, Traité d'astronomie pratique. Paris 1883 in 8., — Nikolaus v. **Konkoly** (Budapest 1842 geb.; Besitzer Obs. O-Gyalla), Praktische Anleitung zur Anstellung astronomischer Beobachtungen mit besonderer Rücksicht auf die Astrophysik. Braunschweig 1883 in 8., — Maximilien **Marie**, Histoire des sciences mathématiques et physiques. Paris 1883—88, 12 Vol. in 8. (mehr eine wissenschaftliche Plauderei, als eine eigentliche Geschichte), — William Wallace **Payne** (1837 geb.; Dir. Carleton College Observatory), The sidereal Messenger. Horthfield 1883 u. f. in 8., — Félix **Tissérand** (Nuits in Côte-d'or 1845 geb.; früher Prof. Toulouse, jetzt Akad. Paris), Bulletin astronomique. Paris 1884 u. f. in 8., — Agnes **Clerke**, A popular History of Astronomy during the 19th century. Edinburgh 1885 in 8. (2 ed. 1887; deutsch durch H. Maser, Berlin 1889), — Josef **Herr** (Wien 1819 — ebenda 1884; Prof. math., astr. und geod. Prag und Wien), Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Wien 1887 in 8. (vollendet durch Wilh. Tinter), — H. **Weissenborn**: Gerbert. Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters. Berlin 1888 in 8., — E. **Caspari**, Cours d'astronomie pratique. Paris 1888, 2 Vol. in 8., — Himmel und Erde. Populäre illustrierte Monatschrift. Herausgeg. von der Gesellschaft Urania unter Redaktion von W. Meyer. Berlin 1888 u. f. in 8., — etc."

III. Einige Vorkenntnisse aus der Arithmetik.

Die Mathematik ist einem scharfen Messer zu vergleichen, das nichts nützt, wenn man nichts damit zu schneiden hat und zu schneiden weiss. (Horner.)

---

15. Einleitendes. — Was eines „mehr und minder“ fähig ist, heisst **Grösse**, die Lehre von den Grössen **Mathematik** [a]. Die Grössen können nun entweder ganz abstrakt, oder in Raum und Zeit betrachtet werden, und entsprechend teilt sich die Mathematik in **Arithmetik, Geometrie** und **Mechanik**, je nachdem sie sich die Aufgabe stellt, die Eigenschaften der sog. **Zahlen** (16), die Regeln für das Operieren mit denselben und die Gesetze ihrer Beziehungen zu entwickeln (16—52), — oder die sog. **Raumgebilde** (53) nach ihrer Entstehung, organischen Beschaffenheit und Verwandtschaft zu betrachten (53—106), — oder endlich die durch sog. **Kräfte** (107), sei es bloss versuchten, sei es in bestimmter Zeit bewirkten Bewegungen, zu studieren (107—116). Sowie diese Kräfte specialisiert und, sowohl ihnen als den Gebilden, auf welche sie wirken, bestimmte und in der Natur vorkommende, durch Beobachtungen oder Versuche ermittelte Gesetze und Eigenschaften zugeteilt werden, tritt man aus dem Gebiete der reinen Mathematik in dasjenige der sog. **Physik** (117—160) über. — Die Verrichtung des Zählens, die Einführung von Buchstaben oder Kerben als Zahlzeichen und die einfachsten bürgerlichen Rechnungsvorschriften, die sog. **Logistik** der Griechen [b], datieren mutmasslich aus vorhistorischer Zeit und hatten jedenfalls, wie uns der etwa im 17. Jahrhundert v. Chr. von einem gewissen **Ahmes** verfasste „Papyrus Rhind“ zeigt [c], schon bei den alten Egyptern eine etwelche Entwicklung erreicht, — während dagegen die eigentliche Zahlenlehre, oder die **Arithmetik** im engern Sinne [d], wahrscheinlich erst von den spätern Indiern und den Griechen kultiviert, namentlich durch **Euklid** und **Diophant** [e], entwickelt wurde. So wichtig aber, vom theoretischen Standpunkte aus betrachtet, die von diesen

Mathematikern gemachten Untersuchungen waren, so konnte eine eigentlich fruchtbare Entwicklung der Arithmetik doch erst statthaben, als die glückliche Idee der Indier, die Zahlzeichen mit „Stellenwert“ zu versehen, hinzutrat, weil nur dadurch die Möglichkeit gegeben war, grössere numerische Rechnungen mit Leichtigkeit auszuführen: Dies war namentlich bei den Arabern der Fall, welche überdies die Lehre von den Gleichungen beträchtlich erweiterten und in ihrer „Regula Elchatayn (27)“ den Grund zu den spätern Methoden für Auflösung der numerischen Gleichungen legten. Als sodann (16) auf verschiedenen Wegen die sog. „arabischen“ Zahlzeichen nach dem Abendlande kamen, wurde das dort bis dahin übliche Rechnen „auf der Linie (16)“ bald durch dasjenige „mit der Feder“ verdrängt und die Leonardo **Fibonacci**, Nicolas **Chuquet**, Christoph **Rudolff** etc.[f] hatten bei ihren Bestrebungen, jene arithmetischen Kenntnisse auf ihre Landsleute überzutragen und dieselben gleichzeitig zu erweitern, den schönsten Erfolg[g], — ja es trieb die junge Pflanzung auf dem neuen Boden bald auch neue Blüten: Vor allem bildete sich, um nur das für die Anwendung allerwichtigste hervorzuheben, nach und nach die für ein sicheres Operieren notwendige mathematische Zeichensprache aus; ferner trat an die Stelle der frühern Sexagesimalrechnung die für das numerische Rechnen viel bequemere Decimalrechnung, und etwas später schufen (22—24) die **Bürgi**, **Neper** und **Briggs**[h] die seither allen Praktikern unentbehrlich gewordenen Logarithmen. — Um die Mitte des 17. Jahrhunderts tauchten bei Behandlung gewisser geometrischer Probleme (53, 70) bei verschiedenen Geometern, voraus bei **Fermat**[i], Verfahren auf, welche nur noch etwas verallgemeinert und mit der nötigen Symbolik versehen werden mussten, um zur sog. „Infinitesimalrechnung“ zu werden, durch deren endgiltige Schöpfung sich bald darauf **Leibnitz**[k], **Newton** und die sog. ältern **Bernoulli** ein so eminentes Verdienst um die Mathematik erwarben. Gleichzeitig hatte sich auch die Lehre von den Reihen entwickelt und als sodann **Euler** diese verschiedenen Arbeiten vervollständigte, sowie zu einem Ganzen vereinigte, dabei zugleich die frühere Unbeholfenheit im mathematischen Schreiben und Operieren überwindend, so war die reine Mathematik in stand gesetzt, gewisse Aufgaben fast spielend zu lösen, welche früher unüberwindliche Schwierigkeiten darzubieten schienen. Was seither auf dieser Basis durch die **Lagrange**, **Cauchy**, **Riemann**[l] etc. geleistet wurde, kann hier nicht näher entwickelt werden und ich muss mich darauf beschränken, noch anzuführen, dass in der neuern Zeit entsprechend auch die, der Arithmetik schon durch die **Pascal**, Jakob **Bernoulli**, **Moivre**[m] etc. beigefügten Gebiete

der Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung, weiter bearbeitet worden sind und namentlich, wie schon früher (13) erwähnt wurde, den induktiven Wissenschaften höchst wertvolle Hilfsmittel verschafft haben [n].

Zu 15: *a.* Der Name **Mathematik** hat strenge genommen keine unmittelbare Beziehung zur Grössenlehre, da μάθησις oder μάθημα überhaupt Kenntnis oder Wissenschaft bezeichnen; jedoch verstanden schon die Alten unter μαθήματα vorzugsweise unsere mathematischen Wissenschaften. — *b.* Die mit der Λογιστική der Griechen übereinstimmende praktische Rechenkunst wurde wohl auch als „Arithmetica numerosa“ und von **Vieta** als „Ars minor“ bezeichnet. — *c.* Der von Henry **Rhind** in Egypten erworbene Papyrus kam nach dessen Tod an das British Museum und wurde von Aug. **Eisenlohr** unter dem Titel „Ein mathematisches Handbuch der alten Egypter. Leipzig 1877 in 4. (mit 24 Taf. in fol.)“ publiciert, sowie mit Hilfe von Mor. **Cantor** kommentiert. — *d.* Die mit der Ἀριθμητική der Griechen übereinstimmende Zahlenlehre wurde wohl auch als „Arithmetica speciosa“ oder als „Algebra (Al-jebr)“, und von **Vieta** als „Ars major“ bezeichnet. — *e.* Für Euklids Elemente auf später (53) verweisend, erwähne ich, dass die von **Diophant** (um 160 n. Chr. in Alexandrien lebend) auf uns gekommenen 6 Bücher seines „Ἀριθμητικῶν“ durch **Xylander** eine erste Ausgabe in lat. Übers. „Basileæ 1575 in fol.“ und durch Claude-Gaspard **Bachet** (Bourg-en-Bresse 1587 — Paris 1638; Prof. rhet. Mailand) eine erste Originalausgabe „Lutetiæ 1621 in fol.“ erhielten. — *f.* Leonardo filius Bonacci aus Pisa, genannt Leonardo Pisano oder **Fibonacci** (1160? — 1230?) wurde auf Reisen nach Egypten und der Levante mit der Arithmetik des Orients vertraut und schrieb etwa 1202 sein „Liber Abaci“. Vgl. für ihn „**Boncompagni,** Della vita et delle opere di Leonardo Pisano. Roma 1852 in 4.“, und die durch ebendenselben herausgegebenen „Scritti die Leonardo Pisano. Roma 1857—62, 2 Vol. in 4.“ — Nicolas **Chuquet** kennt man nur aus einem von 1484 datierenden Pariser-Manuskripte, das Aristide **Marre** unter dem Titel „Le Triparty en la Science des Nombres, par Maistre Nicolas Chuquet, Parisien. (Bull. Bonc. 1880). Rome 1881 in 4.“ herausgegeben hat und auf welches wir noch mehrfach zurückkommen werden. — Christoph **Rudolff** (Jauer bei Liegnitz in Schlesien 1499? — Wien 1545?) erhielt durch Heinrich Schreiber gen. **Grammateus** (Erfurt 1485? — ebenda 1540?; Prof. math. Wien) ersten Unterricht in der sog. Coss (27) und schrieb sodann „Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinichlich die Coss genennt werden. Strassburg 1525 in 8. (vielleicht schon: Wien 1524), und: Künstliche rechnung mit der ziffer und mit den zalpfennigen. Wien 1526 in 8. (auch: Nürnberg 1557)“. Von ersterem Werk gab Michael **Stifel** (Esslingen 1487 — Jena 1567; successive Augustinermönch, protest. Pfarrer zu Annaberg und Prof. math. Jena) später „Königsberg 1554 in 4.“ eine neue und stark vermehrte Ausgabe. — Anhangsweise erwähne ich die um 1330 durch Bernard **Barlaam** (Neapel 1348? als Bischof von Geraci verstorben) verfassten „Libri V logisticæ et astronomicæ“, welche später „Argentorati 1572 in 8.“ erschienen. — *g.* Das älteste in italienischer Sprache gedruckte Rechenbuch soll dasjenige von Pietro **Borgo** „Venet. 1482“ sein, — die ersten in deutscher diejenigen, welche der Nürnberger Rechenmeister Ulrich **Wagner** schrieb und Heinrich **Petzensteiner** „Bamberg 1482 und 1483“ auflegte, von welchen sich aber (vgl. Unger in n) nur das zweite, und auch dieses nur zu Zwickau, in einem voll-

ständigen Exemplare erhalten haben soll; letztern folgte dann bald das sich darauf stützende, bekanntere „Joh. **Widman** von Eger, Meyster in denn freyen künsten tzu leyptzick: Behende und hubsche Rechenung auf allen kauffmannschaft. Leipzig 1489 in 12.“ Aus dem 16. Jahrhundert sind als Rechenmeister „par excellence“ Adam **Riese** (Staffelstein bei Bamberg 1492 — Annaberg 1559; Lehrer der Arithmetik und Besitzer eines Vorwerks zu Annaberg) und Heinrich **Strübi** (Zürich 1540? — ebenda 1594; Lehrer in Zürich), sowie ihre Rechenbücher „Rechenung nach der Lenge auf der Linihen und Feder. St. Annenberg 1550 in 4., — und: Arithmetica oder new-künstliches Rechenbüchlein mit der Ziffer. Zürich 1588 in 8.“ zu erwähnen. — *h.* John Napier oder **Neper** (Merchiston Castle bei Edinburgh 1550 — ebenda 1617) war ein schottischer Baron, der, nachdem er 1571 von einer Reise durch Deutschland, Frankreich und Italien zurückgekehrt war, sein Stammschloss nur selten, Schottland nie mehr verlassen haben soll. Vgl. „Mark **Napier**, Memoirs of John Napier, with a history of the invention of logarithms. London 1834 in 4.“ — Henry **Briggs** (Halifax 1556? — Oxford 1630) war Prof. math. London und Oxford. — *i.* Pierre **Fermat** (Toulouse 1608 — ebenda 1665) war Rat am Parlament zu Toulouse. Vgl. „E. **Brassine,** Précis des œuvres de Fermat. Paris 1853 in 8.“ und „Varia opera mathematica. Tolosæ 1679 in fol. (Neudruck von Friedländer 1861)“. — *k.* Gottfried Wilhelm v. **Leibnitz** (Leipzig 1646 — Hannover 1716) war hannover'scher Bibliothekar und Historiograph, auch Präsident der auf seine Veranlassung gegründeten Berliner Akademie. Vgl. Biographie durch **Guhrauer** „Breslau 1845, 2 Vol. in 8.“ und seine durch **Gerhardt** herausgeg. „Mathemat. Schriften. Berlin 1849 — Halle 1863, 7 Bde. in 8.“ — *l.* Augustin-Louis **Cauchy** (Paris 1789 — Sceaux 1857) war Prof. math. und Akad. Paris, auch Ingénieur-en-chef des ponts-et-chaussées, — lebte nach der Juli-Revolution längere Zeit als Erzieher des Herzogs von Bordeaux in Österreich, — und lehrte später im Ordenshause der Jesuiten zu Paris Mathematik. Vgl. „**Valson,** Vie et catalogue des ouvrages d'Aug. Cauchy. Paris 1868, 2 Vol. in 8.“ und seine seit 1882 zu Paris erscheinenden „Oeuvres complètes“. — Georg Friedrich Bernhard **Riemann** (Brestelenz in Hannover 1826 — Intra 1866) war Prof. math. Göttingen. Vgl. „Gesammelte mathemat. Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgeg. von H. Weber. Leipzig 1876 in 8.“ — *m.* Blaise **Pascal** (Clermont-Ferrand 1623 — Paris 1663) privatisierte in Clermont, Rouen und Paris. Vgl. den von **Bossut** verfassten „Discours. Paris 1781 in 8.“, und die von ebendemselben besorgten „Oeuvres. Paris 1779, 5 Vol. in 8. (2 éd. 1819 in 6 Vol.)“. — Abraham de **Moivre** (Vitry in der Champagne 1667 — London 1754) flüchtete sich nach Aufhebung des Edikts von Nantes und lebte als Privatlehrer der Mathematik in London. Vgl. sein „Eloge“ durch **Fouchy** in Mém. Par. 1754 und seine „Miscellanea analytica. Londini 1730 in 4.“ — *n.* Zum Schlusse mag noch eine kleine Auswahl bis jetzt nicht erwähnter Lehrbücher und historischer Schriften folgen: „Luca **Paccioli** de Burgo (Minorit, von San Sepolcro in Toskana gebürtig; lebte etwa von 1450—1509; lehrte in Neapel, Mailand, Rom und noch 1508 in Venedig), Summa de arithmetica et geometria. Venetiis 1494 in fol. (auch 1523), — Estienne de **La Roche** dit Villefranche (um 1493 „maître d'algorisme“ in Lyon), Larismétique et géométrie. Lyon 1520 in fol. (auch 1538; soll ganz auf Chuquet basieren), — Mich. **Stifel,** Arithmetica integra. Norimbergæ 1544 in 4., und: Deutsche Arithmetica. Nürnberg 1544 in 4., — Nicola Fontana, als Stotterer genannt **Tartaglia** (Brescia 1506 — Venedig 1559, wo er als Privatl. math. lebte), Trattato de numeri e

misure. Venezia 1556—60 in fol., — François Viète oder **Vieta** (Fontenay-le-Comte in Poitou 1540 — Paris 1603; Advokat und später Conseiller von Henry IV.; vgl. „Allégret, Eloge. Poitiers 1867 in 8.“), Isagoge in artem analyticam. Tours 1591 in fol. (auch in den durch Schooten besorgten „Opera mathematica. Lugd. Batav. 1646 in fol.“), — Thomas **Harriot** (Oxford 1560 — London 1621; Pensionär des Grafen von Northumberland), Artis analyticæ praxis ad æquationes algebraicas resolvendas. Londini 1631 in fol., — John **Wallis** (Ashford in Kent 1616 — Oxford 1703; Dr. theol.; Prof. geom. Oxford), Treatise of Algebra both historical and practical. London 1685 in fol., — Leonh. **Euler**, Introductio in Analysin infinitorum. Lausannæ 1748, 2 Vol. in 4. (deutsch von Michelsen, Berlin 1788—91 und der erste Teil noch Berlin 1885 durch H. Maser; franz. durch Labey, Paris 1796—97), und: Anleitung zur Algebra. Petersburg 1771, 2 Bde. in 8. (holländ. Amsterdam 1773; franz. mit Anmerkungen von Lagrange, Lyon 1794; engl. durch Francis Horner, London 1828), — Maria Gaetana **Agnesi** (Mailand 1718 — ebenda 1799; Prof. math. Bologna; vgl. „Frisi: Elogio. Milano 1799), Istituzione analitiche. Bologna 1748, 2 Vol. in 4. (engl. durch Colson, London 1801), — Etienne **Bezout** (Némours 1730 — Gatinois 1783; Akad. Paris), Cours de mathématiques. Paris 1770, 4 Vol. in 8. (2 éd. 1800), — Pietro **Cossali** (Verona 1748 — Padua 1815; Prof. math. et phys. Parma und Padua), Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra. Parma 1796—99, 2 Vol. in 4. (eine beabsichtigte „Storia dell' Aritmetica“ brachte er nicht mehr zur Ausführung), — Bernhard Friedrich **Thibaut** (Harburg 1775 — Göttingen 1832; Prof. math. Göttingen), Grundriss der reinen Mathematik. Göttingen 1801 in 8. (5. A. 1831), — George **Peacock** (Thomton 1791 — Ely 1858; Prof. math. Cambridge), Arithmetic (Artikel in Encycl. Metrop. 1825/6), — Georg Heinrich Ferdinand **Nesselmann** (Fürstenau 1811 geb.; Prof. orient. Königsberg), Die Algebra der Griechen. Berlin 1842 in 8., — Augustus de **Morgan** (Madura in Ostindien 1806 — London 1871; Prof. math. London; vgl.: Memoirs, London 1883 in 8.), Arithmetical books. London 1847 in 8., — Charles-François **Sturm** (Genève 1803 — Paris 1855; Prof. math. und Akad. Paris; vgl. Biogr. IV), Cours d'analyse. Paris 1857—59, 2 Vol. in 8. (8 éd. par A. de St-Germain 1887), — Richard **Baltzer** (Meissen 1818 — Giessen 1887; Prof. math. Dresden und Giessen), Die Elemente der Mathematik. Leipzig 1860—62, 2 Vol. in 8. (6. A. 1879—83; ital. durch Cremona, Genua 1868), — P. **Treutlein**, Das Rechnen im 16. Jahrhundert (Abhandl. zur Gesch. der Math., Heft 1 von 1877), — Gottfried **Friedlein** (Regensburg 1828 — Hof 1875; Rektor im Hof), Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christl. Abendlandes vom 7.—13. Jahrhundert. Erlangen 1869 in 8., — C. **Jordan**, Cours d'analyse de l'école polytechnique. Paris 1882—1887, 3 Vol. in 8., — Franz **Villicus**, Zur Geschichte der Rechenkunst. Wien 1883 in 8., — H. **Laurent**, Traité d'analyse. Paris 1885—88, 3 Vol. in 8., — Fr. **Unger**, Die Methode der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung. Leipzig 1888 in 8. (eine auf gründlichem Quellenstudium beruhende, auch hier mehrfach benutzte Arbeit), — etc.“

16. Die Zahlen und ihre Bezeichnung. — Wiederholt man eine Grösse oder eine sog. **Einheit**, unter gleichzeitigem Aussprechen einer bestimmten Folge von Namen oder Aufschreiben für letztere gewählter Zeichen, so nennt man diese Doppeloperation **zählen** und erhält durch dieselbe successive neue Grössen derselben

Art, sog. **Vielfache**, von welchen jede durch den ihr entsprechenden Namen, das Zählwort oder die **Zahl**, gekennzeichnet ist [a]. Umgekehrt kann man auch die Einheit als **Teil** eines Vielfachen oder sog. **Ganzen** auffassen und eine Grösse dadurch bestimmen, dass man durch eine Zahl, den **Zähler**, angiebt, wie viele Teile sie enthält, und durch eine andere Zahl, den **Nenner**, wie viele Teile auf das Ganze kommen: Zähler und Nenner zusammen bilden einen sog. **Bruch** [b]. — Als **Zahlzeichen** wurden anfänglich meistens Kerben oder Buchstaben angewandt, so dass jede einzelne Zahl ihr bestimmtes Zeichen besass [c] und erst später fand die indische Übung allgemeinen Eingang, sich auf neun, den sog. **Einern** entsprechende Zahlzeichen zu beschränken, diesen aber auch noch einen **Stellenwert** beizulegen und für fehlende Stellen ein Stellenzeichen, die **Null**, einzuführen [d]. Die so als specielle Zahlzeichen überflüssig gewordenen Buchstaben konnten nunmehr als allgemeine Zahlzeichen Verwendung finden [e].

Zu 16: *a.* Die ältesten Völker benutzten mutmasslich ziemlich übereinstimmend, wie es jetzt noch (vgl. Kapitän W. Bade in Mitth. der ostschweiz. geogr. Ges. 1884/5) bei den Eskimos der Fall sein soll, nur fünf den Fingern oder Zehen entsprechende Zahlwörter, welche sie mit Hand, Fuss und Mensch in der Weise kombinierten, dass z. B. 7 als „zweiter Finger der andern Hand", 20 als „letzte Zehe am andern Fuss", 54 als „vierte Zehe am ersten Fuss und zwei Menschen zu end", etc. bezeichnet wurde; weiter als 100 oder „fünf Menschen zu end" scheinen sie gar nicht gegangen zu sein. Bei den sog. Kulturvölkern wurde sodann bald dieses **pentadische** System, unter Verdopplung der Zählwörter und Kombination derselben mit dazu passenden Kollektivnamen (Hundert, Tausend, Million, etc.), durch das noch gegenwärtig gebräuchliche **dekadische** ersetzt. Dabei kam zum Notieren der Zahlen und zum Manipulieren oder **Rechnen** mit denselben ein sog. **Rechenbret** (ἄβαξ, abacus) in Gebrauch, auf dem längs Linien, welche für die Einer, Zehner, etc. bestimmt waren, sog. **Rechenpfennige** gelegt, wohl auch längs Saiten oder Drähten kleine Kugeln verschoben wurden, wie man dies jetzt noch bei dem durch **Pencelet** aus russischer Gefangenschaft zurückgebrachten Compteur findet, der seither da und dort wieder in die Volksschule eingeführt worden ist, in Würdigung des Ausspruches von Adam **Riese**: „Ich habe befunden in Unterweisung der Jugend, dass alleweg die so auf den Linien anheben des Rechnens fertiger werden, denn so mit den Ziffern, die Feder genannt, anfahen." — *b.* Der **Bruchstrich** wurde mutmasslich gleichzeitig mit den Ziffern aus dem Orient eingeführt. — Die Griechen drückten, wie laut **Ahmes** schon die alten Egypter, die Brüche meistens durch eine Folge von **Stammbrüchen** (Brüchen des Zählers 1) aus und schrieben von letztern nur die Nenner auf, ihnen einen Accent beisetzend: So z. B. war bei ihnen $\beta = 2$, $\delta = 4$, also $\beta' = {}^1/_2$, $\delta' = {}^1/_4$, und $\beta'\,\delta' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = {}^3/_4$. — *c.* Die Römer (und mutmasslich auch die alten Deutschen) wandten zur Zahlbezeichnung eine bestimmte Folge von Kerben an, zogen aber für einzelne grössere Zahlen wenigstens später (vgl. Zangemeister in Berl. Sitzungsb. 1887) auch Buchstaben bei, wie L für 50,

C für 100, D für 500 und M für 1000; dabei verstanden sie unter „mille", das sie zuweilen mit ∞ bezeichnet haben sollen, auch überhaupt eine sehr grosse Zahl, wie wir unter „tausend und abertausend", und so mag ∞ nach und nach zu seiner jetzigen Bedeutung gekommen sein, in welcher es spätestens in „**Wallis**, Arithmetica infinitorum. Oxonii 1655 in 4." auftritt. — Die Griechen benutzten als Zahlzeichen ihre 24 Buchstaben und drei neue Zeichen ϛ, ϙ, ϡ, so dass

α …	1	ι …	10	ρ …	100	α, …	1000	αM …..	10000
β	2	κ	20	σ	200	β,	2000	⋮	⋮
γ	3	λ	30	τ	300	γ,	3000	ρM …..	Million
δ	4	μ	40	υ	400	δ,	4000	⋮	⋮
ε …	5	ν …	50	φ …	500	ε, …	5000	αMM …	100 Mill.
ϛ	6	ξ	60	χ	600	ϛ,	6000	⋮	⋮
ζ	7	ο	70	ψ	700	ζ,	7000	etc.	
η	8	π	80	ω	800	η,	8000		
θ	9	ϙ	90	ϡ	900	θ,	9000		

bezeichnete und der Repräsentant M einer sog. **Myriade** oder dem Anhängen von vier Nullen entsprach. — *d.* Unsere gegenwärtigen Zahlzeichen sind nach „Franz. **Wöpcke** (Dessau 1826 — Paris 1864; als Litterat in Paris und Rom lebend), Mémoire sur la propagation des chiffres indiens (Journ. asiat. 1863)" nichts anderes als Deformationen von den Anfangsbuchstaben der Zahlwörter des Sanskrit, während neuere Forscher diese Ansicht lebhaft bekämpfen; zum Glücke ist es ziemlich gleichgiltig, wer Recht hat, da das charakteristische nicht ihre Form, sondern ihr nach orientalischer Schreibweise von rechts nach links zunehmender Stellenwert ist, sowie das zur Ausfüllung leerer Stellen eingeführte Stellenzeichen **Null** (arabisch: cifron = leer; ital.: zephiro oder abgekürzt zero; daher der Name Ziffer, der später auch auf die übrigen Zahlzeichen überging), welches letztere übrigens schon die Griechen bei ihrer Sexagesimalrechnung (vgl. 57) verwandten, da bei dieser der Buchstabenbedarf mit ξ = 60 abschloss, also der folgende Buchstabe ο zur Verfügung stand. Sie waren bei den Indiern schon zur Zeit von **Brahmagupta** (598 geb.) gebräuchlich, — gingen dann auf die Araber über, wo das Rechnen mit denselben zu Ehren des im 9. Jahrhundert lebenden Mohammed ben Musa Alkhowārizmi oder **Alkhorizmi** als **Algorithmus** bezeichnet wurde, — und kamen dann auf verschiedenen Wegen nach dem Westen, wo sie sich vielleicht schon zur Zeit von **Boëtius** (6. Jahrh.) oder **Gerbert** (10. Jahrh.), jedenfalls spätestens 1134 (also vor Fibonacci) in einer von dem Juden Abraham **Savacorda** in Barcelona aus dem Arabischen gemachten Übersetzung vorfinden, um sich dann nachher, wenn auch langsamer als man denken sollte, über ganz Europa zu verbreiten. — *e.* Als allgemeine Zahlzeichen wurden die Buchstaben schon bereits durch den mutmasslich aus Thüringen gebürtigen und zu Anfang des 13. Jahrhunderts florierenden, wahrscheinlich 1236 gestorbenen Jordanus **Nemorarius** in seiner Schrift „De numeris datis (vgl. P. Treutlein in Abhandl. zur Gesch. d. Math. Heft 2 von 1879)" in ausgiebiger Weise, und sodann auch von spätern wenigstens beiläufig benutzt; aber die definitive Einführung geschah doch erst etwa 1590 durch **Vieta** und wurde auch da noch durch den Mangel an Zeichen erschwert, so dass er z. B. „A quadratum + A in B bis + B quadrato æquabantur A + B quadrato" zu schreiben hatte, anstatt dass wir jetzt „$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$" zu setzen haben.

17. Die Addition und Subtraktion. — Die Arithmetik befasst sich in erster Linie damit, aus gegebenen Zahlen nach bestimmten Vorschriften neue Zahlen abzuleiten. Unter diesen sog. **arithmetischen Operationen** ist die erste und einfachste die sog. **Addition**, welche darin besteht, dass man zu einer Zahl so Einheiten zählt, wie die Einheit gezählt werden musste, um eine andere Zahl zu bilden: Die resultierende Zahl nennt man **Summe** der beiden Zahlen, während diese selbst **Summanden** (Posten, Glieder) heissen. Wenn man dagegen von einer Zahl, durch Rückwärtszählen, die in einer andern Zahl enthaltenen Einheiten abzählt, so hat man eine sog. **Subtraktion** vollzogen: Das Resultat nennt man **Differenz** (Rest), — die Zahl, von der man abzählt, **Minuend**, — diejenige, welche man abzählt, **Subtrahend**. — Sind zwei Operationen, wie Addition und Subtraktion, so beschaffen, dass es gleichgiltig ist, ob man beide in gleichem Masse oder keine von ihnen vornimmt, so heissen sie „im Gegensatze stehend", und es kann dieser Gegensatz auch auf die Grössen übergetragen werden, mit welchen sie vorzunehmen sind: So gehen aus additiven und subtraktiven die sog. **positiven** und **negativen** Zahlen hervor, oder die Zahlen mit **Vorzeichen**, und Summe und Differenz vereinigen sich zur Summe mit Rücksicht auf das Vorzeichen oder zur sog. **algebraischen Summe**. — Für Addition und positive Zahl hat man das gemeinschaftliche Zeichen +, für Subtraktion und negative Zahl das gemeinschaftliche Zeichen — gewählt [a], — während man die Gleichheit zweier Grössen durch das Zeichen =, ihre Ungleichheit durch das Zeichen $<$, dessen Spitze der kleinern Grösse zugewandt wird, andeutet [b], — und ein Konglomerat von Zahlen, dessen Gesamtwert in Rechnung fallen soll, in eine Klammer einschliesst [c].

Zu 17: *a.* Die erste Druckschrift, in welcher die Zeichen + — erscheinen, ist die früher (15) erwähnte des Joh. **Widman** von 1489, wo der Verfasser z. B. sagt, dass von „13 lagel. veygen" die erste 4 + 5 (4 Ctnr und 5 ℔), die zweite 4 — 17 (4 Ctnr weniger 17 ℔), etc., wiege, dann alle + für sich und alle — für sich zusammenzählt, u. s. f. Bei **Chuquet** (1484) und **Paccioli** (1495) kommen statt + — noch die Buchstaben p (plus, piu) und m (minus, meno) vor; dagegen finden sich die + — nach Günther und Gerhardt schon in einem, früher im Besitze von Stiborius befindlichen und mutmasslich von Christoph **Rudolff** stark benützten Mss. der Wiener Bibliothek, das etwa der Mitte des 15. Jahrhunderts zugeteilt wird. — *b.* Unser Gleichheitszeichen führte Robert **Recorde** (Wales 1510? — London 1558; erst Lehrer der Math. Oxford, dann Arzt in London, wo er im Schuldgefängnisse starb) in seiner Schrift „The ground of arts, teaching the perfect work and practice of arithmeticke. London 1549—57, 2 Vol. in 4." mit der Begründung ein, „dass keine zwei Dinge gleicher sein können als ein paar parallele, gleich grosse, gerade Linien". **Harriot** adoptierte dasselbe, während noch 1590 **Vieta** (vgl. 16) nach

früherer Übung zwischen die beiden gleichen Ausdrücke ein „æquabantur“ einschob und 1637 **Descartes** in seiner „Géométrie“ dafür das Zeichen } benutzte, welches sogar noch 1713 in Jak. **Bernoullis** „Ars conjectandi“ erscheint; in den 1679 ausgegebenen „Opera“ von **Fermat** endlich wird bald {, bald ∞ als Gleichheitszeichen benutzt, wie überhaupt bei diesem sonst so klaren Kopfe die mathematische Schreibekunst noch sehr unsicher war, so dass sich der Leser oft aufs Raten legen muss. — Das Ungleichheitszeichen $<$ wandte **Harriot** etwa von 1620 hinweg an, während **Oughtred** (1631) und **Barrow** (1674) das Zeichen $\sqsubset$ benutzten. — Ich füge bei, dass **ich** den $=$ und $<$ noch das Zeichen $\risingdotseq$ für **nahe gleich** beigeordnet habe. — *c.* Das Einschliessen mehrteiliger Grössen in Klammern wandte zuerst **Girard** in seiner „Invention nouvelle“ von 1629 (vgl. 30) an, während z. B. noch kurz vorher **Harriot**

$$\begin{array}{c|l} p+q & = pp + 2pq + qq \\ p+q & \\ \hline \end{array}$$

geschrieben hatte.

18. Die Multiplikation und Division. — Eine fernere arithmetische Operation besteht darin, dass man eine gegebene Zahl, den sog. **Multiplikand**, so als Summand setzt, wie eine andere gegebene Zahl, der **Multiplikator**, aus der Einheit oder einem Teile derselben entstanden ist: Die resultierende Zahl heisst **Produkt**, — jede der gegebenen Zahlen **Faktor** des letztern, — die Operation, welche durch das Zeichen $\times$ oder $\cdot$ angedeutet wird, **Multiplikation** [a]. Haben die Faktoren Vorzeichen, so hat laut Definition das Produkt mit dem Multiplikand gleiches oder verschiedenes Zeichen, je nachdem der Multiplikator positiv (durch Wiederholung der Einheit entstanden) oder negativ (durch Wiederholung des Gegensatzes der Einheit entstanden) ist, d. h.: Gleiche Zeichen geben ein positives, ungleiche ein negatives Produkt. — Der durch das Zeichen : angedeutete Gegensatz der Multiplikation heisst **Division**, — derjenige eines Faktors **Divisor** (Reciproke), — die Zahl, welche angibt, wie oft letzterer von einer andern gegebenen Zahl, dem **Dividend**, abgezählt werden kann, **Quotient**, — ein allfälliger Überschuss **Rest** [b]. Lässt ein Divisor keinen Rest, so nennt man ihn **Teiler**, — während eine Zahl, die keinen Teiler besitzt, **Primzahl** genannt wird, und zwei Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen, Primzahlen unter sich oder **relative Primzahlen** heissen [c]. — Aus den gegebenen Definitionen lassen sich leicht verschiedene Regeln ableiten, wie z. B.: Eine Summe wird multipliziert, indem man jedes Glied multipliziert [d], — ein Produkt, indem man Einen Faktor multipliziert, — ein Bruch, indem man den Zähler multipliziert oder den Nenner dividiert [e], — etc.

Zu 18: *a.* Das Multiplikationszeichen $\times$ erscheint bereits bei Christoph **Rudolff**, scheint aber erst 1631 durch **Oughtred** in allgemeinern Gebrauch eingeführt worden zu sein, — ja noch in „Joh. Heinrich **Rahn** (Zürich 1622 —

ebenda 1676; Landvogt in Kyburg und Zeugherr; vgl. Biogr. IV), Teutsche Algebra. Zürich 1659 in 4. (engl. durch Branker: London 1668)" wird statt ihm das Zeichen ✱, und bis in die Gegenwart nach dem Vorgange von **Leibnitz** vielfach · benutzt. — Ein Produkt aus 2, 3, 4, 5 etc. gleichen Faktoren nennt man **Quadrat** (census = ce), **Cubus** (cu), **Biquadrat** (censicensus = ce . ce), **Censicubus** (ce . cu), etc. — Die Multiplikation bestimmter Zahlen wird durch das sog. **Einmaleins** (abacus pythagoricus, livret) erleichtert, das schon **Chuquet** in seinem „Triparty" von 1484 und noch besser **Stevin** in seiner „Arithmétique" von 1585 in tabellarischer Form aufführte und dessen Wichtigkeit Tobias **Beutel** (um 1670 Mech. Dresden) in seiner „Arithmetica" von 1693 mit dem hübschen Reime „Gleichwie man einen Thurm mit Staffeln muss ersteigen, so muss das Einmaleins den Weg im Rechnen zeigen" illustriert haben soll. Für weiteres vgl. Note d. — *b.* **Rahn** benutzte ÷ als Divisionszeichen, sonst scheint meist der Bruchstrich angewandt und unser : erst durch **Leibnitz** eingeführt worden zu sein. — Bezeichnen a, b, q, r der Reihe nach Dividend, Divisor, Quotient und Rest, so ist offenbar

$$a = b \times q + r \qquad \text{oder} \qquad \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \qquad \text{während} \qquad \left[\frac{a}{b}\right] = r$$

ein symbolischer Ausdruck für den Rest ist. — Für weiteres vgl. Note d. — *c.* Schon bei **Rahn** findet man eine bis 24 000 gehende (in der engl. A. bis 100 000 fortgesetzte) Faktorentafel, und **Hindenburg** hatte 1781 (vgl. Mém. Berl. 1781) sogar eine 5 Millionen betreffende Tafel im Druck, über deren Konstruktion er in einem Anhange zu seiner „Infinitomii dignitatum exponentis indeterminati historia. Gottingæ 1779 in 4." berichtet hatte und für die sich z. B. **Euler** lebhaft interessierte. Der Druck scheint jedoch bald wieder sistiert worden zu sein; dagegen besitzt man durch Joh. Karl **Burckhardt** (Leipzig 1773 — Paris 1815; Akad. und Dir. Obs. de l'école milit. Paris) „Tables des diviseurs pour tous les nombres du 1—3 Million. Paris 1814 bis 1817 in 4.", — ferner durch **Dase** „Faktorentafeln für alle Zahlen der 7—9 Million. Hamburg 1862—65 in 4.", — und für die drei zwischenliegenden Millionen, für welche man bislang auf ein von **Crelle** der Berliner Akademie übergebenes Mss. beschränkt war, scheint J. C. **Glaisher** aufkommen zu wollen, ja hat bereits eine „Factor Table for the fourth Million. London 1879 in 4." publiziert. Ein Specimen einer solchen Tafel giebt unsere II. — *d.* Eine Summe wird somit mit einer Summe multipliziert, indem man jedes Glied der Einen mit jedem Gliede der Andern multipliziert oder alle sog. **Teilprodukte** bildet, — wobei, wenn man diese letztern und die Faktoren nach derselben Regel (z. B. lexikographisch) ordnet, das erste Glied des Produktes gleich dem Produkte der ersten Glieder der Faktoren wird. — Beim numerischen Rechnen wurden früher alle Teilprodukte einzeln, nach einem von Rechner zu Rechner wechselnden Schema aufgeschrieben und dann zu einer Summe vereinigt, bis Ad. **Riese** unsere gegenwärtige Übung einführte. — Unter Anwendung der in 19 eingeführten Bezeichnungen erhält man z. B.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und somit, wenn b gegen a klein ist, $\sqrt{a^2 + b} \doteq a + \frac{b}{2a}$,

worin ein Mittel liegt, eine sog. **Quadratwurzel** durch Näherung zu finden. — Es folgt ferner, dass bei gleich geordneten Dividend und Divisor der Quotient ihrer ersten Glieder das erste Glied des Quotienten ergiebt: Man zieht sodann sein Produkt in den ganzen Divisor von dem Dividend ab, — sucht aus dem Reste in gleicher Weise das zweite Glied des Quotienten, — etc.,

und fügt endlich, wenn die Division nicht aufgeht, einen aus dem letzten Rest und dem Divisor gebildeten Bruch bei. Es liegt hierin auch unsere Regel für die numerische Division, die sich allerdings nur nach und nach aus frühern, wieder die einzelnen Teilprodukte verwendenden und zum Teil (wie namentlich die sog. „komplementäre Division", wo z. B. der Divisor 346 auf 400 abgerundet und der Ergänzung 54 nachträglich Rechnung getragen, also die Arbeit fast verdoppelt wurde) ziemlich komplizierten Verfahren herausbildete. — *e.* Ein Bruch bleibt somit unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert oder **erweitert**, und man kann daher verschiedene Brüche leicht auf dieselbe Benennung bringen; dabei heisst die kleinste Zahl, in welcher sämtliche Nenner als Faktoren enthalten sind, **gemeinschaftlicher Nenner.**

19. Die Elevation und Extraktion. — Noch eine fundamentale arithmetische Operation besteht endlich darin, dass man eine Zahl, die sog. **Basis**, so als Faktor zur Einheit setzt, wie eine andere Zahl, der **Exponent**, aus dieser Einheit entstanden ist: Die resultierende Zahl heisst **Potenz** der erstern Zahl, — die zu ihrer Erzeugung nötige Verrichtung **Elevation**, — der Gegensatz der letztern **Extraktion.** Bezeichnen a, b, c der Reihe nach Basis, Exponent und Potenz, so schreibt man

$$a^b = c \qquad \text{oder} \qquad a = c^{1/b} = \sqrt[b]{c} \qquad \mathbf{1}$$

wo das die Extraktion andeutende Zeichen $\sqrt{\ }$, je nachdem es keinen Index oder den Index b hat, 2te oder b^te^ **Wurzel** genannt wird[a], und es ist nach Definition

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = 1 : a^n \qquad a^{m:n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad \mathbf{2}$$

Gerade Potenzen sind offenbar positiv, während ungerade das Zeichen der Basis besitzen. Gerade Wurzeln aus einer positiven Zahl haben das Vorzeichen $\pm$, — diejenigen aus einer negativen Zahl können nicht auf die gewöhnliche Einheit reduziert werden, sondern erfordern die neue Einheit $i = \sqrt{-1}$, so dass

$$i^{4n} = +1 \qquad i^{4n+1} = +i \qquad i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i \qquad \mathbf{3}$$

und $a + b \cdot i$ eine unmögliche oder sog. **komplexe** Zahl ist, somit die Gleichheit $a + b \cdot i = c + d \cdot i$ nur für $a = c$ und $b = d$ bestehen kann[b]. Die sog. **Potenzregeln**

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \qquad a^b : a^c = a^{b-c} \qquad (a^b)^c = a^{b \cdot c}$$
$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c \qquad (a : b)^c = a^c : b^c \qquad (a : b)^{-c} = (b : a)^c \qquad \mathbf{4}$$

gehen unmittelbar aus dem Begriffe der Potenz hervor. — Ist eine Folge von Zahlen einer Folge von Potenzen derselben Basis gleich, so heissen die Exponenten **Logarithmen** der Zahlen in Beziehung auf jene Basis, und anstatt

$$a^b = c \qquad \text{schreibt man nun} \qquad b = \overset{a}{\mathrm{Log}}\, c \qquad \mathbf{5}$$

wofür die 4 unmittelbar

$$\mathrm{Log}\,(a\,.\,b) = \mathrm{Log}\,a + \mathrm{Log}\,b \qquad \mathrm{Log}\,(a:b) = \mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b$$
$$\mathrm{Log}\,(a^b) = b\,.\,\mathrm{Log}\,a \qquad \mathrm{Log}\,\sqrt{a\,.\,b} = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{Log}\,a + \mathrm{Log}\,b) \qquad 6$$

ergeben [c]. — Auf den Potenzregeln beruht auch unser Zahlensystem und die zum Teil bereits behandelte sog. **Decimalrechnung** [d].

Zu 19: *a.* Die im Texte gebrauchte Bezeichnung der Potenzen wurde durch Pierre **Hérigone** (ein in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts in Paris lebender Mathematiker) in seinem „Cours mathématique. Paris 1634, 6 Vol. in 8." vorgeschlagen und, nach Vorgang von **Descartes**, bald allgemein eingeführt. Immerhin darf nicht vergessen werden, dass schon 1484 **Chuquet** in seinem „Triparty" ganz entsprechend 19^2, 18^4 etc. schrieb, aber dann allerdings $R^3{}_8$ für $\sqrt[3]{8}$, — dass 1544 **Stifel** in seiner „Arithmetica integra (fol. 109) das Wurzelzeichen wenigstens in der Weise einführte, dass er $\sqrt{ce}$, $\sqrt{cu}$, etc. für $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc. schrieb, und (fol. 249)" sich die beiden Zahlenreihen

—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

entsprechen liess, wobei er die obern Zahlen „Exponenten" nannte, — etc.; aber abgesehen von solchen vereinzelten Erscheinungen blieb man im allgemeinen bis in das 17. Jahrhundert hinein bei der alten Übung, die Potenzen der Unbekannten (radix, latus, cosa) mit den früher (18: a) erwähnten, allfällig durch einzelne Buchstaben vertretenen Namen zu bezeichnen und so schrieb noch **Vieta**

$$1\,C + 30\,Q \text{ æquari } 86{,}220{,}288 \quad \text{statt} \quad x^3 + 30\,x^2 = 86\,220\,288$$

ja **Harriot**, der schon Buchstaben, sowie für die 2. und 3. Wurzel die Symbole $\sqrt{\ }$ und $\sqrt{3)}$ benutzte,

$$\sqrt{3)}\,ccc + \sqrt{cccccc - bbbbbb} \quad \text{statt} \quad \sqrt[3]{c^3 + \sqrt{c^6 - b^6}}$$

Ausnahmen bildeten fast nur **Stevin**, der um 1585 die Exponenten in Kreise einschloss, welchen er im Falle einer zweiten Unbekannten ein „sec." vorsetzte, so dass

③ sec ② (½) mit x^3 y^2 $\sqrt[4]{x}$

übereinkommen, — und **Bürgi**, der ungefähr gleichzeitig und jedenfalls viel praktischer

$$\overset{\text{II}}{16}\ -\overset{\text{IV}}{20}\ +\overset{\text{VI}}{8}\ -\overset{\text{VIII}}{1} \quad \text{statt} \quad 16\,x^2 - 20\,x^4 + 8\,x^6 - x^8$$

schrieb. — *b.* Das Symbol i wurde 1801 von **Gauss** in seinen „Disquisitiones (p. 596)" eingeführt und zwar einfach „brevitatis caussa". — *c.* Für eingehende Behandlung der Logarithmen wird auf 22—25 und 39 verwiesen. Hier mag nur noch erinnert werden, dass die letzte 6 den wichtigen Satz: „Der Logarithmus des geometrischen Mittels zweier Zahlen ist gleich dem arithmetischen Mittel ihrer Logarithmen" involviert, von welchem wir später (24) ausgiebigen Gebrauch machen werden. — *d.* Jede ganze oder gebrochene Zahl N lässt sich nämlich offenbar durch Potenzen irgend einer Zahl k ausdrücken, so dass, wenn α, β, ... kleiner als k sind,

$$N = \alpha\,.\,k^n + \beta\,.\,k^{n-1} + \ldots + \lambda\,.\,k + \mu + \nu\,.\,k^{-1} + \ldots$$

oder, wenn die Potenzen von k nicht geschrieben, sondern der Stelle zugeteilt werden (wobei rechts vom Komma die negativen Potenzen beginnen),

$$N = \alpha\beta \ldots \lambda\mu,\ \nu \ldots$$

und es ergiebt sich hieraus die Möglichkeit, jede Zahl in Beziehung auf eine **Grundzahl** k durch (k — 1) mit Stellenwert versehene Zeichen und ein Stellenzeichen (16) auszudrücken. Die meisten Völker haben sich für die Grundzahl zehn oder das **Decimalsystem** entschieden und die Neuzeit hat sich leider darin gefallen, letzteres bis zu den äussersten Konsequenzen zu verfolgen, anstatt wie es schon George-Louis Leclerc de **Buffon** (Montbard 1707 — Paris 1788; Akad. Paris) in seinem etwa 1760 entworfenen „Essai d'arithmétique morale (Oeuvres par Lacepède V 413)" ganz gut befürwortete, unter Einführung zweier neuer Zahlzeichen das viel vorzüglichere **Duodecimalsystem** an seine Stelle zu setzen, was allerdings nur am Ende des vorigen Jahrhunderts durch das „Comité de salut public" erreichbar gewesen wäre: Aber einmal geschehen, würde man sich wegen den vermehrten Teilern sehr wohl dabei befinden, zumal der Hauptvorteil des Decimalsystemes, die ihm entsprechenden Brüche wie ganze Zahlen behandeln zu können, beim Duodecimalsysteme natürlich nicht minder vorhanden wäre. — Noch mag nachgetragen werden, dass um 1360 der als ausgezeichneter Rechner mit dem Namen „Paolo dall' Abbaco" beehrte Paolo **Dagomari** (Prato in Toskana 1281? — Florenz 1366?) die Übung einführte, das Lesen grosser Zahlen dadurch zu erleichtern, dass man sie durch Kommas in Gruppen von drei Stellen teilte, — während man sich seit Einführung von Decimalstellen meist darauf beschränkt, dieses Zeichen nur nach den Einern zu setzen, wie es nach Keplers Zeugnis schon **Bürgi** in späterer Zeit machte, während sich in der „Arithmetica Byrgii" noch

$$\underset{\circ}{14}14 \quad \underset{\circ}{1}414 \quad 0\,1414 \quad 00\,1414 \quad \text{statt} \quad 14{,}14 \quad 1{,}414 \quad 0{,}1414 \quad 0{,}01414$$

geschrieben findet, was zwar immerhin gegen **Stevin**, der in oben angegebener Weise jeder Stelle in einem Kreise den ihr zukommenden Exponenten der Grundzahl beifügte, ein sehr erheblicher Fortschritt war. — Statt der Sexagesimalrechnung, mit welcher (63) schon **Regiomontan** gebrochen hatte, kam nach und nach durch die **Cardan**, **Recorde**, **Stevin**, etc., vor allem durch **Bürgi**, welchen **Kepler** in seinem „Ausszug aus der uralten Messe-Kunst Archimedis (Opera V 547)" sogar als „Erfinder" bezeichnet, die Decimalbruchrechnung in Aufnahme: Ausser dem schon von **Cardan** beliebten Anhängen von Nullen an Dividend oder Radikand praktizierte **Bürgi** um 1580 (vgl. Astr. Mitth. 31 von 1872) bereits auch die **abgekürzte Multiplikation** in der jetzt üblichen Weise, jedoch ohne Umstellen des Multiplikators, das sich nach **Burnier** zuerst in „**Vlacq**, Trigonometria artificialis. Goudæ 1633 in fol. (p. 50)" findet, — und es fällt somit die Erzählung, es sei **Kepler** 1623 durch den schon 1616 verstorbenen **Prätorius** mit der abgekürzten Multiplikation bekannt geworden, doppelt dahin.

20. Der grösste gemeinschaftliche Teiler und die sog. Kettenbrüche. — Hat man zwei Zahlen A und B > A, so kann man, indem man erst B durch A, dann A durch den erhaltenen Rest, nachher letztern durch den neuen Rest, u. s. f. teilt, bis endlich eine Division aufgeht, die Gleichheiten

$$B = A \cdot q_1 + r_1 \qquad A = r_1 \cdot q_2 + r_2 \qquad r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$$
$$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad r_{h-1} = r_h \cdot q_{h+1} \qquad \textbf{1}$$

bilden. Es geht nun **einerseits** aus der Folge dieser Gleichheiten hervor, dass der **grösste gemeinschaftliche Teiler** von B und A

auch r_1, — also auch r_2, ... also auch r_k teilen, folglich gleich r_k sein muss, und somit leicht gefunden werden kann [a]. **Anderseits** erhält man mit Hilfe von 1 successive

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{A\cdot q_1+r_1}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{r_1}{r_1\cdot q_2+r_2}}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{r_2}{r_2 q_3+r_3}}}=\ldots \qquad 2$$

$$=1:[q_1, q_2, \ldots]$$

und hat so den vorgelegten Bruch in einen sog. **Kettenbruch** verwandelt [b]. Die einzelnen Brüche $1:q_1$, $1:q_2$, ... heissen **Ergänzungsbrüche**, und der Wert $A_n : B_n$, auf welchen sich der Kettenbruch bei Vernachlässigung der dem n^{ten} folgenden Ergänzungsbrüche reduziert, wird **n^{ter} Näherungsbruch** genannt, so dass

$$\frac{A_0}{B_0}=\frac{0}{1}\quad \frac{A_1}{B_1}=\frac{1}{q_1}\quad \frac{A_2}{B_2}=\frac{1}{q_1+1:q_2}=\frac{q_2}{q_1\cdot q_2+1}=\frac{A_1\cdot q_2+A_0}{B_1 q_2+B_0}$$
$$\frac{A_3}{B_3}=\frac{A_1(q_2+1:q_3)+A_0}{B_1(q_2+1:q_3)B_0}=\frac{A_2 q_3+A_1}{B_2 q_3+B_1}\ldots\frac{A_n}{B_n}=\frac{A_{n-1}\cdot q_n+A_{n-2}}{B_{n-1}\cdot q_n+B_{n-2}} \qquad 3$$

Es folgt hieraus, dass man jeden Näherungsbruch aus den zwei Vorhergehenden höchst bequem ableiten kann [c]. — Da sich ferner mit Hülfe von 3 die Rekursion

$$A_n\cdot B_{n-1}-A_{n-1}\cdot B_n=-(A_{n-1}\cdot B_{n-2}-A_{n-2}\cdot B_{n-1}) \qquad 4$$

ergiebt, und $A_2\cdot B_1 - A_1\cdot B_2 = -1$ ist, so hat man

$$A_n\cdot B_{n-1}-A_{n-1}\cdot B_n=(-1)^{n-1} \quad \text{und} \quad \frac{A_n}{B_n}-\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{B_n\cdot B_{n-1}} \qquad 5$$

Aus der erstern Gleichheit folgt aber, dass Zähler und Nenner eines Näherungsbruches immer unter sich prim sind, — während die zweite, da der wahre Wert eines Kettenbruches notwendig zwischen je zwei sich folgende Näherungsbrüche fällt, bequem eine obere Grenze für den Fehler eines Näherungsbruches zu finden lehrt. — Bezeichnet endlich Δ den Fehler des n^{ten} Näherungsbruches, so ersieht man, dass ein Bruch $\alpha:\beta$ nur genauer als $A_{n-1}:B_{n-1}$, d. h.

$$\frac{A_n}{B_n}\pm\Delta-\frac{\alpha}{\beta}<\frac{A_n}{B_n}\pm\Delta-\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} \quad \text{oder} \quad \frac{\beta\cdot A_n-\alpha\cdot B_n}{\beta\cdot B_n}<\frac{\pm 1}{B_{n-1}\cdot B_n}$$

werden kann, wenn entweder der Zähler kleiner als 1, d. h. Null, wird, was nur für $\alpha:\beta = A_n : B_n$ statt hat, — oder wenn $\beta > B_{n-1}$ wird, ohne dass der Zähler entsprechend zunimmt, was je wieder nur für die spätern Näherungsbrüche eintrifft: Es sind also die durch die Kettenbrüche gelieferten Annäherungen wirklich die besten.

Zu 20: *a.* Schon **Euklid** lehrte in Buch VII seiner Elemente diese Methode r_k zu finden. Im Falle A und B relative Primzahlen sind, wird natürlich $r_k = 1$. — *b.* Den in 2 aufgeführten, wie mir scheint höchst bequemen

symbolischen Ausdruck benutze ich etwa seit 1875. — *c.* Zur successiven Bestimmung der Näherungsbrüche ist das beistehende, auf den Bruch

A	q	B
0		1
1	7	7
15	15	106
16	1	113
415	25	2931
431	1	3044
3432	7	24239
14159	4	100000

$$\frac{14159}{100000} = 1:[7, 15, 1, 25, 1, 7, 4]$$

angewandte Schema höchst bequem. — Dasselbe findet sich bereits in dem von Daniel **Schwenter** (Nürnberg 1585 — Altorf 1636; Prof. orient. et math. Altorf) dem General Joh. Phil. **Fuchs** von Bimbach „Altorf 1 Jan. 1617" gewidmeten Tractatus II seiner „Geometria practica nova. Nürnberg (s. a) in 4.", leider nur mit der Angabe, diese Methode sei von den vielen „feinen" Regeln, welche die Rechenmeister zur Auffindung einer bequemen Annäherung an das Verhältnis grosser Zahlen gegeben haben, „die beste, geheimste und künstlichste": Immerhin kann man einerseits daraus schliessen, dass Schwenter seine Regel einem ältern Rechenmeister entnahm und nicht selbst auffand, — und anderseits ergiebt der Umstand, dass obiges Datum circa drei Jahre vor die Geburt von William **Brouncker** (Castle Lyons 1620 — London 1684; Kanzler Karl II. und erster Präsident der Roy. Soc.) fällt, den sichern Beweis, dass man letzterm die Erfindung der Kettenbrüche fälschlich zuschrieb, wenn er auch 1665 (vgl. Wallis, Opera I 469) eine hübsche Anwendung von denselben machte. — Auf demselben Wege wie 3 erhalten wurde, die allgemeinere Form $A:B = b_1:[a_1 + b_2:(a_2 + \ldots)]$ behandelnd, erhält man wieder 3, nur findet sich q_n durch $a_n : b_n$ ersetzt. — *d.* Wiederholen sich bei einem Kettenbruche die Nenner der Ergänzungsbrüche periodisch, so heisst er ebenfalls **periodisch**, und, da offenbar z. B.

$$x = 1:[2, 2, 2, \ldots] = \frac{1}{2+x} \quad \text{oder} \quad 2x + x^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \sqrt{2} = 1 + x$$

$$y = 1:[1, 2, 1, 2, \ldots] = \frac{1}{1 + 1:(2+y)} \qquad 2y + y^2 = 2 \qquad \sqrt{3} = 1 + y$$

etc., so kann man, indem man in der frühern Weise für x, y, etc. Näherungsbrüche bestimmt, somit auch für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc. Näherungswerte finden. Man erhält so

$$\sqrt{2} = 1,\ ^3/_2,\ ^7/_5,\ ^{17}/_{12},\ ^{41}/_{29},\ \mathbf{^{99}/_{70}},\ ^{239}/_{169}, \ldots$$

$$\sqrt{3} = 2,\ ^5/_3,\ ^7/_4,\ ^{19}/_{11},\ ^{26}/_{15},\ ^{71}/_{41},\ ^{97}/_{56},\ \mathbf{^{265}/_{153}},\ ^{362}/_{209},\ ^{989}/_{571},\ \mathbf{^{1351}/_{780}}, \ldots$$

und es ist ganz interessant, dass sich von diesen Näherungswerten die fettgedruckten der ersten Reihe nach **Günther** schon bei alten Rabbinern finden und wir denjenigen der zweiten Reihe später (59) bei **Archimedes** begegnen werden; nur darf man daraus nicht auf Bekanntschaft mit den Kettenbrüchen, sondern eher auf das Gegenteil schliessen, da dieselben Rabbiner auch noch andere, nicht in jene Reihe passende Näherungswerte geben und die Archimedischen Näherungswerte nicht zwei aufeinanderfolgende sind: Ich glaube, dass man auch zu weit geht, wenn man aus solchen Vorkommnissen überhaupt auf das Vorhandensein von bestimmten Vorschriften schliessen will, und dass bei den Alten, gerade weil ihnen allgemeine Methoden fehlten, **geduldiges Probieren** und **feiner Takt** eine grössere Rolle spielten, als man jetzt, wo auch in der Wissenschaft die Handarbeit immer mehr durch Maschinenarbeit ersetzt wird, anzunehmen beliebt. Beispiele aus neuerer Zeit bieten z. B. **Bürgi** in 31 und **Metius** in 60. — Immerhin mögen zum Schlusse neben einigen die weitere

Entwicklung und die Geschichte der Kettenbrüche enthaltenden Schriften auch Studien jener Art erwähnt werden. Ich nenne „L. **Euler**, De fractionibus continuis (Comm. Petr. 9, 11; Act. Petr. 1779; etc.), — **Gauss**, Disquisitiones generales circa seriem infinitam (Comm. Gott. 1811—13), — August Ferdinand **Möbius** (Schulpforta 1790 — Leipzig 1868, Prof. astr. und Dir. Obs. Leipzig; vgl. Gesammelte Werke, Leipzig 1885—87, 4 Bde. in 8.), Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen (Crelle 7 von 1830), — S. **Günther**, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche. Weissenburg 1872 in 4., ferner: Storia dello sviluppo della teoria delle frazioni continue fino all' Euler; trad. A. Sparagna (Boncomp. 1874), — ferner: Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik. Prag 1878 in 4., — und: Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden (Abh. z. Gesch. IV von 1882), — Antonio **Favaro** (Padua 1847 geb.; Prof. math. Padua), Notizie storiche sulle frazioni continue del secolo 13 al 17 (Bonc. 1874), — H. **Weissenborn**, Die irrationalen Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron. Berlin 1883 in 8., — Karl **Hunrath**, Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche. Kiel 1884 in 8., — etc.

21. Die Proportionen und Progressionen. — Durch Vergleichung zweier Zahlen mittelst Subtraktion oder Division findet man ihr sog. **arithmetisches** oder **geometrisches Verhältnis**, und von zwei Zahlenpaaren, welche ein gleiches Verhältnis ergeben, sagt man, sie stehen in **Proportion**. So stehen 4 Zahlen a, b, c, d in arithmetischer Proportion

$$a . b : c . d \quad \text{wenn} \quad a - b = c - d \quad \text{oder} \quad a + d = b + c \qquad \mathbf{1}$$

ist, dagegen in geometrischer Proportion

$$a : b :: c : d \quad \text{wenn} \quad a : b = c : d \quad \text{oder} \quad a \times d = b \times c \qquad \mathbf{2}$$

ist, — also, wenn Summe oder Produkt der sog. äussern Glieder gleich Summe oder Produkt der sog. innern Glieder wird [a]. Sind b und c gleich, so heisst die Proportion **stetig** und das innere Glied

$$b' = \tfrac{1}{2}(a + d) \qquad \text{oder} \qquad b'' = \sqrt{a \times d} \qquad \mathbf{3}$$

arithmetisches oder **geometrisches Mittel**. Aus 2 folgen ferner

$$a : c = b : d \qquad a : b . m = c : d . m \qquad (a \pm b) : b = (c \pm d) : d \qquad \mathbf{4}$$

etc. Ist endlich

$$a : d = (a - h) : (h - d) \qquad \text{oder} \qquad h = 2ad : (a + d) \qquad \mathbf{5}$$

so nennt man h **harmonisches Mittel** zwischen a und d, und man hat

$$b' : b'' = \frac{a + d}{2} : \sqrt{a . d} = \sqrt{ad} : \frac{2ad}{a + d} = b'' : h \qquad \mathbf{6}$$

was ebenfalls nicht ohne Interesse ist [b]. — Eine Zahlenreihe, in welcher jede drei aufeinander folgende Glieder eine stetige arithmetische oder geometrische Proportion bilden, nennt man eine **arithmetische** oder **geometrische Progression**. So ist z. B.

$$\div\, a . (a + d) . (a + 2d) \ldots [a + (n - 1) d] \qquad \mathbf{7}$$

eine arithmetische, dagegen

$$\because\!\div\, a : a . q : a . q^2 : \ldots\, a . q^{n-1} \qquad \mathbf{8}$$

eine geometrische Progression von n Gliedern, und zwar heisst a **erstes Glied**, d **Differenz**, q **Quotient**, $z' = a + (n-1)d$ oder $z'' = a \cdot q^{n-1}$ **letztes Glied.** Ferner ist die Summe der n Glieder

$$s' = \frac{2a + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{a + z'}{2} \cdot n \quad \mathbf{9} \quad \text{oder} \quad s'' = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q \cdot z'' - a}{q - 1} \quad \mathbf{10}$$

indem ersteres daraus hervorgeht, dass in einer arithmetischen Progression die Summe jeder zwei von den beiden Enden gleich weit entfernten Glieder notwendig gleich gross ist, während letzteres sich durch Ausführung der Division leicht erproben lässt ^{c}.

Zu 21: *a.* Das Zeichen :: für die Gleichheit zweier geometrischer Verhältnisse scheint **Oughtred** (1631) eingeführt zu haben. Nic. **Mercator** (1668), Is. **Barrow** (1674), ja noch **Jeaurat** (1763) schrieben a · b :: c · d, während sich bei Ph. de **La Hire** (1710) statt dessen a | b || c | d findet. Eigentümlich ist, dass **Barrow** $a \cdot b + c \cdot d$ anstatt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ schreibt. — *b.* Ist $i = \sqrt{-1}$, so verhält sich offenbar $(+1) : i :: i : (-1)$, und es heisst darum i, als gewissermassen der Senkrechten entsprechend, in geometrischer Anschauung eine **laterale** Zahl. — *c.* Mutmasslich wussten schon die alten Egypter eine arithmetische Progression zu summieren und eine geometrische wenigstens etwa in dem einfachsten Falle, wo a = q ist; jedenfalls aber findet sich die Regel 9 spätestens bei **Chuquet**, und die 10 spätestens bei Christoph **Rudolff.** — Aus 9 und 10 folgt

$$n = 1 + \frac{z' - a}{d} \cdots \quad \mathbf{11} \qquad \text{oder} \qquad n = 1 + \frac{\operatorname{Lg} z'' - \operatorname{Lg} a}{\operatorname{Lg} q} \cdots \quad \mathbf{12}$$

Kennt man ferner in einer geometrischen Progression die Werte α und β des m. und n. Gliedes, so hat man successive

$$a \cdot q^{m-1} = \alpha \qquad a \cdot q^{n-1} = \beta \qquad q^{n-m} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad \operatorname{Lg} q = \frac{\operatorname{Lg} \beta - \operatorname{Lg} \alpha}{n - m} \quad \mathbf{13}$$

kann also auch jedes andere Glied, sowie bei bekannter Anzahl die Summe aller Glieder berechnen. — Setzt man $1 : a = q$, so besteht offenbar die Gleichheit

$$\frac{1}{a \pm b} = q\,[1 \mp b \cdot q + b^2 \cdot q^2 \mp b^3 \cdot q^3 + b^4 \cdot q^4 \mp \cdots]$$

und aus dieser folgen, indem man sie für $b = 0, 1, 2, \ldots n$ aufschreibt,

$$\sum_{-n}^{n} \frac{1}{a + k} = q\,[(2n + 1) + 2q^2 \sum k^2 + 2q^4 \sum k^4 + \cdots] \quad \mathbf{14}$$

Nun zeigte Jak. **Bernoulli** in seiner „Ars conjectandi (p. 97)", dass

$$\sum n^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n, \quad \sum n^4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n, \text{ etc.} \quad \mathbf{15}$$

und es geht somit unsere 14 in

$$\sum_{-n}^{n} \frac{1}{a+k} = q \left[(2n+1) + \frac{n \cdot q^2}{3} (n+1)(2n+1) + \frac{n \cdot q^4}{15} (6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1) + \cdots \right] \mathbf{16}$$

über. Ist z. B. $a = 1000$ und $n = 100$, so erhält man nach 16, dass

$$\frac{1}{900} + \frac{1}{901} + \cdots + \frac{1}{1100} = 0{,}2016\,7875$$

ist, während das Produkt aus dem Mittelgliede 0,001 und der Anzahl 201 der Glieder den nur wenig kleinern Wert 0,201 ergiebt.

22. Die Progresstabul Bürgis. — Von ungemeiner Tragweite ist es, dass die beiden Progressionen

$$\begin{matrix} 0 & d & 2d & 3d \ldots & md \ldots & nd \ldots & (m+n)d \ldots \\ 1 & q & q^2 & q^3 \ldots & q^m \ldots & q^n \ldots & q^{m+n} \quad \ldots \end{matrix}$$

sich offenbar so entsprechen, dass, wenn man das Glied der erstern aufsucht, welches gleich der Summe oder Differenz zweier andern Glieder ist, mit ihm in der zweiten ein Glied korrespondiert, das gleich dem Produkt oder Quotient der jenen beiden entsprechenden Glieder ist. Diese seit **Archimedes** [a] zum Bewusstsein gekommenen, aber nie verwerteten Verhältnisse [b], brachte nun Joost **Bürgi** spätestens zu Anfang des 17. Jahrhunderts mit feinem Takt in der Art zur Verwendung, dass er nach

$$x_n = 10 . n \qquad \text{und} \qquad y_n = 10^8 . 1{,}0001^n \tag{1}$$

zwei korrespondierende Zahlenreihen berechnete [c], welche er **rote** und **schwarze** nannte und sodann in der Weise zum Rechnen benutzte, dass er die gegebenen Zahlen als schwarze betrachtete, zu diesen die entsprechenden roten aufsuchte, mit letztern je die nächst niedrigern Operationen ausführte [d] und dann mit Hilfe seiner „Tabul" von dem Ergebnisse wieder zur schwarzen Zahl zurückkehrte: Es hatte also **Bürgi** unzweifelhaft nach unserer jetzigen Bezeichnung eine **erste Logarithmentafel** erstellt und die richtige Weise ihrer Benutzung angegeben [e], aber allerdings den Namen noch nicht gebraucht und dann leider durch Verzögerung der Publikation schliesslich die ihm gebührende Stelle, wie die folgende Nummer zeigen wird, an einen andern abgetreten [f].

Zu 22: *a.* **Archimedes** (Syrakus 287 — ebenda 212, wo er bei Eroberung durch die Römer von einem Soldaten getötet wurde) war zwar Verwandter des Königs Hiero von Syrakus, lebte aber nur den Wissenschaften. Vgl. seine Werke, von welchen Thomas Gechauf oder **Venatorius** „Basileæ 1544 in fol." eine erste Originalausgabe mit lat. Übersetzung und dem Kommentare von **Eudocius** besorgte, — später Jos. **Torelli** „Oxonii 1793 in fol." die als best anerkannte Ausgabe in griech. und lat. Sprache auflegte, — und endlich François **Peyrard** (Vial 1760 — Paris 1822; Prof. math. und Bibl. Paris) „Paris 1807 in 4." eine sorgfältige französische Übersetzung gab. — *b.* **Archimedes** sagt in seinem „Arenarius" nach Peyrards Übersetzung: „Si des nombres sont continuellement proportionnels à partir de l'unité, et si deux termes de cette progression sont multipliés l'un par l'autre, le produit sera un terme de cette progression éloigné d'autant de termes du plus grand facteur que le plus petit facteur l'est de l'unité". Spätere Rechenmeister machten ähnliche Bemerkungen, so z. B. Christoph **Rudolff** in seiner „Künstlichen Rechnung von 1526", und dann namentlich auch Bürgis Gewährsmänner, der etwa 1590 zu Frankfurt verstorbene Simon **Jakob** von Koburg, dessen „Rechenbuch auff den Linien und mit Ziffern. Frankfurt 1552 in 4." zur Zeit sehr beliebt war, und der Kölner Rechenmeister Mauritius **Zon**, der ungefähr gleichzeitig ein ebenfalls viel ge-

brauchtes „Rechenbuch" schrieb. — *c.* **Bürgi** erhielt nach der von ihm angenommenen Regel aus jedem x das folgende durch addieren von 10, und aus jedem y das folgende durch addieren seines 10000sten Teiles, und konnte sich so in der That seine ganze, bis $n = 23027$, wo $y_n = 10^9$ geworden war, fortgeführte Tafel verhältnismässig leicht erstellen. Das beistehende Schema zeigt uns den Anfang seiner Rechnung und einige spätere der von ihm erhaltenen Zahlen, welchen unter anderm zu entnehmen ist, dass sich bei **Bürgi** nach unserer jetzigen Schreibweise und Logarithmenlehre (39) 1,00000 und 2,7181 4593 entsprechen, oder

$$B = 2{,}7181\,4593$$

als **Basis** der Bürgi'schen Logarithmen zu betrachten ist, so dass diese sehr nahe mit der Basis $e = 2{,}7182\,8183$ der sog. natürlichen Logarithmen übereinstimmt, — ja ganz übereinstimmen würde, wenn man den Bürgi'schen Faktor 1,0001 mit 1,0001 00005 vertauschen wollte, was aber für die Berechnung der Tafel nichts weniger als vorteilhaft wäre. Da ferner das Verhältnis der Logarithmen zweier Zahlen vom Logarithmensysteme unabhängig ist, so hat man, wenn die Bürgi'schen Logarithmen mit Lb, unsere jetzigen gemeinen Logarithmen (24) mit Lg bezeichnet werden,

x	y
0	100 000 000
	10 000 0000
10	100 010 000 0000
	10 001 0000
20	100 020 001 0000
	10 002 0001
30	100 030 003 0001
	10 003 0003
40	100 040 006 0004
	10 004 0006
50	100 050 010 0010
⋮	⋮
5 000	105 126 407
10 000	110 516 539
50 000	164 868 006
100 000	271 814 593
200 000	738 831 728
230 270	1000 000 000

$$\text{Lb B} : \text{Lb } 10 = \text{Lg B} : \text{Lg } 10 \qquad \text{oder} \qquad 1 : \text{Lb } 10 = \text{Lg B} : 1$$

oder also mit Hilfe des Thesaurus von Vega (25)

$$\text{Lb } 10 = \frac{1}{\text{Lg B}} = \frac{1}{0{,}43427\,27691} = 2{,}3027\,0022$$

was in der That ganz genau mit der von **Bürgi** auf dem Titelblatte seiner sofort zu besprechenden Publikation gemachten Angabe

Die ganze Rote Zahl 230 270 022
Die ganze Schwarze Zahl 1000 000 000

übereinstimmt. — *d.* Als nächstniedrige Operation ist offenbar bei der Multiplikation oder Division die Addition oder Subtraktion, — bei der Elevation oder Extraktion die Multiplikation oder Division verstanden. — *e.* Vgl. die logarithmischen Regeln in 19 und 39. — *f.* **Bürgi** hatte, wie wir (vgl. Biogr. I 71) aus den bestimmten Angaben, welche sein von ihm erzogener Schwager Benjamin **Bramer** (Felsberg in Hessen 1588 — Ziegenhayn 1650; bis 1610 bei Bürgi, dann kurf. hess. Baumeister zu Marburg und Ziegenhayn) und sein Freund **Kepler** machten, sicher wissen, seine Tafeln jedenfalls vor 1610 vollendet, wurde dann aber durch seine Berufsarbeiten und die Ungunst der damaligen kriegerischen Zeit an der sofortigen Veröffentlichung verhindert, und als dieselben endlich unter dem Titel „Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen, samt gründlichem unterricht, wie solche nützlich in allen Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol. Prag 1620 (60 S.) in 4." erschienen, den Verfasser entsprechend seiner Bescheidenheit nur mit „J. B." andeutend, fehlte der versprochene „Unterricht", so dass sie für die meisten Besitzer unbrauchbar

blieben und darum vielfach makuliert wurden, ja gegenwärtig zu den grössten bibliographischen Seltenheiten gehören. Der besagte „Unterricht" wurde erst in der neuern Zeit in einer dem, wahrscheinlich aus Bramers Nachlasse stammenden Danziger Exemplare beigebundenen Abschrift aufgefunden und sodann durch **Gieswald** in seinem „Justus Byrg. Danzig 1856 in 4." zum Abdruck gebracht: Er enthält jedoch nicht viel mehr als eine eingehende Gebrauchsanweisung, so dass die „Arithmetica Byrgii (vgl. Mitth. 31 von 1872)" die Hauptquelle bleibt.

23. Der Canon Nepers. — Wohl ganz unabhängig von **Bürgi** [a], und nur wenige Jahre später, erstellte John Napier oder **Neper** ebenfalls zwei Zahlenreihen, welche den verwandten Beziehungen

$$x_n = n \qquad \text{und} \qquad y_n = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n \qquad 1$$

entsprachen [b], wobei er die Zahlen der ersten Reihe **Artificiales** und später **Logarithmen** [c], die der zweiten **Naturales** nannte: Er besass somit in der aus diesen Zahlen zusammengestellten, den Hauptteil seines sog. Canons bildenden „Radicalis Tabula" ein ganz entsprechendes Hilfsmittel, wie **Bürgi** in seiner Progresstabul [d]. Die von **Neper** zur Erstellung seiner Tafel angewandte Methode ist jedoch entschieden weniger natürlich und bequem, als die von **Bürgi** benutzte [e], und wenn dennoch ersterm der grössere Ruhm zu teil wurde, so verdankt er dies gröstenteils dem Umstande, dass er seine Tafel früher und mit mehr Eclat der Öffentlichkeit übergab [f] und so seine Leistung zum Ausgangspunkte für die im folgenden zu besprechenden Arbeiten wurde, aus welchen eigentlich erst unsere gegenwärtigen Logarithmen hervorgingen.

Zu 23: *a.* Auf die durch **Hutton** (Dict. II 138) gegebene Notiz, dass **Neper** durch den aus Dänemark zurückgekehrten Schotten **Craig** erfahren habe, es sei eine neue Erfindung gemacht worden, um bei astronomischen Berechnungen das mühsame Multiplizieren und Dividieren zu ersparen, lege ich kein gar grosses Gewicht, zumal ich dieselbe eher auf die Prostaphäresis (89) als auf die Logarithmen beziehen muss, — und wenn **Neper** gegenüber **Bürgi** in der Schrift „Jacomy **Régnier**, Histoire des nombres et de la numération mécanique. Paris 1855 in 8." förmlich des Diebstahls bezichtigt wird, so fehlen für die gegebene Erzählung alle Belege. — *b.* **Neper** begann seine Rechnung entsprechend 1, indem er, von n = 0 ausgehend, sein x je um 1 vermehrte, sein y aber um den 10millionsten Teil des vorhergehenden verminderte, — erhielt so, dass sich

$$x = 100 \qquad \text{und} \qquad y = 999\,9900 \cdot 0004950$$

entsprechen, — schloss daraus, dass er x je um 100 vermehren dürfe, wenn er dann nur auch y je um $^1/_{100000}$ vermindere, — fand nach dieser neuen Regel, dass

$$x = 5000 \qquad \text{und} \qquad y = 999\,5001 \cdot 222927$$

korrespondieren, folglich nach 1

$$x = 5001 \qquad \text{und} \qquad y = 999\,5000 \cdot 223427$$
$$5002 \qquad\qquad 999\,4999 \cdot 223927$$

und somit sehr nahe als entsprechend

$$x = 5001 \cdot 25 \qquad \text{und} \qquad y = 999\,5000$$

angenommen werden können, — dass man also die, dem Interval 5001 · 25 bei der arithmetischen entsprechende geometrische Reihe erhalten werde, wenn man zur Bildung einer folgenden Zahl die letzterhaltene um $^1/_{2000}$ vermindere.

x	y
0	1000 0000
5001 · 25	999 5000
10002 · 50	999 0002
15003 · 75	998 5007
20005 · 00	998 0015
⋮	⋮
6934250 · 80	499 8609

Er bildete nun nach diesem letztern Gesetze weitere neue Reihen je à 20 Glieder, immer das letzte Glied einer Reihe, oder eine aus ihm wie oben durch eine Art Interpolation erhaltene abgerundete Zahl, als Anfangsglied für die neue benutzend, bis er y etwas unter die (vgl. Note d) 5 Millionen betragende Hälfte des angenommenen Sinus totus gebracht hatte, wofür 69 solcher Reihen nötig waren, aus deren Vereinigung er schliesslich die, beistehendem Schema entsprechende Doppelreihe erhielt, welche er als „Radicalis Tabula" bezeichnete. — *c.* Der Name **Logarithmus** ist aus λόγος = Verhältnis und ἀριθμός = Zahl zusammengezogen und bedeutet also „Verhältniszahl", — es mag somit die von **Neper** getroffene Wahl angehen; aber wie man dieser Wahl eine grössere Bedeutung beilegen, ja sogar es passend finden kann, die „Artificiales" Logarithmen zu heissen, dagegen **Bürgis** ganz entsprechenden „Roten Zahlen" diesen Namen entziehen, ja sie höchstens als Antilogarithmen bezeichnen will, das ist mir rein unbegreiflich. — *d.* **Neper** berechnete ohne Schwierigkeit, wenn auch wegen der nötigen Interpolationen nicht ohne grosse Mühe, nach seiner „Tabula" für jede Minute zwischen 90° und 30° zu den als Naturales aufgefassten Sinus die entsprechenden Artificiales, welche wir mit Lnp bezeichnen wollen. Da bei ihm Si 30° = $^1/_2$ St = 500 0000 und Lnp 500 0000 = 693 1469 war, so konnte er ferner die ihm (62) bekannte Proportion Si α : 2 · Si $^1/_2\,\alpha$ = Si (90° — $^1/_2\,\alpha$) : St umsetzen in

$$\text{Lnp Si}\,\frac{\alpha}{2} = \text{Lnp Si}\,\alpha - \text{Lnp Si}\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) + 693\,1469 \qquad \mathbf{2}$$

und nach dieser nach und nach seine Tafel auch noch von 30° bis 0° fortführen, womit er eine erste log.-trigonom. Tafel erstellt hatte, falls ihm nicht etwa **Bürgi**, wie einige Andeutungen vermuten lassen, auch hierin zuvorgekommen war. — *e.* Einer aufsteigenden Reihe eine abfallende entsprechen zu lassen, ist nicht sehr natürlich, — und dass der von **Neper** befolgte Gang bedeutend komplizierter als derjenige **Bürgis** war, geht aus dem Mitgeteilten klar hervor: Muss ja sogar **Biot**, der einseitige Panegyrist Nepers, welcher in seiner „Analyse des ouvrages originaux de Napier, relatifs à l'invention des logarithmes (Conn. d. t. 1838)" die grossen Verdienste von **Briggs** (24) total verkennt und **Bürgi** mit der Phrase abfertigt, es habe auch ein „mathématicien obscur du continent, appelé **Byrge**, comme sans doute, beaucoup d'autres" einige Versuche gemacht, ein Hilfsmittel zur Abkürzung der numerischen Rechnungen zu finden, — schliesslich eingestehen, dass **Neper** vielleicht besser gethan hätte, ein Verfahren anzuwenden, bei welchem „chaque terme se déduirait du précédent par simple addition, en lui ajoutant sa dixmillionième partie, qui se prend à vue", — natürlich nicht bemerkend, dass er auf solche Weise den „obskuren" Mann über seinen Schützling erhob und sich selbst lächerlich machte. — Bezeichnet man die natürlichen Logarithmen (39) mit Ln, so erhält man durch Logarithmieren von 1, unter Berücksichtigung, dass Ln 10 = 2,30258 50930 und ferner Ln $(1 - 10^{-7}) \doteq - 10^{-7}$ ist,

$$\text{Ln}\,y = \text{Ln}\,10^7 + \text{Ln}\,(1 - 10^{-7}) \cdot \text{Lnp}\,y \quad \text{oder} \quad \text{Lnp}\,y = 161\,180\,957 - 10^7 \cdot \text{Ln}\,y \qquad \mathbf{3}$$

Es ergiebt sich hieraus, wie wenig berechtigt die frühere Übung war, den natürlichen Logarithmen den Namen Nepers beizulegen. — Endlich füge ich noch bei, dass **Neper**, nachdem er seine Tafel in angegebener Weise erstellt hatte, sich nachträglich die Verhältnisse zwischen seinen Naturales und Artificiales auch noch in anderer Weise zurecht zu legen suchte; da mir dies jedoch als nebensächlich erscheint, so begnüge ich mich, dafür auf die betreffende Notiz von **Wackerbarth** (Monthly Not. 31) zu verweisen. — *f.* Die erste Publikation von **Neper** führte den Titel „Mirifici logarithmorum canonis **Descriptio**, ejusque usus in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio. Edinburgi 1614 in 4." Einer nach dem Tode des Vaters durch Sohn Robert veranstalteten neuen Ausgabe wurde sodann eine zweite ergänzende Schrift unter dem Titel „Mirifici logarithmorum canonis **Constructio**, et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines. Edinburgi 1619 in 4." beigefügt. Endlich erschien im folgenden Jahre zu Leyden ein Nachdruck des Ganzen.

24. Die Logarithmen von Briggs. — Die praktische Brauchbarkeit der Rechnungszahlen von Bürgi und Neper wurde wesentlich durch den Umstand beeinträchtigt, dass ihre Grundzahlen nicht mit der Basis des üblichen Zahlsystemes übereinstimmten, und dies fühlte Henry **Briggs** sofort heraus, als er die „Artificiales" seines Landsmannes kennen lernte. Die Folge verschiedener Besprechungen mit demselben war, dass er es übernahm, neue Logarithmentafeln der Basis 10 zu berechnen [a], welche nun natürlich jener Anforderung genügten, und da er etwas später in Adrian **Vlacq** [b] einen vortrefflichen Mitarbeiter fand, so gelang es, binnen etwas mehr als einem Jahrzehnt die grosse „Arithmetica logarithmica" zu erstellen, durch welche das köstliche neue Hilfsmittel nunmehr zum Gemeingut wurde [c]. Speciell mag hier noch hervorgehoben werden, dass bei diesem Systeme der sog. **Brigg'schen** oder **gemeinen Logarithmen** notwendig der Logarithmus jeder Decimalzahl aus zwei wesentlich verschiedenen Teilen besteht: Aus einer ganzen Zahl, der sog. **Charakteristik**, welche nur von der Stellung des Kommas, und einem Decimalbruche, der sog. **Mantisse**, welche nur von der Ziffernfolge abhängt [d]. Manches andere wird späterer Besprechung vorbehalten.

Zu 24: *a.* Nachdem **Briggs** vorläufig mit **Neper** über die von ihm gewünschte Abänderung des Logarithmensystems korrespondiert hatte, reiste er im Sommer 1615 zu ihm nach Edinburgh, wo nun die beiden Mathematiker mit einander einen vollen Monat in Sachen arbeiteten: Nicht nur verständigten sie sich, 10 als Grundzahl zu wählen und von der aus unserer 19:6 für $b = 1$ und $\mathrm{Lg}\, b = 0$ folgenden Grundregel $\mathrm{Lg} \sqrt{a} = \frac{1}{2} \mathrm{Lg}\, a$ auszugehen, sondern sie stellten auch in scharfsinniger Weise den für die Berechnung einzuschlagenden Weg fest, welchen ich mit ihnen an der in beifolgendem Schema enthaltenen Bestimmung von Lg 2 erläutern will:

	Allgemeine Grundtabelle		Ermittlung von Lg 2	
	Zahlen	Logarithmen	Zahlen	Logarithmen
	10	1,00000 00000	2	0,30103 30624
1	3,16227 76602	0,5	1,41421 35624	0,15051 65312
2	1,77827 94100	25	18920 71150	07525 82656
3	33352 14322	125	09050 77327	07362 91328
4	15478 19847	0625	04427 37824	01881 45664
5	07460 78283	03125	02189 71487	00940 72832
6	1,03663 29284	0,01562 5	1,01088 92861	0,00470 36416
7	01815 17217	00781 25	00542 99011	00235 18208
8	00903 04484	00390 625	00271 12750	00117 59104
9	00450 73643	00195 3125	00135 47199	00058 79552
10	00225 11483	00097 65625	00067 71307	00029 39776
11	1,00112 49414	0,00048 82812 ·	1,00033 85081	0,00014 69888
12	00056 23126	00024 41406 ·	00016 92397	00007 34944
13	00028 11168	00012 20703 ·	00008 46163	00003 67472
14	00014 05485	00006 10352	00004 23072	00001 83736
15	00007 02718	00003 05176	00002 11534	00000 91868
16	1,00003 51353	0,00001 52588	1,00001 05766	0,00000 45934
17	00001 75675	00000 76294	00000 52883	00000 22967
18	00000 87837	00000 38147	†	†
19	00000 43918	00000 19073 ·		
20	00000 21959	00000 09537		

Das Verfahren besteht darin, dass man nach obiger Regel aus a = 10 und Lg a = 1 durch Wurzelausziehen und Halbieren $\sqrt{10}$ und Lg $\sqrt{10}$ ableitet, — sodann aus der Wurzel nochmals die Wurzel auszieht und den Logarithmus nochmals halbiert, — u. s. f., bis man schliesslich beim Wurzelausziehen auf eine sich der Einheit so weit nähernde Zahl kömmt, dass ihr Überschuss a nur noch die Hälfte des vorhergehenden ist, folglich seine zweiten und höhern Potenzen vernachlässigt werden dürfen, da nur in diesem Falle

$$\sqrt{1+a} \doteq 1 + \frac{1}{2} a \quad \text{dann aber (39) zugleich} \quad \text{Lg}\sqrt{1+a} \doteq M \cdot \frac{1}{2} a \qquad 1$$

wo M der sog. **Modulus** des Logarithmensystemes ist. In unserm Beispiele erfolgt dies bei der 20. Extraktion bis auf 10 Decimalen, und zwar wird $\frac{1}{2}$ a = 0,00000 21959 und M · $\frac{1}{2}$ a = 0,000000 9537, also M = 0,434 309. — Hat man diese Grundlage gewonnen und will nun z. B. Lg 2 berechnen, so bestimmt man entsprechend $\sqrt{2}$, zieht hieraus nochmals die Wurzel aus, u. s. f., bis wieder der Überschuss b über die Einheit gleich der Hälfte des vorhergehenden, oder also entsprechend 1

$$\sqrt{1+b} \doteq 1 + \frac{1}{2} b \quad \text{wird, womit} \quad \text{Lg}\sqrt{1+b} = M \cdot \frac{1}{2} b \qquad 2$$

übereinstimmen muss, wie wir aus der heutigen Logarithmentheorie (39) wissen, **Briggs** aber sein feiner Takt sagte. So erhalten wir in unserm Beispiele nach 17 Extraktionen $\frac{1}{2}$ b = 0,00000 52883, und somit Lg $\sqrt{1+b}$ = M · $\frac{1}{2}$ b = 0,00000 22967. Aus dieser letztern Zahl gehen aber durch successives Verdoppeln aufsteigend die Logarithmen der vorhergehenden Zahlen hervor, bis

sich zuletzt neben 2 die Zahl 0,30103 30624 stellt, — eine Zahl, welche nun mit Lg 2 übereinstimmen sollte, von welcher aber allerdings nur die erste Hälfte der Decimalen als zuverlässig betrachtet werden darf, da nicht zu vergessen ist, dass man im ganzen mit $2^{17} = 131072$ multipliziert hat, also ein in der letzten Stelle von $\sqrt{1+b}$ vorhandener Fehler von $\frac{1}{2}$ auf volle 65532 anwachsen würde. Um 14 gute Stellen zu erhalten, berechnete **Briggs** seine Wurzeln bis auf 32 Decimalen und hatte sodann 54 Extraktionen nötig, um M zu finden. — Die nötige Arbeit, um auf solche Weise eine Reihe von Logarithmen mit zureichender Genauigkeit zu erhalten, erscheint als eine enorme; jedoch ist nicht zu übersehen, dass man die Grundtabelle nur Einmal zu berechnen hat, — dass man überdies während der Operation eine ganze Menge anderer Logarithmen mit in Kauf erhält, — und wieder andere aus schon gefundenen durch Kombination oder Interpolation fast mühelos ableiten kann. Immerhin bedurfte es eines so guten und unermüdlichen Rechners wie **Briggs**, um schon im folgenden Sommer Neper einen erheblichen Anfang der neuen Tafel vorlegen, und dann wieder ein Jahr später unter dem Titel „Logarithmorum Chilias prima. Londini 1617 in 8." als Probe die 8stelligen Logarithmen der ersten 1000 Zahlen veröffentlichen zu können. — *b.* Adrian **Vlacq** (Gouda 1600? — Haag 1667) lebte erst als Mathematiker und Buchhändler in Gouda, hielt sich von 1633 hinweg in London, Paris, etc. auf und gründete 1648 eine Offizin im Haag. Vgl. „**Bierens** de Haan, Notice sur les tables logarithmiques hollandaises (Bonc. V von 1873)". — *c.* Die von **Briggs** selbst aufgelegte „Arithmetica logarithmica. Londini 1624 in fol." giebt nach einer höchst interessanten Einleitung, auf welche wir noch später zurückkommen werden, die 14stelligen Logarithmen aller Zahlen von 1—20 000 und von 90 000 bis 100 000. Die durch **Vlacq** „Goudæ 1628 in fol." in fast übertriebener Bescheidenheit bloss als „Editio secunda aucta" gegebene Neuausgabe giebt dagegen die Logarithmen aller Zahlen von 1—100 000, jedoch mit Reduktion auf die wohl für alle Anwendungen genügende Anzahl von 10 Stellen, — und überdies auch noch für jede Minute des Quadranten die Logarithmen der Sinus, Tangens und Secans, für deren Bestimmung **Vlacq** in seiner Haupttafel die Logarithmen der von Rheticus (63) gegebenen Sinus von 45—90° aufschlug und dann die übrigen nach den Formeln

$$\text{Lsi}\,\alpha = \text{Lsi}\,2\alpha + \text{Lsi}\,30^\circ - \text{Lsi}\,(90^\circ - \alpha) \qquad \text{Ltg}\,\alpha = \text{Lsi}\,\alpha - \text{Lsi}\,(90^\circ - \alpha)$$
$$\text{Lse}\,\alpha = 10 - \text{Lsi}\,(90^\circ - \alpha) \qquad \mathbf{3}$$

berechnete, wo 10 den Lg Sinus totus bezeichnet. — Anhangsweise mag angeführt werden, dass in derselben Verlagshandlung von Pieter Rammasein in Gouda, bei der die „Arithmetica logarithmica" erschien, und also kaum ohne Vorschub und Hilfe von Vlacq, auch die von **Briggs** angelegte und nach dessen Tode durch Henry **Gellibrand** (London 1597 — ebenda 1637; Prof. astr. London) vollendete „Trigonometria britannica. Goudæ 1633 in fol." aufgelegt wurde, welche für den ganzen Quadranten und das Interval von $\frac{1}{100}{}^\circ$ die Sinus auf 15, die Lsi auf 14, die Tg, Se und ihre Lg aber auf 10 Stellen giebt, — und fast gleichzeitig die von **Vlacq** selbst noch etwas bequemer angelegte „Trigonometria artificialis. Goudæ 1633 in fol.", in welcher man für jede 10te Sekunde 10stellige Lsi und Ltg, sowie 10stellige briggische Logarithmen der ersten 20 Chiliaden findet. Endlich bleibt zu erwähnen, dass der unermüdliche **Vlacq** diesen grossen, allen spätern Tafelwerken solcher Art als Grundlage dienenden Publikationen, alsbald noch bequemere Handtafeln folgen liess: Seine „Tabulæ Sinuum, Tangentium, Secantium et Logarithmi Sinuum, Tangentium et Numerorum.

Goudæ 1636 in 8.", welche 7stellig sind und sich auf alle Minuten des Quadranten und die 10 000 ersten Zahlen beziehen, sind denn auch bis in das 19. Jahrhundert hinauf in zahlreichen Ausgaben und fast in allen Sprachen erschienen und sind noch jetzt ganz brauchbar, ja manchen neuern Sammlungen dieser Art vorzuziehen. — *d.* Der Name **Charakteristik** (Kennziffer) findet sich schon bei **Briggs**, während ich den Namen **Mantisse** (von mantissa = Zugabe) erst bei **Euler** (Introd. I 83) vorfand. Wer die Übung einführte, statt einer negativen Charakteristik ihre Ergänzung zu 10 zu schreiben und diese allfällig zur Erinnerung zu streichen, ist mir unbekannt, — während dagegen diejenige, statt einen Logarithmus zu subtrahieren, dessen sog. **dekadische Ergänzung** zu Lg 1 = 0 = ~~10~~ zu addieren, schon 1631 bei **Cavalieri** erscheinen soll.

25. Die neuern Tafeln. — Die Entwicklung der neuern Theorien und Rechnungsmethoden für einen spätern Abschnitt (39) aufsparend, bleibt zu erwähnen, dass den bereits vorhandenen Tafeln immer wieder andere folgten, welche jeweilen in Auswahl und Anordnung des Stoffes etwelche Fortschritte zu erzielen suchten [a]. So sind z. B. in der neuern Zeit Tafeln beigefügt worden, welche auf den für x = a : b bestehenden Gleichheiten

$$Lg(a+b) = Lg\,a + Lg\left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad Lg(a-b) = Lg\,a - Lg\frac{x}{x-1} \quad \mathbf{1}$$

beruhen, und, indem sie für das Argument $Lg\,x = Lg\,a - Lg\,b$ die Werte von $Lg\left(1+\frac{1}{x}\right)$ und $Lg\frac{x}{x-1}$ geben, die Möglichkeit herbeiführen, aus Lg a und Lg b direkt, d. h. ohne auf die Zahlen a und b zurückzugehen, $Lg(a \pm b)$ zu finden [b].

Zu 25: *a.* Aus der grossen Anzahl der seit **Bürgi** und **Neper** erschienenen, zum Teil schon mit denjenigen von **Briggs** und **Vlacq** konkurrierenden Tafeln hebe ich folgende hervor: „Benjamin Behr oder **Ursinus** (Sprottau in Schlesien 1587 — Frankfurt a./O. 1633; erst Hofmeister in Prag, dann Prof. math. Linz, Berlin, Frankfurt), Trigonometria cum magno logarithmorum canone. Francof. a./O. 1618 in 4. (diejenige Schrift, durch welche der Kontinent, inklusive Kepler, zuerst mit den Neper'schen Logarithmen bekannt wurde), — Edmond **Gunter** (Hertfordshire 1581 — London 1626; erst Geistlicher, dann Prof. astr. London), Canon triangulorum. London 1620 in 4. (scheint die ersten briggischen Logarithmen von Sinus und Tangens enthalten zu haben), — Jo. **Keplerus,** Chilias logarithmorum. Marpurgi 1624 in 4. (giebt Logarithmen der, mit dem Interval 100, von 100 bis 100 000 fortlaufenden Zahlenreihe, welche in der selbständigen Weise berechnet sind, dass sich, wenn Lk diese Kepler'schen Logarithmen bezeichnet, zwei Progressionen der allgemeinen Glieder $Lk\,b = n \cdot \Delta$ und $b = 10(1-\Delta)^n$ entsprechen; dabei wird Δ gefunden, indem man aus b/10 die Quadratwurzel, dann aus dieser wieder die Quadratwurzel, etc. auszieht, bis $1-\Delta$ der Einheit nahe kömmt; so z. B. erhielt Kepler, indem er aus 0,7 successive 30 mal die Wurzel auszog, $\Delta = 0{,}00000\,00003\,32179\,43100$ und somit $Lk\,7 = \Delta \cdot 2^{30} = 0{,}35667\,49481$; Keplers Schrift hat auch darum Interesse, weil in derselben die Theorie der Logarithmen zuerst etwas genauer ins Auge gefasst wird; da ferner für ein kleines Δ aus $b = 10(1-\Delta)^n$ mit Hilfe von

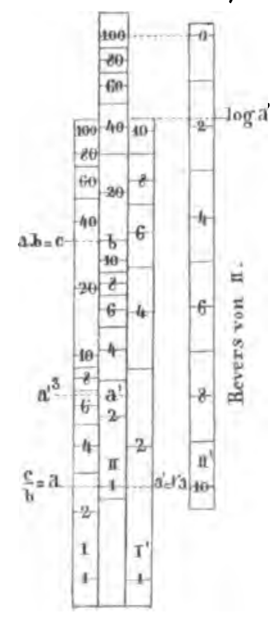
39 : 3 durch Logarithmieren Ln b = Ln 10 + n Ln (1 — △) = Ln 10 — n · △ = Ln 10 — Lk b folgt, so besteht zwischen den Kepler'schen und den natürlichen Logarithmen eine höchst einfache Relation), — Denis **Henrion** (1585? — Paris 1640?; Ingenieur und Prof. math. Paris), Traicté des logarithmes. Paris 1626 in 8. (giebt, neben einem Konstruktion und Anwendung erläuternden Texte, nach Briggs 10stellige Logarithmen der 20 000 ersten Zahlen, nach Gunter 7stellige Logarithmen der Sinus und Tangens für jede Minute des Quadranten, und repräsentiert überhaupt eines der ersten handlichen Hilfsbücher dieser Art), — Edmond **Wingate** (Bedford 1593 — London 1656; Richter in London), Tabulæ logarithmicæ. London 1633 in 8. (7stellige, durch Pfarrer Nathaniel Roe zu Benacre in Suffolk nach Vlacq bearbeitete Tafeln, welche um ihrer Anordnung willen vielen Spätern zum Muster dienten), — Peter **Crüger** (Königsberg 1580 — Danzig 1639; Prof. math. Danzig und Lehrer von Hevel), Praxis Trigonometriæ logarithmicæ cum Tabulis. Amstelodami 1634 in 8. (wird für die vollständigste Entwicklung der Neper-Kepler'schen Logarithmen gehalten), — Abraham **Sharp** (Little-Horton 1651 — ebenda 1742; folgeweise Handelslehrling, Schulmeister, Accisebeamter, Gehilfe von Flamsteed und Privatastronom in Little-Horton), Geometry improv'd. London 1717 in 4. (enthält die von ihm berechneten, in manche neuere Tafeln aufgenommenen 61stelligen Logarithmen aller Primzahlen bis auf 1097), — William **Gardiner**, Tables of Logarithms. London 1742 in 4. (8stellige Logarithmen, von welchen Callet „Paris 1773 in 8." eine neue Ausgabe besorgte, die den Ausgangspunkt seiner eigenen Tafeln bildete), — James **Dodson** (1700? — London 1757; Rektor der k. mathem. Schule zu London), The Anti-Logarithmic Canon. London 1742 in fol. (giebt für die Mantissen bis 99 999 die zugehörigen Zahlen bis auf 11 Stellen, besitzt also dieselbe Disposition wie Bürgis Progresstabul; da diese mindestens ebenso berechtigt ist als die gewöhnliche, so war es unpassend, den früher zuweilen für den „Logarithmus Sinus Complementi" gebrauchten Namen „Antilogarithmus" auf sie überzutragen; vgl. auch Marie, Hist. III 85), — **Lacaille** et **Lalande**, Tables de logarithmes pour les Sinus, Tangentes, etc. Paris 1760 in 12. (und später; um ihrer „forme commode et portative" willen bei einem Jahrhundert lang sehr beliebt), — Joh. Karl **Schulze** (Berlin 1749 — ebenda 1790; Schüler von Lambert, später Prof. math. und Akad. Berlin), Neue Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer zum Gebrauche der Mathematik unentbehrlicher Tafeln. Berlin 1778, 2 Teile in 8. (enthält unter anderm zum erstenmal die von dem holländischen Artillerieoffizier Wolfram berechneten 48stelligen natürlichen Logarithmen aller Primzahlen bis auf 10 000), — Georg Vecha, später **Vega** (Zagorica in Krain 1754 — Wien 1802; schwang sich vom armen Bauernjungen zum Artillerieoberst und Prof. math. Wien auf, und wurde für seine Leistungen als Soldat und Gelehrter in den Freiherrenstand erhoben, erlag dann aber einem Raubmorde; vgl. Fridolin Kaucic im Organ der militärw. Vereine, Wien 1886), Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Wien 1783 in 8., und: Thesaurus logarithmorum completus. Lipsiæ 1794 in fol. (Letztere Tafeln geben 10, — erstere, die in zahllosen verschiedenen, namentlich auch von Hülsse und Bremiker besorgten Ausgaben erschienen und in Deutschland lange fast ausschliesslich gebraucht wurden, 7 Stellen), — François **Callet** (Versailles 1744 — Paris 1798; Prof. hydrogr. Vannes und Dünnkirchen, dann Privatl. math. Paris), Tables portatives de logarithmes. Paris 1795 in 8. (erste stereotypierte und beide Teilungen des Quadranten berücksichtigende Tafeln, in Frankreich lange fast ausschliesslich gebraucht), — Jean-Charles

Borda (Dax im Dép. Landes 1733 — Paris 1799; Divisionschef im Marine-Minist. und Akad. Paris; vgl. Lefèvre in Mém. de l'Inst. IV), Tables trigonométriques décimales. Paris 1801 in 4. (erschienen als Probe der unter Leitung von Prony von 7 bis 8 Mathematikern und 60 bis 80 Gehilfen berechneten, 17 Folianten füllenden Tafeln, welchen für den·auf 1200 Folioseiten berechneten Druck 14stellige Logarithmen der 200 000 ersten Zahlen und der Sinus jedes Hunderttausendteilchens des Quadranten entnommen werden sollten; dieser Druck war schon begonnen, als er wegen Entwertung der Assignaten sistiert werden musste), — Valentin **Bagay** (Bisses 1772 — Lorient 1851; war Marinesoldat, dann Privatlehrer in Lorient und blieb, trotz Fleiss und Tüchtigkeit, immer ein armer Teufel), Nouvelles tables astronomiques et hydrographiques. Paris 1829 in 4. (enthalten namentlich 7stellige Log. der trig. Funktionen für jede Sekunde des Quadranten), — Karl **Bremiker** (Hagen in der Mark 1804 — Berlin 1877; astron. Rechner in Berlin), Logarithmorum VI decimalium nova tabula Berolinensis. Berolini 1852 in 8. (zahlreiche Ausgaben, seit 1869 stereotypiert; wohl jetzt die beliebteste, nach Anlage und Ausdehnung dem wirklichen Rechner am besten konvenierende Tafel), — etc." Für weitern Detail über diesen Litteraturzweig muss auf die Specialarbeiten von **Hutton** (Tracts I 306—40), **Hoüel et Burnier** (Mém. Bordeaux VIII), **Glaisher** (Rep. of Brit. Assoc. 1873), etc. verwiesen werden. — *b.* Für die Vorgeschichte dieser Tafeln auf „**Günther**, Vermischte Untersuchungen" verweisend, erwähne ich, dass schon Zecchini **Leonelli** (Cremona 1776 — Corfu 1847; Architekt und Mathematiker, zuletzt Präparator bei Mossotti in Corfu) in seinem „Supplément logarithmique. Bordeaux 1803 in 8. (2 éd. par Hoüel, Paris 1875; deutsch durch G. W. Leonhardi, Dresden 1806)" auf die Theorie und Nützlichkeit derselben aufmerksam machte und ein Specimen der von ihm auf 14 Decimalen berechneten Tafeln gab. Nachdem sodann **Gauss** (Mon. Corr. 26 von 1812) eine betreffende 5stellige Tafel publiziert hatte, wurde einerseits, obschon er die Priorität Leonellis anerkannt hatte, der unrichtige Name der „Gauss'schen Logarithmen" gebräuchlich, — und anderseits der von ihm ausgesprochene Wunsch, es möchte jemand eine 7stellige Tafel berechnen, durch „Erhard Adolf **Matthiessen** (Altona 1763 — ebenda 1831; Kaufmann in Altona), Tafel zur bequemern Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweyer Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Altona 1817 in 4." erfüllt. Seither haben noch Julius August **Zech** (Stuttgart 1821 — Berg bei Stuttgart 1864; Prof. math. Tübingen) und Theodor Ludwig **Wittstein** (Münden 1816 geb.; Prof. math. Hannover) solche Tafeln berechnet, von welchen die erstern 1839 als Anhang zu Vega-Hülsse, die zweiten „Hannover 1866 in 8." selbständig erschienen sind.

26. Die Rechenschieber, Rechenmaschinen und Rechentafeln. — Ungefähr gleichzeitig mit den Logarithmen tauchten auch mechanische Hilfsmittel zum Rechnen auf, — teils die jetzt so ziemlich wieder vergessenen **Rechenstäbe** von **Neper** [a], — teils die nach ihrem Erfinder benannte **Gunter-Scale** [b], aus welcher nach Vorschlag von **Wingate** der jetzt noch bei den Praktikern beliebte **Rechenstab** (Sliding Rule) hervorging [c]. Ferner wurde nach dem Vorgange von **Pascal** mehrfach versucht, eigentliche **Rechenmaschinen** zu konstruieren [d], von welchen jedoch bis jetzt nur der von **Thomas**

erfundene **Arithmometer** in allgemeinern Gebrauch überging [e]. Immerhin erreichte keine dieser Vorrichtungen die Bedeutung der Logarithmen, ja es werden sogar auch letztern zu allen Zeiten für gewisse Zwecke diesen speciell angepasste Hilfstafeln, wie z. B. Potenztafeln oder die von **Crelle** eingeführten Produktentafeln, überlegen bleiben [f].

Zu 26: *a.* Die von **Neper** in seiner Schrift „Rhabdologiæ seu numerationis per virgulas libri duo. Edinburgi 1617 in 12." beschriebenen und gewöhnlich auch nach ihm benannten **Rechenstäbe** entsprechen der frühern Übung (18), bei Multiplikationen sämtliche Teilprodukte einzeln aufzuschreiben. — *b.* Die von **Gunter** in seiner Schrift „The description and use of the Sector, Cross-Staff and other Instruments. London 1623 in 4. (5 ed. 1673)" zuerst als Rechnungsmittel in Vorschlag gebrachte und daher mit Recht seinen Namen besitzende, gewöhnlich auf einem hölzernen Stabe von 2 bis 3 Fuss Länge aufgetragene logarithmische, wohl auch als „Gunters Line" bezeichnete Scale, entspricht der in Note c beschriebenen und abgebildeten I, und wurde mit Hilfe eines Zirkels benutzt, wie es noch jetzt vielfach bei der sog. Schiffsrechnung der Fall sein soll. Namentlich sind bei letzterer die durch Benjamin **Donn** (Biddeford in Devonshire 1729 — Bristol? 1798; Prof. mech. Bristol) ausgeführten Stäbe beliebt, welche auf der **Vorderseite**, neben der Inschrift „Navigation Scale improved by B. Donn", verschiedene Masstäbe zeigen, ferner eine den 90° des Quadranten und den 8 Teilen des „Rhumb (Windrose)" mit ihren Vierteln entsprechende Scale, und die Linien der Chorden, Sinus und der Tangenten des ganzen, sowie (zu Gunsten der Chorographie) des halben Winkels, etc., — auf der **Rückseite** die, letztern Linien entsprechenden Logarithmen, die eigentliche logarithmische oder Gunter'sche Linie, die Linien der Wurzeln und Würfel, die sog. Meridionallinie (oder die Linie der wachsenden Breiten, zu Gunsten der Mercator-Projektion), etc. — *c.* Nachdem **Wingate** das Gunter'sche Hilfsmittel durch seine Schrift „Construction, description et usage de la règle de proportion. Paris 1624 in 12. (holl., Leiden 1628)" bekannt gemacht hatte, schlug er etwa 1627 vor, der Gunter'schen Scale noch eine zweite, verschiebbare Scale beizufügen, wodurch der Zirkel entbehrlich werde, und hieraus ging erst der gegenwärtige Rechenschieber hervor, auf den wir nun kurz eintreten wollen: Um einen solchen zu erhalten, trägt man auf zwei Stäbe I und II, von denen man II in einer Coulisse längs I verschieben kann, je die Logarithmen von 1—100 in einer beliebigen Einheit auf und schreibt zu den erhaltenen Teilstrichen die Zahlen 1—100. Bringt man sodann II 1 (oder b) zu I a (oder c), so stellt sich notwendig, sofern $c = a \times b$ ist, II b (oder 1) zu I c (oder a), und man kann somit an I das Produkt $a \times b$ (oder den Quotienten $c : b$) zweier Zahlen mit einer durch den angewandten Masstab und die Güte der Teilung bedingten Genauigkeit (gewöhnlich auf 3 Stellen mit Sicherheit) ablesen. Trägt man



auf I' ebenso, aber in doppelter Einheit, die Logarithmen von 1—10 auf, und steht a' auf I' neben a auf I, so ist $a'^2 = a$ oder $a' = \sqrt{a}$, und wenn II so gestellt wird, dass sein 1 neben a' auf I' steht, so stellt sich sein a' neben a'^3 auf I; man kann somit zur 2. und 3. Potenz erheben, und umgekehrt auch 2. und 3. Wurzeln ausziehen. Trägt man ferner auf II' (der Rückseite von II) in derselben Einheit wie auf I' die Zahlen von 0—10 rückwärts und so auf, dass, wenn das 1 von II neben dem 1 von I' steht, beim Umwenden gerade die 0 erscheint, so steht, wenn 1 von II neben a' auf I' gestellt wird, beim Umwenden Lg a' in Sicht; man kann also auch Logarithmen und Zahlen aufschlagen, mit Hilfe hievon höhere Potenzen und Wurzeln berechnen, etc. Gewöhnlich sind auf II' auch noch die Lsi von 0 bis 90° und die Ltg von 0 bis 45° aufgetragen, wodurch trigonometrische Überschlagsrechnungen ermöglicht werden, — anderer zuweilen vorkommender Specialteilungen für Reduktionen, Distanzbestimmungen, etc., nicht einmal zu gedenken. Vgl. für weitern Detail „**Lambert**, Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe. Augsburg 1772 in 8., — Ph. **Mouzin**, Instruction sur la manière de la Règle à calcul (3 éd. Paris 1837 in 8.), — Leopold Karl **Schultz** v. Strassnitzky (Krakau 1808 — Vöslau 1852; Prof. math. Wien), Anleitung zum Gebrauch des englischen Rechenschiebers. Wien 1848 in 8., — Quintino **Sella** (Mosso 1827 — Rom 1884; Prof. math. et mineral. Turin, dann ital. Finanzminister), Teorica e pratica del regolo calcolatore. Torino 1859 in 12., — Karl **Culmann** (Bergzabern 1821 — Zürich 1881; Prof. Ingenieurw. Zürich und Schöpfer der sog. graphischen Statik), Der Rechenschieber und sein Gebrauch (Culturing. 1868), — etc." — Der seither noch mehrmals wiederholte Vorschlag von William **Oughtred** (Eaton 1574 — Albury in Surrey 1660; Pfarrer in Albury), die Stäbe durch konzentrische Kreise zu ersetzen, oder derjenige von Joh. Kaspar **Horner** (Zürich 1774 — ebenda 1834; Schüler von Zach, dann Schiffsastronom Krusensterns, zuletzt Prof. math. und Ratsherr Zürich; mein väterl. Freund und Berater; vgl. Biogr. II), den geradlinigen Stab mit einer Kombination kürzerer, auf einander drehbarer Stäbe zu vertauschen (vgl. Mitth. 44 von 1877), — etc., fanden trotz hübscher Idee keine allgemeinere Verwertung. — *d.* Von der durch **Pascal** ausgedachten Rechenmaschine besitzt das Conservatoire des arts et métiers in Paris zwei von ihm selbst verifizierte Exemplare, von welchen das eine die Jahrzahl 1652 zeigt. — Auch **Leibnitz** sprach schon 1674 VII 15 in einem Briefe an Oldenburg von einer durch ihn erfundenen Rechenmaschine, welche die Produkte von 10 und 4 Stellen gebe; später gab er noch eine „Brevis descriptio machinæ arithmeticæ (Misc. Berol. I von 1710)". — Für eine Rechenmaschine von Charles **Babbage** (Teignmouth in Devonshire 1792 — London 1871; Prof. math. Cambridge, später Privatgel. London) vgl. seinen Artikel „On machinery for calculating and printing mathematical tables (Edinb. phil. Journ. 1822), — für diejenige der Georg und Eduard **Scheutz** in Stockholm den Artikel „Rechenmaschinen (Wörterbuch von Karmarsch und Heeren)", auf welchen überhaupt für weitern Detail über diese komplizierten und meist kostbaren Apparate verwiesen wird. — *e.* Der von Charles-Xavier **Thomas** (Kolmar 1785 — Paris 1870; Dir. einer Versicherungsgesellschaft in Paris) erfundene und 1820 patentierte Arithmometer erlaubt in einfachster Weise $a \cdot 10^n$ zu addieren oder zu subtrahieren, indem man a mit Hilfe beweglicher Knöpfchen aufschreibt, allfällig die Auffangsplatte versetzt und sodann eine Kurbel einmal umdreht. Natürlich gestattet dieser Apparat auch Multiplikationen und Divisionen, sowie überhaupt alle durch Wiederholung

oder Kombination der Grundoperationen darstellbaren Rechnungen auszuführen, wofür namentlich auf „Franz **Reuleaux** (Eschweiler 1820 geb.; früher Prof. mech. Zürich, jetzt Dir. Gewerbeakad. Berlin), Die Thomas'sche Rechenmaschine. Freiberg 1862 in 8." verwiesen werden kann. — *f.* Schon Joh. Paul **Buchner** gab in seiner „Tabula radicum, quadratorum et cuborum. Norimbergæ 1701 in 8." die 2. und 3. Potenzen aller Zahlen bis auf 12 000, und seither sind viele solche Tafeln von kleinerem und grösserem Umfange publiziert, ferner darauf hingewiesen worden, dass man Quadrattafeln wegen $a \cdot b = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2$ auch als Produktentafeln verwenden kann, wie es z. B. noch in der neuesten Zeit in ausgedehntester Weise durch Jos. **Blater** in seiner „Tafel der Viertelquadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 200 000. Wien 1887 in 4. (auch franz. und engl. Ausgaben)" geschehen ist. Leider hält es schwer, bequeme Anordnung, grosse Ausdehnung und geringes Volumen gleichzeitig zu erzielen; doch ist dies August Leopold **Crelle** (Eichwerder 1780 — Berlin 1855; Oberbaurat und Akad. Berlin) in seinen „Rechentafeln. Berlin 1820, 2 Vol. in 8. (2. A. von Bremiker 1864 in fol.)", welche für jeden dreistelligen Faktor und jedes dreistellige Argument das vollständige Produkt geben und für den praktischen Astronomen unentbehrlich sind, so ziemlich gelungen.

27. Die Gleichungen ersten Grades. — Sind zwei Ausdrücke nur der Form nach verschieden, so bilden sie eine **Gleichheit**; sind sie dagegen nicht wirklich gleich, sondern soll durch Bestimmung einer in ihnen enthaltenen Grösse, der sog. **Unbekannten**, ihre Gleichheit erst herbeigeführt werden, so bilden sie eine **Gleichung**, und diejenigen Werte der Unbekannten, für welche die Gleichung in eine Gleichheit übergeht, heissen **Wurzeln** der erstern [a]. — Bei den relativ einfachen Aufgaben, welche sich die frühere Zeit stellte, ging man zur Bestimmung der Unbekannten versuchsweise vor, d. h. machte für dieselbe Annahmen, — rechnete mit diesen nach Vorschrift und merkte sich die resultierenden Fehler, — verbesserte sodann jene nach Massgabe dieser letztern, und probierte neuerdings, etc., — ja erfand bald auch ein für die vorliegenden Fälle ausreichendes Verfahren, die sog. **Regula Elchatayn**, um aus zwei Annahmen und den ihnen entsprechenden Fehlern den wirklichen Wert der Unbekannten abzuleiten [b]. Später, als die mathematische Zeichensprache sich auszubilden begann, zog man vor für die Unbekannte eine besondere Bezeichnung einzuführen [c], mit dieser, wie früher mit der Annahme, zu rechnen, bis man wieder zu einer Vergleichung kommt, um sodann die so erhaltene Gleichung unter Anwendung des Grundsatzes, dass die Gleichheit zweier Ausdrücke durch Vornahme entsprechender Operationen nicht gestört werden könne, auf eine möglichst einfache Form zu bringen [d]. Diese letztere Übung hat sich bis auf die Gegenwart erhalten und dabei nennt man eine Gleichung, welche sich, nachdem man allfällige Brüche, Bruchpotenzen, etc. weggeschafft und alle Glieder auf dieselbe Seite

des Gleichheitszeichen gebracht hat, nach den Potenzen der Unbekannten ordnen lässt, **algebraisch**, wobei die höchste Potenz ihren sog. **Grad** bedingt, — dagegen **transcendent**, wenn dies nicht der Fall ist [a]. So ist jede Gleichung, welche sich auf die Form

$$a \cdot x + b = 0 \quad \text{bringen, somit durch} \quad x = -\frac{b}{a} \qquad 1$$

auf eine Gleichheit reduzieren lässt, eine **algebraische Gleichung ersten Grades** und der angegebene Wert von x ist ihre einzige und reelle **Wurzel**. Stellen z. B. t und T die gegebenen Zeiten vor, in welchen zwei Punkte einen Umlauf vollenden, und τ die unbekannte Zeit, in welcher für $t < T$ der erstere den andern je einmal überholt, so besteht offenbar die Gleichung ersten Grades

$$\tau \cdot \frac{1}{t} = 1 + \tau \cdot \frac{1}{T} \quad \text{oder} \quad \tau(T - t) - T \cdot t = 0 \quad \text{woraus} \quad \tau = \frac{T \cdot t}{T - t} \qquad 2$$

als Wert für die Unbekannte folgt [b].

Zu 27: *a.* So z. B. stellt von den beiden Vergleichungen

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b \qquad \text{und} \qquad a^2 + x^2 = 2ax$$

die erstere eine **Gleichheit** dar, da sie für alle Werte von a und b besteht, — die zweite dagegen eine **Gleichung**, da ihr nur der Wert $x = a$ genügt. — *b.* Die **Regula Elchatayn** (Regel der zwei Fehler, Methode der Wagschalen, auch: Indische Kunst), welche aus zwei Annahmen (falschen Zahlen a_1 und a_2) und den ihnen entsprechenden Fehlern (Lügen f_1 und f_2) die richtige Wurzel einer Gleichung ersten Grades zu finden lehren soll, wird von den alten Rechenmeistern in der Form: „Nimm ein lügen von der andern, waz da bleibt ($f_2 - f_1$) behalt für dein teyler; multiplicir darnach im Creutz ein falsch zal mit der andern lügen, nim eins vom andern, und das da bleibt ($a_1 \cdot f_2 - a_2 \cdot f_1$) theyl ab mit fürgemachtem teyler“ gegeben, und ist offenbar nichts anderes als ein specieller Fall unserer Regula falsi, von welcher wir in 32 einlässlich handeln werden. — *c.* Schon **Diophant** bezeichnete die Unbekannte zuweilen mit dem sog. Finalsigma ς, d. h. dem einzigen griechischen Buchstaben, welcher (16) nicht schon als Zahlzeichen diente; sonst wurde die Unbekannte mit einem Worte bezeichnet, und zwar brauchten nach **Nesselmann** die Araber für die Unbekannte selbst das Wort „schai“, für ihr Quadrat das Wort „mâl“, welche Ausdrücke sodann durch **Fibonacci** und seine Nachfolger mit **res** oder **cosa** und **census** gegeben wurden, während sie entsprechend die Lehre von den Gleichungen **Ars rei et census** oder **L'arte della cosa** hiessen. Aus letzterer Benennung entstand sodann offenbar die **Coss** der ältern deutschen Mathematiker und ihre Übung, die Unbekannte, welche sie wohl sonst auch als „sum, radix, facit, etc.“ aufführten, voraus **cossische Zahl** (numerus cossicus) zu nennen. Erst der durch **Stifel** auf Blatt 227 der 1544 erschienenen „Arithmetica integra“ und sodann wieder 1554 in seiner neuen Ausgabe von Christoph Rudolffs „Coss“ gemachte Vorschlag, für die Unbekannte das (wahrscheinlich aus Deformation von re entstandene und an res erinnernde) schon in dem Wiener Mss. benutzte Zeichen 1 2Q zu gebrauchen, bildete wieder eine Art Übergang zu ihrer Bezeichnung durch einen Buchstaben, für welchen **Harriot** a, und sodann **Descartes**, wie es jetzt noch gebräuchlich ist, einen der letzten

Buchstaben des Alphabets, voraus x, wählte. — *d.* So lautet bei **Stifel** die betreffende Regel: „Für das facit deiner auffgab setz 1 2Q. Handle damit nach der auffgab, bis du kommest auf ein equatz. Dieselbe reducir, so lang bis du sihest das 1 2Q resolvirt ist". — *e.* Aus der Gleichung

$$\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} = a$$

erhält man durch Transposition und wiederholtes Quadrieren nach und nach

$$\sqrt[4]{x^3} = a - \sqrt{x} \qquad x\sqrt{x} = a^2 - 2a\sqrt{x} + x \qquad (x + 2a)\sqrt{x} = a^2 + x$$

$$(x^2 + 4ax + 4a^2)\,x = a^4 + 2a^2x + x^2 \qquad x^3 + (4a - 1)\,x^2 + 2a^2x - a^4 = 0$$

so dass eine algebraische Gleichung dritten Grades vorliegt, während z. B. die für $x = 2$ identisch werdende Gleichung

$$2^x + 3 \cdot x = 10 \qquad \text{und} \qquad a = b^x$$

Beispiele von transcendenten Gleichungen sind. Letztere lässt sich durch Logarithmieren in $\mathrm{Lg}\,a = x \cdot \mathrm{Lg}\,b$, d. h. in eine algebraische Gleichung des ersten Grades überführen. — Die Übung, die Gleichungen auf Null zu bringen und nach den Potenzen der Unbekannten zu ordnen, scheint durch **Descartes** eingeführt worden zu sein. — *f.* Die 2 löst für $t = 1^h$ und $T = 12^h$, wo $\tau = 1^h\, 5^5/_{11}{}^m$ wird, das sog. **Zeigerproblem.**

28. Die Gleichungen mit mehreren Unbekannten. — Hat man n Gleichungen mit n Unbekannten, so können sie auf (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten reduziert werden, indem man mittelst Einer derselben Eine der Unbekannten durch die übrigen ausdrückt und diesen Wert für sie in alle andern Gleichungen einsetzt. Wendet man dieses sog. **Eliminationsverfahren** wiederholt an, bis man auf Eine Gleichung mit Einer Unbekannten gekommen ist, so giebt diese den wirklichen Wert dieser letztern, und mit seiner Hilfe lassen sich sodann rückwärts successive auch die übrigen Unbekannten definitiv berechnen [a]. — Ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als diejenige der Unbekannten, so ergiebt die Elimination eine Endgleichung mit mindestens zwei Unbekannten, — eine sog. **unbestimmte Gleichung,** der unendlich viele Systeme von Werten genügen, von welchen jedoch oft nicht ein einziges gewissen Nebenbedingungen der Aufgabe entspricht, welche diese Gleichungen geliefert hat [b]. — Wenn endlich mehr unabhängige Gleichungen als Unbekannte oder sog. **überschüssige Gleichungen** vorhanden sind, so ergiebt sich nach durchgeführter Elimination mindestens Eine Gleichung zwischen Bekannten, eine sog. **Bedingungsgleichung,** an deren Bestehen die Existenzberechtigung der Aufgabe geknüpft ist [c].

Zu 28: *a.* So findet man z. B. aus den beiden Gleichungen

$$x + 5y = 191 \qquad 3x + 2y = 118$$

successive

$$x = 191 - 5y \qquad 3(191 - 5y) + 2y = 118 \qquad \text{oder} \qquad 13y = 455$$

also

$$y = 35 \qquad x = 191 - 5 \times 35 = 16$$

Auf andere Eliminationsmethoden kann ich hier nicht eintreten; dagegen mag

noch die historische Notiz Platz finden, dass schon die Griechen Aufgaben zu lösen wussten, welche auf mehrere Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten führen. — *b.* Als Beispiel für dieses, schon von **Diophant** bearbeitete Gebiet dient die uns noch später (312) interessierende Aufgabe, eine unbestimmte Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y = c \qquad 1$$

wo a, b, c ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor, $a < b$ und a prim zu b sein sollen, in ganzen Zahlen aufzulösen. Zu diesem Zwecke bildet man successive, wenn $q_1, q_2, \ldots$ Quotienten und $r_1, r_2, \ldots$ Reste sind, die Hilfsgleichungen

$$x = \frac{c - b \cdot y}{a} = q_1 - q_2 \cdot y + p_1 \quad \text{wo} \quad p_1 = \frac{r_1 - r_2 y}{a}$$

$$y = \frac{r_1 - a \cdot p_1}{r_2} = q_3 - q_4 \cdot p_1 + p_2 \qquad p_2 = \frac{r_3 - r_4 \cdot p_1}{r_2} \qquad 2$$

$$p_1 = \frac{r_3 - r_2 \cdot p_2}{r_4} \qquad \text{etc.}$$

Setzt man nämlich diese Operation fort, bis ein Rest $r_{2h} = 1$ wird, so werden offenbar für jeden beliebigen ganzen Wert von p_h auch alle frühern p, sowie x und y, ganze Zahlen, womit die Aufgabe gelöst ist. — *c.* Auf einen wesentlich hievon verschiedenen andern Fall dieser Kategorie werden wir erst später (52) eintreten können.

29. Die Gleichungen zweiten bis vierten Grades. — Jede Gleichung zweiten Grades lässt sich auf die Form

$$\alpha . x^2 + \beta . x + \gamma = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + a . x = b \quad \text{wo} \quad a = \frac{\beta}{\alpha}, \; b = -\frac{\gamma}{\alpha} \qquad 1$$

bringen, und letztere Form geht, wie schon die Alten wussten [a], durch beidseitiges addieren von $^1/_4 . a^2$ und extrahieren successive in

$$x^2 + a . x + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4} \quad \text{und} \quad x + \frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4b}$$

d. h. in eine Gleichung ersten Grades über, aus welcher

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad 2$$

folgt. Es hat somit eine Gleichung zweiten Grades zwei Wurzeln x' und x'', deren Summe $x' + x'' = -a = -\beta/\alpha$, und deren Produkt $x' \times x'' = -b = \gamma/\alpha$ ist; dabei werden beide Wurzeln reell, gleich oder imaginär, je nachdem β^2 grösser, ebenso gross oder kleiner als $4\alpha\gamma$ ist. — Bedeutend mehr Schwierigkeiten bieten dann allerdings Gleichungen dritten und vierten Grades dar, und dem entsprechend gelang es denn auch erst einer wesentlich spätern Zeit, nach und nach Regeln für deren Auflösung zu finden [b], die überdies mehr theoretisches als praktisches Interesse haben, da es bereits für diese Grade vorteilhafter ist, denselben später (31—32) zu besprechende Annäherungsverfahren zu substituieren.

Zu 29: *a.* Schon **Euklid** lehrte (éd. Peyrard I 95), dass man eine Grösse $a^2 + a \cdot b$ durch Zufügen von $^1/_4 \cdot b^2$ zu einem vollständigen Quadrate ergänzen könne, und lieferte damit gewissermassen den Schlüssel zur Lösung der

Gleichungen zweiten Grades. — *b.* Setzt man in einer Gleichung dritten Grades

$$0 = x^3 + \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma \qquad 3$$

nach und nach $x = y - \frac{1}{3} \cdot \alpha$, $\frac{1}{3}\alpha^2 - \beta = 3 \cdot a$, $\frac{1}{3}\alpha\beta - \frac{2}{27} \cdot \alpha^3 - \gamma = 2b$, $y = u + (a : u)$ und $u^3 = z$, so erhält man successive

$$0 = y^3 - 3ay - 2b \quad 4 \qquad \text{und} \qquad z^2 - 2bz + a^3 = 0 \quad 5$$

hat somit die Gleichung dritten auf eine Gleichung zweiten Grades reduziert, die nach dem vorhergehenden gelöst werden kann. Man erhält so

$$u^3 = z = b \pm \sqrt{b^2 - a^3} \qquad \text{und hieraus} \qquad \frac{a^3}{u^3} = b \mp \sqrt{b^2 - a^3}$$

so dass
$$y = u + \frac{a}{u} = \left[b + \sqrt{b^2 - a^3}\right]^{1/3} + \left[b - \sqrt{b^2 - a^3}\right]^{1/3} \qquad 6$$

folgt, oder die sog. **Cardanische Formel.** Dass letztere nicht zuerst von **Cardan** aufgestellt worden sei, kann man schon mit grosser Wahrscheinlichkeit daraus schliessen, dass sie seinen Namen trägt, da die grosse Mehrzahl solcher Bezeichnungen auf Irrtum beruht, — und in der That ist es ganz sicher, dass schon wesentlich früher Scipione dal **Ferro** (Bologna 1460? — ebenda 1526; Prof. math. Bologna), und bald nach diesem auch Niccola **Tartaglia** (wenn auch letzterer vielleicht nicht selbständig) die Gleichung 4 zu lösen wussten, — dass **Tartaglia** 1539 seine Lösung **Cardano**, aber allerdings nur in kaum verständliche Verse eingehüllt, mitteilte, und dieser sie sodann, nachdem er inzwischen noch mit der Lösung von **Ferro** bekannt geworden und dadurch in Besitz des Schlüssels gekommen war, zuwider gegebenem Versprechen, aber allerdings unter Beifügen eines selbstgefundenen Beweises und mit Ausdehnung auf 3, in seiner „Artis magnæ sive de regulis Algebræ liber unus. Mediolani 1545 in fol." publizierte, — und dass sich **Tartaglia** in seinen „Quesiti ed invenzioni diverse. Venezia 1546 in 4." mit Recht bitter darüber beklagte. — Die bockbeinige 6 giebt scheinbar nur für $b^2 > a^3$ eine reelle Wurzel, und in diesem Falle kann man (78) nach dem Vorgange von **Riccati** und **Lambert**

$$\alpha \cdot \text{Coh}\,\varphi = b, \quad \alpha \cdot \text{Sih}\,\varphi = \sqrt{b^2 - a^3}, \quad \text{also (78:1)} \quad \alpha^2 = a^3 \text{ und } \text{Coh}^2\varphi = b^2 : a^3 \qquad 7$$

setzen, wofür 6 mit Hilfe von 78 : 4 in

$$y = (\alpha \cdot \text{Coh}\,\varphi + \alpha \cdot \text{Sih}\,\varphi)^{1/3} + (\alpha \cdot \text{Coh}\,\varphi - \alpha \cdot \text{Sih}\,\varphi)^{1/3} = 2 \cdot a^{1/2} \cdot \text{Coh}\,\frac{\varphi}{3} \qquad 8$$

übergeht, so dass 7 und 8 die 6 mit Vorteil ersetzen. Ist dagegen $b^2 < a^3$, so geht 4 für

$$y = -c \cdot \text{Si}\,\varphi \qquad \text{wo} \qquad c = 2\sqrt{a} \qquad 9$$

mit Hilfe von 40 : 7 in

$$b : a^{3/2} = 3 \cdot \text{Si}\,\varphi - 4 \cdot \text{Si}^3\varphi = \text{Si}\,3\varphi = \text{Si}\,(180^0 - 3\varphi) = -\text{Si}\,(180^0 + 3\varphi) \qquad 10$$

über, so dass in 9 für $\text{Si}\,\varphi$ die drei genügenden Werte $\text{Si}\,\varphi$, $\text{Si}\,(60^0 - \varphi)$ und $-\text{Si}\,(60^0 + \varphi)$ eingesetzt, also für 4 sogar drei reelle Wurzeln erhalten werden können. Diese letztere Auflösung des sog. **irreduktibeln Falles** verdankt man **Vieta**, während konstruktive Lösungen desselben mit Hilfe der Kegelschnitte schon den Arabern bekannt gewesen sein sollen. — In Betreff der Gleichungen vierten Grades beschränke ich mich auf die historische Notiz, dass es schon Ludovico **Ferrari** (Bologna 1522 — ebenda 1565; Prof. math. Mailand und Bologna), einem Schüler von Cardan, gelang, für sie eine sog. **Resolvente** dritten Grades zu finden.

30. Die höhern Gleichungen. — Nachdem die Gleichungen der ersten Grade in angegebener Weise absolviert und dadurch

bereits einige allgemeinere Eigenschaften, wie z. B. die Übereinstimmung der Anzahl der Wurzeln mit dem Grade der Gleichung, angedeutet waren, ging man dazu über, auch die höhern Gleichungen eingehenden Studien zu unterwerfen, und es folgten sich in dieser Richtung seit der Zeit, wo Albert **Girard** [a] und René **Descartes** [b] dieselbe mit Glück einschlugen, bis auf die Gegenwart ebenfalls die schönsten Entdeckungen. Da diese Erfolge jedoch mehr für die reine als für die angewandte Mathematik von Bedeutung sind, so muss ich mich beschränken, für die weitere Entwicklung dieses Abschnittes auf die Special-Litteratur zu verweisen [c].

Zu 30: *a.* Albert **Girard** Samielois (St-Mihiel in Lothringen, als Druckort wohl auch als „Samieli" bezeichnet, 1590? — Leiden 1633) flüchtete sich wegen religiösen Verfolgungen nach Holland und brachte sich dort mit Frau und 11 Kindern, trotz grossem Geschick, als Lehrer der Mathematik und Schriftsteller höchst kümmerlich durch. In seiner klassischen Schrift „Invention nouvelle en l'Algèbre, tant pour la solution des équations, que pour recoignoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de ceste divine science. Amsterdam 1629 in 4. (Réimpression par Bierens de Haan: Leiden 1884)" sprach er nicht nur aus, dass jede algebraische Gleichung vom n. Grade ebenfalls n Wurzeln habe, sondern auch, dass der Koefficient der (n — h). Potenz der Unbekannten die Summe der Kombinationen sämtlicher Wurzeln zur Klasse h enthalte. — *b.* René **Descartes** oder Cartesius (La Haye en Touraine 1596 — Stockholm 1650) brachte seine Jugend auf Reisen und in Kriegsdiensten zu, privatisierte von 1629—49 in Holland und folgte schliesslich einem Rufe der Königin Christine von Schweden an ihren Hof; vgl. seine „Oeuvres, par Cousin. Paris 1831, 11 Vol. in 8., — und: **Jacobi**, Über Descartes' Leben. Berlin 1846 in 8." In seiner ebenfalls klassischen Schrift „La géométrie. Paris 1637 in 4. (2 éd. 1664)" sprach er das merkwürdige Gesetz, dass bei einer Gleichung an den Zeichenwechseln und Zeichenfolgen die positiven (wahren) und negativen (falschen) Wurzeln abgezählt werden können, in den Worten aus: „Il y en peut avoir autant de vrayes que les signes + et — s'y trouvent de fois estre changez, et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes + ou deux signes — qui s'entresuivent", wobei das „peut avoir" zu betonen ist, da diese Zahlen nur erreicht werden, wenn alle Wurzeln reell sind. — *c.* Ausser auf einige schon früher (15) erwähnte Schriften verweise ich z. B. auf „**Euler**, De formis radicum æquationum cujusque ordinis conjectatio (Comm. Petr. VI von 1739), — **Lagrange**, Mémoire sur la résolution des équations numériques (Mém. Berlin 1767; spätere Nachträge und sodann Zusammenfassung in seinem Traité, Paris 1798 in 4., der in 3 éd. 1826 erschien), — **Bezout**, Théorie générale des équations algébriques. Paris 1779 in 4., — **Gauss**, Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii 1799 in 4., — W. G. **Horner**, A new method of solving numerical equations of all orders, by continuous approximation (Ph. Tr. 1819), — Niels Henric **Abel** (Findoë 1802 — Froland 1829; starb, als er eben nach Berlin berufen werden sollte; vgl. seine Oeuvres, Christiania 1839, 2 Vol. in 4., 2 éd. 1881), Mémoire sur les équations algébriques où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation

générale du 5[me] degré. Christiania 1824 in 4. (Auch Journ. Crelle I), — C. F. **Sturm**, Mémoire sur la résolution des équations numériques (nur im Auszuge im Bull. von Férussac 1829 erschienen), — Jean-Baptiste-Joseph **Fourier** (Auxerre 1768 — Paris 1830; Prof. math. und Sekretär Akad. Paris; vgl. Oeuvres par Darboux. Vol. 1. Paris 1888 in 4., und: Arago in Mém. de l'Inst. 1838), Analyse des équations déterminées. Paris 1831 in 4. (posth.), — Moritz Wilhelm **Drobisch** (Leipzig 1802 geb.; Prof. math. et philos. Leipzig), Lehre von den höhern numerischen Gleichungen. Leipzig 1834 in 8., — Karl Heinrich **Gräffe** (Braunschweig 1799 — Zürich 1873; erst Goldschmied, dann Prof. math. Zürich; ein vortrefflicher Lehrer, dem auch ich sehr viel verdanke), Die Auflösung der höhern numerischen Gleichungen. Zürich 1837 in 4. (Zusätze 1839; Bearbeitung von Encke in Berl. Jahrb. 1841), — C. **Jordan**, Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870 in 4., — Ludw. **Matthiessen**, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878 in 8., — etc."

31. Die Regeln von Bürgi und Newton. — Zu den bereits erwähnten Annäherungsmethoden für Auflösung numerischer Gleichungen gehört in erster Linie ein auf alle Grade anwendbares Verfahren, welches sich Joost **Bürgi** für die später (63) zu besprechende Berechnung der Subtensen ausdachte [a] und welches wesentlich mit einer fast ein Jahrhundert später durch **Newton** beliebten Methode übereinstimmt [b], ja sogar noch etwas vollkommener als diese letztere ist. Während nämlich der grosse Britte für die Unbekannte x durch Probieren eine Annahme a_1 suchte, deren letzte Stelle nicht um eine Einheit derselben zu klein war, — dann $a_1 + \Delta a$ statt x in die Gleichung einführte, — die 2. und höhern Potenzen von Δa vernachlässigte, — aus der entstehenden Gleichung, welche auf diese Weise in Beziehung auf Δa vom ersten Grade wurde, diese letztere Grösse ausrechnete, — so eine verbesserte Annahme $a_2 = a_1 + \Delta a$ erhielt, — nunmehr mit dieser wieder auf gleiche Weise operierte, — etc., bis eine genügende Genauigkeit erreicht schien, so verfuhr **Bürgi** zwar ganz analog, vernachlässigte aber die 2. Potenz von Δa noch nicht völlig, sondern ersetzte mit einem merkwürdigen, seine Genialität erweisenden Takte Δa^2 durch $\Delta a \times b$, wo b dem wahrscheinlichsten Werte von Δa entsprach, und erhielt so zur Berechnung von Δa noch eine etwas richtigere Gleichung ersten Grades [c].

Zu 31: *a.* **Bürgi** beschrieb sein Verfahren in dem aus den Neunzigerjahren des 16. Jahrhunderts stammenden Manuskripte, welches unter dem Titel „Byrgii Arithmetica" mit dem Kepler'schen Nachlasse auf die Bibliothek von Pulkowa kam und seiner Zeit von mir (Mitth. 31 von 1872) ausgezogen wurde. — *b.* **Newton** legte seine Methode in dem 1671 geschriebenen Traktate „Methodus fluxionum et serierum infinitarum (Opuscula I 29—199)" nieder, der aber erst nach seinem Tode durch **Colson** „London 1736 in 4." in englischer, und sodann durch **Buffon** „Paris 1740 in 4." in französischer Übersetzung herausgegeben wurde.

— *c.* Um aus der Subtensa 1 eines Bogens von 60° oder 300° die Subtensa x ihres Drittels, 20° oder 100° zu erhalten, hatte nämlich (63) **Bürgi** die Gleichung

$$1 = 3x - x^3 \qquad \mathbf{1}$$

aufzulösen. Er bestimmte nun zuerst durch Versuch eine x so nahe kommende Zahl, dass deren letzte Stelle (sagen wir die n^te links von den Einern) nicht um eine Einheit derselben (also nicht um 10^n) kleiner als der wahre Wert sein konnte, und suchte dann diese Annahme nach und nach zu verbessern. Bezeichnen wir aber eine solche Verbesserung mit Δa und setzen $a + \Delta a$ in 1 für x ein, so erhalten wir

$$3a - a^3 - 1 - \Delta a\,[3a^2 - 3 + 3a \cdot \Delta a + \Delta a^2] = 0$$

Vernachlässigt man nun in der Klammer Δa^2 und ersetzt in derselben $\Delta a < 10^n$ durch den nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung (52) besten Näherungswert $^2/_3 \cdot 10^n$, so erhält man

$$\Delta a = \frac{a(3 - a^2) - 1}{3(a^2 - 1) + 2a \cdot 10^n} \qquad \mathbf{2}$$

und diese Formel stimmt merkwürdiger Weise ganz genau mit der von **Bürgi** ohne Ableitung gegebenen Verbesserungsformel überein, so dass wohl das oben ausgesprochene Lob vollkommen gerechtfertigt erscheint. Noch mag beigefügt werden, dass der geniale Schweizer, um die Subtensa von 100° zu finden, zuerst $a = 1$ und $n = 0$ annahm, wofür ihm 2 zunächst $\Delta a = {}^1/_2$, folglich $a_1 = 1{,}5$ ergab. Diesen Wert mit $n = -1$ wieder in 2 einführend, erhielt er $a_2 = 1{,}53$, — sodann successive ($n = -2$, -3, -6 setzend) $a_3 = 1{,}532$, $a_4 = 1{,}532088$ und $a_5 = 1{,}5320888862$, welch letztern Wert er nunmehr als genügende Annäherung an die Gesuchte betrachtete. Analog fand er, von der Annahme $a = 0{,}3$ ausgehend, die Subtensa von 20° gleich 0,34729 63553.

32. Cardans Regula aurea und die Regula falsi. — Eine fernere und noch vorzüglichere Näherungsmethode, welche zunächst ebenfalls auf algebraische Gleichungen Anwendung fand, ist die von **Cardan** [a] gegebene **Regula aurea** [b], welche zwar der Form nach mit der (27) behandelten Regula Elchatayn, die unter dem Namen **Regula falsi** schon lange im Abendlande bekannt war, übereinkömmt, aber nach dem in dieselbe gelegten Sinne doch wesentlich etwas Neues darstellte [c]. Bemerkenswert ist, dass auch **Bürgi** bald nachher, und ohne von diesem Vorgänger etwas zu wissen, die alte Regula falsi ebenfalls in dieses neue Stadium überführte, ihr dabei sein noch jetzt vorhaltendes Gepräge aufdrückend [d]; ob er bereits auch daran dachte, dass sie auf transcendente Gleichungen ebenfalls angewandt werden dürfe [e], konnte ich nicht mit Sicherheit ermitteln und überhaupt eine erste Anwendung solcher Art nicht vor **Euler** konstatieren [f].

Zu 32: *a.* Geronimo **Cardano** (Pavia 1501 — Rom 1576) war Prof. math. Mailand, dann Prof. med. Pavia und Bologna, zuletzt päpstlicher Pensionär in Rom. Vgl. „H. **Morley**, The life of Girolamo Cardano of Milan, Physician. London 1854, 2 Vol. in 8." — *b.* **Cardan** teilte seine Regel in seiner Schrift von 1545 mit, also zu einer Zeit, wo **Vieta**, welchem **Montucla** (I 603) den Ruhm vindizieren wollte, eine erste allgemeine Näherungsmethode erfunden

zu haben, erst fünfjährig war; auch kann Vietas Methode absolut nicht mit der Regula aurea, höchstens mit dem Bürgi'schen Verfahren in 31, in Parallele gesetzt werden, und dieses ist eben auch jünger, so dass es nur aus redaktionellen Gründen vorangestellt wurde. — **Cardans Regel** besteht darin, dass man, um eine numerische Gleichung der Form

$$A \cdot x^n + B \cdot x^{n-1} + \ldots + N \cdot x = a \qquad 1$$

aufzulösen, zunächst durch Versuch zwei um eine Einheit differierende ganze Zahlen α_1 und α_2, oder, wie sich **Cardan** ausdrückt, ein erstes und ein zweites **Inventum** ausmittelt, von welchen das erste, wenn man in 1 links x dadurch ersetzt, ein **Productum primum** $r_1 < a$ ergiebt, während man beim Einsetzen des zweiten ein **Productum secundum** $r_2 > a$ erhält. Sodann hat man die Differenzen

$$a - r_1 = d_1 \qquad r_2 - a = d_2 \qquad r_2 - r_1 = d_2 + d_1 = D_2 \qquad 2$$

zu bilden, welche **Cardan** der Reihe nach als „erste, zweite und grössere" bezeichnet und nunmehr von der Annahme ausgeht, man finde für x einen, von ihm als **aestimatio imperfecta** bezeichneten ersten Annäherungswert, wenn man α_3 aus der Proportion

$$\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{d_1}{D_2} \quad \text{bestimme, d. h.} \quad \alpha_3 = \alpha_1 + d_1 \cdot \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{D_2} \qquad 3$$

setze. Sodann solle man das α_3 entsprechende Produkt r_3 und die Differenz $D_3 = r_2 - r_3$ suchen, — zur Bestimmung eines neuen Näherungswertes α_4 die Proportion

$$(\alpha_2 - \alpha_4) : (\alpha_2 - \alpha_3) = d_2 : D_3 \qquad 4$$

benutzen, — u. s. f., bis man eine genügende Annäherung erhalten zu haben glaube. — *c.* Vertauscht man in 3 die Buchstaben α_1, α_2, d_1 und d_2 der Reihe nach mit a_1, a_2, — f_1 und f_2, so erhält man als ersten Näherungswert

$$x = a_1 - f_1 \frac{a_2 - a_1}{f_2 - f_1} = \frac{a_1 \cdot f_2 - a_2 \cdot f_1}{f_2 - f_1} \qquad 5$$

d. h. genau denjenigen Wert, welcher nach 27 : b der Regula Elchatayn oder der frühern Regula falsi entspricht, so dass in der That das Verdienst von **Cardan** nur darin zu bestehen scheint, die alte Regel durch ein neues Kleid wieder in Kurs gebracht zu haben; aber in Wahrheit ist dem nicht so: Während die zeitgenössischen Mathematiker, wie ein Rainer **Gemma**, ein Simon **Jacob**, etc., sich vergeblich abmühten, die nur für Gleichungen ersten Grades wirklich zutreffende Regula falsi so **abzuändern**, dass sie auch für höhere Gleichungen definitive Resultate liefere, so hatte dagegen **Cardan** die gute Idee, dieselbe **intakt** zu lassen, und mittelst derselben durch successive Annäherung zum Ziele zu gelangen, indem er den frühern beliebigen Annahmen von vornherein zweckmässige Inventa substituierte; es war dies für die damalige Zeit eine entschiedene Leistung, welche ich weit höher schätze als die früher (29) berührte. — *d.* **Bürgi** widmete dieser Erweiterung der alten Regel in seiner „Arithmetica" unter der Aufschrift „Wie auss zweyen falschen Werthen, deren einer zu gross und der ander zu klein ist, der rechte Werth der Radix zu erkundigen" einen eigenen Abschnitt, und zeigte theils im allgemeinen, teils an einer ihm (63) zur Bestimmung der Subtensa von 40° vorliegenden Gleichung 8. Grades deren praktische Verwertung mit so viel Umsicht, dass wir noch jetzt kaum Besseres zu geben vermöchten. (Vgl. Mitth. 31 von 1872). — *e.* Für die Begründung wird auf 42 und 69 verwiesen. — *f.* **Euler** wandte z. B. die Regula falsi in seiner „Introductio (II 306 u. f.)" auf Lösung der transcendenten Gleichung $x = \text{Co}\, x$ an.

33. Die sog. Kombinationen. — Sollen n Grössen auf alle möglichen Arten je zu h oder **zur Klasse h**, zusammengestellt werden, so hat man für die erste Stelle n Grössen zur Auswahl, für die zweite noch (n — 1), für die dritte (n — 2), u. s. f., für die letzte noch (n — h + 1); es giebt also

$$V(n, h) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-h+1) \qquad \mathbf{1}$$

mögliche Zusammenstellungen dieser Art oder sog. **Variationen.** Darf jedes Element beliebig oft erscheinen oder soll **mit Wiederholung** variiert werden, so bleiben auch für die 2., 3., etc. Stelle alle Elemente zur Auswahl, und es giebt daher

$$V(n, h, w) = n^h \qquad \mathbf{2}$$

die Anzahl der Variationen mit Wiederholung. — Kömmt die Anzahl n der Grössen mit dem Klassenzeiger h überein, so heissen die Variationen **Permutationen,** und es giebt somit nach 1

$$P(h) = 1 . 2 . 3 \ldots h = h! \qquad \mathbf{3}$$

Permutationen aus h Elementen [a]. Behält man daher von allen Variationen der n Elemente zur Klasse h, welche dieselben Elemente enthalten, je nur Eine bei, so bleiben nach 1 und 3 noch

$$C(n, h) = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-h+1)}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots h} = \binom{n}{h} \qquad \mathbf{4}$$

Formen übrig, welche nun als **Kombinationen** bezeichnet werden [b]. — Kommen unter den zu permutierenden h Elementen p gleiche vor, so erscheint jede Permutation p! mal, und man muss somit, wenn man nur die Anzahl der wirklich verschiedenen Formen kennen will, die nach 3 erhaltene noch durch p! teilen, so dass z. B.

$$P'(h) = \frac{h!}{p! \times q!} \qquad \mathbf{5}$$

die Anzahl der Permutationsformen von h Elementen giebt, unter welchen ein Element p mal, ein zweites q mal vorkömmt [c]. — Soll man endlich n Elemente zur Klasse h **mit Wiederholung** kombinieren, so vermehrt man gewissermassen die n Elemente um (h — 1) neue Elemente, so dass nach 4

$$C(n, h, w) = \binom{n+h-1}{h} \qquad \mathbf{6}$$

die Anzahl der nunmehr möglichen Formen giebt [d]. Etc. — Zum Schlusse mag noch bemerkt werden, dass man unter dem Ausdrucke **Kombinationen** wohl auch ausser diesen die Variationen und Permutationen mitbegreift [e] und in diesem Sinne alle vorstehenden und verwandten Untersuchungen zu einer **Kombinationslehre** zusammenfasst.

Zu 33: *a.* Das in 3 erscheinende Produkt nennt man nach dem Vorgange von Christian **Kramp** (Strassburg 1760 — ebenda 1826; Arzt, Prof. phys. Köln,

zuletzt Prof. math. Strassburg), der auch das Symbol h! einführte, eine **Fakultät**. — *b.* Das „n über h" ausgesprochene Symbol $\binom{n}{h}$ kömmt nach **Baltzer** (Elemente 3. A. pag. 131) zuerst in den nachgelassenen Schriften von **Euler** vor, so in den Acta Petrop. V 1 p. 89, V 2 pag. 76 und Nova Acta V p. 52; früher brauchte auch **Euler** (vgl. z. B. Introductio I 53) dasselbe nicht, und allgemein bürgerte es sich erst im Laufe des gegenwärtigen Jahrhunderts ein. — *c.* Ist $p < q$ und $p + q = h$, so geht 5 in

$$P''(h) = \frac{h!}{p! \times (h-p)!} = \frac{(h-p+1)\ldots h}{p!} = \binom{h}{p} \qquad 7$$

über. — *d.* Für eine andere Ableitung von 6 vgl. 34. — *e.* Früher variierten auch die Einzelnbezeichnungen: So bezeichnete **Leibnitz** mit **Komplexionen**, was wir jetzt unter **Kombinationen**, mit **Variationen**, was wir seit Jak. **Bernoulli** unter **Permutationen** verstehen. — *f.* Die ersten Spuren der Kombinationslehre finden sich schon im Altertume, da bereits Buch 7 der Sammlung von **Pappus** einen Satz enthält, welcher entsprechend unserer 6 besagt: „Aus 3 Elementen lassen sich 10 Kombinationen mit Wiederholung zur Klasse 3, und 6 dergleichen zur Klasse 2 bilden". Sodann weist auch das Abendland ziemlich frühe einige betreffende Kenntnisse auf, ja nach „**Schwenter**, Deliciæ physico-mathematicæ. Nürnberg 1636 in 4." war nicht nur schon Simon **Jacob** unsere 3 bekannt, sondern er führt auch, leider ohne Angabe seiner Quelle, den durch

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n - n - 1 \qquad 8$$

gegebenen Satz auf, welchen wir allerdings jetzt durch Entwicklung von $(1+1)^n$ nach dem binomischen Lehrsatze (35) leicht erhalten, der aber für damals bereits ein tieferes Eingehen in die Sache verrät. Ferner soll in der wenig frühern Specialschrift „Paul **Guldin** (St. Gallen 1577 — Gratz 1643; hatte den Taufnamen Habakuk und war erst Goldschmied, dann Jesuit und später Prof. math. Wien und Gratz), Problema arithmeticum de rerum combinationibus. Viennæ 1622 in 4." unter anderm angegeben werden, es würden die aus den 23 Buchstaben zusammensetzbaren Wörter über 25 Trillionen Bände à 1000 Seiten à 100 Zeilen à 60 Buchstaben füllen. — Als um die Mitte des 17. Jahrhunderts die Mathematiker begannen, Fragen der sog. Probabilität in Betracht zu ziehen (49) und das Verhältnis der einem Ereignisse günstigen Fälle zu der Anzahl der möglichen Fälle als **mathematische Wahrscheinlichkeit** desselben einführten, wurde die weitere Entwicklung der Kombinationslehre zur Notwendigkeit, und so schrieb **Pascal** etwa 1654 seinen „Traité du triangle arithmétique", — so disputierte **Leibnitz** 1666 „De complexionibus", und liess dann seine „Ars combinatoria. Lipsiæ 1668 in 4." folgen, — ja es gab Jakob **Bernoulli** in seiner „Ars conjectandi. Basileæ 1713 (posth.) in 4." bereits eine so ziemlich den heutigen Bestand der Kombinationslehre enthaltende Abhandlung, so dass es für unsern Zweck überflüssig erscheint, auch noch die neuere Litteratur beizufügen. — Die sog. **Determinanten** lasse ich ganz beiseite.

34. Die Eigenschaften des Symboles n über h. — Sind n und h ganze Zahlen, so ist, wie sich leicht verifizieren lässt,

$$\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h} \qquad \text{so z. B.} \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad 1$$

und, wenn auch nur h einen ganzen Wert hat,

$$\binom{n-1}{h-1} + \binom{n-1}{h} = \binom{n}{h} = \binom{n+1}{h} - \binom{n}{h-1} \qquad 2$$

$$\frac{m+n-h+1}{h}\binom{n}{k}\binom{m}{h-k-1}=\left[\frac{m-h+k+1}{h}+\frac{n-k}{h}\right]\binom{n}{k}\binom{m}{h-k-1}=$$
$$=\frac{h-k}{h}\binom{n}{k}\binom{m}{h-k}+\frac{k+1}{h}\binom{n}{k+1}\binom{m}{h-k-1} \qquad 3$$

Setzt man in letzterer Formel successive k gleich 0, 1, 2, ... (h − 1) und addiert, so erhält man die Rekursionsformel

$$\frac{m+n-h+1}{h}\left[\binom{n}{0}\binom{m}{h-1}+\binom{n}{1}\binom{m}{h-2}+\ldots+\binom{n}{h-1}\binom{m}{0}\right]=$$
$$=\binom{n}{0}\binom{m}{h}+\binom{n}{1}\binom{m}{h-1}+\ldots+\binom{n}{h}\binom{m}{0} \qquad 4$$

und aus dieser geht durch wiederholte Anwendung die merkwürdige Gleichheit

$$\binom{n}{0}\binom{m}{h}+\binom{n}{1}\binom{m}{h-1}+\ldots+\binom{n}{h}\binom{m}{0}=\binom{m+n}{h} \qquad 5$$

hervor. Ferner folgen aus 1 und 2, wenn h eine ganze Zahl ist,

$$\binom{h}{h}+\binom{h+1}{h}=1+\binom{h+1}{1}=\binom{h+2}{1}=\binom{h+2}{h+1},$$
$$\binom{h+2}{h+1}+\binom{h+2}{h}=\binom{h+3}{h+1}, \quad \binom{h+3}{h+1}+\binom{h+3}{h}=\binom{h+4}{h+1}$$

etc., also durch Addition

$$\binom{h}{h}+\binom{h+1}{h}+\binom{h+2}{h}+\ldots+\binom{n}{h}=\binom{n+1}{h+1} \qquad 6$$

eine ebenfalls höchst interessante Beziehung [a].

Zu 34: *a.* Die Beziehung 6 erlaubt z. B. 33 : 6 noch in etwas anderer Art zu erweisen: Setzen wir nämlich voraus, es sei jene 33 : 6 bis zur Klasse h richtig, so muss es, da man offenbar alle Kombinationen zur Klasse (h + 1) erhält, wenn man dem ersten Elemente a successive die Kombinationen aller Elemente zur Klasse h, dem zweiten Elemente b diejenigen aller Elemente mit Ausnahme von a, dem dritten Elemente c diejenigen aller Elemente mit Ausnahme von a und b, etc. beifügt, nach 6

$$\binom{n+h-1}{h}+\binom{n+h-2}{h}+\binom{n+h-3}{h}+\ldots+\binom{h+1}{h}+\binom{h}{h}=\binom{n+h}{h+1}$$

solcher Kombinationen zur Klasse (h + 1) geben, d. h. es muss das Gesetz auch für die nächst höhere Klasse, folglich, da es für die erste Klasse richtig ist, für alle richtig sein.

35. Der binomische Lehrsatz. — Bezeichnet man eine Summe von Produkten, welche den Kombinationen von n Elementen b, c, d, ... zur Klasse h entsprechen, mit $C^h(b, c, \ldots)$, so erhält man offenbar als Produkt der n Binome (a + b), (a + c), (a + d), etc., den Wert

$$a^n + C^1(b, c, \ldots) . a^{n-1} + C^2(b, c, \ldots) . a^{n-2} + \ldots + C^n(b, c, \ldots)$$

und hieraus mit Hilfe von 33 : 4, wenn b = c = d = ...

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} . b + \binom{n}{2} a^{n-2} . b^2 + \ldots + b^n \qquad 1$$

d. h. den sog. **binomischen Lehrsatz** für ganze und positive Exponenten, und es erhält somit das Symbol „n über h" die Bedeutung eines **Binomial-Koefficienten.** — Bezeichnen m und n zwei ganz beliebige, ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen, so erhält man durch Multiplikation, wenn h unter dem Summenzeichen Σ die Reihe der ganzen Zahlen von 0 bis ∞ durchläuft, mit Hilfe von 34 : 5

$$\sum \binom{m}{h} . a^{m-h} . b^h \times \sum \binom{n}{h} . a^{n-h} . b^h = \sum \binom{m+n}{h} . a^{m+n-h} . b^h \qquad 2$$

d. h. es ist das Produkt zweier, folglich auch mehrerer solcher Reihen wieder eine Reihe derselben Form, und dabei ist der Zeiger $(m + n + \ldots)$ des Produktes gleich der Summe der Zeiger m, n, ... der Faktoren. So ist z. B.

$$\sum \binom{n}{h} a^{n-h} . b^h \times \sum \binom{-n}{h} a^{-n-h} . b^h = \sum \binom{0}{h} a^{-h} . b^h = 1$$

oder

$$\sum \binom{-n}{h} a^{-n-h} . b^h = (a+b)^{-n}$$

$$\left[\sum \binom{m:n}{h} a^{\frac{m}{n}-h} . b^h\right]^n = \sum \binom{m}{h} a^{m-h} . b^h = (a+b)^m \qquad 3$$

oder

$$\sum \binom{m:n}{h} a^{\frac{m}{n}-h} . b^h = (a+b)^{\frac{m}{n}}$$

d. h. es dehnt sich der binomische Lehrsatz auch auf negative und gebrochene Exponenten aus, nur dass offenbar in diesen beiden Fällen die Reihe nicht abbricht [a]. — Bildet man in ähnlicher Weise successive das Produkt $(a + b + c + \ldots)^n$, so erkennt man leicht, dass seine Glieder die Variationen der Elemente a, b, c, ... zur Klasse n mit Wiederholung darstellen, und dass jedes Glied $a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots$, wo $n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots$ ist, so oft erscheint, als sich die Komplexion aa ... abb ... bcc ... c ... permutieren lässt, d. h. $n! : (\alpha! \beta! \gamma! \ldots)$ mal. Man kann also

$$(a + b + c + \ldots)^n = \sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \ldots} a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots \qquad 4$$

setzen, und in dieser Gleichheit besteht der sog. **polynomische Lehrsatz** [b].

Zu 35: *a.* Der **binomische Lehrsatz,** welcher unbedingt zu den wichtigsten und fruchtbarsten Errungenschaften der höhern Arithmetik gehört, repräsentiert mutmasslich die erste bedeutendere Leistung von **Newton** und war gewissermassen der Schlüssel, der ihm schon in jungen Jahren seine grossen Entdeckungen in der Lehre von den Reihen, etc., ermöglichte. Er ist ihm auch voll und ganz gutzuschreiben; denn, wenn man auch schon im Altertum ein Binom in seine ersten Potenzen zu erheben wusste, — wenn nachmals **Stifel** auf fol. 44 seiner „Arithmetica integra" behufs der Extraktion eine Reihe der Binomial-Koefficienten zusammenstellte und ihr durch unsere 34 : 2 ausgedrücktes Bildungsgesetz erkannte, — wenn später **Pascal** in dem früher erwähnten

Traktate dieselben zu seinem „Triangulum arithmeticum" ordnete, — etc., so war damit der binomische Lehrsatz nicht einmal für ganze und positive Exponenten, geschweige in seiner Allgemeinheit ausgesprochen, durch welche er erst seine Tragweite erhielt. — Der oben gegebene Beweis ist wesentlich „Simon **Lhuilier** (Genf 1750 — ebenda 1840; Prof. math. Genf; vgl. Biogr. I.), Elémens raisonnés d'algèbre. Genève 1804, 2 Vol. in 8." entnommen. — *b.* Für den polynomischen Lehrsatz vgl. „**Hindenburg**, Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der Analysis. Leipzig 1796 in 8.", — für eine Anwendung 50 : 3.

36. Die sog. Interpolationen. — Hat man eine Reihe von Werten a, welche nach einer bestimmten Regel für equidistante Werte eines Argumentes berechnet sind, wie z. B. die Logarithmen der Zahlenreihe, und bildet, indem man jeden derselben von dem nächstfolgenden abzieht, eine sog. **erste Differenzreihe** der Δa, — dann aus dieser in entsprechender Weise eine **zweite** der $\Delta^2 a$, — etc., bis schliesslich, wenigstens annähernd, Konstanz eintritt, so hängen diejenigen dieser Grössen, welche in dem unten beigefügten Schema in der Geraden I stehen, durch die Reihe

$$a_n = a_0 + \binom{n}{1}\Delta a_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 a_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 a_0 + \ldots \qquad 1$$

zusammen [a], und es stellt somit diese letztere das der vorliegenden Reihe zu Grunde liegende Gesetz dar. Setzt man daher in 1 für n auch irgend einen Wert, wie z. B. eine Bruchzahl, ein, welcher in der Tafel noch keinen Repräsentanten hat, so erhält man einen Wert, der ebenfalls in die Tafel passt, und hat damit eine sog. **Interpolation** vollzogen [b]. — Führt man in 1 die selbstverständlichen Werte $\Delta^2 a_0 = \Delta^2 a_{-1} + \Delta^3 a_{-1}$, $\Delta^3 a_0 = \Delta^3 a_{-1} + \Delta^4 a_{-1}$, etc. ein, so erhält man mit Hilfe von 34 : 2 die Reihe

$$a_n = a_0 + \binom{n}{1}\Delta a_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 a_{-1} + \binom{n+1}{3}\Delta^3 a_{-1} + \binom{n+1}{4}\Delta^4 a_{-2} + \ldots \qquad 2$$

welche man ebenfalls zur Interpolation verwenden kann, wenn man statt der Differenzen I die zunächst über oder unter II stehenden Differenzen benutzen will. — Setzt man ferner

$$\delta a = \frac{\Delta a_0 + \Delta a_{-1}}{2}, \quad \delta^2 a = \Delta^2 a_{-1}, \quad \delta^3 a = \frac{\Delta^3 a_{-1} + \Delta^3 a_{-2}}{2}, \quad \delta^4 a = \Delta^4 a_{-2} \text{ etc.} \qquad 3$$

$$a = \frac{a_0 + a_1}{2}, \quad \Delta a = \Delta a_0, \quad \Delta^2 a = \frac{\Delta^2 a_{-1} + \Delta^2 a_0}{2}, \quad \Delta^3 a = \Delta^3 a_{-1}, \quad \Delta^4 a = \frac{\Delta^4 a_{-2} + \Delta^4 a_{-1}}{2} \qquad 4$$

etc., und n = n oder $n = m + \frac{1}{2}$, so erhält man nach 2 [c]

$$a_n = a_0 + \frac{n}{1}\cdot\delta a + \frac{n^2}{1\cdot 2}\cdot\delta^2 a + \frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\delta^3 a + \frac{n^2(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\delta^4 a + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\delta^5 a + \ldots \qquad 5$$

$$= a + \frac{m}{1}\cdot\Delta a + \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{1\cdot 2}\Delta^2 a + \frac{m(m^2 - \frac{1}{4})}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 a + \frac{(m^2 - \frac{1}{4})(m^2 - \frac{9}{4})}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\Delta^4 a +$$

$$+ \frac{m(m^2 - \frac{1}{4})(m^2 - \frac{9}{4})}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\Delta^5 a + \ldots \qquad 6$$

Ordnet man nach n und m, so erhält man aus 5 und 6

$$a_n = a_0 + n\left[\delta a - \frac{1}{6}\delta^3 a + \frac{1}{30}\delta^5 a - \ldots\right] + \frac{n^2}{2}\left[\delta^2 a - \frac{1}{12}\delta^4 a + \ldots\right] + \\ + \frac{n^3}{6}\left[\delta^3 a - \frac{1}{4}\delta^5 a + \ldots\right] + \frac{n^4}{24}\left[\delta^4 a - \ldots\right] + \frac{n^5}{120}\left[\delta^5 a - \ldots\right] + \ldots \qquad 7$$

$$= a - \frac{1}{8}\Delta^2 a + \frac{3}{128}\Delta^4 a - \ldots + m\left[\Delta a - \frac{1}{24}\Delta^3 a + \frac{3}{640}\Delta^5 a - \ldots\right] + \\ + \frac{m^2}{2}\left[\Delta^2 a - \frac{5}{24}\Delta^4 a + ..\right] + \frac{m^3}{6}\left[\Delta^3 a - \frac{1}{8}\Delta^5 a + ..\right] + \frac{m^4}{24}\left[\Delta^4 a - ..\right] + \frac{m^5}{120}\left[\Delta^5 a - ..\right] + .. \qquad 8$$

Führt man dagegen die Hilfsgrössen

$$A_2 = \frac{n^2}{2!} \quad A_3 = \frac{n^2 - 1}{3!} \quad A_4 = \frac{n^2(n^2 - 1)}{4!} \quad A_5 = \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 4)}{5!} \qquad 9$$

$$B_2 = \frac{m^2 - 1/4}{2!} \quad B_3 = \frac{m^2 - 1/4}{3!} \quad B_4 = \frac{(m^2 - 1/4)(m^2 - 9/4)}{4!} \quad B_5 = \frac{(m^2 - 1/4)(m^2 - 9/4)}{5!} \qquad 10$$

ein, so gehen dieselben in

$$a_n = a_0 + A_2 \cdot \delta^2 a + A_4 \cdot \delta^4 a + \ldots + n\left[\delta a + A_3 \cdot \delta^3 a + A_5 \cdot \delta^5 a + \ldots\right] \qquad 11$$

$$= a + B_2 \cdot \Delta^2 a + B_4 \cdot \Delta^4 a + \ldots + m\left[\Delta a + B_3 \cdot \Delta^3 a + B_5 \cdot \Delta^5 a + \ldots\right] \qquad 12$$

über. Sowohl die Reihen 7 und 8, als die Reihen 11 und 12, benutzen teils die auf III und IV wirklich stehenden, teils nach 3 und 4 auf sie gebrachten Werte, und zwar ist die erste jedes Paares für $n = -\,^1/_4$ bis $+\,^1/_4$, die zweite für $n = {}^1/_4$ bis $^3/_4$ (oder $m = -\,^1/_4$ bis $+\,^1/_4$) zu benutzen. Das erstere Paar ist besonders in den Fällen bequem, wo in derselben Reihe a_n für eine Folge von n zu berechnen ist, so dass die Werte der Klammern dieselben bleiben, — das zweite Paar setzt eine Hilfstafel voraus, wie sich eine solche in Tab. II vorfindet[d].

Zu 36: *a.* Befolgt man die in beistehendem Schema repräsentierte Anordnung, so ergiebt sich offenbar, **dass** jede Zahl der so gebildeten Tafel erhalten wird, indem man zu der über ihr stehenden die rechts oben von ihr stehende addiert, — **dass** überhaupt, wenn irgend eine Zahl der Tafel aus andern nach einem bestimmten Gesetze erhalten werden kann, auch jede andere nach demselben Gesetze aus entsprechenden erhältlich ist, und dass so z. B.

	a	Δa	Δ²a	Δ³a	Δ⁴a	
	-2		-3		-4	
		-2		-3		
	-1		2		-3	
		-1		-2		
	0		-1		-2	III
IV		0		-1		II
	1		0		-1	
		1		0		
	2		1		0	I

$$a_1 = a_0 + \Delta a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ also auch}$$

$$\underline{\Delta a_1 = \qquad \Delta a_0 + \Delta^2 a_0} \; + \ldots\ldots \text{ folglich}$$

$$a_2 = a_0 + 2\cdot\Delta a_0 + \Delta^2 a_0 \;\ldots\ldots \text{ also auch}$$

$$\underline{\Delta a_2 = \qquad \Delta a_0 + 2\Delta^2 a_0 + \Delta^3 a_0} \; + \text{ folglich}$$

$$\Delta a_3 = a_0 + 3\cdot\Delta a_0 + 3\Delta^2 a_0 + \Delta^3 a_0$$

etc., somit mutmasslich entsprechend 1

$$a_n = a_0 + \binom{n}{1}\Delta a_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 a_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 a_0 + \ldots$$

Sollte aber letztere Beziehung richtig sein, so wäre notwendig

$$\Delta a_n = \qquad \Delta a_0 + \binom{n}{1}\Delta^2 a_0 + \binom{n}{2}\Delta^3 a_0 + \ldots$$

oder durch Addition mit Hilfe von 34 : 2

$$a_{n+1} = a_0 + \binom{n+1}{1} \Delta a_0 + \binom{n+1}{2} \Delta^2 a_0 + \binom{n+1}{3} \Delta^3 a_0 + \ldots$$

d. h. je die folgende. Da nun die 1 noch für $n = 3$ richtig war, so ist sie es somit auch für $n = 4$, — folglich auch für $n = 5$, — etc.; es ist somit durch sog. **Induktion** die allgemeine Giltigkeit von 1 erwiesen. — *b.* Die 1 lässt sich offenbar auf die für Anwendungen bequeme Form

$$a_n = a_0 + n \left[\Delta a_0 + \frac{n-1}{2} \left[\Delta^2 a_0 + \frac{n-2}{3} (\Delta^3 a_0 + \ldots) \right] \right] \qquad \mathbf{13}$$

bringen. Kennt man nun z. B. die Logarithmen von 101, 102, 103, etc., so kann man aus ihnen die Tafel

Lg 101	= 2,00432 13738	+ 4 278 7980	— 417451	+ 8068	— 233	+ 10	— 1
102	0860 01718	237 0529	409383	7835	223	9	
103	1283 72247	196 1146	401548	7612	214		
104	1703 33393	155 9598	393936	7398			
105	2118 92991	116 5662	386538				
106	2530 58653	077 9124					
107	2938 37777						

bilden und erhält sodann aus ihr nach 13 z. B. für $n = 0{,}43$

$$Lg\,101{,}43 = Lg\,101 + 0{,}43 \left[42787980 - \frac{0{,}57}{2} \left[-417451 - \frac{1{,}57}{3} (8068 - \ldots) \right] \right] =$$
$$= 2{,}00616\,64253.$$

c. Aus 5 und 6 erhält man mit Hilfe des Schemas die Gleichheiten

$$\Delta a_0 = \frac{1}{2} \left[\Delta a_0 + (\Delta a_{-1} + \Delta^2 a_{-1}) \right] = \delta a + \frac{1}{2} \delta^2 a, \quad \Delta^3 a_{-1} = \delta^3 a + {}^1\!/_2\, \delta^4 a, \text{ etc.}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \left[a_0 + a_1 - \Delta a_0 \right] = a - {}^1\!/_2\, \Delta a, \qquad \Delta^2 a_{-1} = \Delta^2 a - {}^1\!/_2\, \Delta^3 a,$$

$$\Delta^4 a_{-2} = \Delta^4 a - {}^1\!/_2\, \Delta^5 a, \text{ etc.}$$

welche nun leicht aus 2 zu 5 und 6 führen. — *d.* Aus 1 folgt, wenn man n durch ${}^m\!/_n = m'$ ersetzt,

$$a_{m'} = a_0 + m \cdot \frac{\Delta a_0}{n} - \frac{m(n-m)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 a_0}{n^2} + \frac{m(n-m)(2n-m)}{6} \cdot \frac{\Delta^3 a_0}{n^3} - \ldots \qquad \mathbf{14}$$

Erzeigt sich nun in einem gegebenen Falle, in Vergleichung mit der angestrebten Genauigkeit, dass die erste Differenz nahe konstant oder also $\Delta^2 a \fallingdotseq 0$ wird, so hat man somit

$$a_{m'} = a_0 + m \cdot \frac{\Delta a_0}{n} \qquad \mathbf{15}$$

und es besteht daher in diesem Falle die Interpolation einfach darin, dass man Proportionalteile der ersten Differenz zu dem Ausgangsgliede addiert, — eine Operation, die schon **Ptolemäus** bei seiner Sehnentafel (61) in Aussicht nahm und durch Beifügung einer Differenzkolumne zu erleichtern suchte, und mit der man noch jetzt bei richtiger Anlage und Wahl der Hilfstafeln meistens ausreicht, — ja bei Tafeln mit doppeltem Eingange, welche ohnehin die Interpolationsarbeit nahezu vervierfachen, sich fast begnügen muss. — Sobald es sich jedoch um Tafeln grösserer Ausdehnung und überhaupt um weitergehende Genauigkeit handelt, können, wie schon das unter b durchgerechnete Beispiel zeigt, die höhern Differenzen nicht mehr vernachlässigt werden, wie dies auch schon längst eingesehen wurde: Zwar scheint mir die von **Curtze** (Z. f. M. u. Ph. 1875) und dann wieder von **Prowe** (Nic. Copp. II 226) aufgestellte Be-

hauptung, es habe sich schon **Coppernicus** zuweilen zweiter Differenzen bedient, auf Irrtum zu beruhen; wenigstens enthält die als Belege angerufene, mit 3ᵃ (also wohl: Minuta tertia) überschriebene Kolumne von dessen (bei Prowe II 228—29 abgedruckter) „Tabula equacionum Solis" keine zweiten Differenzen, sondern irgend eine andere Zahlenreihe, deren Bedeutung mir allerdings nicht klar geworden ist. Dagegen geht aus der „Arithmetica" von **Bürgi** und aus der „Arithmetica logarithmica" von **Briggs** sattsam hervor, dass sie sich über jene Notwendigkeit klar waren, und zwar gingen beide von der Ansicht aus, dass man die Interpolation auch noch in diesem Falle gewissermassen „ex ovo", d. h. an der Stelle vorzunehmen habe, wo die Differenzen konstant werden, und von da nach bestimmten Regeln successive zu den frühern Differenzreihen und den gesuchten Zahlen aufsteigen müsse; dagegen ist mir nicht gelungen, aus dem vom erstern hinterlassenen Fragmente die ihm vorschwebenden Regeln sicher herauszufinden, während mir dagegen ganz klar geworden ist, dass die von letzterm gegebenen Vorschriften unserer 14 ganz konform sind, so dass ich bis auf weiteres für **Briggs** die Ehre in Anspruch nehmen muss, zuerst eine richtige Interpolationsmethode gelehrt zu haben: Fassen wir den besonders häufig vorkommenden Fall ins Auge, wo die Berücksichtigung der zweiten Differenzen genügt, so erhalten wir nach 14, successive $m = 1$, m, $m - 1$ und $m - 2$ setzend,

$$a_{1'} - a_0 = \frac{\Delta a_0}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 a_0}{n^2} \qquad a_{m'} - a_{m'-1'} = a_{m'-1'} - a_{m'-2'} + \frac{\Delta^2 a_0}{h^2} \quad \mathbf{16}$$

Setzt man z. B. $n = 10$, so ergiebt sich hiernach als Ausgangspunkt für die ersten Differenzen $0{,}1 \cdot \Delta a_0 - 0{,}045 \cdot \Delta^2 a_0$, und jede folgende Differenz wird aus der vorhergehenden durch Zuschlag von $0{,}01 \cdot \Delta^2 a_0$ erhalten; dies stimmt aber ganz genau mit dem von **Briggs** gelehrten Verfahren überein, und in ähnlicher Weise lassen sich nach 14 auch die Regeln gewinnen, welche er für Berücksichtigung der dritten und höhern Differenzen giebt. Seine Methode wurde später durch Gabriel **Mouton** (Lyon 1618 — ebenda 1694; Dr. theol. und Präbendar in Lyon), angeblich auf Anweisung seines Freundes „Franciscus **Regnaud** Lugdunensis" in seinen „Observationes diametrorum Solis et Lunæ apparentium. Lugduni (Lyon) 1670 in 4." reproduziert, noch von **Lalande** und seiner Zeit vorzugsweise gebraucht, ferner von **Delambre** in seiner sog. Geschichte (V 360—420) mit der ihm eigenen Kunst so breit getreten, dass man Mühe hat, des Pudels Kern herauszufinden, dagegen begreifen lernt, wie dieser Autor 6 starke Quartbände füllen konnte, ohne dem gewählten Titel auch nur von ferne zu genügen. — Nachdem **Newton** den binomischen Lehrsatz gefunden hatte, war es für ihn, wie unsere obige Ableitung zeigt, kein grosses Kunststück mehr, die von Briggs gegebenen Regeln durch eine allgemeine Interpolationsformel, wie unsere 1, zu ersetzen, so dass es sich kaum lohnen würde, dieselbe nach ihm zu benennen, wenn dadurch nicht zugleich eine wesentlich andere Methode begründet worden wäre, indem sie das Bilden neuer Differenzreihen unnötig macht und erlaubt, direkt zu operieren: Es wird so bereits die Interpolation relativ leicht gemacht, — sei es direkt nach 1 unter Benutzung einer Tafel der Binomialkoefficienten, wie unsere Tab. II, — sei es, indem man 1 in 13 überführt und wie in b verfährt. Immerhin wurde bald noch ein weiterer Fortschritt erzielt, der es teils möglich macht, von der Mitte aus zu interpolieren, was, namentlich bei astronomischen Tafeln mit raschem Verlaufe, entschieden vorzüglicher ist, — teils auch sonst manche Vorteile bietet. Derselbe wurde, unter geschickter Benutzung der von **Newton**

(vgl. Princ. ed. 1687, p. 481) und **Cotesius** (vgl. „Canonotechnia" im Anhange der Harm. mens.) angestellten sachbezüglichen Betrachtungen, durch James **Stirling** (St. Ninians in Schottland 1696? — Leadhills 1770; Agent einer Bergbaugesellschaft) erzielt, indem er auf pag. 105 seines „Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Londini 1730 in 4." eine neue, mit Recht seinen Namen tragende Formel

$$a_n = a_0 + \frac{2\,\delta a \cdot n + \delta^2 a \cdot n^2}{1 \cdot 2} + \frac{4\,\delta^3 a \cdot n + \delta^4 a \cdot n^2}{1 \cdot 2} \times \frac{n^2 - 1}{3 \cdot 4} +$$
$$+ \frac{6 \cdot \delta^5 a \cdot n + \delta^6 a \cdot n^2}{1 \cdot 2} \times \frac{n^2 - 1}{3 \cdot 4} \times \frac{n^2 - 4}{5 \cdot 6} + \ldots$$

aufstellte, welche beim Ordnen nach den Differenzen in unsere 5 übergeht, so dass sowohl diese als auch die aus ihr abgeleitete Formel 6 ebenfalls als **Stirling'sche Interpolationsformeln** zu bezeichnen sind. Sie wurde später wiederholt reproduziert, so in „Charles **Walmesley** (1721? — Bath 1797; Benediktiner und apost. Vikar für West-England), De la méthode des différences et de la sommation des séries (Mém. Berl. 1758)", wo Stirling nur beiläufig genannt wird, — so in „**Lagrange**, Über das Einschalten (Berl. Jahrb. 1783)", wo nur Walmesley Erwähnung findet, — und sodann namentlich von **Hansen** in seinen „Tables de la lune" unter Stirlings Namen und mit Beigabe von den für direkte Anwendung von 5 wünschbaren Hilfstafeln. Die durch 9—12 gegebene Umgestaltung ist, abgesehen von den Bezeichnungen, wesentlich den Abhandlungen entnommen, welche **Encke** (Berl. Jahrb. 1830 und 1837) nach betreffenden Vorlesungen von **Gauss** ausgearbeitet hat; die als Tab. II bereits citierte Hilfstafel hat A. **Wolfer** berechnet.

37. Die Methode der unbestimmten Koefficienten. — Ist der Wert einer ihrer Natur nach veränderlichen Grösse x von demjenigen einer andern Veränderlichen y abhängig, indem zwischen beiden eine Gleichung besteht, so nennt man x eine **Funktion** von y und schreibt nach dem Vorgange von **Clairaut** symbolisch, es sei $F(x, y) = 0$ oder $x = f(y)$. Kann man dabei x durch eine Summe von Gliedern darstellen, welche ausser einem Zahlfaktor oder sog. **Koefficienten** die auf- oder absteigenden Potenzen von y enthalten, so sagt man, es sei die Funktion in eine **Reihe** entwickelt worden[a]. — So drückt z. B. die Gleichung

$$a \, . \, x + b \, . \, x^2 + c \, . \, x^3 + \ldots = g \, . \, y + h \, . \, y^2 + i \, . \, y^3 + \ldots \qquad 1$$

aus, dass x eine Funktion von y sei, und man kann sich nun die Aufgabe stellen, zur Berechnung von x eine ihr entsprechende Reihe

$$x = A \, . \, y + B \, . \, y^2 + C \, . \, y^3 + D \, . \, y^4 + \ldots \qquad 2$$

zu finden. Um diese Aufgabe zu lösen, d. h. die sog. **unbestimmten Koefficienten** A, B, C, ... zu ermitteln, schlug nun **Moivre** folgenden Weg ein[b]: Er ersetzte in 1, wie wenn 2 bereits bekannt wäre, die Grösse x durch ihren Wert, — erhielt so eine Bedingungsgleichung, welche für jeden Wert von y bestehen musste, — und

schloss daraus ohne Schwierigkeit[c], dass die Grössen A, B, C, ... sich successive nach

$$A = \frac{g}{a},\quad B = \frac{h - bA^2}{a},\quad C = \frac{i - 2bAB - cA^3}{a},\quad D = \frac{k - 2bAC - bB^2 - 3cA^2B + dA^4}{a} \qquad 3$$

etc., berechnen lassen, womit die Aufgabe offenbar vollständig gelöst ist[d]. — Anhangsweise mag noch erwähnt werden, dass, wenn die Summe der n ersten Glieder einer bis ins Unendliche fortlaufenden Reihe sich immer mehr einem Grenzwerte nähert, je grösser n wird, die Reihe **konvergent**, sonst aber **divergent** genannt wird[e].

Zu 37: *a.* Die Lehre von den Funktionen und Reihen wurde schon nach der Mitte des 17. Jahrhunderts ernstlich in Angriff genommen, jedoch würde es hier zu weit führen, ihrer Entwicklung Schritt für Schritt zu folgen und die zum Teil noch mühsamen Methoden vorzuführen, welche in jener ältern Zeit zur Verwendung kamen. Ich werde mich darauf beschränken müssen, von den ersten systematischen, d. h. den **Euler**'schen Arbeiten auszugehen, und dann nur jeweilen auf das schon vor diesem Reformator Erhaltene aufmerksam zu machen. Ebenso werde ich nur in einzelnen Fällen auf die der Neuzeit gutzuschreibenden Fortschritte eintreten können, — im allgemeinen aber für neuere Ableitungsmethoden und weitern Detail auf die in 15 bereits gegebene und im folgenden (namentlich in 41) noch zu ergänzende Litteratur verweisen. Ich füge bei, dass **Clairaut** das Funktionszeichen f (x) zuerst in den Mém. Par. von 1733 (p. 269) gebraucht zu haben scheint. — *b.* Vgl. „**Moivre**, A method of extracting the root of an infinite equation (Ph. Tr. 1698). — *c.* Substituiert man aus 2 in 1 und teilt durch y, so erhält man

$$a(A + By + Cy^2 + ..) + b(A^2y + 2ABy^2 + ..) + c(A^3y^2 + ..) + .. = g + hy + iy^2 + ..$$

folglich für $y = 0$ sofort $aA = g$; streicht man diese Glieder, dividiert nochmals durch y und setzt dann wieder $y = 0$, so wird $aB + bA^2 = h$, etc., woraus sich sodann die 3 ergeben. — *d.* In dem Specialfalle, wo $g = 1$ und $h = i = k = \ldots = 0$, ergeben die 3

$$A = \frac{1}{a} \qquad B = -\frac{b}{a^3} \qquad C = \frac{2b^2 - ac}{a^5} \qquad D = -\frac{5b^3 + a^2d - 5abc}{a^7} \qquad 4$$

wovon wir namentlich in 489 Gebrauch machen werden. — *e.* So ist z. B. die Reihe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots + \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^n(a-1)}$$

zwar für $a > 1$ konvergent, da sich in diesem Falle $1 : a^n (a - 1)$ beim Wachsen von n der Grenze Null nähert, aber sonst offenbar divergent. Wenn man aber auch entsprechend in vielen andern Fällen fast auf den ersten Blick die Konvergenz oder Divergenz erkennt, so giebt es dagegen andere Fälle, wo man sich täuschen kann: So z. B. könnte man leicht glauben, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ebenfalls eine konvergente Reihe sei, und doch ist diese Summe offenbar grösser als $n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, und wächst daher mit n ins Unendliche. Es ist also nicht ohne Nutzen, Regeln aufzustellen, nach denen man eine Reihe auf ihre Konvergenz prüfen kann, wie dies schon **Euler** von 1740 hinweg in verschiedenen Abhandlungen begonnen und sodann namentlich **Cauchy** in seinen

„Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence (Compt. rend. 1840)" endgiltig ausgeführt hat. Wir können uns jedoch hier mit dieser Specialität nicht eingehender befassen.

38. Die Exponentialreihen. — Aus dem Umstande, dass für $a > 1$ und jede sehr kleine Zahl w notwendig die sehr viele Glieder besitzende Folge

$$a^0 = 1 \qquad a^w > 1 \qquad a^{2w} > a^w \quad \ldots \quad a^1 = a$$

besteht, kann man schliessen, dass a^w die Einheit um eine kleine, mit w und a zunehmende Grösse übertreffen werde, dass man also

$$a^w = 1 + kw \qquad \text{oder} \qquad w = La(1 + kw) \qquad \mathbf{1}$$

setzen dürfe, wo k eine irgendwie von a abhängige Grösse und La einen Logarithmus der Basis a bezeichnet [a]. Hieraus folgt aber, wenn $w = z : m$ ist, mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$a^z = (1+kw)^m = 1 + \frac{m}{1} kw + \frac{m(m-1)}{1.2} k^2w^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} k^3w^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{kz}{1} + \frac{m-1}{1.2.m} k^2z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3.m^2} k^3z^3 + \ldots$$

oder da, wenn z eine endliche Zahl bezeichnen soll, m unendlich gross sein muss, also $(m-1) : m = (m-2) : m = \ldots = 1$ zu setzen ist, die sog. **Exponentialreihe**

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \ldots \qquad \mathbf{2}$$

woraus sich für $z = 1$

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots \qquad \mathbf{3}$$

und durch Umkehrung nach 37 : 4

$$k = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots \qquad \mathbf{4}$$

ergiebt, so dass z. B. $a = 10$ und $k = 2{,}30258$ annähernd korrespondierende Werte sind [b].

Zu 38: *a.* Ich folge aus dem früher angegebenen Grunde dem Wege, welchen **Euler** in Kap. 7 seiner klassischen „Introductio" eingeschlagen hat und füge noch bei, dass sich Marc-Michel **Bousquet** (Grancy bei Morges 1696? — Lausanne 1762; Buchhändler in Lausanne; vgl. Notiz 178) durch Übernahme vielfachen wissenschaftlichen, wenn auch nicht sehr lukrativen Verlages, und speciell des eben erwähnten Kapitalwerkes, ein so grosses Verdienst erwarb, dass es mir als Pflicht erscheint, seiner zu gedenken. — *b.* Es bleibt zu erwähnen, dass die Exponentialreihe schon **vor** Euler durch die **Newton**, Joh. **Bernoulli**, etc., und dann wieder **nach** Euler durch die **Lagrange**, **Cauchy**, etc., vielfach und in verschiedener, sich namentlich später immer verschärfender Weise abgeleitet wurde, dass ich mich aber hier darauf beschränken musste, den ersten dazu führenden systematischen Weg anzudeuten: Einen sicher zum

Ziele führenden **ersten** Pfad zu finden, ist immer die Hauptthat, — ihn später zu verbessern oder zu verlegen, ist verhältnismässig leicht, — und überdies meint Mancher einen neuen Weg zu gehen, während er eigentlich nur neue Stiefel an den Füssen hat.

39. Die logarithmischen Reihen. — Setzt man

$$(1+kw)^m = 1+x \qquad \text{oder} \qquad w = \frac{1}{k}\left[(1+x)^{1/m} - 1\right] \qquad 1$$

so erhält man aus 38:1 mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$La(1+x) = mw = \frac{m}{k}\left[(1+x)^{1/m} - 1\right] = \frac{1}{k}\left[x - \frac{m-1}{1.2.m}x^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot m^2}x^3 - ..\right]$$

und somit, wieder $m = \infty$ einführend,

$$La(1+x) = \frac{1}{k}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right] \qquad 2$$

Aus dieser fundamentalen Reihe[a] folgen successive

$$La(1-x) = -\frac{1}{k}\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right] \qquad 3$$

$$La\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{k}\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right] \qquad 4$$

und, wenn man x durch $\delta:(2y+\delta)$ ersetzt, aus 4

$$La(y+\delta) = La\,y + \frac{2}{k}\left[\frac{\delta}{2y+\delta} + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{2y+\delta}\right)^3 + \ldots\right] \qquad 5$$

eine ganz bequeme Interpolationsformel. — Setzt man $k = 1$, so wird nach 38:3

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = 2{,}71828\;18284\;59045$$

welche Zahl **Euler** mit e bezeichnete[b] und als Basis der sog. **natürlichen** Logarithmen wählte[c], für die wir das Symbol Ln gebrauchen wollen, während Lg wie früher (24) den **gemeinen** Logarithmen der Basis 10 zukommen soll. Setzt man $1+x = y$, so geht hienach 2 in

$$La\,y = \frac{1}{k}\cdot Ln\,y \quad \text{wo} \quad Ln\,y = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \ldots \qquad 6$$

oder, da hieraus für $y = a$ oder $y = e$

$$1 = \frac{1}{k}\,Ln\,a = k\,.\,La\,e \quad \text{folgt, in} \quad La\,y = \frac{1}{Ln\,a}\cdot Ln\,y = La\,e\,.\,Ln\,y \qquad 7$$

über, und dabei nennt man nach dem Vorgange von **Cotesius** den Faktor $1:k = 1:Ln\,a$ den **Modulus** des betreffenden Logarithmensystemes[d]. — Anhangsweise mag noch darauf hingewiesen werden, dass aus 5, wenn Δx eine kleine Grösse bezeichnet, die Beziehung

$$Ln(x+\Delta x) \fallingdotseq Ln\,x + \frac{\Delta x}{x} \qquad 8$$

folgt, von welcher wir später (41) Gebrauch machen werden.

Zu 39: *a.* Die logarithmische Reihe wurde gleichzeitig von Nikolaus Kaufmann oder **Mercator** (Cismar in Holstein 1620? — Paris 1687; lebte successive in Kopenhagen, London und Paris, von letzterm Orte aus sich bei der Anlage der Wasserwerke in Versailles bethätigend) in seiner „Logarithmotechnia. London 1668 in 4." und von James **Gregory** (Aberdeen 1638 — Edinburgh 1675; Prof. math. in St. Andrews und Edinburgh) in seinen „Exercitationes geometricæ. London 1688 in 4." gegeben, — sodann wieder von **Halley** (Phil. Trans. 1695) und andern entwickelt, — in obiger Weise von **Euler**. — *b.* Die Bezeichnung e wurde durch **Euler** in seiner „Introductio (I 90)" eingeführt, sie einfach mit „brevitatis gratia" begründend. — *c.* Die natürlichen Logarithmen werden wegen ihrer aus 77 hervorgehenden Bedeutung für die Quadratur der Hyperbel wohl auch **hyperbolische** genannt. — *d.* Schon **Euler** zeigte, wie man nach 4 für $k = 1$ die natürlichen Logarithmen der Zahlenreihe leicht finden könne: Setzt man nämlich successive $x = 1/3,\ 1/5,\ 1/7$, etc., so erhält man zunächst die Ln von 2, $3/2$, $4/3$, $5/4$, etc., und sodann durch Kombination auch diejenigen von 3, 4, 5, etc. So erhält man z. B.

$$\text{Ln}\,10 = 2{,}30258\,50929\,94045\,6\ldots \quad \text{und} \quad \frac{1}{\text{Ln}\,10} = 0{,}43429\,44819\,03251\,8\ldots$$

welche (als k und 1 : k gebraucht) nach 7 die Umsetzung von Lg in Ln, und umgekehrt, vermitteln. — Die neuere Zeit hat dann allerdings noch rascher fördernde Methoden gefunden: Setzt man z. B. wie **Vega** in seinem „Thesaurus"

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{y^2}{y^2-1} \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{2y^2-1}$$

oder

$$2\,\text{Lg}\,y - \text{Lg}\,(y-1) - \text{Lg}\,(y+1) = \frac{1}{k}\,\text{Ln}\,\frac{1+x}{1-x}$$

so erhält man mit Hilfe von 4

$$\text{Lg}\,y = \frac{1}{2}\left[\text{Lg}\,(y-1) + \text{Lg}\,(y+1)\right] + \frac{1}{k}\left[\frac{1}{2y^2-1} + \frac{1}{3\,(2y^2-1)^3} + \ldots\right] \qquad \mathbf{9}$$

also für $y = 2$ und $y = 3$

$$\text{Lg}\,2 = \frac{1}{2}\,\text{Lg}\,3 + \frac{1}{k}\left[\frac{1}{7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \ldots\right] \qquad \text{Lg}\,3 = \frac{3}{2}\,\text{Lg}\,2 + \frac{1}{k}\left[\frac{1}{17} + \frac{1}{3\cdot 17^3} + \ldots\right]$$

woraus man offenbar, indem man entweder Lg 3 oder Lg 2 eliminiert, Lg 2 und Lg 3, also auch die Logarithmen von 4, 6, 8, 9, 12, etc. leicht berechnen kann. Setzt man ferner $y = 5$, so giebt 9

$$\text{Lg}\,5 = \frac{1}{2}\left[\text{Lg}\,4 + \text{Lg}\,6\right] + \frac{1}{k}\left[\frac{1}{49} + \frac{1}{3\cdot 49^3} + \ldots\right]$$

etc., wobei sogar die spätern Reihen immer stärker konvergieren. — Ferner lässt sich jede Zahl auf die Form

$$N = 10^{\mu}\cdot A\cdot(1 + a_1\cdot 10^{-1})\,(1 + a_2\cdot 10^{-2})\ldots \qquad \mathbf{10}$$

bringen, wo μ eine ganze positive oder negative Zahl, A ebenfalls eine ganze (z. B. zwischen 1 und 100 liegende) Zahl, und jede der a_1, a_2, ... eine der Zahlen 1—9 ist. Kennt man daher einerseits von den A und anderseits von den Faktoren $(1 + a\cdot 10^{-n})$ in irgend einem Systeme die Logarithmen bis auf eine gewisse Anzahl von Stellen, so kann der Logarithmus irgend einer Zahl, indem man sie auf die Form 10 bringt, durch eine blosse Addition erhalten werden, — und umgekehrt kann man einen gegebenen Logarithmus in eine Summe von Logarithmen bekannter Zahlen zerlegen, also durch Multiplikation dieser letztern die ihm zugehörende Zahl finden. Es stellen daher z. B. unsere Tab. III[a, b], welche die zehnstelligen natürlichen und gemeinen Logarithmen

der Zahlen 1—100 und der nötigen Hilfsfaktoren $(1 + a \cdot 10^{-n})$ enthalten, sowie die 1—9fachen von Ln 10 und Lg e = 1 : Ln 10 und damit auch $\text{Ln}\, 10^{\prime\prime} = \mu \cdot \text{Ln}\, 10$, auf nur zwei Seiten gewissermassen eine Logarithmentafel vor, welche sonst einen starken Folianten füllen würde. Es ist diese merkwürdige Methode, wenigstens soweit sie gemeine Logarithmen betrifft, unter Beigabe von auf 15 Stellen gehenden Hilfstafeln, schon von **Briggs** in Kap. 13—14 seiner „Arithmetica logarithmica" von 1624 gelehrt, dann aber wieder so total vergessen worden, dass sie von Rob. **Flower** in seiner Schrift „The Radix, or new way of making Logarithms. London 1771 in 4." zum zweiten, ja von **Leonelli** in seiner Schrift von 1803 (vgl. 25) unter Ausdehnung auf 20 Stellen und natürliche Logarithmen, sogar zum dritten Mal erfunden werden konnte. Seither ist sie noch in „Fédor **Thoman**, Tables de logarithmes à 27 décimales pour les calculs de précision. Paris 1867 in 8., — und: Reinhold **Hoppe**, Tafeln zur dreissigstelligen logarithmischen Rechnung. Leipzig 1876 in 8." weiter ausgeführt worden, während „J. **Ellis**, On an improved bimodular Method of computing natural and tabular Logarithms and Anti-Logarithms to 12 or 16 places, with very brief Tables (Proc. Roy. Soc. 1881)" eine andere, sich an 5 anschliessende Methode portierte.

40. Die sog. goniometrischen Reihen. — Führt man vier neue Funktionen **Sinus, Cosinus, Tangens** und **Cotangens** durch

$$\text{Si}\, x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \qquad \text{Co}\, x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \qquad \textbf{1}$$

$$\text{Tg}\, x = \frac{\text{Si}\, x}{\text{Co}\, x} = \frac{e^{2xi} - 1}{i(e^{2xi} + 1)} \qquad \text{Ct}\, x = \frac{\text{Co}\, x}{\text{Si}\, x} = \frac{1}{\text{Tg}\, x} \qquad \textbf{2}$$

ein *, wo i das in 19 eingeführte Symbol für $\sqrt{-1}$ ist, so ergeben sich sofort die Beziehungen

$$\text{Si}^2 x + \text{Co}^2 x = 1 \qquad \text{Tg}\, x \,.\, \text{Ct}\, x = 1 \qquad \textbf{3}$$

$$1 + \text{Tg}^2 x = 1 : \text{Co}^2 x \qquad 1 + \text{Ct}^2 x = 1 : \text{Si}^2 x \qquad \textbf{4}$$

$$\text{Co}\, x \pm i\, \text{Si}\, x = e^{\pm xi} \qquad \frac{1 + i\,.\,\text{Tg}\, x}{1 - i\,.\,\text{Tg}\, x} = e^{2xi} = \frac{\text{Co}\, x + i\, \text{Si}\, x}{\text{Co}\, x - i\, \text{Si}\, x} \qquad \textbf{5}$$

$$(\text{Co}\, x \pm i\,.\,\text{Si}\, x)^n = e^{\pm nxi} = \text{Co}\, nx \pm i\,.\,\text{Si}\, nx \qquad \textbf{6}$$

ferner unter Beiziehung von 38 : 2 für a = e und k = 1 die Reihen

$$\text{Si}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots \qquad \textbf{7}$$

$$\text{Co}\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \qquad \textbf{8}$$

sowie als deren Quotienten auch die Reihen

$$\text{Tg}\, x = x\left[1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + \frac{17}{315}x^6 + \ldots\right] \qquad \textbf{9}$$

$$\text{Ct}\, x = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \ldots\right] \qquad \textbf{10}$$

Ebenso lassen sich mit Hilfe der 1 und 2 leicht die Formeln

$$\mathrm{Si}(a \pm b) = \mathrm{Si}\,a . \mathrm{Co}\,b \pm \mathrm{Co}\,a . \mathrm{Si}\,b, \quad \mathrm{Co}(a \pm b) = \mathrm{Co}\,a . \mathrm{Co}\,b \mp \mathrm{Si}\,a . \mathrm{Si}\,b \quad \mathbf{11}$$

$$\mathrm{Tg}(a \pm b) = \frac{\mathrm{Tg}\,a \pm \mathrm{Tg}\,b}{1 \mp \mathrm{Tg}\,a . \mathrm{Tg}\,b} \qquad \mathrm{Ct}(a \pm b) = \frac{\mathrm{Ct}\,a . \mathrm{Ct}\,b \mp 1}{\mathrm{Ct}\,b \pm \mathrm{Ct}\,a} \quad \mathbf{12}$$

verifizieren, und schreibt man die 6 für beide Zeichen auf, so erhält man mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\mathrm{Si}\,nx = \frac{1}{2i}\left[(\mathrm{Co}\,x + i . \mathrm{Si}\,x)^n - (\mathrm{Co}\,x - i\,\mathrm{Si}\,x)^n\right] =$$
$$= \binom{n}{1}\mathrm{Co}^{n-1}x . \mathrm{Si}\,x - \binom{n}{3}\mathrm{Co}^{n-3}x . \mathrm{Si}^3 x + \ldots \quad \mathbf{13}$$

$$\mathrm{Co}\,nx = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{Co}\,x + i\,\mathrm{Si}\,x)^n + (\mathrm{Co}\,x - i\,\mathrm{Si}\,x)^n\right] =$$
$$= \mathrm{Co}^n x - \binom{n}{2}\mathrm{Co}^{n-2}x . \mathrm{Si}^2 x + \ldots \quad \mathbf{14}$$

und hieraus, wenn man successive $n = 2, 3, 4$ etc. setzt,

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}\,2x &= 2\,\mathrm{Si}\,x . \mathrm{Co}\,x & \mathrm{Co}\,2x &= 2\,\mathrm{Co}^2 x - 1 \\ \mathrm{Si}\,3x &= 3\,\mathrm{Si}\,x - 4\,\mathrm{Si}^3 x & \mathrm{Co}\,3x &= 4\,\mathrm{Co}^3 x - \mathrm{Co}\,x \\ \mathrm{Si}\,4x &= (4\,\mathrm{Si}\,x - 8\,\mathrm{Si}^3 x)\,\mathrm{Co}\,x & \mathrm{Co}\,4x &= 8\,\mathrm{Co}^4 x - 8\,\mathrm{Co}^2 x + 1 \end{aligned} \quad \mathbf{15}$$

etc., wo das letztere System sich successive auch in

$$\mathrm{Co}^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Co}\,2x \qquad \mathrm{Co}^3 x = \frac{3}{4}\mathrm{Co}\,x + \frac{1}{4}\mathrm{Co}\,2x$$
$$\mathrm{Co}^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\mathrm{Co}\,2x + \frac{1}{8}\mathrm{Co}\,4x \quad \mathbf{16}$$

etc., umsetzen lässt[b]. — Logarithmiert man die zweite 5 unter Benutzung von 39 : 4, so erhält man die wichtige Reihe

$$x = \mathrm{Tg}\,x - \frac{1}{3}\mathrm{Tg}^3 x + \frac{1}{5}\mathrm{Tg}^5 x - \frac{1}{7}\mathrm{Tg}^7 x + \ldots \quad \mathbf{17}$$

Ferner mit Hilfe von 3 und des binomischen Lehrsatzes

$$\mathrm{Tg}\,x = \mathrm{Si}\,x . (1 - \mathrm{Si}^2 x)^{-1/2} = \mathrm{Si}\,x + \frac{1}{2}\mathrm{Si}^3 x + \frac{3}{8}\mathrm{Si}^5 x + \frac{5}{16}\mathrm{Si}^7 x + \ldots \quad \mathbf{18}$$

und wenn man für Tg x aus 18 in 17 substituiert

$$x = \mathrm{Si}\,x + \frac{1}{6}\mathrm{Si}^3 x + \frac{3}{40}\mathrm{Si}^5 x + \frac{5}{112}\mathrm{Si}^7 x + \ldots \quad \mathbf{19}$$

etc.[c], und so kann man auf der von **Euler** gegebenen Grundlage mit ausserordentlicher Leichtigkeit, ja fast spielend, alle Errungenschaften seiner Vorgänger und noch zahllose neue erhalten[d]. — Anhangsweise mag noch hervorgehoben werden, dass man aus den 11, wenn Δx einen kleinen Zuwachs von x bezeichnet, mit Hilfe von 7 und 8

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}\,(x + \Delta x) &= \mathrm{Si}\,x . \mathrm{Co}\,\Delta x + \mathrm{Co}\,x . \mathrm{Si}\,\Delta x \doteq \mathrm{Si}\,x + \mathrm{Co}\,x . \Delta x \\ \mathrm{Co}(x + \Delta x) &= \mathrm{Co}\,x . \mathrm{Co}\,\Delta x - \mathrm{Si}\,x . \mathrm{Si}\,\Delta x \doteq \mathrm{Co}\,x - \mathrm{Si}\,x . \Delta x \end{aligned} \quad \mathbf{20}$$

erhält, wovon wir demnächst (41) Gebrauch machen werden.

Zu 40: *a.* Für das Verhältnis dieser neuen Funktionen zu den in der Goniometrie (61—64) erscheinenden Grössen gleichen Namens vergleiche namentlich die 64. — *b.* Die 6 enthält den wichtigen Lehrsatz, welcher mit Recht den Namen von **Moivre** trägt, der ihn schon vor Redaktion seiner „Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. Londini 1730 in 4.", wahrscheinlich sogar (vgl. p. 17) schon vor 1707 kannte: Er beginnt nämlich seine Schrift mit einem Lemma, welches nach unserer Schreibweise (er selbst setzt noch $\sqrt{Co^2 x - 1}$ statt $i \cdot Si\, x$) mit

$$Co\, a = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z} \qquad \text{wo} \qquad z = \sqrt[n]{Co\, na \pm i \cdot Si\, na}$$

übereinstimmt, folglich, da durch Auflösung dieser in Beziehung auf z quadratischen Gleichung $z = Co\, a \pm i \cdot Si\, a$ erhalten wird, genau mit 6. — **Euler** leitet in seiner „Introductio" den Moivre'schen Lehrsatz nicht, wie es oben geschehen ist, aus der durch 1 gegebenen Definition von Sinus und Cosinus, sondern aus den unsern 3 und 11 entsprechenden goniometrischen Formeln ab, — geht dann in der obigen Weise von 6 auf 13 und 14 über, — und erhält nunmehr aus diesen, indem er $nx = v$ setzt, wo x unendlich klein (also $Si\, x = x$ und $Co\, x = 1$) und n unendlich gross $\left(\text{also } \binom{n}{h} = n^h : h!\right)$ sein soll, je nachdem er sie in ihrer ersten oder in ihrer zweiten Form benutzt, die unserer 1 oder unsern 7 und 8 entsprechenden Ausdrücke und Reihen für $Si\, v$ und $Co\, v$. Ich konnte ihm jedoch hierin nicht wohl folgen, da ich die Goniometrie nicht voraussetzen durfte. — Die Reihen 7 und 8 waren schon von den **Leibnitz** (Acta erud. 1691 p. 179), **Newton** (Opuscula I 22), Jak. **Bernoulli** (Opera 928), etc., aufgefunden worden, — die 13 und 14 schon um 1590 durch **Vieta**, wie aus dessen „Responsio ad Adriani Romani problema (Opera p. 315)" hervorgehen soll. — *c.* Die Reihe 17 wurde schon 1670 durch James **Gregory** an Collins mitgeteilt, — sodann 1673 unabhängig von ihm durch **Leibnitz** gefunden, welcher daraus für $x = 45^0 = \frac{1}{4}\pi$ die Reihe $\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ erhielt. Auch **Newton** kannte (l. c.) die Reihe 17, und ebenso findet sich die Reihe 19 in einem Briefe, welchen er im Juni 1676 durch Vermittlung von Oldenburg an Leibnitz sandte. — *d.* Ist

$$Tg\, x = a \cdot Tg\, y \qquad \text{und} \qquad b = \frac{a-1}{a+1} \tag{21}$$

so erhält man nach 5 und 2

$$e^{2xi} = \frac{1 + ai\, Tg\, y}{1 - ai\, Tg\, y} = \frac{e^{2yi}(a+1) - (a-1)}{(a+1) - (a-1)\, e^{2yi}} = e^{2yi} \cdot \frac{1 - b \cdot e^{-2yi}}{1 - b \cdot e^{2yi}}$$

oder durch Logarithmieren mit Benutzung von 39 : 3

$$2xi = 2yi - \left[b \cdot e^{-2yi} + \frac{b^2}{2} \cdot e^{-4yi} + \ldots\right] + \left[b \cdot e^{2yi} + \frac{b^2}{2} \cdot e^{4yi} + \ldots\right].$$

woraus mit Hilfe von 1 sofort

$$x = y + \frac{b}{1} \cdot Si\, 2y + \frac{b^2}{2} \cdot Si\, 4y + \frac{b^3}{3} Si\, 6y + \ldots \tag{22}$$

folgt, — eine sehr bequeme Reihe, welche **Lagrange** in seinen „Solutions de quelques problèmes d'astronomie sphérique par le moyen des séries (Mém. Berl. 1776)" zuerst entwickelte. — Setzt man dagegen

$$Tg\, y = \frac{a \cdot Si\, x}{1 \mp a \cdot Co\, x} = a\, Si\, x \left[1 \pm a \cdot Co\, x + a^2 \cdot Co^2 x \pm \ldots\right] \tag{23}$$

so ergiebt sich nach 17 und 15

$$y = a \cdot Si\, x \pm \frac{a^2}{2} \cdot Si\, 2x + \frac{a^3}{3} Si\, 3x \pm \ldots \tag{24}$$

Hat man somit die Gleichungen

$$x \cdot \mathrm{Si}\, y = a \cdot \mathrm{Si}\, \alpha - b \cdot \mathrm{Si}\, \beta \qquad x \cdot \mathrm{Co}\, y = a \cdot \mathrm{Co}\, \alpha - b \cdot \mathrm{Co}\, \beta \qquad \mathbf{25}$$

aus welchen sich, wenn man $25' \cdot \mathrm{Co}\, \alpha - 25'' \mathrm{Si}\, \alpha$ und $25' \cdot \mathrm{Si}\, \alpha + 25'' \cdot \mathrm{Co}\, \alpha$ bildet und dividiert,

$$\mathrm{Tg}\,(y - \alpha) = \frac{b \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - \beta)}{a - b \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha - \beta)} \qquad \mathbf{26}$$

ergiebt, so erhält man nach 24

$$y = \alpha + \frac{b}{a} \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - \beta) + \frac{b^2}{2a^2} \cdot \mathrm{Si}\, 2\,(\alpha - \beta) + \ldots \qquad \mathbf{27}$$

Ferner ergiebt sich aus 39 : 2 und 15

$$\mathrm{Ln}\, \sqrt{1 + 2a \cdot \mathrm{Co}\, x + a^2} = \frac{1}{2}\left[(2a\,\mathrm{Co}\, x + a^2) - \frac{1}{2}(2a\,\mathrm{Co}\, x + a^2)^2 + \ldots\right]$$

$$= a \cdot \mathrm{Co}\, x - \frac{a^2}{2} \cdot \mathrm{Co}\, 2x + \frac{a^3}{3}\mathrm{Co}\, 3x - \ldots \qquad \mathbf{28}$$

etc., etc.

41. Begriff der Differentialrechnung. — Ist eine Variable y als Funktion einer andern Variabeln x gegeben oder auch durch eine Gleichung mit ihr verbunden, so muss es möglich sein, die einer kleinen Veränderung Δx der letztern entsprechende Veränderung Δy der erstern zu bestimmen, wie dies im vorhergehenden auch wirklich schon in mehreren Fällen geleistet worden ist, — und ebenso muss es möglich sein, die entsprechende Aufgabe zu lösen, wenn eine Variable von mehreren andern Variabeln abhängt, ja vielleicht einzelne dieser letztern selbst wieder Funktionen sind, etc. Die Gesamtheit der Regeln, welche in den verschiedenen Fällen zur Lösung dieser Aufgabe führen, bildet die Grundlage des von **Newton** als **Fluxionsrechnung** und gleichzeitig von **Leibnitz** unter Mitwirkung der ältern Bernoulli als **Differentialrechnung** in die Arithmetik eingeführten neuen und höchst fruchtbaren Abschnittes, dessen Grundzüge wir im folgenden zu behandeln haben [a]. — Das Verhältnis $\Delta y : \Delta x$ der erwähnten Zunahmen hängt offenbar einerseits mit der Natur der Funktion und der Grösse von x zusammen, ist aber anderseits auch, sobald die Funktion in Beziehung auf x nicht vom ersten Grade ist, von der Grösse von Δx abhängig. Um sich nun von letzterm Einflusse zu emanzipieren, lässt man Δx unendlich abnehmen, wodurch sich $\Delta y : \Delta x$ immer mehr einem Grenzwerte, der sog. **Limes**, nähert, welchen man mit $dy : dx$ bezeichnet und **Differentialquotient**, wohl auch **Fluxion** oder **erste Ableitung** nennt. Es entsprechen sich also offenbar

$$y = f(x) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \frac{dy}{dx} = \mathrm{Limes}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad \mathbf{1}$$

so z. B.

$$y = a + b\,.\,x + c\,.\,z + \ldots \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = b + c\,.\,\frac{dz}{dx} + \ldots \qquad \mathbf{2}$$

Da ferner nach 39:8 und 40:20

$$d . \mathrm{Ln}\, x = \frac{dx}{x} \qquad d . \mathrm{Si}\, x = \mathrm{Co}\, x . dx \qquad d . \mathrm{Co}\, x = - \mathrm{Si}\, x . dx \qquad \mathbf{3}$$

so findet man, indem man erst logarithmiert und sodann die Regeln 2 und 3 anwendet, dass sich

$$\begin{array}{lcl} y = x . z & \text{und} & dy = z . dx + x . dz \\ y = x : z & & dy = [z . dx - x . dz] : z^2 \\ y = x^m & & dy = m . x^{m-1} . dx \\ y = e^x & & dy = e^x . dx \\ y = \mathrm{Tg}\, x & & dy = dx : \mathrm{Co}^2 x \\ y = \mathrm{Ct}\, x & & dy = - dx : \mathrm{Si}^2 x \end{array} \qquad \mathbf{4}$$

etc., entsprechen [b]. Ebenso ergiebt sich aus dem 1 zu Grunde liegenden Principe, dass

$$\begin{array}{lcl} z = f(y) \quad \text{wo} \quad y = \varphi(x) & \text{und} & dz = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx \\ z = f(x, y) & & dz = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy \\ u = \varphi(y, z) \text{ wo } y = F(x),\ z = f(x) & & \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\ f(x, y) = 0 & & \frac{dy}{dx} = - \frac{df}{dx} : \frac{df}{dy} \end{array} \qquad \mathbf{5}$$

etc., korrespondieren [c]. Die folgenden Nummern werden noch einige sich anschliessende Entwicklungen enthalten, — für weitern Detail und strengere Ableitung muss dagegen auf die betreffende Speciallitteratur verwiesen werden [d].

Zu 41: *a.* Auf den, mehr durch die sog. Freunde von **Newton** und **Leibnitz**, als durch sie selbst, provozierten Prioritätsstreit trete ich um so weniger ein, als die Grundgedanken der neuen Rechnung sich (vgl. 70) schon bei **Fermat** und seinen Zeitgenossen finden, — es sich also nur um die weitere Entwicklung handeln kann, die entschieden beiden Prätendenten viel verdankt. Dagegen will ich anmerken, dass die jetzt allgemein übliche und so auch hier angewandte Symbolik von **Leibnitz** herrührt, und der von **Newton** eingeführte Gebrauch die Fluxion einer Grösse (x) durch Aufsetzen eines Punktes ($\dot{x}$) zu bezeichnen, längst keine Anwendung mehr findet. — *b.* Setzt man $y = \mathrm{Si}\, x = \mathrm{Tg}\, z$, so ist $\mathrm{Asi}\, y = x$ und $\mathrm{Atg}\, y = z$, und man erhält somit nach 3 und 4 mit Hilfe von 40:3, 4

$$d \cdot \mathrm{Asi}\, y = dx = \frac{dy}{\mathrm{Co}\, x} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \qquad d \cdot \mathrm{Atg}\, y = dz = \mathrm{Co}^2 z \cdot dy = \frac{dy}{1 + y^2} \qquad \mathbf{6}$$

— *c.* Die partiellen Differentialquotienten werden oft in Klammern eingeschlossen, so dass man z. B. statt der zweiten 5

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) \cdot dy$$

schreibt. Da ferner entsprechend

$$d\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) \cdot dx + \left(\frac{d^2 z}{dx \cdot dy}\right) \cdot dy, \qquad d\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dy \cdot dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) \cdot dy$$

und das zweite Differential von z nach x und y offenbar denselben Wert erhalten muss, nach welcher von den Grössen man zuerst differenziert, so erhält man somit

$$d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \cdot dx^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dx \cdot dy}\right) dx \cdot dy + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \cdot dy^2 \qquad 7$$

u. s. w. — Hängen zwei Grössen r und v mit zwei unabhängigen Variabeln x und y durch

$$x = r \cdot \mathrm{Co}\,v \quad \text{und} \quad y = r \cdot \mathrm{Si}\,v \quad \text{oder} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Tg}\,v = y : x \qquad 8$$

zusammen, so hat man nach 5 und 4

$$\left(\frac{dr}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{dr}{dy}\right) \cdot dy = dr = \frac{x \cdot dx + y \cdot dy}{r} = \mathrm{Co}\,v \cdot dx + \mathrm{Si}\,v \cdot dy$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{dv}{dy}\right) \cdot dy = dv = \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2} \cdot \mathrm{Co}^2 v = -\frac{\mathrm{Si}\,v}{r} \cdot dx + \frac{\mathrm{Co}\,v}{r} \cdot dy$$

und diese Gleichheiten können nur bestehen, wenn

$$\left(\frac{dr}{dx}\right) = \mathrm{Co}\,v \qquad \left(\frac{dr}{dy}\right) = \mathrm{Si}\,v \qquad \left(\frac{dv}{dx}\right) = -\frac{\mathrm{Si}\,v}{r} \qquad \left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{\mathrm{Co}\,v}{r} \qquad 9$$

sind, — ein Resultat, von dem wir unter anderm in 508 Gebrauch machen werden. — *d.* Zur Ergänzung der schon früher (namentlich in 15) verzeichneten Litteratur erwähne ich hier noch: „Guillaume-François de l'**Hospital** (Paris 1661 — ebenda 1704; Schüler von Joh. Bernoulli und Akad. Paris), Analyse des infiniment petits. Paris 1696 in 4. (4 éd. 1768; Comment. Crousaz 1721, Varignon 1725), — **Euler**, Institutiones calculi differentialis. Petropoli 1755 in 4. (2 ed. Ticini 1787; deutsch von Michelsen und Grüson, Berlin 1790—98), und: Institutiones calculi integralis. Petropoli 1768—70, 3 Vol. in 4. (3. ed. 1824—45, 4 Vol.; deutsch von Salomon, Wien 1828—30), — Th. **Simpson**, The doctrine and application of fluxions. London 1776, 2 Parts in 8. (New ed. 1823), — **Lhuilier**, Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs. Berlin 1786 in 4. (2. A. lat. Tubingæ 1795), — **Lagrange**, Théorie des fonctions analytiques. Paris 1797 in 4. (3 éd. par Serret 1847), und: Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806 in 8. (schon 1801 in den Séances de l'école normale und 1804 im Journ. de l'école polyt. erschienen), — Sylvestre-François **Lacroix** (Paris 1765 — ebenda 1843; Prof. math. und Akad. Paris), Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Paris 1797—1800, 3 Vol. in 4. (2 éd. 1810 bis 1819), — Meier **Hirsch** (Friesack in Mittelmark 1765 — Berlin 1851; Privatl. math. Berlin), Integraltafeln. Berlin 1810 in 8., — Tobias II **Mayer**, Lehrbegriff der höhern Analysis. Göttingen 1818, 2 Vol. in 8. (ein für seine Zeit ganz vorzügliches Buch), — **Cauchy**, Leçons sur le calcul différentiel. Paris 1829 in 4., und: Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Réd. par Moigno. Paris 1840—44, 2 Vol. in 8., — Joseph Ludwig **Raabe** (Brody in Gallizien 1801 — Zürich 1859; Prof. math. Zürich, ein trefflicher Lehrer, dem auch ich viel verdanke), Die Differenzial- und Integralrechnung. Zürich 1839—47, 3 Vol. in 8. (das Mss. zum ersten Bande war schon 1835/36, wo ich noch Raabes Vorlesungen besuchte, druckfertig, und er anvertraute mir damals dasselbe behufs Revision der sämtlichen Rechnungen), — Joseph-Alfred **Serret** (Paris 1819 — ebenda 1885; Prof. math. und Akad. Paris), Cours d'algèbre supérieure. Paris 1849 in 8. (3 éd. 1866 in 2 Vol.; deutsch von Wertheim, Leipzig 1868 und 1878—79), und: Cours de calcul différentiel et intégral. Paris 1868, 2 Vol. in 8. (3 éd. 1886; deutsch von A. Harnack, Leipzig 1884—88), — Ludwig Adolf **Sohncke** (Königsberg 1807 — Halle 1853; Prof. math. Halle), Sammlung von

Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Halle 1850 in 8. (4. A. durch H. Amstein 1875), — **Gerhardt**, Die Entdeckung der höhern Analysis. Halle 1855 in 8., — H. **Weissenborn**, Die Principien der höhern Analysis in ihrer historischen Entwicklung. Halle 1856 in 8., — Joseph-Louis-François **Bertrand** (Paris 1822 geb.; Prof. math. und Sekretär Akad. Paris), Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris 1864—70, 2 Vol. in 4., — Joh. Heinrich **Durège** (Danzig 1821 geb.; Prof. math. Zürich und Prag), Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Leipzig 1864 in 8. (2. A. 1873), — Friedrich **Autenheimer** (Basel 1821 geb.; Prof. math. Winterthur), Elementarbuch der Differenzial- und Integralrechnung. Weimar 1865 in 8. (3. A. 1887), — Jules **Hoüel** (Thaon in Calvados 1823 — Périers bei Caen 1886; Prof. math. Bordeaux), Cours de Calcul infinitésimal. Paris 1878 bis 1881, 4 Vol. in 8., — Herm. **Cohen**, Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Berlin 1883 in 8., — etc." Verschiedene Monographien werden unter folgenden Nummern erwähnt werden.

42. Der sog. Taylor'sche Lehrsatz. — Ist $y = f(x)$ so beschaffen, dass den Substitutionen $x, x + \Delta x, x + 2\Delta x, \ldots$ reelle Werte $y, y_1 = y + \Delta y, y_2 = y_1 + \Delta y_1, \ldots$ entsprechen, und bezeichnet man die höhern Differenzen mit $\Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots$ so hat man entsprechend 36 : 1

$$y_n = y + \binom{n}{1}\Delta y + \binom{n}{2}\Delta^2 y + \binom{n}{3}\Delta^3 y + \ldots = y + n\Delta x \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} +$$

$$+ (n\cdot\Delta x)^2 \cdot \frac{1 - 1:n}{1.2} \cdot \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + (n\cdot\Delta x)^3 \cdot \frac{(1-1:n)(1-2:n)}{1.2.3} \cdot \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \ldots$$

Nimmt man nun an, die Zunahme $n.\Delta x$, welche x erhält, während y in y_n übergeht, habe einen konstanten Wert h, d. h. die Zahl n nehme, während Δx ohne Aufhören kleiner werde, in gleichem Verhältnisse zu, so nähern sich die Grössen $(1 - 1:n)$, $(1 - 2:n), \ldots$ der gemeinschaftlichen Grenze 1, und man erhält daher, wenn $\text{Lim}\,(\Delta y : \Delta x) = dy : dx$, $\text{Lim}\,(\Delta^2 y : \Delta x^2) = d^2 y : dx^2, \ldots$ gesetzt werden, die Reihe

$$f(x+h) = y + \frac{h}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots \qquad 1$$

welche man als **Taylor'schen Lehrsatz** bezeichnet[a] und nach **Lagrange** auch unter der Form

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1.2} \cdot f''(x) + \ldots \qquad 2$$

schreiben kann, wo $f'(x)$ die erste Ableitung von $f(x)$ bezeichnet, die sog. zweite Ableitung $f''(x)$ aber ebenso aus $f'(x)$ hervorgeht wie diese letztere aus $f(x)$, etc. Entsprechend ist

$$f(x+h, y) = f(x, y) + \frac{h}{1} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} + \ldots$$

und sodann

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{k}{1}\cdot\frac{df}{dy} + \frac{k^2}{1.2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2} + \ldots$$
$$+ \frac{h}{1}\left(\frac{df}{dx} + \frac{k}{1}\cdot\frac{d^2f}{dx.dy} + ..\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2f}{dx^2} + ..\right) + .. \qquad \mathbf{3}$$

und so weiter [b].

Zu 42: *a.* Der Taylor'sche Lehrsatz wurde entsprechend seinem Namen von Brook **Taylor** (Edmonton in Middlesex 1685 — London 1731; Privatgel. London) in seiner „Methodus incrementorum directa et inversa. London 1715 in 4." zuerst ausgesprochen, sodann von **Lagrange, Ampère, Cauchy, Roche,** etc., in verschiedener Weise abgeleitet und namentlich auch das sog. **Restglied,** d. h. der beim Wegwerfen späterer Glieder entstehende Fehler, ermittelt, wofür ich auf die bereits (41) gegebene Speciallitteratur und auf „E. **Marloh,** Geschichte des Restes der Taylor'schen Reihe. Göttingen 1881 in 8." verweise. — *b.* Als Beispiel der Anwendung setze ich

$$\text{Co}\,y = z + b \qquad \text{wo} \qquad z = \text{Co}\,x \qquad \mathbf{4}$$

wofür nach 2 und 41 : 4

$$y = \text{Aco}\,(z+b) = f(z+b) = f(z) + \frac{b}{1}f'(z) + \frac{b^2}{1\cdot 2}\cdot f''(z) + \ldots$$

$$\text{wo} \quad f(z) = \text{Aco}\,z = x \qquad f'(z) = \frac{dx}{dz} = -\frac{1}{\text{Si}\,x} \qquad f''(z) = -\frac{\text{Ct}\,x}{\text{Si}^2 x}\ldots$$

folgt, so dass also schliesslich, wenn y und x in der gewöhnlichen Winkeleinheit ausgedrückt, also die übrigen Glieder mit Si 1" dividiert werden,

$$y = x - \frac{b}{\text{Si}\,1''}\cdot\frac{1}{\text{Si}\,x} - \frac{b^2}{2\,\text{Si}\,1''}\cdot\frac{\text{Ct}\,x}{\text{Si}^2 x} - \ldots \qquad \mathbf{5}$$

erhalten wird. Entsprechend findet man die korrespondierenden Beziehungen

$$\text{Si}\,y = \text{Si}\,x + b \qquad \text{und} \qquad y = x + \frac{b}{\text{Si}\,1''}\cdot\frac{1}{\text{Co}\,x} + \frac{b^2}{2\,\text{Si}\,1''}\cdot\frac{\text{Tg}\,x}{\text{Co}^2 x} + \ldots \qquad \mathbf{6}$$

Wird ferner $y = f(x)$ für $x = \alpha$ zu Null, für $x = a_1 = \alpha + h$ aber zu δ_1 und für $x = a_2 = \alpha + k$ zu δ_2, so hat man nach 2

$$\delta_1 = f(\alpha) + \frac{h}{1}f'(\alpha) + \ldots \qquad \delta_2 = f(\alpha) + \frac{k}{1}f'(\alpha) + \ldots$$

daher, da $f(\alpha) = 0$, für kleine Werte von h und k angenähert

$$\delta_1 : \delta_2 = h : k = (a_1 - \alpha) : (a_2 - \alpha) \qquad \text{oder} \qquad \alpha = a_1 - \delta_1 \cdot \frac{a_2 - a_1}{\delta_2 - \delta_1} \qquad \mathbf{7}$$

womit die allgemeine, sich also auch auf transcendente Funktionen erstreckende Giltigkeit von 32 : 5 oder der Regula falsi erwiesen ist.

43. Die Reihen von Maclaurin und Lagrange.

— Setzt man in der Taylor'schen Reihe $x = 0$ und bezeichnet die entsprechenden Werte von $f(x), f'(x), \ldots$ mit $f(0), f'(0), \ldots$, so erhält man, wenn schliesslich h mit x vertauscht wird, die nach **Maclaurin** [a] benannte Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}\cdot f'(0) + \frac{x^2}{1.2}\cdot f''(0) + \ldots \qquad \mathbf{1}$$

Setzt man ferner

$$u = \psi(y) \qquad y = w + x\,.\,\varphi(y) \qquad z = \frac{d\,.\,\psi(w)}{dw} \qquad \mathbf{2}$$

so erhält man durch Differentiation [b] und Anwendung von 1 die nach **Lagrange** [c] benannte Reihe

$$\psi(y) = \psi(w) + \frac{x}{1}[\varphi(w).z] + \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{d[\varphi(w)^2.z]}{dw} + \ldots \quad 3$$

welche wohl auch als Lagrange'sche **Reversionsformel** bezeichnet wird.

Zu 43: *a.* Colin **Maclaurin** (Kilmoddan in Schottland 1698 — York 1746; Prof. math. Aberdeen und Edinburgh) entwickelte seine Reihe in seinem „Treatise of Fluxions. Edinburgh 1742, 2 Vol. in 4. (franz. durch Pezénas, Paris 1749)". — *b.* Durch Differentiation erhält man successive

$$\frac{dy}{dw} = 1 + x \cdot \varphi'(y) \cdot \frac{dy}{dw} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dw} = \frac{1}{1 - x \cdot \varphi'(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) + x \cdot \varphi'(y)\frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(y)}{1 - x \cdot \varphi'(y)} = \varphi(y) \cdot \frac{dy}{dw}$$

$$\frac{du}{dw} = \psi'(y) \cdot \frac{dy}{dw} \quad \frac{du}{dx} = \psi'(y) \cdot \frac{dy}{dx} = \psi'(y) \cdot \varphi(y)\frac{dy}{dw} = \varphi(y) \cdot \frac{du}{dw}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \varphi(y)\frac{d^2u}{dw \cdot dx} + \varphi'(y)\frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dw} = \frac{d[\varphi(y)^2 \cdot du : dw]}{dw}$$

etc., oder, wenn man $x = 0$, also $y = w$, setzt,

$$f(0) = \psi(w) \qquad f'(0) = \varphi(w) \cdot z \qquad f''(0) = \frac{d[\varphi(w)^2 \cdot z]}{dw} \quad \text{etc.}$$

— *c.* **Lagrange** entwickelte, durch ähnliche Untersuchungen von **Lambert** veranlasst, seine Reihe in der Abhandlung „Sur le problème de Kepler (Mém. Berl. 1769)". — *d.* Die Lagrange'sche Reversionsformel wurde noch später wiederholt behandelt und namentlich durch **Laplace** in seiner „Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes (Mém. Par. 1784)" wesentlich verallgemeinert. Vgl. auch „Ludwig **Schläfli** (Burgdorf 1814 geb.; Prof. math. Bern), Über eine Verallgemeinerung des Lagrange'schen Lehrsatzes, für die der Beweis noch gefordert wird (Bern. Mitth. 1848)".

44. Die Lehre vom Maximum und Minimum und den scheinbar unbestimmten Ausdrücken. — Offenbar nimmt f (x) für jeden Wert von x, dessen Nachbarwerte $(x \pm h)$ entweder beide Abnahme oder beide Zunahme von f (x) bedingen, ein Maximum oder ein Minimum an. Da nun die Grösse h immer so klein angenommen werden kann, dass ein mit einer Potenz derselben behaftetes Glied über die Gesamtheit der Glieder mit höhern Potenzen dominiert, so folgt (42), dass für jeden Wert von x, der $f'(x) = 0$ macht und also das mit h sein Vorzeichen wechselnde Glied beseitigt, f (x) ein Maximum oder Minimum annimmt, je nachdem für denselben Wert von x die zweite Ableitung $f''(x)$ ein negatives oder positives Vorzeichen erhält. Sollte dieser Wert aber auch $f''(x) = 0$ machen, so hätte nach denselben Grundsätzen nur dann ein Maximum oder Minimum statt, wenn auch noch $f'''(x) = 0$ und $f^{IV}(x)$ negativ oder positiv würde; etc. [a]. — Da (42)

$$\frac{f(x+h)}{F(x+h)} = \frac{f(x) + h \cdot f'(x) + {}^1/_2 h^2 \cdot f''(x) + \ldots}{F(x) + h \cdot F'(x) + {}^1/_2 h^2 \cdot F''(x) + \ldots}$$

so hat man, wenn für $x = a$ sowohl $f(x)$ als $F(x)$ gleich Null werden, für ein unendlich abnehmendes h

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0} = \text{Lim.} \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

wodurch ein Mittel gegeben ist, wenigstens in manchen Fällen, den Wert eines scheinbar unbestimmten Ausdruckes zu ermitteln. Sollten auch $f'(a)$ und $F'(a)$ gleich Null werden, so würde der Quotient der zweiten Ableitungen an die Stelle treten, etc.; würde dagegen nur $f'(a)$, oder nur $F'(a)$ gleich Null, so hätte $f(a) : F(a)$ den Wert 0 oder ∞; etc. [b].

Zu 44: *a.* Für die Geschichte dieser Lehre wird auf „Jacques-Denis **Cheisy** (Jussy 1799 — Genève 1859; Prediger und Prof. philos. Genf), Essai historique sur le problème des Maximums. Genève 1823 in 4." verwiesen, — für die sog. **Variationsrechnung**, welche sich nicht nur damit befasst, den Wert einer Grösse zu bestimmen, für welchen eine bekannte Funktion ein Maximum oder Minimum annimmt, sondern auch letztere so festzusetzen sucht, dass sie gewissen Anforderungen genügt, teils auf einige später (115) behandelte Aufgaben, teils auf die Specialschriften: „**Euler**, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietates gaudentes. Lausannæ 1744 in 4., und: Elementa calculi variationum (Comm. Petrop. 1766), — **Lagrange**, Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales (Misc. Taur. 1760), und: Observations sur la méthode des variations (Misc. Taur. 1766—69), — H. **Gräffe**, Commentatio historiam calculi variationum. Gottingæ 1825 in 4., — Martin **Ohm** (Erlangen 1792 — Berlin 1872; Bruder von Simon in 157; Prof. math. Berlin), Die Lehre vom Grössten und Kleinsten. Berlin 1825 in 8., — Georg Wilhelm **Strauch** (Hoppenheim 1811 — Muri 1868; Prof. math. Lenzburg und Muri), Theorie und Anwendung des sog. Variationscalculs. Zürich 1849, 2 Vol. in 8., — **Cauchy** et **Moigno**, Calcul des variations. Paris 1861 in 8., — **Todhunter**, A History of the Progress of the Calculus of Variation during the 19. Century. Cambridge 1861 in 8., — etc." — *b.* Ist der unbestimmt werdende Ausdruck, wie z. B.

$$y = \sqrt{x-1} : \sqrt[3]{x^2-1} \qquad \text{woraus für } x = 1 \qquad y = \frac{0}{0}$$

folgt, von der Art, dass der im Zähler und Nenner für einen bestimmten Fall verschwindende Faktor einen gebrochenen Exponenten hat, so hilft auch ein fortgesetztes Differentieren nicht, da alsdann jener Faktor nie verschwindet. Dagegen kann man in solchem Falle das Verfahren anwenden, in dem für $x = a$ unbestimmt werdenden Ausdrucke x durch $(a + h)$ zu ersetzen, dann nach h zu entwickeln, und zuletzt $h = 0$ zu setzen: Substituiert man z. B. in dem oben erwähnten Falle $(1 + h)$ für x, so wird

$$y = \sqrt{h} : \sqrt[3]{2h + h^2} = \sqrt[6]{h} : \sqrt[3]{2 + h} \qquad \text{also für } h = 0 \qquad y = 0$$

Es führt sogar dieses letztere Verfahren auch oft da schneller zum Ziele, wo das erstere brauchbar bleibt.

45. Begriff der Integralrechnung. — Ist $f(x) \,.\, dx$ das Differential von $F(x)$, so nennt man nach dem Vorgange von

Jak. **Bernoulli** F (x) das **Integral** von f (x) dx [a], und man hat daher, wenn man $\int$ als Operationszeichen für das Integrieren wählt,

$$\int f(x) \, . \, dx = F(x) + \text{Const.} \qquad 1$$

wo Constans beigefügt worden ist, da (41) beim Differentieren die konstanten Glieder wegfallen. Entsprechend lässt sich jede Differentialregel in eine Integralregel umsetzen, und man erhält so unmittelbar (41)

$$\int a.dx = a.x + C, \int x^m.dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \int e^x.dx = e^x + C, \int \frac{dx}{x} = \text{Ln}\,x + C. \qquad 2$$

$$\int \text{Si}\,x.dx = -\text{Co}\,x + C. \quad \int \text{Co}\,x.dx = \text{Si}\,x + C. \quad \int \frac{dx}{\text{Si}^2 x} = -\text{Ct}\,x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\text{Co}^2 x} = \text{Tg}\,x + C. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Asi}\,x + C. \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Atg}\,x + C. \qquad 3$$

sowie die sog. Rekursionsformeln

$$\int v.du = u.v - \int u.dv \qquad \int \frac{du}{v} = \frac{u}{v} + \int \frac{u.dv}{v^2} \qquad 4$$

Mit Hilfe dieser Formeln und Regeln kann man sodann verhältnismässig leicht nach verschiedenen, unter der folgenden Nummer angedeuteten Methoden, wieder andere ableiten und sich so schliesslich eine für alle Anwendungen bequeme Sammlung solcher Integralformeln anlegen [b].

Zu 45: *a.* Das Wort **Integral** scheint zuerst durch Jak. **Bernoulli** in seiner Abhandlung über die Isochrone (Acta Erud. 1690) gebraucht worden zu sein; dagegen findet sich der Begriff desselben schon früher teils bei **Leibnitz**, wie aus dessen „Nova methodus pro maximis et minimis (Acta Erud. 1684)" hervorgeht, teils bei **Newton**, dessen **Fluente** ganz mit unserm Integral übereinkömmt. Die weitere Entwicklung der Integralrechnung wurde dann namentlich durch Joh. **Bernoulli** mit grossem Erfolge in Angriff genommen, und seine Abhandlung „De methodo integralium (Opera III)", welche er 1691/2 zu Gunsten seines damaligen Schülers l'**Hospital** schrieb, kann als erstes Lehrbuch derselben angesehen werden. Für die spätere Zeit vgl. die in 41 gegebene Litteratur. — *b.* Die in 2 und 3 gegebenen Integrale heissen **unbestimmte**, so lange die Konstante nicht eliminiert oder aus den Bedingungen der Aufgabe ermittelt ist. Für letzteres auf 47 und namentlich auch auf verschiedene spätere Anwendungen verweisend, mag hier noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass man beim Ableiten eines solchen unbestimmten Integrales nach verschiedenen Methoden auch scheinbar verschiedene Werte für dasselbe erhalten kann; aber ihre Differenz wird sich immer als eine Konstante erweisen und bei nachträglicher Konstantenbestimmung verschwinden, — dagegen kann sie Anfänger momentan beunruhigen, wie uns z. B. (vgl. Notiz 370) der von Barbara **Reinhart** (Winterthur 1730 — ebenda 1796; Privatgelehrte in Winterthur; vgl. Biogr. I) 1762 VI 2 geschriebene Brief zeigt.

46. Einige weitere Entwicklungen. — Eine Hauptmethode, um weitere Integralformeln zu erhalten, bietet die sog. **Substitution**

dar, welche durch folgende Beispiele erläutert werden mag: Vertauscht man in 45 : 2^{IV} die Grösse x mit a + bx oder a — bx, und entsprechend dx mit b . dx oder — b . dx, so erhält man

$$\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\,Ln(a+bx)+C. \quad \int\frac{dx}{a-bx}=-\frac{1}{b}\,Ln(a-bx)+C. \qquad 1$$

und durch Addition dieser beiden Formeln

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2ab}\,Ln\frac{a+bx}{a-bx}+C. \qquad 2$$

Vertauscht man dagegen in der 5. und 6. der in 45 : 3 gegebenen Formeln x mit bx : a, so erhält man

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\frac{1}{b}\,Asi\frac{bx}{a}+C. \quad \int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{a\,.\,b}\,Atg\frac{bx}{a}+C. \qquad 3$$

etc. — Eine andere Methode beruht auf dem Zerlegen in sog. **Partialbrüche**: Sind nämlich X und X' ganze rationale Funktionen von x, ist ferner X von niedrigerem Grade als X', und hat X' die reellen binomischen oder trinomischen Faktoren $(a+bx)^m$, $(c+dx)$, ... $(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$, ..., so kann man

$$\frac{X}{X'}=\frac{A}{(a+bx)^m}+\frac{B}{(a+bx)^{m-1}}+\cdots+\frac{F}{a+bx}+\frac{G}{c+dx}+\cdots+\frac{M+Nx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\cdots \qquad 4$$

setzen, — die Unbestimmten A, B, ... ermitteln, indem man beidseitig die Nenner wegschafft, nach x ordnet, und die Koefficienten der gleich hohen Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleichsetzt; nachher wird auf beiden Seiten mit dx multipliziert, und endlich das Integral der linken Seite gleich der Summe der Integrale der Glieder rechts gesetzt [a]. — Noch weitere Methoden bieten sich dar, indem man Reihenentwicklungen zu Hilfe zieht, — oder die Rekursionsformeln 45 : 4 benutzt, — etc., wofür jedoch auf die bereits (45) erwähnten Specialschriften verwiesen werden muss [b].

Zu 46: *a.* Ist z. B.

$$y=\int\frac{x^2+1}{x^3-7x-6}\cdot dx=\int\frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x-3)}\cdot dx$$

zu bestimmen, so setzt man

$$\frac{x^2+1}{x^3-7x-6}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}$$

oder $x^2+1=x^2(C+B+A)+x(3C-2B-A)+(2C-3B-6A)$

hat somit $C+B+A=1 \quad 3C-2B-A=0 \quad 2C-3B-6A=1$ oder

$A=-{}^1/_2 \quad B=1 \quad C={}^1/_2$ und erhält also

$$y=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}=-\frac{1}{2}Ln(x+1)+Ln(x+2)+\frac{1}{2}Ln(x-3)$$

$$=Ln\left[(x+2)\cdot\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}\right]+Const.$$

— *b.* **Weitere Integralformeln, welche nach diesen Methoden leicht erhalten, aber auch durch beidseitiges Differentieren verifiziert werden können, sind z. B. folgende:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{Ln}\left(bx + \sqrt{a^2+b^2x^2}\right) \qquad \mathbf{5}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+b^2x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Ln} \frac{a+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{x} \qquad \mathbf{6}$$

$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta x-\gamma x^2} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}} \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}+2\gamma x-\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}-2\gamma x+\beta} \qquad \mathbf{7}$$

$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = \frac{2}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} \cdot \operatorname{Atg} \frac{2\gamma x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}} \qquad \mathbf{8}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \operatorname{Asi} \frac{2\gamma x-\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}} \qquad \mathbf{9}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \operatorname{Ln}\left[2\gamma x+\beta+2\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}\right] \qquad \mathbf{10}$$

$$\int \frac{x^2\cdot dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{a}{2b^3} \cdot \operatorname{Ln} \frac{a+bx}{a-bx} - \frac{x}{b^2} \qquad \mathbf{11'}$$

$$\int \frac{x^2\cdot dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{b^2}\left[x - \frac{a}{b} \operatorname{Atg} \frac{bx}{a}\right] \qquad \mathbf{11''}$$

$$\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\cdot dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2x^2} + \frac{a^2}{2b} \operatorname{Ln}\left[bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right] \qquad \mathbf{11'''}$$

$$\int \sqrt{a^2-b^2x^2}\cdot dx = \frac{x\cdot\sqrt{a^2-b^2x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b}\cdot \operatorname{Asi} \frac{bx}{a} \qquad \mathbf{12'}$$

$$\int \frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{2b^2}\left[\frac{a^2}{b} \operatorname{Atg} \frac{bx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} - x\cdot\sqrt{a^2-b^2x^2}\right] \qquad \mathbf{12''}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{Ase} \frac{ax}{b} \qquad \mathbf{13}$$

$$\int \sqrt{a+bx}\cdot dx = \frac{2}{3b}(a+bx)^{3/2} \qquad \mathbf{14}$$

$$\int \sqrt{a+bx^2}\cdot dx = \frac{x\sqrt{a+bx^2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\cdot \operatorname{Ln}\left(2bx+2\sqrt{b}\cdot\sqrt{a+bx^2}\right) \qquad \mathbf{15}$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\cdot dx = \frac{6bx-4a}{15b^2}(a+bx)^{3/2} \qquad \mathbf{16}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\cdot \operatorname{Atg} \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}} \qquad \mathbf{17}$$

$$\int \sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}\,dx = \frac{\beta+2\gamma x}{4\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} \qquad \mathbf{18}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot \operatorname{Ln} \frac{2\alpha+\beta x-2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \operatorname{Atg} \frac{2\alpha+\beta x}{2\sqrt{-\alpha}\cdot\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} \qquad \mathbf{19}$$

$$\int \frac{\text{Si}\,x \cdot dx}{\text{Co}^2 x} = \text{Se}\,x \qquad \int \text{Tg}\,x \cdot dx = -\text{Lco}\,x \qquad \textbf{30}$$

$$\int \frac{dx}{\text{Si}\,x} = \text{Ltg}\,\frac{x}{2} \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{Ase}\,x \qquad \textbf{31}$$

$$\int \frac{\text{Si}^2 x \cdot dx}{\text{Co}^2 x} = \text{Tg}\,x - x \qquad \int \frac{dx}{\text{Si}\,x \cdot \text{Co}\,x} = \text{Ltg}\,x \qquad \textbf{32}$$

$$\int \text{Si}^2 x \cdot dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\text{Si}\,2x\right) \qquad \int \text{Si}^2 x \cdot \text{Si}\,2x \cdot dx = -\frac{1}{4}\left(\text{Co}\,2x + \frac{1}{2}\text{Si}^2\,2x\right) \qquad \textbf{33}$$

$$\int x \cdot \text{Co}\,x \cdot dx = x\,\text{Si}\,x + \text{Co}\,x \qquad \int x^2 \cdot \text{Si}\,x \cdot dx = -x^2\,\text{Co}\,x + 2x\,\text{Si}\,x + 2\,\text{Co}\,x \qquad \textbf{34}$$

etc., wo überall noch eine Konstante beizufügen ist.

47. Die sog. bestimmten Integrale. — Nimmt in

$$y = F(x) = \int f(x)\,dx \qquad \textbf{1}$$

die Grösse x nach und nach die Werte

$$x \qquad x + \Delta x \qquad x + 2\Delta x \qquad \ldots \qquad x + n\,.\,\Delta x$$

an, so erhält y die Werte

$$y \qquad y_1 = y + \Delta y \qquad y_2 = y_1 + \Delta_1 y \qquad \ldots \qquad y_n = y_{n-1} + \Delta_{n-1} y$$

so dass

$$y_n = y + \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta_1 y}{\Delta x} + \frac{\Delta_2 y}{\Delta x} + \cdots + \frac{\Delta_{n-1} y}{\Delta x}\right] \cdot \Delta x$$

Giebt man nun $n\,.\,\Delta x$ einen konstanten Wert h und lässt n unendlich zunehmen, während Δx ebenso abnimmt, so erhält man somit die Grenzgleichheit

$$F(x+h) - F(x) = [f(x) + f(x+dx) + \cdots + f(x+(n-1)\,dx)]\,dx \qquad \textbf{2}$$

d. h. der Wert eines Integrals zwischen gewissen Grenzen ist gleich der Summe der Werte, die das Differential zwischen diesen Grenzen annimmt, und man kann daher symbolisch

$$\int_a^b f(x)\,.\,dx = F(b) - F(a) \qquad \textbf{3}$$

schreiben. So erhält man z. B. mit Hilfe von 46:3

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\text{Asi}\,\frac{x}{a}\right]_0^a = \text{Asi}\,1 - \text{Asi}\,0 = \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{4}$$

und entsprechend wird in andern Fällen vorzugehen sein [a].

Zu 47: *a.* In einzelnen Fällen, so z. B. zur Bestimmung eines uns später (52, 458) wiederholt vorkommenden Integrales, können auch, wie schon

Laplace zeigte, mit gutem Erfolge Rekursionen benutzt werden: Ist nämlich

$$U = e^{t^2} \int_t^\infty e^{-x^2} \cdot dx \text{ so folgt } \frac{dU}{dt} = e^{t^2} \cdot 2t \int_t^\infty e^{-x^2} \cdot dx - e^{t^2} \cdot e^{-t^2} = 2t \cdot U - 1 \quad \mathbf{5}$$

und somit

$$\frac{d^2U}{dt^2} = 2t \cdot \frac{dU}{dt} + 2U \qquad \frac{d^3U}{dt^3} = 2t \cdot \frac{d^2U}{dt^2} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{d^4U}{dt^4} = 2t \cdot \frac{d^3U}{dt^3} + 2 \cdot 3 \frac{d^2U}{dt^2} \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^{n+1}U}{dt^{n+1}} = 2t \cdot \frac{d^nU}{dt^n} + 2n \cdot \frac{d^{n-1}U}{dt^{n-1}}$$

oder

$$(n+1)\, U_{n+1} = 2t \cdot U_n + 2 \cdot U_{n-1} \quad \text{wo} \quad U_h = \frac{d^hU}{h!\, dt^h} \quad \text{und} \quad U_0 = U \quad \mathbf{6}$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{U_n}{2t \cdot U_{n-1}} = -\frac{q}{1 - (n+1)\, U_{n+1} : (2t \cdot U_n)} \quad \text{wo} \quad q = 1 : 2t^2 \quad \mathbf{7}$$

und somit nach 5 und 7 successive

$$2t \cdot U = \frac{2t \cdot U}{2tU - U_1} = \frac{1}{1 - \frac{U_1}{2tU}} = \frac{1}{1 + \frac{q}{1 - \frac{2U_2}{2tU_1}}} = \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{2q}{1 - \frac{3U_3}{2tU_2}}}} = \ldots$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{2q}{1 + \frac{3q}{1 + \ldots}}}} \quad \mathbf{8}$$

Im übrigen muss für weitere Auseinandersetzungen auf die in 41 verzeichnete Litteratur und die Specialschriften „D. **Bierens** de Haan, Exposé de la théorie, des propriétés et des méthodes d'évaluation des intégrales définies. Amsterdam 1862 in 4., und: Tables d'intégrales définies. Amsterdam 1858 — Leyden 1867, 2 Vol. in 4., — Gust. Ferd. **Meyer**, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale. Leipzig 1881 in 8., — etc." verwiesen werden, — für die sog. elliptischen Funktionen auf die in 75 gegebenen Notizen.

48. Die Integration der Differentialgleichungen. — Eine Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0$$

nennt man eine **Differentialgleichung**, und zwar der ersten, zweiten, etc. **Ordnung**, je nach dem höchsten Index des Differentialquotienten, ferner **linear**, wenn y, $dy : dx$, etc. nur in erster Potenz erscheinen, — jede ihr Genüge leistende, eine ihrer Ordnung entsprechende Anzahl willkürlicher Konstanten enthaltende Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

ihr **allgemeines** Integral. So hat z. B. die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - y + b = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{x \, . \, dy - y \, . \, dx}{x^2} + \frac{b \, . \, dx}{x^2} = 0$$

wo $1 : x^2$ der ein vollständiges Differential herstellende oder sog.

integrierende Faktor ist, sofern a eine willkürliche Konstante bezeichnet, das allgemeine Integral

$$a = \int \frac{x \cdot dy - y dx}{x^2} + b \cdot \int \frac{dx}{x^2} = \frac{y}{x} - \frac{b}{x} \quad \text{oder} \quad y = a \cdot x + b$$

So genügt der Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades

$$y \cdot dx - x \cdot dy = r \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

wenn a wieder eine willkürliche Konstante ist, das allgemeine Integral

$$y = a \cdot x + r \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

aber auch das diese Willkürliche nicht enthaltende sog. **besondere** Integral

$$x^2 + y^2 = r^2$$

und ähnlich in andern Fällen [a].

Zu 48: *a.* Auch für diesen Abschnitt, dessen Ausbildung namentlich alle die grossen Mathematiker des 18. Jahrhunderts lebhaft beschäftigte, muss ich mich darauf beschränken, an die in 41 gegebene Litteratur zu erinnern und höchstens noch einige betreffende Specialschriften neuerer Zeit, wie z. B. „Joseph **Petzval** (Bela in Ober-Ungarn 1807 geb.; Prof. math. Wien, zu dessen ersten Schülern ich gehörte), Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten. Wien 1851—59, 2 Bde. in 4., —. Aloys **Mayr** (Stadtamhof bei Regensburg 1807 geb.; Prof. math. u. astr. Würzburg), Der integrirende Factor und die particularen Integrale. Würzburg 1868 in 8., — Bernh. **Riemann**, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Herausgegeben durch K. Hattendorf. Braunschweig 1869 in 8., — George **Boole** (Lincoln 1815 geb.; Prof. math. Dublin), Treatise on differential equations (3. ed. by Todhunter. London 1872 in 8.), — A. R. **Forsyth**, Lehrbuch der Differentialgleichungen (deutsch durch H. Maser: Braunschweig 1889 in 8.), etc." zur Ergänzung beizufügen.

49. Die Elemente der sog. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

— Unter **mathematischer Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses versteht man das Verhältnis zwischen der Anzahl der ihm günstigen Fälle und der Anzahl aller möglichen Fälle [a], — unter **Erfahrungswahrscheinlichkeit** desselben dagegen das Verhältnis zwischen der Häufigkeit seines wirklichen Eintreffens und der Anzahl der gemachten Versuche, um dasselbe herbeizuführen [b], — und unter dem **Gesetze der grossen Zahlen** die Zusammenfassung der merkwürdigen Thatsachen, dass schon bei einer relativ geringen Anzahl von Versuchen die Erfahrungswahrscheinlichkeit der mathematischen sehr nahe kömmt, dass **extreme** Fälle sehr selten, aber nach beiden Seiten in gleichem Masse, vorkommen, und dass **systematische**, bei Vermehrung der Versuche, immer schärfer hervortretende Abweichungen zwischen den beiden Wahrscheinlichkeiten nur infolge von Differenzen zwischen Voraussetzung und Wirklichkeit auftreten, ja sogar

letztere zuweilen aus erstern bestimmt werden können[c]. Es ist wohl der einzige reelle Nutzen, welchen die sog. **Hazardspiele** für das Allgemeine abgeworfen haben[d], dass man durch sie auf die erwähnten Verhältnisse aufmerksam wurde und an die **Pascal, Fermat** und **Huygens** betreffende Fragen herantraten[e], aus deren Erledigung sich sodann nach und nach, und zwar namentlich durch die Arbeiten der **Bernoulli**, **Montmort** und **Moivre**, ein neuer, die Domäne von Zufall und Wunder[f] immer mehr beschränkender Zweig der Mathematik herausbildete[g], die sog. **Wahrscheinlichkeitsrechnung,** von welcher später **Laplace** so treffend sagte: „Elle n'est au fond que le bon sens réduit au calcul; elle fait apprécier avec exactitude ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte."

Zu 49: *a.* Bei einem gewöhnlichen, an seinen sechs Seiten 1 bis 6, an je zwei Gegenseiten zusammen 7 Augen zeigenden Würfel (tessera, dé) hat man offenbar, wenn derselbe geometrisch richtig aus einem homogenen Stoffe konstruiert ist, für jeden der 6 mit ihm möglichen Würfe dieselbe Chance, und es ist daher die mathematische Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wurfes $w = 1/6 = 0,1667$. — *b.* Bei einer von mir mit einem solchen Würfel unternommenen Versuchsreihe erhielt ich folgende Resultate:

Anzahl der Versuche	Anzahl der erhaltenen Würfe 1	2	3	4	5	6	Theoretische Anzahl
6	0	0	1	1	3	1	1
12	0	1	2	2	5	2	2
24	0	2	2	7	9	4	4
48	6	5	4	12	14	7	8
100	17	13	9	23	25	13	17
200	34	26	23	39	48	30	33
500	87	68	66	89	100	90	83
1000	177	161	133	169	181	179	167
2000	336	338	269	316	351	390	333
5000	849	859	759	742	862	929	833
10000	1704	1736	1525	1503	1762	1770	1667
20000	3407	3631	3176	2916	3448	3422	3333

so dass z. B. nach 1000 Versuchen die Erfahrungswahrscheinlichkeit, einen bestimmten Wurf zu erhalten, nur noch zwischen 0,133 und 0,181 schwankte, ja in dem Mittel 0,157 aus diesen extremen Werten der mathematischen Wahrscheinlichkeit 0,167 bereits ziemlich nahe kam. — *c.* Das **Gesetz der grossen Zahlen**, auf welches schon Jak. **Bernoulli** hinwies, wird bereits durch die in Note b aufgenommene Tafel illustriert, noch intensiver aber durch folgende, sich auf dieselben Versuche stützende Tafel, in der m bezeichnet, wie oft unter 20000 Versuchen n Würfe genügten, um jeden der 6 möglichen Würfe mindestens Ein Mal zu erhalten oder eine sog. **Erschöpfung** hervorzubringen:

n	m	n	m	n	m	n	m
6	279	17	943	28	158	39	20
7	745	18	812	29	132	40	12
8	1204	19	702	30	113	41	11
9	1456	20	602	31	101	42	7
10	1613	21	503	32	84	43	6
11	1697	22	429	33	72	44	4
12	1615	23	368	34	59	45	4
13	1479	24	314	35	43	46	3
14	1344	25	251	36	40	47	3
15	1212	26	218	37	32	48	2
16	1097	27	190	38	21	49	0
$\Sigma = 13741$		$\Sigma = 5332$		$\Sigma = 855$		$\Sigma = 72$	

Schon die gesetzmässige Folge der m, auf welche wir später (50) nochmals zurückkommen werden, ist für unser Gesetz charakteristisch. Sodann giebt der aus diesen Versuchen für die Erschöpfung folgende Mittelwert

$$n = {}^1/_{20000} \cdot \Sigma\,(m \times n) = 14{,}815$$

ein neues eklatantes Beispiel für die Übereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie; denn aus letzterer folgt, dass man, um irgend eine erste Nummer zu werfen, auf 6 mögliche Fälle auch 6 Chancen hat, für eine zweite noch 5, etc., bis für die sechste nur noch Eine Chance übrig bleibt, — dass daher, weil die Anzahl der nötigen Würfe offenbar zur Wahrscheinlichkeit reciprok ist, die Anzahl der für eine Erschöpfung erforderlichen Würfe im Mittel

$$n = \frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14{,}700$$

sein muss, also sehr nahe, was oben gefunden wurde. Endlich zeigt das rasche Absteigen der m in augenscheinlicher Weise den sog. Abscheu der Natur vor extremen Fällen, — stieg ja n bei 20000 Versuchen nur 2 mal auf 48 und nie höher, während es strenge genommen, wenn auch unendlich selten, bis auf ∞ anwachsen könnte. — In Beziehung auf die frühere Tafel ist nachträglich noch hervorzuheben, dass sich in derselben anfänglich, und zwar etwa bis zum Wurfe 1000, eine ziemlich rasch fortschreitende Ausgleichung der Wurfzahlen ergiebt, während dies später nicht mehr der Fall ist, sondern im Gegenteil immer deutlicher specifische Unterschiede zwischen den drei Paaren von Gegenseiten hervortreten: So ergeben sich aus den 20000 Versuchen die Summen

7079 für 2 · 5 6829 für 1 · 6 6092 für 3 · 4

welche sich von ihrem Mittelwerte 6667 um

$$\Delta' = +412 \qquad \Delta'' = +162 \qquad \Delta''' = -575$$

entfernen und somit bestimmte Abweichungen des gebrauchten Würfels von einem richtigen Würfel andeuten; und in der That erhielt ich durch wiederholte Messung der Abstände jener Seiten die Werte

$$16{,}288^{mm} \qquad 16{,}303^{mm} \qquad 16{,}621^{mm}$$

so dass sie gegenüber dem Mittel 16,404 die Korrektionen

$$\delta' = +116^{\mu} \qquad \delta'' = +101^{\mu} \qquad \delta''' = -217^{\mu}$$

besassen, — folglich die Δ und δ in einer Weise korrespondieren, welche

nicht daran zweifeln lässt, dass jene Anomalien in den Wurfzahlen wenigstens grösstenteils Folgen dieser Ungleichheiten des Würfels sind. — *d.* Der aus dem arabischen „azari = schwierig" entstandene Ausdruck **hazard** wurde ursprünglich zur Bezeichnung der seltensten Würfe, wie etwa 6 · 6 („le sonnez" der Franzosen) mit zwei oder gar 6 · 6 · 6 mit drei Würfeln, gebraucht, und erhielt erst später seine gegenwärtige Bedeutung als „Zufall" oder „Glück beim Spiele". — *e.* Grössere Versuchsreihen, wie die oben benutzten, scheinen in früherer Zeit nicht ausgeführt worden zu sein, ja es dürften meine „Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit (Bern. Mitth. 1849—1853), und: Drei Mittheilungen über neue Würfelversuche (Zürch. Viert. 1881—83)" so ziemlich die ersten derselben repräsentieren; dagegen veranlassten einzelne gelegentlich beim Spiele sich ergebende Erfahrungen und Vorkommnisse, dass die Mathematiker sich mit diesen Verhältnissen zu befassen begannen, und wenn dies auch von den **Paccioli, Tartaglia, Cardan**, etc. noch ohne erheblichen Erfolg geschah, so wurde dagegen ein solcher erzielt, als im Jahre 1654 ein französischer Spieler, der Chevalier de **Méré**, durch eine betreffende Frage **Pascal** auf dieses Gebiet verwies, — nämlich durch die Frage, wie bei Aufhebung eines Spieles vor dessen Vollendung der Einsatz unter die Spieler zu verteilen sei, oder welchen sog. **Parti** jeder der Spieler zu beanspruchen habe. Da allgemeine Regeln fehlten, so musste sich natürlich **Pascal** an bestimmte Fälle halten, und so wollen auch wir, um den von ihm eingeschlagenen Weg zu veranschaulichen, uns folgende specielle Aufgabe stellen: „Drei Personen a, b, c werfen der Reihe nach mit zwei Würfeln; derjenige, welcher die meisten Augen wirft, erhält einen Punkt; giebt ein Gang kein entscheidendes Resultat, so wird er kassiert; wer zuerst 10 Punkte hat, zieht den ganzen Einsatz. Wenn nun das Spiel in dem Augenblicke abgebrochen werden muss, wo a noch 1, b noch 2 und c noch 3 Punkte fehlen, wie gross ist der Parti jedes Spielers?" Zur Beantwortung dieser Frage führt nun folgende Betrachtung: Bei dem nächsten Gange hätten a, b, c dieselbe Chance gehabt, einen Punkt zu erhalten; erhielt ihn a, so war das Spiel fertig, — dagegen nicht, wenn ihn b oder c erhielt; es ist also a vorläufig $^1/_3$ des Einsatzes gutzuschreiben, während um die übrigen $^2/_3$ fortzuspielen ist. Nach einem neuen Gange stehen sich die 6 gleichmöglichen Fälle: b**a**, b**b**, bc; c**a**, cb, cc gegenüber, von welchen zwei das Spiel zu Gunsten von a und einer zu Gunsten von b erledigen, während drei dasselbe nicht vollenden; es sind also a neuerdings $^2/_3 \cdot {}^2/_6 = {}^2/_9$, b aber $^2/_3 \cdot {}^1/_6 = {}^1/_9$ des Einsatzes gutzuschreiben, während noch $^2/_3 \cdot {}^3/_6 = {}^1/_3$ im Spiele bleiben. Bei dem dritten Gange sind die 9 Fälle: bc**a**, bcb, bcc; cb**a**, cb**b**, cbc; cc**a**, ccb, ccc möglich, von welchen 3 für **a**, 2 für b und 1 für c günstig sind, während 3 unbestimmt bleiben, aber für alle drei Spieler dieselben Chancen bieten; es erhalten also a, b, c der Reihe nach $^1/_3 \cdot {}^3/_9 = {}^1/_9$, $^1/_3 \cdot {}^2/_9 = {}^2/_{27}$, $^1/_3 \cdot {}^1/_9 = {}^1/_{27}$, und der $^1/_3 \cdot {}^3/_9 = {}^1/_9$ betragende Rest ist schliesslich unter alle drei Spieler gleich zu verteilen. Es ist somit der Parti für

$$a = {}^1/_3 + {}^2/_9 + {}^1/_9 + {}^1/_{27} = {}^{19}/_{27} \qquad b = {}^1/_9 + {}^2/_{27} + {}^1/_{27} = {}^6/_{27} \qquad c = {}^1/_{27} + {}^1/_{27} = {}^2/_{27}$$

womit die gestellte Aufgabe erledigt ist. — Das von **Pascal** angewandte und auch leicht auf andere Fälle übertragbare Verfahren war nun zwar ganz richtig, aber etwas weitläufig und unübersichtlich, und es ist als ein wesentlicher Fortschritt zu bezeichnen, dass sein Freund **Fermat**, welchem er nicht versäumte von der Aufgabe Kenntnis zu geben, nach unserer jetzigen Ausdrucksweise die Idee hatte, die n gegebenen Elemente zu einer der höchsten

Anzahl h der fehlenden Punkte entsprechenden Klasse mit Wiederholung zu variieren, und sodann die erhaltenen n^h gleichmöglichen Formen als Grundlage für die Verteilung zu benutzen. Auf diese Weise erhalten wir nämlich in unserm Beispiele, wo n = 3 und h = 3 ist, die 27 Formen

aaa	baa	caa	bba	bac	cba	cca	bcb	cbc
aab	aac	abb	abc	bca	acc	bbb	cbb	ccb
aba	aca	bab	acb	cab	cac	bbc	bcc	ccc

und können sofort ablesen, dass im ersten Gange 9 Lösungen (sämtlich zu Gunsten von a) möglich sind, im zweiten wieder 9 (6 für a und 3 für b), im dritten 6 (3 für a, 2 für b und 1 für c), und nur 3 (bei gleichen Chancen für a, b, c) einen vierten Gang erfordern, — man erhält also sozusagen unmittelbar, dass von 27 möglichen Fällen 9 + 6 + 3 + 1 für a, 3 + 2 + 1 für b und nur 1 + 1 für c günstig sind, und daraus den Parti wie oben, aber offenbar in viel vorzüglicherer Weise. — Obschon nun anfänglich die Diskussion über diese und ähnliche Fragen auf die engsten Kreise beschränkt blieb, — da der von **Pascal** bei diesem Anlass verfasste „Traité du triangle arithmétique" zwar 1654 gedruckt, aber erst 1665 nach seinem Tode (und dann wieder durch Cousin in Bd. 5 der Oeuvres) ausgegeben, und namentlich sein betreffender Briefwechsel mit **Fermat** erst nach dem Tode des letztern in dessen „Varia opera mathematica. Tolosæ 1679 in fol." veröffentlicht wurde, — bekam auch **Huygens** Wind davon, versuchte sich dann ebenfalls in Lösung entsprechender Aufgaben und schrieb einen kleinen Traktat „Van rekeningh in spelen van geluck (durch Schooten in lat. Übers. 1657 in seinen „Exercitationes" und 1660 in der Ursprache in seinen „Oeffeningen" publiziert)". Es ist nun anzuerkennen, dass **Huygens** die Sache schon viel allgemeiner anfasste: Er ging nämlich von dem plausibeln Grundsatze aus, dass, wenn jemand ebensogut a als b, oder auch noch c, etc. gewinnen könne, er die sog. **Erwartung** $\frac{1}{2}(a + b)$, oder $\frac{1}{3}(a + b + c)$, etc., besitze, und stellte hiemit übereinstimmend die Regel auf: „Um bei einer beliebigen Anzahl von Spielern den Parti eines derselben zu bestimmen, ermittle man, was demselben zufallen würde, wenn bei der nächsten Partie der erste Spieler, oder der zweite, oder der dritte, etc. gewinnen sollte; die Summe aller dieser Grössen getheilt durch die Anzahl der Spieler gibt das Gesuchte". Hat man nun z. B. drei Spieler a, b, c, welchen 1, 1, 2 Punkte fehlen, und denkt man sich einen neuen Gang gemacht, so wird entweder a, oder b, oder c einen weitern Punkt erhalten und es wird sich dadurch die Partie entweder auf 0 · 1 · 2, oder 1 · 0 · 2, oder 1 · 1 · 1 stellen. Im ersten Falle gewinnt a das Ganze oder 1, im zweiten Falle 0, im dritten Falle $\frac{1}{3}$, und da alle drei Fälle gleich möglich sind, so ist der Parti von a gleich $\frac{1}{3}(1 + 0 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{9}$; entsprechend wird $b = \frac{4}{9}$ und $c = \frac{1}{9}$. Steht dagegen die Partie anfänglich auf 1 · 2 · 2, so hat man nach einem folgenden Gange 0 · 2 · 2 oder 1 · 1 · 2 oder 1 · 2 · 1, also mit Benutzung des vorhergehenden Falles $a = \frac{1}{3}(1 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}) = \frac{17}{27}$; entsprechend $b = \frac{5}{27}$, $c = \frac{5}{27}$. Ebenso erhält man successive für 1 · 1 · 3 : $a = \frac{13}{27}$, $b = \frac{13}{27}$, $c = \frac{1}{27}$, — für 1 · 2 · 3 : $a = \frac{19}{27}$, $b = \frac{6}{27}$, $c = \frac{2}{27}$ wie oben, — etc., so dass man sich nach dieser hübschen Methode, wie es auch **Huygens** wirklich ausführte, leicht für eine beliebige Anzahl von Spielern und alle möglichen Fälle eine ganze Tabelle anlegen kann. — Anhangsweise bleibt zu erwähnen, dass man später **Erwartung** (lucrum, exspectatio, attente) als das „Produkt aus der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen und dem zu hoffenden Gewinn" definierte, — dabei eine Wette oder ein Spiel nur dann **ehrlich** nennend, wenn beide Parteien dieselbe Erwartung

haben, d. h. die Einsätze und Gewinnste entsprechend reguliert sind, was bei den öffentlichen Spielen (Lotterien, Banken, etc.) nie der Fall ist, so dass schon **Buffon** sagte: „Le banquier n'est qu'un fripon avoué, et le ponte une dupe, dont on est convenu de ne pas se moquer". — *f.* Mit dem sog. **Zufall**, der in dem gegen die alltägliche Gewohnheit und die gemeine Einsicht verstossenden **Wunder** gipfelt, ist es nicht weit her, wie dies Fritz **Reuter** so zutreffend in den Worten „Taufall nennen dat de Minschen; äwer wenn Einer richtig tausüht, dann is dat' ne Folg von vele andere Folge von de de eigentliche Ursack uns blot verborgen is" ausdrückte. Das Wort „Zufall" ist wohl dasjenige, hinter welchem sich die Unwissenheit am häufigsten versteckt. — *g.* Nachdem sich in der angedeuteten Weise durch Behandlung einzelner Aufgaben eine gewisse Basis gefunden hatte, erschienen sodann zu Anfang des 18. Jahrhunderts fast gleichzeitig die drei Werke „Jakob **Bernoulli**, Ars conjectandi. Basileæ 1713 in 4., — Pierre Rémond de **Montmort** (Paris 1678 — ebenda 1719; Akad. Paris), Essay d'analyse sur les jeux de hazard. Paris 1708 in 4., — und: Abr. de **Moivre**, Doctrine of Chances. London 1718 in 4.", durch welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer selbständigen Lehre erhoben wurde: Das erste dieser Werke war 1705 durch seinen Verfasser unvollendet hinterlassen worden und damals nur nach seinem Plane durch einen Bericht bekannt, welchen Jak. **Hermann** an Fontenelle behufs dessen „Eloge de Jacques Bernoulli" erstattet hatte. Es sollte in einem ersten Teile eine neue Ausgabe des Huygens'schen Traktates „cum annotationibus" geben, — in einem zweiten Teile die Kombinationslehre entwickeln, — in einem dritten Teile deren Anwendung auf Lösung der gewöhnlichsten Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung lehren, — und in einem vierten Teile endlich, der aber nur noch teilweise zur Ausführung gekommen war, die Anwendung des Vorhergehenden auf Fragen der Moral und Nationalökonomie behandeln. Allein schon dieser Plan trug reiche Früchte, indem er **Montmort** zur Abfassung des zweiten Werkes veranlasste, das, wie schon erwähnt, 1708 publiziert und so beifällig aufgenommen wurde, dass 1714 eine zweite Ausgabe nötig war, obschon unterdessen auch die „Ars conjectandi" erschien, mit welcher sich in Beziehung auf Tiefe der Behandlung und Reichhaltigkeit jener „Essay" nicht messen konnte, während er dagegen grössere Lesbarkeit besass. In letzterer, ja überhaupt in jeder Beziehung dürfte dann allerdings dem dritten Werke, das **Moivre**, nachdem er schon 1711 in die Phil. Trans. eine Abhandlung „De mensura sortis" eingerückt, aber allerdings auch von den beiden erstern Werken vollständig Kenntnis genommen hatte, 1718 erscheinen liess, die Palme zuzuteilen sein, und ich werde somit auch unter der folgenden Nummer für die weitern Entwicklungen zunächst von diesem dritten Werke als Basis ausgehen und erwähne noch, dass dasselbe 1738 und 1756 neu aufgelegt wurde. — Über die Beteiligung von Nikolaus **Bernoulli** an der Ausgabe der „Ars conjectandi", sowie über dessen sachbezüglichen, persönlichen und schriftlichen Verkehr mit **Montmort** und **Moivre** verweise ich auf Biogr. I und die Ausgabe des „Essay" von 1714 und füge noch bei, dass Francis **Maseres** in seiner Schrift „The Doctrine of Permutations and Combinations. London 1795 in 8." eine annotierte englische Übersetzung der betreffenden Abschnitte der „Ars conjectandi", und L. G. **Vastel** unter dem Titel „L'art de conjecturer. Caen 1801 in 4." eine annotierte französische Übersetzung des ersten Teiles derselben gab. Endlich erwähne ich, dass mir das Werk „N. **Struyck**, Uytreckening der Kanssen in het speelen door de arithmetica en algebra, benevens een verhandeling van

looteryen en interest. Amsterdam 1716 in 4.", und damit auch sein Verhältnis zu den drei besprochenen Werken, nicht näher bekannt geworden ist.

50. Einige weitere Entwicklungen. — Haben zwei von einander unabhängige Ereignisse die mathematischen Wahrscheinlichkeiten $p:m$ und $q:n$, so kann offenbar jeder der p oder m Fälle des ersten mit jedem der q oder n Fälle des zweiten zusammentreffen, so dass

$$w = \frac{p \cdot q}{m \cdot n} = \frac{p}{m} \times \frac{q}{n} \qquad 1$$

wird, oder „die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens oder der Aufeinanderfolge zweier von einander unabhängiger Ereignisse gleich dem Produkte ihrer Wahrscheinlichkeiten" ist[a]. — Sind die beiden Ereignisse in der Weise von einander abhängig, dass das Eintreffen des einen das andere ausschliesst, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass das eine oder das andere eintrifft, offenbar

$$w = \frac{p}{m} + \frac{q}{n} \qquad 2'$$

und diese Summe wird sogar zur Einheit, wenn das Nichteintreffen des einen das Eintreffen des andern bedingt, oder wenn die beiden Ereignisse, wie man sagt, **konträr** sind[b]. — Schliessen sich die beiden Ereignisse nicht aus, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei Versuchen nur ihre konträren Ereignisse eintreffen, nach 1 gleich $(1 - p:m) \cdot (1 - q:n)$, also die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens das eine der beiden Ereignisse selbst eintrifft

$$w = 1 - \left(1 - \frac{p}{m}\right) \cdot \left(1 - \frac{q}{n}\right) = \frac{p}{m} + \frac{q}{n} - \frac{p \cdot q}{m \cdot n} \qquad 2''$$

wo das subtraktive Glied offenbar die Doppeltrechnung der Fälle beseitigt, in welchen beide Ereignisse gleichzeitig auftreten, und daher (wie in 2') verschwindet, wenn ein solches Zusammentreffen gar nicht vorkommen kann[c]. — Unter **relativer** Wahrscheinlichkeit, dass ein gewisses Ereignis eher als ein anderes eintreffe, hat man den Quotienten zu verstehen, welchen man erhält, wenn man dessen absolute Wahrscheinlichkeit durch die Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten beider Ereignisse teilt[d]. — Hat man m Urnen, deren erste p_1 weisse, q_1 schwarze, etc., im ganzen n_1 Kugeln, — die zweite p_2 weisse, q_2 schwarze, etc., im ganzen n_2 Kugeln, — etc., enthält, und zieht aus jeder Urne eine Kugel, so kann jede der n_1 mit jeder der n_2, etc., zusammentreffen, und man wird daher die Anzahl aller möglichen Fälle erhalten, wenn man das Produkt $n_1 \cdot n_2 \cdots = (p_1 + q_1 + \cdots) \cdot (p_2 + q_2 + \cdots) \cdots$ bildet. Ist $p_1 = p_2 = \cdots = p$, $q_1 = q_2 = \cdots = q$, etc., und $p + q + \cdots = n$, so wird somit unter Anwendung des polynomischen Lehrsatzes (35)

$$n^m = (p + q + \cdots)^m = \sum \frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta\ldots} p^\alpha \cdot q^\beta \cdots \quad 3$$

wo $\alpha + \beta + \cdots = m$ ist. In dieser Formel zählt offenbar das unter dem Summenzeichen stehende allgemeine Glied die Chancen, welche man hat, aus den m Urnen α weisse, β schwarze, etc., Kugeln zu ziehen, — also ist, da das ganze n^m alle überhaupt möglichen Fälle zählt,

$$w = \frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta\ldots} \cdot \left(\frac{p}{n}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{q}{n}\right)^\beta \cdots \quad 4$$

die Wahrscheinlichkeit, jenes Ziel wirklich zu erreichen. Natürlich bleibt dieselbe Formel auch unverändert bestehen, wenn man nur über Eine Urne verfügt und aus dieser successive m mal eine Kugel herausholt, sobald man nur nach jedem Zuge die Kugel wieder hineinwirft und mit den übrigen mischt, — ferner in dem Falle, wo man statt Kugeln ein oder mehrere Würfel, und statt der Urne einen Würfelbecher hat, — und auch noch in andern verwandten Fällen, so dass sie zur Lösung der verschiedensten Aufgaben dienen kann [e].

Zu 50: *a.* So z. B. ist also die Wahrscheinlichkeit, mit einem richtigen Würfel zweimal nach einander dieselbe Zahl oder mit zwei Würfeln einen sog. **Pasch** (Puff, Daus, doublet) zu werfen, $1/6 \times 1/6 = 0{,}0278$, — diejenige, denselben Wurf dreimal nach einander zu werfen, $(1/6)^3 = 0{,}0046$, — etc. Bei dem früher (49) benutzten Würfel, der für 3 die Wahrscheinlichkeit $0{,}1588 < 1/6$ und für 6 die Wahrscheinlichkeit $0{,}1711 > 1/6$ ergeben hatte, erhielt ich direkt aus den Versuchen ganz entsprechend für 3: $223 < 278$ und $25 < 46$, — dagegen für 6: $314 > 278$ und $60 > 16$. Als extremer Fall ist zu erwähnen, dass es unter den 20000 Würfen doch Ein Mal vorkam, dass dieselbe Zahl (und zwar gerade die mit der kleinsten Wahrscheinlichkeit behaftete 4) volle 7 mal hinter einander erschien, was mich wegen $(1/6)^7 = 1/279936$ nicht wenig frappierte. — *b.* So z. B. ist nach 2′ die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel 1 oder 2 zu werfen, gleich $1/6 + 1/6 = 2/6$, — also die Wahrscheinlichkeit, keine von beiden Zahlen zu werfen, gleich $1 - 2/6 = 4/6$. — daher nach 1 die Wahrscheinlichkeit, auch bei zwei Würfen oder mit zwei Würfeln keine derselben zu erhalten, gleich $4/6 \times 4/6 = 16/36$, — folglich endlich die Wahrscheinlichkeit, wenigstens Eine derselben zu werfen, gleich $1 - 16/36 = 20/36$. — *c.* So z. B. ist nach 2″ die Wahrscheinlichkeit, beim Wurfe mit zwei Würfeln 1 wenigstens einmal zu werfen, gleich $1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$, und in der That giebt es hiefür die 11 günstigen Fälle: $1 \cdot 1$, $1 \cdot 2$, $2 \cdot 1$, $1 \cdot 3$, $3 \cdot 1$, $1 \cdot 4$, $4 \cdot 1$, $1 \cdot 5$, $5 \cdot 1$, $1 \cdot 6$, $6 \cdot 1$. Für 2 kommen dann aber, da $1 \cdot 2$ und $2 \cdot 1$ schon gezählt sind, nur 9 neue Fälle hinzu, so dass die Wahrscheinlichkeit, wenigstens eine der beiden Zahlen 1 und 2 zu werfen, wieder $11/36 + 9/36 = 20/36$ wird. — *d.* Von den mit zwei Würfeln möglichen 36 Würfen geben 6 ($1 \cdot 6$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 3$, $5 \cdot 2$, $6 \cdot 1$) je 7 Augen, dagegen nur 3 ($1 \cdot 3$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 1$) je 4 Augen; es sind also von 9 Chancen volle 6 für 7 günstig, und es ist somit die relative Wahrscheinlichkeit, eher 7 als 4 Augen zu werfen, gleich $6/9 = 0{,}667$, womit die Erfahrung in schönster Weise übereinstimmt, wie die Tafel

Augen	n				Theoretisch auf	
	100	1000	10000	100000	Chancen	100000
2	2	23	241	2455	1	2777,8
3	5	71	539	5656	2	5555,6
4	4	80	817	7884	3	8333,3
5	15	107	1083	10842	4	11111,1
6	15	130	1415	14113	5	13888,9
7	21	175	1682	16673	6	16666,7
8	18	141	1440	14176	5	13888,9
9	7	106	1120	11187	4	11111,1
10	8	95	824	8418	3	8333,3
11	3	50	570	5928	2	5555,6
12	2	22	269	2668	1	2777,8

beweist, welche nach meiner Versuchsreihe von 1851 angiebt, wie oft bei n Versuchen jede Anzahl von Augen eintraf, und überdies zur Vergleichung die den Chancen entsprechenden Vielfachen von $100000 : 36 = 2777{,}8$ enthält. Nach dieser Tafel ergeben sich nun z. B. für die oben berechnete relative Wahrscheinlichkeit, eher 7 als 4 Augen zu werfen, successive die Erfahrungswerte

$$\frac{21}{21+4} = 0{,}840 \qquad \frac{175}{175+80} = 0{,}686 \qquad \frac{1682}{1682+817} = 0{,}673 \qquad \frac{16673}{16673+7844} = 0{,}679$$

deren Folge ganz charakteristisch ist. — *e.* Sucht man z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in 6 Würfen alle möglichen 6 Würfe zu erhalten, so hat man in 4 die Werte $m = 6$, $\alpha = \beta = \ldots = 1$, $p = q = \ldots = 1$ und $n = 6$ einzusetzen, wofür $w = 0{,}0154$ folgt: Man kann also erwarten, unter 20000 Versuchen etwa 308 mal alle 6 Würfe nacheinander zu werfen, und in der That geschah es bei einer meiner Versuchsreihen 279 mal, bei einer andern 314 mal. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei eine bestimmte Ordnung, wie z. B. die Folge $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, eingehalten werde, da 6 Elemente 720 Permutationen erlauben, noch 720 mal geringer, und es ist mir auch dieser Fall unter 40000 Versuchen nie vorgekommen. — Sucht man dagegen die Wahrscheinlichkeit, jeden der 6 möglichen Würfe in 10 Würfen wenigstens einmal zu erhalten, so hat man für $m = 10$ successive

	5+1+1+1+1+1	4+2+1+1+1+1	3+3+1+1+1+1	3+2+2+1+1+1	2+2+2+2+1+1
mit	6	30	15	60	15

Permutationen einzusetzen, während $n = 6$ und $p = q = \ldots = 1$, und erhält somit nach 4

$$w = \frac{10!}{6^{10}}\left[\frac{6}{5!} + \frac{30}{4!\,2!} + \frac{15}{3!\,3!} + \frac{60}{3!\,2!\,2!} + \frac{15}{2!\,2!\,2!\,2!}\right] = 0{,}272$$

so dass auf die 20000 Versuche etwa $20000 \times 0{,}272 = 5540$ Erfolge zu erwarten sind, während ich in Wirklichkeit nach 49 : c

$$279 + 745 + 1204 + 1456 + 1613 = 5317$$

Erfolge hatte. — Für die Wahrscheinlichkeit W_h, dass ein Ereignis der Wahrscheinlichkeit $p : n = w$ unter m Fällen $\alpha = h$ mal auftrete, somit unter der konträren Wahrscheinlichkeit $q : n = 1 - w$ unter diesen m Fällen $\beta = m - h$

mal nicht auftrete, erhält man nach 4 die Specialformel

$$W_h = \frac{m!}{h!\,(n-h)!} \cdot w^h \cdot (1-w)^{m-h} = \binom{m}{h} w^h \cdot (1-w)^{m-h} \tag{5}$$

welche schon Jak. **Bernoulli** in seiner „Ars conjectandi" gab. So z. B. folgen hienach, wenn für w die Erfahrungswahrscheinlichkeit 0,1966 eingesetzt wird, welche ich für den Wurf 6 eines zweiten, bei meinen Versuchen gebrauchten Würfels, die in beifolgender Tafel eingetragenen Werte r, während die unter e eingetragenen Zahlen die aus 1000 Versuchen erhaltenen entsprechenden Erfahrungswahrscheinlichkeiten sind:

	m = 5		m = 15		m = 25	
	r	e	r	e	r	e
h = 0	0,3347	0,314	0,0375	0,042	0,0042	0,001
1	4095	422	1376	134	257	18
2	2004	217	2358	248	755	82
3	490	46	2500	243	1416	131
4	60	1	1835	182	1905	186
5	3	0	988	94	1958	222
6			403	43	1597	170
7			127	13	1061	102
8			31	1	584	54
9			6	0	270	20
10			1	0	106	11
11					35	2
12					10	1
13					3	0
14					1	0

Trägt man, die h als Abscissen wählend, die r oder e als Ordinaten auf, so erhält man ganz ähnliche Kurven wie diejenigen, welche (49 : e) die Erschöpfungen darstellen, — und zwar hängt ihre Eigentümlichkeit damit zusammen, dass nach 5

$$W_{h+1} - W_h = w^h \cdot (1-w)^{m-h-1} \cdot \binom{m}{h} \cdot \frac{(m+1)\,w - (h+1)}{h+1} \tag{6}$$

also $W_{h+1} > W_h$ wird, so lange $h < (m+1)\,w - 1$ bleibt: Da nun in unserm Beispiele hienach die Werte

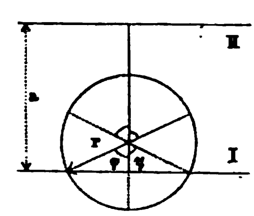
$m = 5$ und $h < 0{,}180$ $\quad m = 15$ und $h < 2{,}146$ $\quad m = 25$ und $h < 4{,}112$

korrespondieren, so muss r je für die folgende ganze Zahl, d. h. für $h = 1$, oder $h = 3$, oder $h = 5$ den grössten Wert erhalten, wie es die Tafel auch wirklich zeigt. Ferner kann man 5 oder der Tafel entnehmen, dass z. B. bei 5 Würfen die Wahrscheinlichkeit, den Wurf 6 **nie** zu erhalten, nur $W_0 = (1-w)^m = 0{,}3347$ ist, dass man also mit einiger Zuversicht, und doch noch anständiger Weise bei gleichem Einsatze, die Wette eingehen dürfte, die 6 unter 5 Würfen wenigstens Ein mal zu werfen. Setzt man in 5, um noch ein anderes Beispiel zu geben, $w = {}^1/_{500000}$ und $n = 5480$, so wird

$$W_2 = \binom{5480}{2} \cdot 0{,}000002^2 \cdot 0{,}999998^{5478} = 0{,}000060$$

und somit $500000 \cdot W_2 = 30$; es sollten also bei der schweizerischen Landes-

ausstellung von 1883, wo auf 500000 Lose 5480 Gewinnste vorgesehen waren, mindestens 30 Nummern zum zweiten Mal gezogen und somit kassiert werden: Laut Protokoll über die Verlosung geschah es nun wirklich 37 mal. — Der Kuriosität wegen mag noch das bei den Franzosen beliebte Wettspiel **Passe-dix** behandelt werden, welches darin besteht, dass ein Spieler gewinnt oder verliert, je nachdem er mit drei Würfeln mehr als 10 wirft oder nicht. Es lässt sich nämlich bei demselben zeigen, dass auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuweilen dem Fahrwege bequemere Fusswege substituiert werden können: **Der Fahrweg** besteht nämlich offenbar darin, dass man sich die sämtlichen 28 Kombinationen $1\cdot4\cdot6$, $1\cdot5\cdot5$, $1\cdot5\cdot6$, ..., $6\cdot6\cdot6$ aufschreibt, welche 11 und mehr Augen ergeben, für jede derselben die Anzahl der Permutationen ermittelt und so schliesslich findet, dass 108 günstige Fälle den $6^3 = 216$ möglichen Fällen gegenüberstehen; **der Fussweg** dagegen beruht auf der einfachen Überlegung, dass bei drei Würfeln die Summe der geworfenen und der liegenden Augen immer gleich 21 ist, also notwendig jeder günstigen Chance auch eine ungünstige entspricht. Beide Wege ergeben somit $\frac{1}{2}$ für die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens, und es ist das Passe-dix als ein ehrliches Spiel zu bezeichnen. — Zum Schlusse komme ich, um auch noch ein Beispiel von der sog. „geometrischen Wahrscheinlichkeit" zu geben, auf das berühmte **Nadelproblem** zu sprechen, mit welchem sich zuerst **Buffon** in seinem überhaupt bemerkenswerten, etwa 1760 verfassten, aber erst 1777 in Vol. 4 seines „Supplément à l'histoire naturelle" erschienenen „Essai d'arithmétique morale" befasst zu haben scheint: Zieht man nämlich auf einer Tafel, im Abstande a voneinander, eine beliebige Anzahl von Parallelen, so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, mit welcher eine auf die Tafel geworfene Nadel der Länge $2r < a$ eine der Parallelen kreuzen wird. Gesetzt nun, die Mitte der Nadel stehe von der Parallelen I um y ab, so schneidet sie die I in allen Lagen, welche in die 4 Winkel φ fallen, während sie im ganzen 2π Lagen annehmen kann; dabei



ist $\varphi = \mathrm{Aco}\,(y:r) = f(y)$, und wechselt, da y von 0 bis r gehen kann, von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0. Es ist somit gegenüber einem Zusammentreffen mit I

$$p' = 4\left[f(0) + f(dy) + f(2dy) + \ldots + f(r)\right] = 4\int_0^r f(y)\,dy = 4\int_0^r \varphi\cdot dy =$$

$$= 4\left[\varphi\cdot y\right]_0^r - 4\int_{1/2\pi}^{0} y\cdot d\varphi = 4r\int_0^{1/2\pi} \mathrm{Co}\,\varphi\cdot d\varphi = 4r \qquad \mathbf{7}$$

die Anzahl aller günstigen Fälle, während entsprechend $p'' = 4r$ die an II günstigen Fälle, und

$$q = 2\pi\int_0^a dy = 2a\pi \qquad \mathbf{8}$$

alle möglichen Fälle zählt. Es ist also die mathematische Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens

$$w = \frac{p' + p''}{q} = \frac{4r}{a\cdot\pi} \qquad \text{also} \qquad \pi = \frac{4r}{a\cdot w} \qquad \mathbf{9}$$

so dass man π, wenn w durch Versuche ermittelt ist, auf diese eigentümliche Weise berechnen kann. Aus 50 Serien von je 100 Würfen, welche ich, nach jedem Wurfe die Tafel etwas drehend, im Jahre 1850 (vgl. Bern. Mitth.) ausführte, erhielt ich $w = 0{,}5064 \pm 0{,}0083$, und somit nach 9, da $r = 18^{\mathrm{mm}}$ und

a = 45^{mm} war, den ganz befriedigenden Wert $\pi = 3{,}1596 \pm 0{,}0518$. Ich füge bei, dass **Laplace**, dessen Entwicklung ich wesentlich folgte, ausserdem verschiedene verwandte Probleme behandelte und dass dies auch seither, wie z. B. in „N. **Plüss**, Aufgaben und Versuche über geometrische Wahrscheinlichkeit. Basel 1881 in 4." und in der sofort zu erwähnenden Schrift von E. **Czuber**, mehrfach geschehen ist. — Für weitern Detail verweise ich auf die Specialschriften: „Th. **Simpson**, Treatise on the nature and laws of chance. London 1740 in 4., — Caritat de **Condorcet** (Ribemont 1743 — Bourg-la-Reine 1794; Sekretär Akademie Paris; vgl. Arago, Oeuvres: Biogr. II), Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Paris 1785 in 4., — **Laplace**, Théorie analytique des probabilités. Paris 1812 in 4. (3 éd. 1820), und: Essai philosophique sur les probabilités. Paris 1814 in 8. (6 éd. 1840; deutsch durch N. Schwaiger, Leipzig 1886), — Siméon-Denis **Poisson** (Pithiviers 1781 — Paris 1840; Prof. mech. und Akad. Paris; vgl. Arago in Oeuvres II), Recherches sur la probabilité des jugemens. Paris 1837 in 4. (deutsch von Schnuse, Braunschweig 1841), — Ludwig **Hagen** (Königsberg 1797 — Berlin 1884; Oberbaurat und Akad. Berlin), Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1837 in 8. (3. A. 1882), — Jakob Friedrich **Fries** (Barby bei Magdeburg 1773 — Jena 1843; Prof. math. et philos. Heidelberg und Jena), Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Braunschweig 1842 in 8., — A. **Quetelet**, Lettres sur la théorie des probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques. Bruxelles 1846 in 8., — Jean-Baptiste-Joseph **Liagre** (Tournay 1815 geb.; General und Sekretär Akad. Brüssel), Calcul des probabilités et théorie des erreurs. Bruxelles 1852 in 8. (2 éd. 1879), — Isaac **Todhunter** (Rye in Sussex 1820 — Cambridge 1884; Prof. math. Cambridge), A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace. Cambridge 1865 in 8., — Antoine **Meyer** (Luxembourg 1803 — Liège 1857; Prof. math. Bruxelles und Liège), Cours de calcul des probabilités, publié par F. Folie. Bruxelles 1874 in 8. (deutsch von E. Czuber, Leipzig 1879), — Emanuel **Czuber**, Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte. Leipzig 1884 in 8., — Joh. v. **Kries**, Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Freiburg i./B. 1886 in 8., — J. **Bertrand**, Calcul des probabilités. Paris 1889 in 8., — etc."

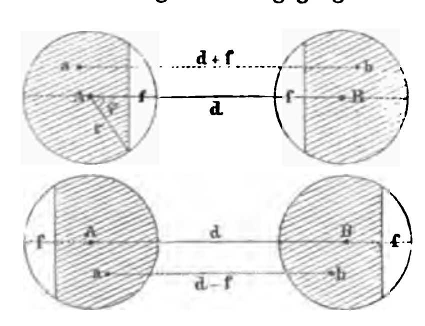
51. Die Bedeutung des arithmetischen Mittels. — Das im Gesetze der grossen Zahlen enthaltene Princip, „es müssen sich bei Häufung der Versuche die sog. zufälligen Bestimmungsgründe immer mehr ausgleichen", lässt sich offenbar auch auf Beobachtungen übertragen, wobei es dann sofort zu der Lehre führt, dass man zur möglichst genauen Bestimmung einer Grösse gelangen werde, wenn man sie, unter sorgfältiger Vermeidung systematischer Fehler, wiederholt messe und dann aus den verschiedenen Resultaten das **arithmetische Mittel** ziehe, — ja es ist auch wohl nichts weniger als ein Zufall, dass **Picard** sich dieser praktischen Bedeutung des arithmetischen Mittels zu derselben Zeit bewusst wurde, in welcher von den Theoretikern die ersten Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgefunden worden waren [a]. — Die Vergleichung der einzelnen Beobachtungen mit ihrem mittlern Werte liess dann bald

erkennen, dass auch die Abweichungen, oder die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, bestimmten Gesetzen unterworfen sind, dass mit ihrer Hilfe gewissermassen eine Kritik der Beobachtungen, eine Art Gewichtsbestimmung eingeführt werden kann, etc.[b], — und es gehört zu den grossen Verdiensten von **Lambert**, zuerst eingehend über diese Verhältnisse aufgeklärt und folgende zwei wichtige Gesetze aufgestellt zu haben: „Der richtige Wert hat die meisten Chancen, während ihre Anzahl mit Zunahme des Fehlers, und zwar ohne Rücksicht auf sein Zeichen, abnimmt", und: „Wenn sich in einer Beobachtungsreihe zu einem der äussersten Werte kein in Beziehung auf das allgemeine Mittel wenigstens annähernd symmetrischer Wert findet, so muss entweder dieser Wert weggeworfen, oder noch besser die Reihe durch weitere Beobachtungen vervollständigt werden" [c]. — Für die nähere Präcisierung dieser Lambert-schen Gesetze auf die folgende Nummer verweisend, mag noch erwähnt werden, dass jene Vergleichung schon oft systematische Abweichungen auffinden und dadurch wichtige Entdeckungen vorbereiten half [d].

Zu 51: *a.* Der treffliche **Picard**, der überhaupt, und weit eher als Tycho, darauf Anspruch machen kann „Vater der neuern Beobachtungskunst" genannt zu werden, sagt nämlich in seiner „Mesure de la terre (vgl. 418)" bei Mitteilung der von ihm 1670 in Malvoisine, Sourdon und Amiens zur Bestimmung der Polhöhendifferenzen gemessenen Zenithdistanzen: „Chacune de ces observations a été tirée d'un grand nombre d'autres **dont on a pris le milieu**", und auch bei spätern Bestimmungen machte er vom arithmetischen Mittel wiederholt Gebrauch: Es ist somit als sicher anzunehmen, dass er den ausgesprochenen Grundsatz wenigstens herausgefühlt hatte, während sich bei seinen Vorgängern noch keine Spur davon zeigt. — *b.* Ich erwähne **einerseits** das z. B. durch Jean-Philippe **Loys** de Cheseaux (Lausanne 1718 — Paris 1751; Privatgel. auf Schloss Cheseaux bei Lausanne; vgl. Biogr. III) in seinem „Traité de la Comète de 1743/4 (vgl. 497)" angewandte Verfahren, in Fällen, wo bei zahlreichen Bestimmungen die grosse Mehrzahl sich nahe um das allgemeine Mittel gruppiert, einzelne weit abstehende Bestimmungen, als mutmasslich irrige, auszuschliessen und sodann ein neues Mittel zu ziehen. Ferner **anderseits** folgenden höchst merkwürdigen Passus, mit welchem noch etwas früher **Cotesius** seine „Aestimatio errorum in mixta mathesi (vgl. 92)" abschloss: „Sit p locus objecti alicujus ex observatione prima definitus, q, r, s ejusdem objecti loca ex observationibus subsequentibus; sint insuper P, Q, R, S **pondera** reciproce proportionalia spatiis evagationum (Abweichungen), per quæ se defundere possint errores ex observationibus singulis prodeuntes, quæque dantur ex datis errorum limitibus; et ad puncta p, q, r, s posita intelligantur pondera P, Q, R, S, et inveniatur eorum **gravitatis centrum** z: dico punctum z fore locorum objecti **maxime probabilem**, qui pro vero ejus loco tutissime (am sichersten) haberi potest". Aus diesem Passus geht hervor, wie nahe bereits **Cotesius** an die Principien der Gegenwart heran-

·p ·q ·z ·s ·r

getreten war und wie unrecht seine nächsten Nachfolger hatten, diesen Gedanken nicht weiter zu verfolgen. — *c.* Ohne die vorübergehende Verdienstlichkeit einiger anderer betreffender Publikationen, wie z. B. „Th. **Simpson**, On the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy (Ph. Tr. 1755)" in Abrede stellen zu wollen, halte ich dafür, dass diejenigen von **Lambert** alle andern an Wichtigkeit überragen: Nachdem dieser tiefe Denker schon in seiner „Photometria (vgl. 146)" einige bezügliche Betrachtungen angestellt hatte, rückte er in den ersten Band seiner „Beyträge zum Gebrauche der Mathematik. Berlin 1765—1772, 3 Bde. in 8." zwei Abhandlungen „Das Mittel zwischen den Fehlern, — und: Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche", ein, von welchen namentlich der erstern eine grosse Bedeutung zuzuschreiben ist. Zunächst machte darin **Lambert** darauf aufmerksam, dass Fehler aus Versehen oder Sorglosigkeit hier nicht in Betracht kommen, sondern nur diejenigen, „die von der Schärfe des Auges und von der Grösse und Güte des Instrumentes herrühren und insofern unvermeidlich sind, dass man nicht dafür gutstehen kann, ob sie wirklich kleiner oder grösser vorgegangen oder nicht". Um sich sodann eine bessere Vorstellung von den möglichen Fehlern zu machen, bezieht sich unser Autor zunächst auf eine Winkelmessung und umgiebt jeden der beiden Winkelpunkte A und B, welche eine Distanz d haben mögen, mit einem Kreise, dessen Radius r der grössten Unsicherheit der Einstellung entspricht. Dieser Kreis verschwindet gewissermassen für den Beobachter, so dass er auf jeden Punkt desselben ebensogut als auf A oder B selbst einstellen wird. Ist nun f der Fehler der Einstellung, so dass $d \pm f$ statt d genommen wird, so liegen die sämtlichen wählbaren Punktenpaare a und b auf zwei gleichen Segmenten, deren Fläche durch



$$S = r^2\pi - F \quad \text{wo} \quad F = \frac{r^2\pi}{360} \cdot 2\varphi - r(r-f)\,\mathrm{Si}\,\varphi \quad \text{und} \quad \mathrm{Co}\,\varphi = \frac{r-f}{r} \qquad 1$$

ist, ausgedrückt wird; man hat daher für

$$f = 2r : \varphi = 180^0 \quad F = r^2\pi \quad \text{also im Min.} \quad S = 0$$
$$f = 0 \quad \varphi = 0 \quad F = 0 \quad \text{- - Max.} \quad S = r^2\pi$$

was in der That ganz mit dem ersten Lambert'schen Satze übereinstimmt. Auch andere Überlegungen und einige wirkliche Versuchsreihen führten **Lambert** zu demselben, übrigens ganz mit den Ergebnissen meiner früher erwähnten Versuche übereinstimmenden Verteilungsgesetze der Fehler, und liessen ihn überdies noch die Verhältnisse erkennen, welche er in seinem zweiten Satze niederlegte. — *d.* Ich muss hiefür auf das später folgende verweisen und füge hier nur noch im Anschlusse an die Lambert'sche Vorschrift, unter Umständen eine Versuchsreihe zu verlängern, folgende praktische Regel bei: Hat man das Mittel M' von n' Beobachtungen bestimmt und kommen dann nachträglich noch n'' weitere Beobachtungen hinzu, welche für sich das Mittel M'' ergeben, so erhält man offenbar das Gesamtmittel nach der Formel

$$M = \frac{n' . M' + n'' . M''}{n' + n''} = M' + \frac{n''}{n' + n''}(M'' - M') \qquad 2$$

bequemer als durch totale Neuberechnung.

52. Die sog. Methode der kleinsten Quadrate. — Jede durch Beobachtung erhaltene Bestimmung kann man sich offenbar **einerseits** durch einen Punkt von bekannter, z. B. durch die drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z gegebener Lage, und ihren Wert durch ein ihm beigelegtes Gewicht p repräsentiert denken, — **anderseits** aber auch nach dem Vorhergehenden als das arithmetische Mittel aus einer Gruppe von p gleichwertigen Beobachtungen. Hat man mehrere solcher Bestimmungen oder Gruppen, so wird somit das nach dem frühern Principe aus ihrer Gesamtheit berechnete Endergebnis durch einen Punkt der Coordinaten

$$X = \frac{\Sigma\, p . x}{\Sigma\, p} \qquad Y = \frac{\Sigma\, p . y}{\Sigma\, p} \qquad Z = \frac{\Sigma\, p . z}{\Sigma\, p} \qquad 1$$

dargestellt werden, welcher offenbar (72) auch dem Punkte der mittlern Entfernungen oder dem Schwerpunkte sämtlicher Punkte entspricht, folglich mit ihm die Eigenschaft teilt, dass für ihn (72 : 2) die Gleichheit

$$\Sigma\, p . \varrho^2 = \Sigma\, p . r^2 + r^2 . \Sigma\, p \qquad 2$$

besteht, wo r_1, r_2, ... die Entfernungen der einzelnen Punkte von dem Schwerpunkte bezeichnen, ϱ_1, ϱ_2, ... aber ihre Entfernungen von irgend einem andern, in der Distanz r vom Schwerpunkte liegenden Punkte [a]. Wird aber unter diesem andern Punkte speciell derjenige verstanden, welcher dem wahren Werte der Grösse entspricht, für welche das Mittel B ergeben hat, so gehen die ϱ_1, ϱ_2, ... in die Fehler f_1, f_2, ... der einzelnen Bestimmungen über, während die r_1, r_2, ... deren Abweichungen v_1, v_2, ... von B bezeichnen und r mit dem Fehler oder der **Unsicherheit** ΔB von B übereinkömmt; man hat daher nach 2

$$\Sigma\, p . f^2 = \Sigma\, p . v^2 + \Delta B^2 . \Sigma\, p \qquad 3$$

folglich wenn, wie bei den elementaren Beobachtungen, jedes p gleich der Einheit gesetzt werden darf und im ganzen n solche Beobachtungen vorliegen,

$$\Sigma\, f^2 = \Sigma\, v^2 + n . \Delta B^2 \qquad \text{oder} \qquad \Sigma\, v^2 < \Sigma\, f^2 \qquad 4$$

Es hat also der aus dem Mittel gleichwertiger Bestimmungen einer Grösse hervorgehende wahrscheinlichste Wert derselben die charakteristische Eigenschaft, dass für ihn die Quadratsumme der Abweichungen ein Minimum wird, und hierauf gründet sich die durch **Legendre** und **Gauss** gleichzeitig aufgefundene **Methode der kleinsten Quadrate**, von welcher das folgende die wichtigsten Vorschriften giebt [b]. — Definiert man die **mittlere Abweichung** m einer einzelnen Beobachtung vom Mittel aller n Beobachtungen durch $m^2 = (\Sigma\, v^2) : n$

und ihren **mittlern Fehler** f durch $f^2 = (\Sigma f^2) : n$, so hat man [e]

$$f = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} \quad \text{und} \quad \Delta B = \frac{f}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-1)}} \qquad 5$$

zu setzen, während [d], wenn $\varphi(v)$ die sog. **Fehlerfunktion** oder die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer Abweichung v, und f′ den sog. **wahrscheinlichen** oder besser den mit der grössten Wahrscheinlichkeit behafteten Fehler bezeichnet,

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-v^2} \quad \text{und} \quad f' = 0{,}674486 \,.\, m \qquad 6$$

ist, wodurch auch die Fehlerverteilung reguliert wird [e]. — Versteht man unter **Gewicht** einer Bestimmung, dem frühern entsprechend, eine dem Quadrate ihrer Unsicherheit umgekehrt proportionale Grösse [f], und verfügt man zur Ermittlung einer Grösse B über n Bestimmungen $b_1, b_2, \ldots$ der Gewichte $p_1, p_2, \ldots$, so ist

$$B = \frac{\Sigma(p\,.\,b)}{\Sigma p} \pm \frac{f}{\sqrt{\Sigma p}} \quad \text{zu setzen, wo} \quad f = \sqrt{\frac{\Sigma(p\,.\,v^2)}{n-1}} \qquad 7$$

sich auf die angenommene Gewichtseinheit bezieht [g]. — Kann eine Grösse t nicht direkt beobachtet, sondern muss sie aus beobachteten Grössen $t_1, t_2, \ldots$, z. B. nach

$$t = a + a_1 \,.\, t_1 + a_2 \,.\, t_2 + \ldots + a_n \,.\, t_n \qquad 8$$

durch Rechnung abgeleitet werden, wo $a, a_1, a_2, \ldots$ Konstante sind, so hat man, wenn $f, f_1, f_2, \ldots$ die Fehler und $p, p_1, p_2, \ldots$ die Gewichte der $t, t_1, t_2, \ldots$ bezeichnen,

$$f^2 = \Sigma(a^2 \,.\, f^2) \quad \text{und} \quad 1 : p = \Sigma(a^2 : p) \qquad 9$$

zu setzen [h]. Ist allgemein

$$t = f(t_1, t_2, \ldots t_n) \qquad 10$$

also

$$dt = \left(\frac{dt}{dt_1}\right) \cdot dt_1 + \left(\frac{dt}{dt_2}\right) \cdot dt_2 + \ldots + \left(\frac{dt}{dt_n}\right) \cdot dt_n \qquad 11$$

wo die partiellen Differentialquotienten sich durch Substitution der beobachteten und berechneten Werte auf Zahlen reduzieren, so braucht man offenbar nur noch die $dt, dt_1, dt_2, \ldots$ durch die $f, f_1, f_2, \ldots$ zu ersetzen, um diesen allgemeinen Fall auf den vorhergehenden Specialfall zurückzuführen [i]. — Hat man endlich n Gleichungen der Form

$$a \,.\, x + b \,.\, y + c \,.\, z + \ldots\ldots + h = 0 \qquad 12$$

zwischen m Unbekannten x, y, z, ..., wo die Bekannten a, b, c, ... wenigstens zum Teil aus Beobachtungen abgeleitet sind, so hat man aus ihnen für jede Unbekannte, indem man je jede der Gleichungen mit dem Faktor multipliziert, welchen die Unbekannte in ihr be-

sitzt, und dann die sämtlichen Gleichungen addiert, eine sog. **Normalgleichung** zu bilden und sodann schliesslich die m Unbekannten aus den m Normalgleichungen zu berechnen[k].

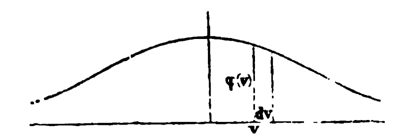
Zu 52: *a.* Ohne ein teilweises Übergreifen auf später behandelte Gebiete liess sich hier nicht wohl auskommen, — und doch konnte dieser Satz nicht von den vorhergehenden abgetrennt werden. — *b.* Wenn sich in früherer Zeit bei Lösung einer Aufgabe mehr Gleichungen als Unbekannte ergaben, so wurden (im höchsten Falle unter Anwendung einer gewissen Kritik) so viele Gleichungen weggelassen als überflüssige vorhanden waren, und so verfuhr auch **Euler** noch 1744 in seiner „Theoria motuum planetarum et cometarum", während er dann allerdings in seiner 1748 gekrönten, leider wegen Wechsel des Verlegers der „Pièces de prix" nur in wenigen Extra-Abdrücken erhaltenen Preisschrift „Sur les inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter" alle Gleichungen in der Weise benutzte, dass er durch zweckmässig scheinende Verbindung derselben für jede Unbekannte eine Art **Normalgleichung** zu bilden suchte. Fast gleichzeitig ging auch Tob. **Mayer** in seiner Abhandlung „Über die Umwälzung des Mondes (vgl. 240)" in einem andern speciellen Falle auf ähnliche Weise vor; aber auch bei ihm musste noch feiner Takt die fehlende sichere Methode ersetzen. Es war somit ein wesentlicher Fortschritt, als einige Decennien später **Boscovich** das Princip aufstellte, man müsse im Falle von überschüssigen Gleichungen die Unbekannten so zu bestimmen suchen, **dass die absolute Summe der übrigbleibenden Fehler ein Minimum werde**, und (vgl. 425) überdies 1770 in einem Anhange zu seinem „Voyage astronomique" in sehr scharfsinniger Weise an einem bestimmten Beispiele zeigte, wie man demselben gerecht werden könne; aber immerhin war es erst **Legendre**, der in seiner Schrift „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris 1805 in 4. (Suppl. 1806; 2d suppl. 1820)" in einem besondern Abschnitte „Sur la méthode des moindres quarrés" eine allgemeine und leicht durchführbare Methode veröffentlichte und zugleich den Nachweis leistete, dass dieselbe eine notwendige Folge des Principes vom arithmetischen Mittel und einer gewissen Eigenschaft des Schwerpunktes sei, — ein Nachweis, welchen ich, ohne hievon etwas zu wissen, in meiner „Note zur Methode der kleinsten Quadrate (Bern. Mitth. 1849)" in der eingangs benutzten Art ebenfalls durchführte. Allerdings zeigte sich dann alsbald, dass auch **Gauss** gleichzeitig auf diese Methode verfallen war und darüber schon vor Abschluss des 18. Jahrhunderts wiederholt mündliche und schriftliche Mitteilungen gemacht hatte, und wenn zwar eine betreffende Publikation von seiner Seite erst 1809 in der „Theoria motus" erfolgte, so trug dieselbe, sowie seine „Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiæ. Gottingæ 1823 in 4. (Suppl. 1828; franz. durch Bertrand, Paris 1855; deutsch durch A. Börsch und P. Simon, Berlin 1887)", einen so ausgesprochenen Stempel der Originalität, dass dadurch alle Zweifel hinfällig wurden und sogar eine ziemlich unverschämte, dem 2. Suppl. Legendres angehängte „Note par M*** (Mathieu?)" keinen Prioritätsstreit anzufachen vermochte: Gegenwärtig werden allgemein **Legendre** und **Gauss** als gleichberechtigt anerkannt und es bleibt nur zu bedauern, dass nicht neben ihnen als Vorläufer auch **Boscovich** genannt wird. — *c.* Nach den gemachten Annahmen erhält man aus 4

$$f^2 = m^2 + \Delta B^2 \quad \text{wo} \quad \Delta B^2 = \left[\frac{\Sigma(\pm f)}{n}\right]^2 = \frac{f_1{}^2 + f_2{}^2 + \cdots \pm 2 f_1 f_2 \pm \cdots}{n^2}$$

ist. Denkt man sich aber letztern Wert für alle möglichen und offenbar gleich wahrscheinlichen Kombinationen der Zeichen + und — aufgeschrieben und zieht daraus nach dem angenommenen Grundsatze das Mittel, so erhält man als wahrscheinlichsten Wert

$$\triangle B^2 = \frac{\Sigma f^2}{n^2} = \frac{f^2}{n} \quad \text{und somit} \quad f^2 = m^2 + \frac{f^2}{n} \quad \text{oder} \quad f^2 = \frac{n}{n-1} \cdot m^2 = \frac{\Sigma v^2}{n-1}$$

womit die 5 erwiesen sind. — *d.* Die durch **Gauss** eingeführte „Fehlerfunction" wird in folgender Weise erhalten: Da nach dem frühern bei jeder Gattung von Beobachtungen kleine zufällige Fehler als beinahe notwendig zu betrachten sind, während merklich grössere Fehler um so seltener vorkommen, je grösser sie werden, so hängt offenbar die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von der Grösse v zu begehen, irgendwie von der Grösse, aber sicherlich nicht von dem Zeichen dieses Fehlers ab, kann also als eine symmetrische Funktion $\varphi(v)$ desselben angesehen werden, — und wenn man sich die v als Abscissen, die $\varphi(v)$ aber als Ordinaten aufgetragen denkt, so wird man eine die wahrscheinliche Fehlerverteilung darstellende, symmetrische und sich nach beiden Seiten rasch der Axe nähernde Kurve erhalten.



Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen den Grenzen v und v + dv liege, ist aber (50 : 2') gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller zwischen diesen Grenzen vorkommenden Fehler, kann also gleich der Fläche $\varphi(v) \cdot dv$ gesetzt werden, und somit die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen die Grenzen — c und + c, oder die Gewissheit, dass er zwischen $-\infty$ und $+\infty$ falle,

$$W' = \int_{-c}^{+c} \varphi(v) \cdot dv \qquad \text{oder} \qquad 1 = W'' = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) \cdot dv \qquad \textbf{13}$$

Bezeichnet ferner W die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Reihe von n gleich guten Beobachtungen die Fehler $v_1, v_2, \ldots v_n$ vorkommen, so ist (50 : 1)

$$W = \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \ldots\ldots \varphi(v_n) \qquad \textbf{14}$$

und zwar muss dieses W, wenn die Fehler v durch Vergleichen der einzelnen Beobachtungen b mit ihrem Mittel M bestimmt werden, nach unserm Grundsatze, dass das Mittel den besten Wert ergebe, einen grössten Wert annehmen. Nun erhält man nach 14 durch logarithmieren und differenzieren

$$\frac{dW}{dM} = W \cdot \left[\frac{d \cdot \varphi(v_1)}{\varphi(v_1) \cdot dv_1} \cdot \frac{dv_1}{dM} + \frac{d \cdot \varphi(v_2)}{\varphi(v_2) \cdot dv_2} \cdot \frac{dv_2}{dM} + \cdots\right]$$

wo

$$M = \frac{\Sigma b}{n}, \quad v_1 = b_1 - M \text{ oder } \frac{dv_1}{dM} = -1, \quad v_2 = b_2 - M \text{ oder } \frac{dv_2}{dM} = -1, \text{ etc.}$$

Wenn also W ein Maximum annehmen, d. h. dW : dM = 0 werden soll, so muss

$$\frac{d \cdot \varphi(v_1)}{\varphi(v_1) \cdot dv_1} + \frac{d \cdot \varphi(v_2)}{\varphi(v_2) \cdot dv_2} + \cdots = 0 = v_1 + v_2 + \ldots$$

werden, — eine Gleichheit, welche, da die v von einander unabhängig sind, nur bestehen kann, wenn je die entsprechenden Glieder zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich sind, oder wenn, falls 2a eine Konstante ist, allgemein

$$\frac{d \cdot \varphi(v)}{\varphi(v) \cdot dv} = 2av \qquad \text{oder} \qquad 2av \cdot dv = \frac{d \cdot \varphi(v)}{\varphi(v)}$$

woraus durch Integration, wenn Ln c ebenfalls eine Konstante ist,

$$a \cdot v^2 + \text{Ln}\, c = \text{Ln}\, \varphi(v) \qquad \text{oder} \qquad \varphi(v) = c \cdot e^{a \cdot v^2} \qquad \textbf{15}$$

erhalten wird. Da nun nach dem angenommenen Grundsatze kleinere Fehler eine grössere Wahrscheinlichkeit haben, so muss a negativ sein und kann also z. B. durch $-h^2$ ersetzt werden, wofür 15 und 14 in

$$\varphi(v) = c \cdot e^{-h^2 \cdot v^2} \quad \text{und} \quad W = c^n \cdot e^{-h^2(v_1^2 + v_2^2 + \ldots)} \qquad \textbf{16}$$

übergehen. Nun hat man aber nach 13'' und 16' mit Hilfe von 95:8

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) \cdot dv = \frac{c}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \cdot v^2} \cdot h \cdot dv = \frac{c}{h} \sqrt{\pi}$$

also ist

$$c = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \quad \text{und somit} \quad \varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \cdot v^2} \qquad \textbf{17}$$

sowie

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \cdot e^{-h^2 \cdot \Sigma v^2} \qquad \textbf{18}$$

während nach 13' nunmehr

$$W' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-c}^{+c} e^{-h^2 v^2} \cdot dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-ch}^{+ch} e^{-x^2} \cdot dx \qquad \textbf{19}$$

die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass ein Fehler die Grösse c nicht übersteige. Die schon von **Gauss** auf ähnlichem Wege abgeleitete 17 stimmt für $h = 1$, für welche Annahme durch **Wolfer** auch der betreffende Teil unserer Tab. II^f berechnet wurde, mit 6' überein, — während aus der 18 hervorgeht, dass einem Minimum von Σv^2 wirklich ein Maximum von W entspricht, — und 19 uns belehrt, dass, wenn in zwei Beobachtungsreihen, welchen c', h' und c'', h'' entsprechen, die Wahrscheinlichkeit, dass in der ersten ein Fehler die Grösse c' erreiche, ebenso gross sein soll, als dass er in der zweiten die Grösse c'' erhalte,

$$c' \cdot h' = c'' \cdot h'' \quad \text{oder} \quad c' : c'' = h'' : h'$$

sein müsse, so dass h als **Mass der Genauigkeit** eines Systemes betrachtet werden darf. — Setzt man $c \cdot h = t$, so erhält man aus 19 mit Hilfe von 95:8 und 47:8 successive

$$w' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} \cdot dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2} \cdot dx$$

$$= 1 - \frac{1}{t \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{t^2}} \left[1 : [1 + q : (1 + 2q : \ldots)]\right] \quad \text{wo} \quad q = \frac{1}{2t^2} \qquad \textbf{20}$$

und kann daher unter Anwendung der Rekursion 20:3, welche nach 20:c auf gegenwärtigen Fall ausgedehnt werden darf, für jedes Argument t den Wert von w' mit jeder beliebigen Annäherung berechnen, d. h. sich eine Tafel erstellen, wie man eine solche **Encke** (vgl. Berl. Jahrb. 1834, und im Auszuge unsere Tab. II^f) verdankt. Aus dieser Tafel findet man nun z. B. durch Interpolation, dass $w = 1/2$ und $t = 0{,}476936$ korrespondieren, und bezeichnet man letztern Wert mit ϱ, den ihm entsprechenden Wert von c aber mit f', so ist somit

$$f' \cdot h = \varrho \quad \text{oder es giebt} \quad f' = \varrho : h \qquad \textbf{21}$$

denjenigen **Fehler, von welchem es ebenso wahrscheinlich ist, dass er nicht erreicht, als dass er überschritten wird,** und welchen man den **wahrscheinlichen Fehler** genannt hat. Um endlich noch h zu bestimmen, hat man nach 18 und der frühern Definition von m

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \cdot e^{-h^2 \cdot n \cdot m^2} \quad \text{folglich} \quad \frac{dW}{dh} = n \cdot W\left(\frac{1}{h} - 2h \cdot m^2\right)$$

so dass W ein Maximum wird, wenn

$$\frac{1}{h} - 2h \cdot m^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad h = \frac{1}{m \cdot \sqrt{2}} \tag{22}$$

wird, wofür endlich die 21 in die mit 6 übereinstimmende

$$f' = \varrho \cdot m \cdot \sqrt{2} = 0{,}674486 \cdot m \tag{23}$$

übergeht. — *e.* Ist f'' irgend ein anderer Fehler, so ist dessen Wahrscheinlichkeit w'' ebenfalls nach 20 berechenbar, sobald $t = f'' . h = (f'' : f') . \varrho$ gesetzt wird, und in der That hat **Encke** (l. c. und im Auszuge wieder Tab. II^f) auch für das Argument (f'' : f') eine Tafel berechnet. Da nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen gewissen Grenzen liegt, mit dem Verhältnis der Anzahl der zwischen diesen Grenzen liegenden Fehler zur Anzahl aller Fehler übereinstimmen muss, so ergiebt sich aus jener Tafel, dass von 10000 Fehlern

		5000		3227		1343		360		63		7	
zwischen	0		f'		2f'		3f'		4f'		5f'		∞

fallen werden, also z. B. von den Fehlern der 1149 Bestimmungen, welche ich (vgl. Mitth. 44) in den Jahren 1874—77 für die Polhöhe meiner Sternwarte bei f' = 1'' erhielt

		575		371		154		41		7		1	
zwischen	0''		1''		2''		3''		4''		5''		∞

liegen sollten. Nun fielen in der That von den Abweichungen der einzelnen Bestimmungen von ihrem $\varphi = 47^0\ 22'\ 39'',98$ betragenden Mittel

580 339 156 51 13 10

zwischen jene Grenzen, so dass nur bei der letzten Klasse eine erhebliche Differenz zwischen Theorie und Erfahrung vorkam, und dies veranlasste mich schliesslich, 8 auf diese Klasse fallende Werte, welche schon im Beobachtungsjournale als zweifelhaft bezeichnet worden waren, definitiv auszuschliessen, wenn ich auch mit **Liagre** das so häufig vorkommende kritiklose Ausschliessen verdamme. Nach Beseitigung der mutmasslich **irrigen** Werte blieben mir für die Sekunde der Polhöhe 33'',70 und 45'',66 als **extreme** Werte übrig, und deren Mittel 39'',68 fiel dann auch wirklich, wie es schon die zweite Lambertsche Regel verlangte, mit dem allgemeinen Mittel 39'',98 nahe zusammen. — *f.* Unter **Gewicht** einer Bestimmung wurde schon im Eingange die Anzahl n gleichwertiger, gewissermassen elementarer Beobachtungen verstanden, aus denen jene Bestimmung als Mittel folgt, und es verhalten sich somit die Gewichte p_1 und p_2 zweier Bestimmungen wie die ihnen zukommenden Zahlen n_1 und n_2. Nun hat man aber nach 5, wenn f, f_1 und f_2 der Reihe nach die mittlern Fehler der Beobachtungen und der aus ihnen abgeleiteten zwei Bestimmungen bezeichnen,

$$f_1 : f_2 = \frac{f}{\sqrt{n_1}} : \frac{f}{\sqrt{n_2}} \qquad \text{also} \qquad p_1 : p_2 = n_1 : n_2 = f_2^{\,2} : f_1^{\,2} \tag{24}$$

womit die neue Definition von **Gewicht** vollständig begründet ist. — *g.* Da aus 24

$$p_1 . f_1^{\,2} = p_2 . f_2^{\,2} \qquad \text{also für } p_2 = 1 \qquad p_1 . f_1^{\,2} = f_2^{\,2} \tag{25}$$

folgt, so kann man offenbar bei Beobachtungen von verschiedenem Gewichte jede derselben auf das Gewicht 1 reduzieren, indem man ihr Fehlerquadrat mit ihrem Gewichte multipliziert, wofür 5' in 7'' übergeht, während 7' unmittelbar aus den unter f enthaltenen Grundsätzen hervorgeht. — *h.* Aus 8 erhält man offenbar

$t \pm f = a + a_1 (t_1 \pm f_1) + a_2 (t_2 \pm f_2) + \cdots$ oder $\pm f = \pm a_1 f_1 \pm a_2 f_2 \pm \cdots$ woraus, ganz in derselben Weise wie unter c verfahren wurde, sofort 9' und sodann unter Zuzug von 24 auch 9'' erhalten wird. — *i.* So z. B. korrespondieren nach 10 und 11

$$\begin{array}{lll} t = t_1 . t_2 . t_3 \ldots & dt = t\left(\frac{d t_1}{t_1} + \frac{d t_2}{t_2} + \cdots\right) & f = t\sqrt{\frac{f_1^2}{t_1^2} + \frac{f_2^2}{t_2^2} + \cdots} \\ = t_1^n & = n . t_1^{n-1} . dt_1 & = n . t_1^{n-1} . f_1 \\ = t_1 : t_2 & = t\left(\frac{d t_1}{t_1} - \frac{d t_2}{t_2}\right) & = \frac{1}{t_2^2} \sqrt{t_2^2 . f_1^2 + t_1^2 . f_2^2} \\ = \operatorname{Ln} t_1 & = d t_1 : t_1 & = f_1 : t_1 \end{array} \quad \mathbf{26}$$

etc. — *k.* Hat man n Gleichungen der Form 12 und substituiert in dieselben für die Unbekannten irgend welche Werte, so wird im allgemeinen sich statt Null eine Grösse f ergeben; man wird somit durch Quadrieren und Addieren der sämtlichen Gleichungen die Beziehung

$$x^2 \cdot \Sigma a^2 + y^2 \cdot \Sigma b^2 + \cdots + 2xy \Sigma ab + \cdots + 2x \Sigma ah + 2y \Sigma bh + \cdots = \Sigma f^2 \quad \mathbf{27}$$

erhalten, und es handelt sich nun bei der Methode der kleinsten Quadrate offenbar darum, die Werte der Unbekannten so zu bestimmen, dass Σf^2 ein Minimum wird. Dies wird aber nach 44 ganz sicher geschehen, wenn

$$\begin{array}{l} x \cdot \Sigma a^2 + y \cdot \Sigma ab + \cdots\cdots + \Sigma ah = d(\Sigma f^2) : dx = 0 \\ x \cdot \Sigma ab + y \cdot \Sigma b^2 + \cdots\cdots + \Sigma bh = d(\Sigma f^2) : dy = 0 \end{array} \quad \mathbf{28}$$

etc., und man braucht somit die Unbekannten nur aus diesen Gleichungen, welche sich, wie schon **Legendre** lehrte, nach der bereits gegebenen Regel leicht direkt aus den 12 erhalten lassen, zu berechnen, um ihre besten Werte zu besitzen. — Für einige Anwendungen auf Buch III verweisend, mache ich zum Schlusse zur Ergänzung der in 50 und seither beiläufig erwähnten Schriften noch auf folgende aufmerksam: „**Fourier**, Mémoire sur les résultats moyens déduits d'un grand nombre d'observations (Rech. statist. III von 1826), und: Second mémoire sur les résultats moyens et sur les erreurs de mesure (d^{to} IV von 1829), — **Cauchy**, Mémoire sur le système de valeurs qu'il faut attribuer à divers élémens déterminés par un grand nombre d'observations pour que la plus grande de toutes les erreurs, abstraction faite du signe, devienne un minimum (Journ. de l'éc. pol. 20 von 1831), — **Encke**, Über die Methode der kleinsten Quadrate (Berl. Jahrb. 1834—36), — J. **Bienaymé**, Sur la probabilité des résultats moyens des observations (Sav. étr. VI von 1838), — **Bessel**, Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler (A. N. 358—59 von 1838), und: Ein Hilfsmittel zur Erleichterung der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate (A. N. 399 von 1840), — Christian Ludwig **Gerling** (Hamburg 1788 — Marburg 1864; Prof. math. Marburg), Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie. Hamburg 1843 in 8., — Auguste **Bravais** (Annonay 1811 — Versailles 1863; Prof. astr. Lyon, dann Prof. phys. u. Akad. Paris; vgl. Elie de Beaumont in Mém. de l'Inst. 1866), Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point (Mém. Par. 1846), — Wilhelm **Denzler** (Sulgen im Thurgau 1811 geb; Prof. math. Zürich), Über den Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Quadrate (Zürch. Mitth. II von 1852), — Jul. **Zech**, Einladung zur Feier des Geburtstages des Königs, nebst einer Abhandlung zur Methode der kleinsten Quadrate. Tübingen 1857 in 4., — Joseph **Dienger** (Hausen bei Breisach 1818 geb.; Prof. math. Karlsruhe), Die Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode

der kleinsten Quadratsummen. Braunschweig 1857 in 8., — **Sawitsch**, Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Berechnung der Beobachtungen. Petersburg 1857 in 8. (russisch; deutsch, mit Anhang von G. Schweizer, durch Lais, Mitau 1857), — Elie **Ritter** (Genf 1801 — ebenda 1862; Prof. math. Genf), Manuel théorique et pratique de la méthode des moindres carrés au calcul des observations. Paris 1858 in 8., — **Airy**, On the algebraical and numerical theory of errors of observations and the combination of observations. Cambridge 1861 in 8., — W. v. **Freeden**, Die Praxis der Methode der kleinsten Quadrate für Anfänger. I. Braunschweig 1863 in 8., — Peter Andreas **Hansen** (Tondern in Schleswig 1795 — Gotha 1874; erst Uhrmacher, dann Dir. Obs. Gotha), Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. Leipzig 1867 in 8. (Suppl. 1—10: 1868), — J. J. **Baeyer**, Wissenschaftliche Begründung der Rechnungsmethoden des Centralbüreau der europäischen Gradmessung. Berlin 1867 in 4. (als Mss. gedr.), — Fr. **Faà** de Bruno, Traité élémentaire du calcul des erreurs. Paris 1869 in 8., — Friedrich Rudolf **Helmert** (Freiberg 1843 geb.; Prof. geod. Aachen und Berlin und Dir. geod. Inst.), Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig 1872 in 8., — **Jouffret**, Sur la probabilité du tir et la méthode des moindres carrés. Paris 1875 in 8., — F. G. **Gauss**, Die trigonometrischen und polygonometrischen Methoden in der Feldmesskunst. Halle 1876 in 8., — Mansfield **Merriman**, A list of writings relating to the method of least squares, with historical and critical notes (Transact. of Connecticut Akad. 1877), — Hugo **Seeliger**, Über die Vertheilung der Vorzeichen der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler (A. N. 2284 von 1879), und: Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über die Vertheilung zufälliger Fehler (A. N. 2323 von 1880), — A. O. **Forti**, La teorica degli errori e il metodo dei minimi quadrati. Milano 1880 in 8., — A. **Vogler**, Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Braunschweig 1883 in 8., — Joh. Karl **Koppe** (Soest in Westphalen 1844 geb.; längere Zeit in der Schweiz als Geodäte thätig, jetzt Prof. geod. Braunschweig), Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in der praktischen Geometrie. Nordhausen 1885 in 8., — Carl **Genge** (Werro bei Riga 1846 geb.; Ingenieur), Beiträge zu graphischen Ausgleichungen (Zürch. Viert. 1886), — R. **Lehmann**-Filhés, Über abnorme Fehlervertheilung und Verwerfung zweifelhafter Beobachtungen (A. N. 2792 von 1887), — etc."

IV. Einige Vorkenntnisse aus der Geometrie.

O Messkunst, Zaum der Phantasie! — Wer dir will folgen, irret nie, — Wer ohne dich will gehn, der gleitet. *(Haller.)*

---

53. Einleitendes. — Die Lehre von den Raumgebilden oder die sog. **Geometrie** ging offenbar in ihren ersten Anfängen, wie es (15) bei der Arithmetik der Fall war, ebenfalls aus praktischen Bedürfnissen hervor und es ist nicht zu bezweifeln, dass sich auch bei den ältesten Kulturvölkern, namentlich bei den Egyptern und Indern, schon frühe einige betreffende Kenntnisse vorfanden; aber immerhin war, nach den uns erhaltenen Spuren zu schliessen [a], dasjenige, was **Thales** und seine Zeit etwa im sechsten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung von ihnen nach Griechenland herüberholen konnten, von wenig Belang, und als eigentliche Wissenschaft scheint die Geometrie erst in diesem letztern Lande entstanden, dann aber rasch zu einer gewissen Blüte gekommen zu sein: Beweis dafür, dass schon drei Jahrhunderte nach Thales ein **Euklid** seine für alle Zeiten mustergiltigen „Elemente" schreiben, ein **Archimedes** seine Kreisrechnung und andere bereits als Vorläufer einer höhern Geometrie zu betrachtende Arbeiten verfassen, und ein **Apollonius** mit so grossem Erfolge die Lehre vom geometrischen Orte kultivieren konnte [b]. — Für uns ist es speciell von Wichtigkeit, dass es bald darauf **Hipparch** gelang, durch Einführung der Sehnenrechnung die Bestimmung gewisser Grössen, welche sich nicht direkt ermitteln liessen, aus ihren Beziehungen zu andern zu ermöglichen, und dass diese Kunst in der Folge, erst durch **Menelaus** [c], dann durch **Ptolemäus**, noch weiter ausgebildet wurde. Was diese Männer begonnen, wurde alsdann durch die Araber, besonders nachdem ihre **Albategnius** und **Al-Fergan** die aus Indien herübergebrachten Zahlzeichen und Regeln in die griechische Wissenschaft eingefügt hatten, mit schönstem Erfolge weiter geführt, ja es gelang bereits den **Abul Wefa** und **Ibn Junis**, die sog. „Goniometrie" und „Trigonometrie" auf eine

ziemlich hohe Stufe zu bringen und die für ihre Anwendung nötigen Hilfstafeln zu erstellen. Als später mit den arithmetischen auch die geometrischen Kenntnisse der Griechen und Araber nach und nach ins Abendland gelangten, beschäftigte sich dasselbe ebenfalls zunächst mit diesen praktisch wichtigen Gebieten, und es gehört zu den grossen Verdiensten von **Regiomontan**, dass er die trigonometrischen Rechnungsvorschriften sammelte und ergänzte sowie zu einem ersten Lehrbuche zusammenstellte [d], — zu denjenigen des etwas spätern **Rhäticus**, dass er ausgedehnte Tafeln berechnete [e]. Immerhin wurden auch die übrigen Teile der Geometrie durchaus nicht vernachlässigt, ja um die Mitte des 17. Jahrhunderts gelang es den **Descartes**, **Roberval**, **Cavalieri**, **Fermat**, etc. [f], neben den Methoden der alten Geometer noch ganz neue Wege zu eröffnen, um die Krümmungsverhältnisse, die Flächen und Volumina etc. in leichterer und allgemeinerer Weise als bisher ermitteln zu können. Diese neuen Wege und die Ausbildung, welche die mit ihnen (15) im innigsten Zusammenhange stehende Infinitesimalrechnung erhielt, gaben nunmehr in der sog. „analytischen Geometrie", namentlich nachdem **Euler** die betreffende Technik ausgebildet hatte, ein so bequemes Mittel an die Hand, eine Menge von Aufgaben, welche früher als schwierig oder sogar als unlösbar erschienen, fast spielend zu absolvieren, dass wohl nach dieser Richtung vorläufig kaum mehr Lorbeeren zu holen sind. Es haben sich denn auch die meisten Geometer der Gegenwart, nach dem Vorgange der **Carnot**, **Poncelet**, **Steiner**, etc. [g], Untersuchungen anderer Art zugewandt, die allerdings gegenwärtig noch, etwa mit Ausnahme von ihrer Anwendung auf die von **Monge** [h] begründete „darstellende Geometrie" und die durch **Culmann** geschaffene „graphische Statik", ausschliesslich theoretisches Interesse haben, — sie arbeiten in Ermanglung von Bestellungen einstweilen auf Lager. — Dies in kurzem eine Übersicht der Geschichte der Geometrie, für weitern Detail auf einiges später beigebrachte und die eigentliche Fachlitteratur verweisend [i].

Zu 53: *a.* Es ist in dieser Hinsicht fast nur auf den in 15 erwähnten „Papyrus Rhind" zu verweisen, auf welchen wir noch später zurückkommen werden. — *b.* Die „Elemente" **Euklids** sind seit Erfindung der Buchdruckerkunst unzählig oft und fast in allen Sprachen aufgelegt worden, — in der Ursprache zuerst „Basileæ" 1533 in fol." durch Simon **Grynäus** (Vehringen 1493 — Basel 1541; Prof. theol. Basel), und in ganz vorzüglicher Weise unter dem Titel „Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français. Paris 1814 bis 1818, 3 Vol. in 4." durch Fr. **Peyrard**. — Für die Werke von **Archimedes** vgl. 22 : a. — Die Schriften von **Apollonius** haben sich nur bruchstückweise in den sog. Sammlungen des **Pappos** (um 300 n. Chr. in Alexandrien lebend) erhalten, welche Federigo **Commandino** (Urbino 1509 — ebenda 1575; Mathematiker und Arzt in Urbino und Rom) zum Drucke vorbereitete, und die so-

dann unter dem Titel „Pappi Alexandrini collectionum mathematicarum libri VI superstites. Pisani 1588 in fol. (auch Bononiæ 1660; neue und sehr vorzügliche Ausg. durch Fr. Hultsch, Berolini 1875—78, 3 Vol. in 8.)“ auch wirklich erschienen. An Hand dieser Bruchstücke wurde dann wiederholt eine Restauration versucht, so namentlich durch **Halley** in seinen „Apollonii Pergæi Conicarum libri VIII. Oxonii 1710 in fol. (deutsch durch Balsam, Berlin 1861 in 8.).“ — *c.* **Menelaus** war ein Alexandriner, der nach Rom übersiedelte und daselbst z. B. (Almagest Halma II 25) im ersten Jahre der Regierung Trajans (also 98 n. Chr.) eine Bedeckung der Spica beobachtete. — *d.* **Regiomontans** Schrift „De triangulis omnimodis libri V. Noribergæ 1533 in fol. (auch Basileæ 1561)“ wurde erst aus seinem Nachlasse durch Johannes **Schoner** (Karlstadt bei Würzburg 1477 — Nürnberg 1547; erst Pfarrer zu Bamberg, dann Prof. math. Nürnberg) aufgelegt, — vollendet war sie schon etwa 1463. — *e.* Georg **Joachim**, genannt **Rhäticus** (Feldkirch 1514 — Kaschau in Ungarn 1576) war Mitschüler von Konrad Gessner bei Oswald Myconius in Zürich, dann Prof. math. Wittenberg und später meist auf Reisen. Vgl. 63 für seine Tafeln. — *f.* Giles **Persone** (Roberval bei Beauvais 1602 — Paris 1675) legte sich später den Namen seines Geburtsdorfes **Roberval** bei und war Prof. math. Paris, sowie seit ihrer Gründung Mitglied der Akademie. — Bonaventura **Cavalieri** (Bologna 1598 — ebenda 1647) war Jesuit und Prof. math. Bologna. Vgl. „Piola: Elogio. Milano 1844 in 4.“ — *g.* Lazare-Nicolas-Marguérite **Carnot** (Nolay en Bourgogne 1753 — Magdeburg 1823) war Mitglied des Konvents und Direktoriums, später Kriegsminister und Akademiker und wurde nach Rückkehr der Bourbonen verbannt. Vgl. Arago in Mém. de l'Inst. II 22. — Jean-Victor **Poncelet** (Metz 1788 — Paris 1868) war Brigadegeneral, Prof. phys. Akad. und Kommandant der polyt. Schule Paris. Vgl. „Didion, Notice. Paris 1869 in 8., — und: E. Holst, Om Poncelet's Betydning for Geometrien. Christiania 1878 in 8.“ — Jakob **Steiner** (Utzistorf bei Bern 1796 — Bern 1863) war ein bei Pestalozzi vorgebildeter Bauernjunge, der sich zum Prof. math. und Akad. Berlin aufschwang. Vgl. Berl. Monatsb. 1863, und „Gesammelte Werke. Berlin 1881—82, 2 Vol. in 8.“ — *h.* Gaspard **Monge** (Beaune 1746 — Paris 1818) war Prof. math. und Akad. Paris, während der ersten Republik Marineminister. Vgl. „Dupin, Essai historique. Paris 1819 in 8.“ und Arago Oeuvres II. — *i.* Der schon in II. und seither beiläufig angeführten Litteratur füge ich noch folgende Schriften bei: „Pierre de la Ramée oder **Ramus** (Cutto bei Soissons 1515 — Paris 1572, wo er in der Bartholomäusnacht als Hugenott ermordet wurde), Scholarum mathematicarum libri XXXI. Basileæ 1569 in 4., und: Geometria. Paris 1577 in 16. (holländ. durch Snellius, Amsterdam 1622), — **Cavalieri**, Geometria indivisibilibus continuorum. Bononiæ 1635 in 4. (2 ed. 1653), — **Descartes**, La géométrie. Paris 1637 in 4. (2 éd. 1664; lat. durch Schooten, Amstelodami 1683), — **Roberval**, Traité des indivisibles. Paris 1693 in 4. (posth. durch Gallois), — **Clairaut**, Eléments de géométrie. Paris 1741 in 8. (auch später und in verschied. Sprachen), — Jan Henric van **Swinden** (Haag 1746 — Amsterdam 1823; Prof. phys. et math. zu Franeker und Amsterdam; vgl. „Moll, Redevoering. Amsterdam 1824 in 8.“), Grondbeginselns der Meetkunde. Amsterdam 1790 in 8. (2. A. 1816; deutsch durch A. Jacobi, Jena 1834), — **Legendre**, Eléments de géométrie. Paris 1794 in 8. (29 éd. durch Blanchet 1886; deutsch von Crelle, Berlin 1822; ital. durch Cellai, Firenze 1834; engl. durch Ch. Davies, New-York 1855), — **Monge**, Leçons de géométrie descriptive. Paris 1794 in 4. (7 éd. par Brisson 1847), — **Carnot**, Géométrie de

position. Paris 1803 in 4. (deutsch durch Schumacher, Altona 1807—10), — **Poncelet**, Traité des propriétés projectives des figures. Paris 1822 in 4. (2 éd. 1865—66, 2 Vol.), — **Steiner**, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Erster (und einziger) Theil. Berlin 1832 in 8., — R. **Wolf**, Die Lehre von den geradlinigen Gebilden in der Ebene. Bern 1841 in 8. (2. A. 1847), — Karl Theodor **Reye** (Hannover 1838 geb.; Prof. math. Zürich und Strassburg), Die Geometrie der Lage. Hannover 1866—68, 2 Th. in 8. (3. A. 1887), — Karl Friedrich **Geiser** (Langenthal 1843 geb.; Prof. math. Zürich), Einleitung in die synthetische Geometrie. Leipzig 1869 in 8., — Karl Anton **Bretschneider** (Schneeberg 1808 — Gotha 1878; Prof. math. Gotha), Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig 1870 in 8., — Wilhelm **Fiedler** (Chemnitz 1832 geb.; Prof. math. Zürich), Die darstellende Geometrie. Leipzig 1871 in 8. (3. A. 1883), — Rich. **Klimpert**, Geschichte der Geometrie. Stuttgart 1888 in 8., — Gino **Loria**, Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer frühern und heutigen Entwickelung. Deutsch durch Fr. Schütte. Leipzig 1888 in 8., — etc."

54. Die Erzeugung durch Bewegung. — Unter Annahme, es seien die Begriffe von Punkt, Gerade und Ebene als ursprünglich gegebene zu betrachten, — es sei ferner ein Punkt, der sog. **Anfangspunkt** oder **Pol**, eine durch ihn gehende Gerade, die sog. **Axe**, und eine letztere enthaltene Ebene, die sog. **Grundebene**, gegeben, — und es könne endlich der Punkt in der Geraden fortschreiten, sowie unabhängig davon die Gerade sich um den Punkt, oder die Ebene sich um die Gerade drehen, — muss sich jeder Punkt des Raumes erreichen, sowie jedes Raumgebilde erzeugen und nach seinen Grössenverhältnissen und Eigenschaften erkennen lassen [a]. — Die Grösse des Fortschrittes eines Punktes in einer Geraden heisst **Länge** (Strecke), wechselt mit dem Sinne das Zeichen und kann ihrer Natur nach nur in einer willkürlichen, durch Verabredung zu bestimmenden Einheit gegeben werden [b]. Die an die Ebene gebundene, in einem bestimmten Sinne vorgenommene Drehung der Geraden um den Punkt oder **Scheitel**, hat dagegen für ihre Grösse, den durch die beiden Endlagen oder **Schenkel** bestimmten **Winkel**, in der Drehung bis zur Rückkehr in die ursprüngliche Lage, der sog. **Umdrehung**, eine naturgemässe Einheit, welche dann allerdings noch willkürlich, gewöhnlich in 360 Grade, zuweilen auch decimal, abgeteilt wird [c]. Macht die Gerade eine Viertelsumdrehung, so sagt man, sie sei in eine zu der ersten **senkrechte** Lage gekommen, — teile mit derselben den Winkelraum in vier, gewöhnlich im Sinne der Drehung numerierte **Quadranten**, — und ihr Winkel sei ein **Rechter** (R); je nachdem ferner die Grösse der Drehung kleiner oder grösser als R ist, nennt man den Winkel **spitz** oder **stumpf**, — je nachdem sie kleiner oder grösser als 2 R ist, **konkav** oder **konvex**; Winkel, welche sich zu R, 2 R oder 4 R ergänzen, nennt man

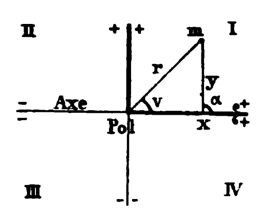
komplementär, **supplementär** oder **explementär**, und wenn man den einen oder beide Schenkel eines Winkels über seinen Scheitel hinaus verlängert, so erhält man den zu ihm supplementären **Nebenwinkel** oder den ihm gleichen **Scheitelwinkel**; die Lagen endlich, welche die Axe bei verschiedener Verschiebung des Drehpunktes, aber gleicher Grösse der Drehung, annimmt, heissen **parallel** (zeilig). — Um zu einem ausser der Axe liegenden Punkte (m) zu gelangen, kann man **entweder** die Axe sich nach dem Punkte drehen und dann den Pol bis zu ihm fortschreiten lassen, **oder** man kann den Pol in der Axe so weit vorwärts bewegen, dass er sodann nach Drehung um einen festgesetzten Betrag (α) denselben erreichen kann: Im erstern Falle wird offenbar der äussere Punkt seiner Lage nach durch einen Winkel, den **Positionswinkel** (v), und einen Fortschritt, den **Radius vector** (Leitstrahl r) bestimmt, welche zusammen seine sog. **Polarcoordinaten** ausmachen, — im zweiten Falle durch zwei Fortschritte, die **Abscisse** (x) und die **Ordinate** (y), welche man **rechtwinklige** oder **schiefwinklige Coordinaten** heisst, je nachdem der angewandte Drehwinkel (α) ein Rechter ist oder nicht. Die Position variiert nach der Lage des Punktes von 0 bis 360°, — Abscisse und Ordinate zeigen, den 4 Quadranten entsprechend, die Zeichenfolgen $+ - - +$ und $+ + - -$, während der Radius vector eine absolute Grösse ist[d]. — Lässt man sich Fortschritt und Drehung abwechselnd folgen, so beschreibt der Punkt eine sog. **gebrochene Linie**, und dabei heissen die einzelnen Fortschritte **Seiten**, die mit den Drehwinkeln gleichartigen Winkel der Seiten **Winkel**, und die Drehpunkte **konkave** oder **konvexe Ecken**, je nachdem die Drehwinkel und somit auch die sie zu 2 R oder 6 R ergänzenden Winkel, konkav oder konvex sind. Schliesst sich die gebrochene Linie nach n Doppelbewegungen, d. h. kehren Punkt und Gerade in die ursprüngliche Lage zurück, so wird die gebrochene Linie zum **n-Eck** (Vieleck, Polygon)[e], und es ist sodann die Summe aller Winkel offenbar

$$P_n(p, r) = 2(n + 2p - 2r) R \qquad 1$$

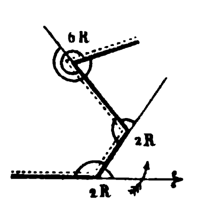
wo p die konvexen Ecken und r die von der erzeugenden Geraden gemachten Umdrehungen zählt[f]. Seiten und Winkel zusammen heissen **Elemente**, und man sieht leicht ein, dass (2n — 3) sich folgende dieser Elemente beliebig, die letzten 3 dagegen durch das Schliessen bestimmt sind: Wenn daher zwei n-Ecke **entweder** (n — 1) Seiten und die von ihnen eingeschlossenen (n — 2) Winkel, **oder** (n — 2) Nebenseiten und die ihnen anliegenden (n — 1) Winkel gleich haben, so müssen sie identisch gleich oder **kongruent** sein, — während sie dagegen **ähnlich** heissen, wenn die Einheit des Fort-

schrittes nicht dieselbe ist, also zwar noch die Winkel, aber nur die Verhältnisse der Seiten gleich sind *g*.

Zu 54: *a.* Je nachdem zur Erzeugung der Raumgebilde nur die beiden ersten oder alle drei Bewegungen in Anspruch genommen werden, teilt man die Geometrie in **ebene** und **räumliche**, mit deren ersterer wir uns zunächst ausschliesslich befassen werden, zu der zweiten erst in 81 übergehend. — *b.* So dienten und dienen zum Teil noch als Längeneinheit: Fuss, Elle, Meter, Passus, Toise, Meile, etc. Vgl. Tab. I. — *c.* Betreffender Detail wird in 57 bei Anlass der entsprechenden Einteilung des Kreises nachgetragen werden. —



d. Die längst in der Astronomie (176) und Geographie (217) bestehende Übung, die Lage auf der Himmels- oder Erdkugel durch eine Art sphärischer Coordinaten zu bestimmen, wurde spätestens (69) um die Mitte des 14. Jahrhunderts auch für die Geometrie nutzbar gemacht, indem Nik. **Oresme** in seinem „Tractatus de latitudinibus formarum (Padua 1482 in 4., und später)" rechtwinklige Coordinaten zur Darstellung einer Erscheinung gebrauchte: Er bezeichnete sie allerdings noch als **longitudo** und **latitudo**, während sodann **Leibnitz** in einem 1676 an Oldenburg geschriebenen Briefe die jetzt gebräuchlichen Benennungen **Abscisse** und **Ordinate**, und 1692 in den Act. Erud. auch noch den Sammelnamen **Coordinaten** zuerst eingeführt zu haben scheint. —



e. Zieht man die mit den n Seiten eines n-Ecks zusammenfallenden n Geraden nach ihrer ganzen Länge in Betracht, so erhält man ein sog. **n-Seit**, bei welchem jeder der $\binom{n}{2}$ Durchschnittspunkte **Ecke** genannt wird. Während sich daher im n-Eck zu jeder Ecke nur $(n-3)$ mit ihr nicht in einer Seite liegende sog. **Gegenecken** finden, und daher nur $\frac{1}{2}n(n-3)$ Verbindungslinien solcher Gegenecken oder sog. **Diagonalen** gezogen werden können, so giebt es im n-Seit zu jeder Ecke $\binom{n-2}{2}$ Gegenecken und somit $3\binom{n}{4}$ Diagonalen. — *f.* Da auf p konvexe Ecken im n-Eck $(n-p)$ konkave Ecken kommen, so beträgt offenbar die Summe aller Winkel und Drehwinkel $p \cdot 6R + (n-p) \cdot 2R = 2(n+2p)R$, während bei r Umdrehungen die Drehwinkel für sich $r \cdot 4R$ ausmachen: Aus der Differenz geht aber unsere 1 hervor, welche von mir in meiner Schrift von 1841 zuerst gegeben wurde, während allerdings schon **Thibaut** in seinem „Grundrisse" von 1801 die Winkelsumme des Dreiecks in verwandter Weise bestimmte. — *g.* Das Symbol ∾ für die Ähnlichkeit, aus welchem sodann das Symbol ≅ für die Kongruenz von selbst hervorgeht, scheint **Leibnitz** eingeführt zu haben. — Für weitern Detail dieser von mir eingeführten neuen Behandlung der Elementar-Geometrie vgl. meine bereits citierte Schrift von 1841.

55. Das Dreieck. — Auf das Dreieck lassen sich zunächst unmittelbar die (54) für das Vieleck erhaltenen allgemeinen Sätze übertragen: Da es nur der Form (0,1) fähig ist, beträgt seine Winkelsumme beständig zwei Rechte, und es ist jeder Drehwinkel oder **Aussenwinkel** gleich der Summe der zwei gegenüberliegenden

Dreieckswinkel, während nach dem Begriffe der Geraden jede seiner Seiten kleiner als die Summe, also auch grösser als die Differenz der beiden übrigen sein muss; ferner sind zwei Dreiecke kongruent, wenn sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, oder eine Seite und die anliegenden Winkel gleich haben, — dagegen ähnlich, wenn ein Winkel und das Verhältnis der einschliessenden Seiten, oder zwei Winkel übereinstimmen. — An diese ersten Sätze lässt sich eine ganze Kette anderer anreihen, so dass jeder folgende, unter allfälliger Anwendung einfacher und nur in Gedanken auszuführender Hilfsmanipulationen, als eine notwendige Folge früherer dargestellt oder **bewiesen** werden kann [a]. So findet man z. B., dass ein Dreieck, welches zwei gleiche Seiten oder **Schenkel** besitzt, durch eine deren Winkel halbierende Gerade in zwei kongruente Dreiecke zerfällt, dass also die Bisectrix die dritte Seite oder **Basis** unter rechtem Winkel halbiert, und auch die beiden Winkel an der Basis gleich sein müssen, — dass diese Kongruenz auch statt hat, wenn die Basiswinkel gleich sind, also auch umgekehrt gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüberstehen, — etc. Und hieraus ergeben sich wieder successive mit Leichtigkeit die Sätze: In einem Dreiecke steht einer grössern Seite ein grösserer Winkel gegenüber, und umgekehrt; die Senkrechte ist die kürzeste Linie, welche man von einem Punkte nach einer Geraden ziehen kann, und dient daher als Mass seines Abstandes von oder seiner **Höhe** über der Geraden; jede zwei Punkte der letztern, welche von dem Fusspunkte der Senkrechten, der sog. **Projektion** des Punktes auf die Gerade, gleich weit abstehen, stehen auch von dem Punkte selbst gleich weit ab, und umgekehrt; zwei Dreiecke, deren sämtliche Seiten oder Seitenverhältnisse gleich sind, sind kongruent oder ähnlich; etc. — Wenn zwei Gerade, wie es (54) für zwei Parallele laut ihrer Erzeugung der Fall ist, mit einer Dritten gleiche Winkel bilden, so sind auch ihre Winkel mit jeder Vierten gleich gross [b], — und wenn man daher zwei Paare von Parallelen hat, so entstehen durch Verbindung zweier Gegendurchschnittspunkte zwei kongruente Dreiecke, aus welchen der Satz folgt, dass Parallele zwischen Parallelen gleich sind, also z. B. auch Senkrechte zwischen Parallelen: Es haben also Parallele überall denselben Abstand, können sich folglich nicht schneiden [c]. In entsprechend leichter Weise lassen sich auch die Sätze vom Proportionalschneiden von Parallelen, etc., erweisen und viele betreffende Konstruktionsaufgaben lösen [d]. — Ist in einem Dreiecke ein Winkel (C) ein Rechter, so sind die beiden andern (B und A) komplementär; die Gegenseite (c) des rechten Winkels nennt man **Hypotenuse**, die einschliessenden Seiten (b, a) **Katheten** [e].

Zieht man die der Hypotenuse entsprechende Höhe, so bilden sich auf derselben zwei Abschnitte (x, y), und es verhält sich

$$x : h = h : y \qquad c : a = a : y \qquad c : b = b : x \qquad \mathbf{1}$$

woraus

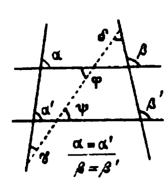
$$a^2 + b^2 = c \cdot y + c \cdot x = c^2 \qquad \mathbf{2}$$

oder der sog. **Pythagoräische Lehrsatz** folgt, dessen sog. **Erweiterung**

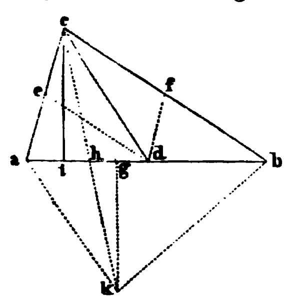
$$a^2 = h^2 + y^2 = b^2 - x^2 + (c - x)^2 = b^2 + c^2 - 2cx \qquad \mathbf{3}$$

auf irgend ein Dreieck ebenfalls leicht erhalten wird *f*. — Verbindet man die Mitte einer Dreieckseite mit der Gegenecke, so wird das Dreieck halbiert; hieraus folgen aber successive die Sätze: Zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich gross oder besitzen gleiche Fläche; zwei rechtwinklige Dreiecke verhalten sich wie die Produkte ihrer Katheten; nimmt man als Flächeneinheit ein rechtwinkliges Dreieck der Katheten 1 und 2 an, so ist die Fläche irgend eines Dreiecks gleich dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe *g*. — Von zahlreichen andern Sätzen erwähne ich beispielsweise noch folgende: Jede Gerade oder sog. **Transversale** schneidet die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen so, dass die Produkte der nicht aneinanderliegenden Abschnitte gleich werden; verbindet man die Mitten der Dreiecksseiten mit den Gegenecken, so schneiden sich die drei Verbindungslinien in Einem Punkte, dem sog. **Schwerpunkte**, und dieser teilt jede derselben im Verhältnisse von 2 : 1; errichtet man in denselben Mitten Senkrechte, so treffen auch diese in Einem Punkte zusammen, dem sog. **Centrum der Ecken**, das von allen Ecken gleich weit absteht; ebenso schneiden sich die drei Bisectrissen der Dreieckswinkel in Einem Punkte, dem sog. **Centrum der Seiten**, das von allen Seiten gleich weit absteht; etc. *h*.

Zu 55: *a.* Ich muss mich hier des Raumes wegen darauf beschränken, den Gang anzudeuten und nur auf einige besondere Fälle näher einzutreten. — *b.* Schneidet man ein System von vier Geraden entsprechend beistehender Figur durch eine Hilfslinie, so folgen aus den entstehenden Dreiecken die Winkelgleichheiten $\alpha = \varphi + \gamma$, $\alpha' = \psi + \gamma$, $\beta = \varphi + \delta$ und $\beta' = \psi + \delta$, also $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$. Wenn daher $\alpha = \alpha'$ ist, so muss auch $\beta = \beta'$ sein, womit der behauptete Satz als eine notwendige Konsequenz früherer Definitionen und Sätze dargestellt und somit **bewiesen** ist. — *c.* Die seit **Euklid** fast allgemein beibehaltene Definition, „Parallele seien Gerade einer Ebene, welche sich nicht schneiden, so weit man sie auch verlängern möge“, ergiebt sich somit als eine Konsequenz der unsrigen, — ist aber nach meinem Dafürhalten als Definition dennoch unzulässig, da eine solche nie auf einer sog. negativen Eigenschaft beruhen soll; man darf sich über die Schwierigkeiten, welche sie den Geometern seit zwei Jahrtausenden bereitet hat, somit weniger verwundern, als über das eigensinnige Beharren auf derselben. Von den vielen Schriften über Parallelen-

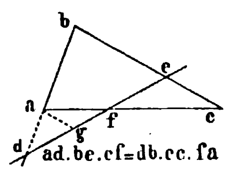


theorie nenne ich: „Daniel **Huber** (Basel 1768 — ebenda 1829; Prof. math. Basel; vgl. Biogr. I), Nova theoria parallelarum. Basileæ 1823 in 8., — **Legendre,** Sur la théorie des parallèles (Mém. Paris 1833), — Nicolai **Lobatschevskji** (Nischnei-Novgorod 1793 — Kasan 1856; Prof. math. Kasan), Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840 in 8. (franz. durch Hoüel, Paris 1866), — etc. — *d.* Halbiert man z. B. einen Dreieckswinkel, zieht durch eine der übrigen Ecken eine Parallele zu dieser Bisectrix und verlängert die Gegenseite derselben, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck und ein Paar ähnlicher Dreiecke, und es ergiebt sich leicht der Satz: „Die Bisectrix eines Dreieckswinkels teilt die Gegenseite im Verhältnisse der einschliessenden Seiten.“ — Auf den Parallelsätzen beruht auch der von **Galilei** etwa 1597 eingeführte, früher viel gebrauchte **Proportionalzirkel** in Gestalt eines Zollstabes, und ebenso der von **Bürgi** ungefähr gleichzeitig konstruierte, mit Recht noch jetzt beliebte **Reduktionszirkel** in Gestalt eines Doppelzirkels mit beweglichem Kopfe. Vgl. für erstern „**Galilei,** Le operazioni del compasso geometrico e militare. Padova 1606 in fol.“; — für letztern „Levin **Hulsius** (Gent 1560? — Frankfurt 1606; Sprachlehrer, Notar und Verleger zu Nürnberg und Frankfurt), Beschreibung und Unterricht des Jobst Burgi Proportional-Circkels. Frankfurt 1603 in 4.“ — *e.* Die ältern Geometer unterschieden im rechtwinkligen Dreiecke „Hypotenusa, Basis und Cathetus oder Perpendiculum“, — hatten also nicht zwei Katheten wie wir. — *f.* Die der Hypotenuse entsprechende Höhe zerfällt das Dreieck in zwei ihm und daher auch einander ähnliche Teile, woraus die 1 folgen, und sodann die 2, welche schon die alten Indier gekannt zu haben scheinen. **Pythagoras** dürfte nur das Verdienst zukommen, diesen Satz als Flächensatz ausgesprochen und bewiesen zu haben; dass er seine angebliche Erfindung durch ein Opfer von 100 Ochsen feierte, ist wohl irrig, aber immerhin zittern, wie **Lichtenberg** hervorhob, seit dieser Zeit bei jeder grossen Erfindung alle Ochsen. Der „Magister matheseos“, wie dieser Satz auch hiess, der in früherer Zeit meist die in sog. „gelehrten“ Schulen behandelte Geometrie abschloss, wurde schon durch **Euklid** unserm 3 entsprechend auf jedes Dreieck ausgedehnt, wobei jedoch x, falls A stumpf ist, negativ wird. — *g.* Ist $ad = db$, $de \parallel bc$ und $df \parallel ac$, so ist $\triangle ade \sim \triangle dfb$ und $\triangle dec \sim \triangle cfd$, also $\triangle acd = \triangle dcb$. — Ist ferner $kg = ci$, so ist auch $kh = hc$, also $\triangle akh = \triangle ach$ und $\triangle bkh = \triangle bch$, folglich $\triangle akb = \triangle acb$. — Haben zwei rechtwinklige Dreiecke der Flächen F und φ eine Kathete A gleich, während sich die andern Katheten $B : b = m : n$ verhalten, so zerfallen sie, wenn man B in m und b in n gleiche Teile zerlegt, durch Verbindungslinien mit den Gegenecken ebenfalls in gleiche Teile, und man hat



daher $F : \varphi = m : n = B : b$. Ist sodann noch ein drittes rechtwinkliges Dreieck der Fläche f und der Katheten a, b vorhanden, so hat man entsprechend $\varphi : f = A : a$, also $F : f = A \cdot B : a \cdot b$, und somit nach der gemachten Annahme $F = \frac{1}{2} \cdot A \cdot B$, folglich (vgl. Fig. f) $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h + \frac{1}{2} y \cdot h = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$, w. z. b. w. — Ich halte dafür, dass diese, von mir spätestens seit 1852 schon am Dreiecke durchgeführte Flächenbestimmung, für systematischen Aufbau

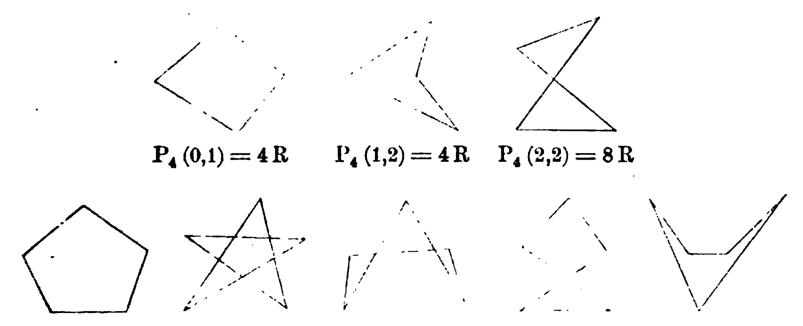
der Geometrie wesentlich zweckmässiger ist, als die sonst von alters her übliche Art, vom Viereck auszugehen. — Nach dem mehrerwähnten Papyrus Rhind setzten die alten Egypter die Fläche eines Dreieckes der Basis a und der zwei gleichen Schenkel b gleich $\frac{1}{2}$ a · b, was gerade nicht eine hohe Meinung von ihren geometrischen Kenntnissen giebt, — und wenn die Angabe richtig ist, dass **Zenodorus** (etwa um 100 v. Chr.) seinen Traktat über Figuren gleichen Umfangs zunächst schrieb, um der irrigen Meinung entgegenzutreten, dass gleichem Umfange auch gleiche Fläche entspreche, so haben wir anzunehmen, dass die richtigen Grundsätze für Flächenberechnungen sehr lange auf sich warten liessen. — Auf die **Isoperimetrie** kann ich hier nicht eintreten, sondern verweise für sie auf „**Lhuilier,** De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum. Pars. I. Varsoviæ 1782 in 4., — **Steiner,** Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze (Berl. Abh. 1836), und: Sur le maximum et le minimum des figures (Crelle 24 von 1842), — etc. — *h.* Wird △abc durch eine sog. **Transversale** de geschnitten und zieht man ag ∥ bc, so ergeben sich aus den entstehenden zwei Paaren ähnlicher Dreiecke die Proportionen ag : be = ad : db und fa : ag = cf : ce, aus deren Multiplikation die unter der Figur stehende Gleichheit, der sog. **Transversalensatz** oder die sog. „**Regula sex quantitatum**" hervorgeht. Dieser Satz war vielleicht schon **Euklid**, jedenfalls aber **Menelaus** bekannt, wurde von **Ptolemäus** im Almagest aufgeführt und bis auf die Zeit von **Pascal** vielfach angewandt; dann aber wurde er total vergessen und erst durch Theodor **Schubert** und Nikolaus **Fuss** (Basel 1755 — Petersburg 1826; Gehilfe von Leonhard und Tochtermann von Albert Euler; Prof. math. und Sekretär Akad. Petersburg) wieder hervorgezogen (vgl. Acta Petrop. 1796—98), um sodann zum Ausgangspunkte für die sog. neuere Geometrie zu werden. Vgl. für ihn und die sog. „merkwürdigen Punkte" des Dreiecks die Schriften: „Karl Wilhelm **Feuerbach** (Jena 1800 — Erlangen 1834; Prof. math. Erlangen), Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks. Nürnberg 1822 in 4., — Karl **Adams** (Merscheid bei Düsseldorf 1811 — Winterthur 1849; Prof. math. Winterthur), Die Lehre von den Transversalen. Winterthur 1843 in 8., und: Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks. Winterthur 1846 in 8., — etc."



56. Das Viereck und Vieleck. — Während das Dreieck (55) nur Einer Form fähig ist, so kommen beim Vierecke 3, beim Fünfecke 5, etc., beim 2n-Eck ($n^2 - 1$), beim (2n + 1)-Eck ($n^2 + n - 1$) verschiedene, sich nach Winkelsumme, Fläche, etc., unterscheidende Formen vor, von welchen diejenigen, für welche r — p = 1 ist und daher die Winkelsumme dieselbe wie für (0,1) wird, **gemeine** heissen, während die andern ohne Ausnahme **überschlagen** (croisé) sind [a]. — Seiner Fläche nach kann man sich ein Vieleck durch Drehung einer Geraden von veränderlicher Länge entstanden denken: Man wählt irgend eine Ecke als Pol, eine der durch sie gehenden zwei Seiten als Ausgangslage, die zweite als Endlage der erzeugenden Geraden, und dreht nun die Erzeugende so um den Pol, dass ihr jeweiliger Endpunkt den Umfang des Viel-

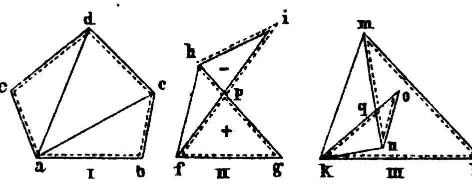
ecks durchläuft, wobei ein allfällig notwendig werdendes Drehen in entgegengesetztem Sinne einem negativen Raume entspricht [b]. — Die Ecken eines Viereckes sind paarweise **Gegenecken**, durch deren Verbindung sog. **Diagonalen** erhalten werden. Das halbe Produkt einer Diagonale in die Summe oder Differenz der Entfernungen der beiden andern Gegenecken von derselben, ergiebt die Fläche des Vierecks. Ein gemeines Viereck mit zwei parallelen Gegenseiten (Basen) heisst **Trapez**, und seine Fläche ist gleich dem arithmetischen Mittel der Basen multipliziert mit deren Abstand. Werden auch noch die beiden andern Seiten (Schenkel) parallel und daher jede zwei Gegenseiten gleich, so erhält man ein sog. **Parallelogramm** oder besser **Zeileck**: Jede seiner Diagonalen hälftet dasselbe und die andere Diagonale, — seine Nebenwinkel sind supplementär, seine Gegenwinkel gleich, — und seine Fläche wird durch das Produkt einer Seite (Basis) in ihre Entfernung von der Gegenseite (Höhe) gemessen. Zeilecke von gleicher Basis und Höhe sind somit gleich gross, und wenn man über zwei Seiten eines Dreiecks beliebige Zeilecke verzeichnet und die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes der Gegenseiten und der gemeinschaftlichen Ecke an die dritte Dreiecksseite verlegt, so bestimmt sie mit ihr ein Summenparallelogramm [c]. Ein gleichseitiges Zeileck heisst **Rhombus** oder besser **Raute**, — ein gleichwinkliges **Rechteck**, — ein gleichseitig-gleichwinkliges, das durch die zweite Potenz einer Seite gemessen wird, **Quadrat** [d].

Zu 56: *a.* Die allgemeinen Regeln, um die Anzahl der möglichen Formen eines Vielecks zu finden, erhielt ich 1841 durch eine Art Induktion, — einen

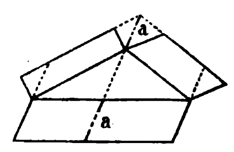


strengen Beweis konnte ich nicht finden und halte auch den in „**Kruse**, Elemente der Geometrie. Berlin 1875 in 8." gegebenen nicht für zutreffend. — Schon die Pythagoräer zogen Sternvielecke, sog. **Drudenfüsse**, in Betracht, — Giovanni **Campano** (im 11. oder 12. Jahrhundert in Novara lebend) soll die Winkelsumme eines Sternfünfecks (0,2) berechnet haben, — und die drei Vierecksformen finden sich bereits in „**Stevin**, Hypomnemata mathematica. Lugd. Batav. 1605—8, 2 Vol. in fol. (I 165)" nebeneinander gestellt, aber allerdings

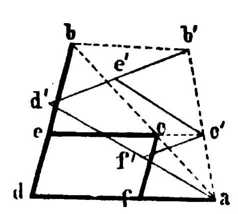
noch ohne richtige Einführung der Winkel; vgl. auch den betreffenden „Sviluppo storico“ von **Günther** in Bull. Boncomp. von 1873. — *b.* Nach der gegebenen Regel ist I = abc + acd + ade; II = fgh — fhi = fgp — phi; III = klm — kmn + kno = klmqk — noq; etc. — Ich hielt diesen von mir 1841 gemachten Versuch, die Fläche in einer alle Figuren beherrschenden Weise zu ermitteln, für etwas Neues, bis ich einige Decennien später in „Friedrich **Meister** (Hohenlohe 1724 — Göttingen 1788; Prof. philos. und Akad. Göttingen), Generalia de genesi figurarum planarum, et independentibus earum affectionibus (Comm. Gott. 1771)“ eine ganz verwandte Untersuchung fand. — *c.* Der Satz vom Summenparallelogramm lässt



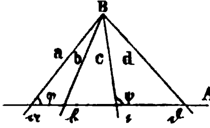
sich unmittelbar aus der beistehenden Figur ablesen. Ist das Dreieck rechtwinklig und legt man an die Katheten Quadrate, so wird a gleich der Hypotenuse und steht zu ihr senkrecht; es kömmt somit das Quadrat über der Hypotenuse mit dem Summenparallelogramm überein. Für andere Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes, die durch und seit **Euklid** gegeben wurden, vgl. z. B. „Ignatz **Hoffmann** (Mainz 1777 — Aschaffenburg 1866; Prof. math. Aschaffenburg), Der pythagoräische Lehrsatz mit 32 Beweisen. Mainz 1819 in 4. (2. A. 1821).“ —



Verlängert man zwei Nebenseiten df und de eines Zeilecks so, dass die Endpunkte a und b mit der Gegenecke c eine Gerade bilden, und hält a als Pol fest, so beschreiben b und c ähnliche Wege, indem bb′ ∥ cc′ und bb′ : cc′ = ba : ca wird. Es beruht hierauf der zur Verjüngung von Plänen, etc., dienende **Storchschnabel** oder **Pantograph** (von παντόιος = allerlei, und γράφω = ich zeichne), der etwa 1603 von **Scheiner** erstellt und sodann in seinem „Pantographice. Romæ 1631 in 4.“ beschrieben, seither allerdings vielfach umgestaltet wurde. — *d.* Sind a, b, c, d vier Punkte



einer Geraden A, und a, b, c, d die von einem Punkte B nach ihnen führenden Strahlen, so ergiebt sich (66), dass



$$\frac{ab}{b} = \frac{Si(a,b)}{Si\,\varphi}, \quad \frac{b}{bc} = \frac{Si\,\psi}{Si(b,c)}, \quad \frac{d}{ad} = \frac{Si\,\varphi}{Si(a,d)}, \quad \frac{cd}{d} = \frac{Si(c,d)}{Si\,\psi}$$

also $$\frac{ab}{bc} : \frac{ad}{dc} = \frac{Si(a,b)}{Si(b,c)} : \frac{Si(a,d)}{Si(d,c)} \qquad 1$$

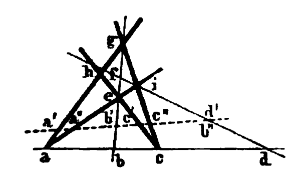
Es besteht daher der Doppelsatz: „Wenn die vier Strahlen a, b, c, d ihre gegenseitige Lage nicht verändern, so schneiden sie jede Transversale so in vier Punkten, dass ein gewisses Doppelverhältnis ihrer Entfernungen unverändert bleibt, — wenn dagegen die vier Punkte a, b, c, d ihre Lage nicht verändern, so bilden jede vier Strahlen eines Büschels, welche durch diese Punkte gehen, solche Winkel mit einander, dass ein gewisses Doppelverhältnis ihrer Sinus unverändert bleibt.“ Dieser Satz, welchen **Steiner** an die Spitze seiner Untersuchungen projektivischer Gebilde gestellt, aber in seiner ersten Hälfte schon **Pappos** bekannt war, ist für uns besonders wichtig, wenn die beiden Doppelverhältnisse gleich der Einheit werden, d. h.

$$ad : ab = cd : cb = (ad - ac) : (ac - ab) \qquad 2$$

ist, oder (21 : 5) die beiden Abschnittenpaare von ac eine sog. **harmonische** Proportion eingehen. Man nennt in diesem Falle, der z. B., weil für ihn auch

$$\frac{\mathrm{Si}(a,d)}{\mathrm{Si}(a,b)} = \frac{\mathrm{Si}(c,d)}{\mathrm{Si}(c,b)} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{Si}(c,b)}{\mathrm{Si}[(a,c)-(c,b)]} = \frac{\mathrm{Si}(c,d)}{\mathrm{Si}[(a,c)+(c,d)]} \qquad 3$$

werden muss, für $(a, c) = 90^0$ und $(b, c) = (c, d)$ statt hat, sowohl die Punkte als die Strahlen ebenfalls **harmonisch**. — Ferner ergiebt sich der merkwürdige Satz: „Jede der drei Diagonalen eines Vierseits (54 : e) wird durch die beiden übrigen harmonisch geschnitten", zu welchem man ebenfalls schon bei **Pappos** ein Analogon findet; denn, wenn man den Transversalensatz (55) z. B. für die Dreiecke ach, agc und hgc, und für die Transversalen gb, hd und ai aufschreibt, so findet man, dass die Gleichheit



$$ab \cdot cd = bc \cdot da \qquad 4$$

bestehen muss, womit in Vergleichung mit 2 der ausgesprochene Satz bewiesen ist. Mit Hilfe von 1 lassen sich auch ohne Schwierigkeit die Proportionen

$$\begin{aligned} a'b' \cdot a'b'' : a'c' \cdot a'c'' &= a''b' \cdot a''b'' : a''c' \cdot a''c'' \\ b''a' \cdot b''a'' : b''c' \cdot b''c'' &= b'a' \cdot b'a'' : b'c' \cdot b'c'' \\ c'a' \cdot c'a'' : c'b' \cdot c'b'' &= c''a' \cdot c''a'' : c''b' \cdot c''b'' \end{aligned} \qquad 5$$

erhalten, welche schon Gérard **Désargues** (Lyon 1593? — ebenda 1662?; erst Offizier, dann Privatgelehrter in Paris, etc.) gekannt haben soll, und man sagt von den drei Punktenpaaren $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, dass sie in **Involution** stehen. Aus dem Produkte der drei 5 ergiebt sich aber die Gleichheit

$$a'b'' \cdot b'c'' \cdot c'a'' = a'c'' \cdot c'b'' \cdot b'a'' \qquad 6$$

welche somit ebenfalls als Bedingung der Involution angesehen werden kann und überdies, da sie die Gleichheit der Produkte nicht aneinander liegender Abschnitte bezeugt, begreiflich macht, wie man dazu kommen konnte, der Involution von 6 Punkten einer Geraden den Transversalensatz (55) gegenüber zu stellen. Ferner lässt sich mit Hilfe von 1 und 5 leicht zeigen, dass, wenn man einen Punkt mit 6 in Involution stehenden Punkten einer Geraden verbindet, auch die so erhaltenen Strahlen Winkel bilden, deren Sinus entsprechende Relationen eingehen, — dass diese Strahlen, welche ebenfalls als **in Involution stehend** bezeichnet werden, jede andere Gerade wieder in 6 eine Involution bildenden Punkten schneiden, — etc.

57. Die centrischen Vielecke und der Kreis. — Findet sich zu einem Vielecke ein Punkt, der von allen Ecken, oder von allen Seiten, oder sowohl von allen Ecken als von allen Seiten gleich weit absteht, so heisst er **Centrum** der Ecken, oder der Seiten, oder des Vielecks. Senkrechte von dem Centrum der Ecken halbieren die Seiten, — Gerade von dem Centrum der Seiten halbieren die Winkel, — und zieht man in einem centrischen n-Ecke vom Centrum aus alle Verbindungslinien mit den Ecken oder alle sog. **Radien**, und alle Senkrechten auf die Seiten oder alle sog. **Apothemas**, so zerfällt es in 2n kongruente Dreiecke, aus welchen hervorgeht, dass sowohl alle Seiten als alle Winkel dieses n-Ecks gleich sind, oder dasselbe, wie man sagt, **regelmässig** ist. — Be-

zeichnen R, A, S der Reihe nach Radius, Apothema und Seite eines regelmässigen n-Ecks, — R, r, s, oder r, a, s', oder R', R, S' aber dieselben Grössen für ein 2n-Eck desselben Radius, oder ein 2n-Eck desselben Umfanges, oder ein n-Eck, welches den Radius des ersten zum Apothema hat, so bestehen die Beziehungen

$$S = 2\sqrt{R^2 - A^2} \qquad s' = {}^1/_2 S = \sqrt{R^2 - A^2} \qquad a = {}^1/_2 (A + R)$$
$$r^2 = R \cdot a \qquad s^2 = (R^2 - A^2) + (R - A)^2 = 2R(R - A) \qquad \mathbf{1}$$
$$R^2 = R' \cdot A \qquad S' = 2\sqrt{R'^2 - R^2} = 2R \cdot \sqrt{R^2 - A^2} : A$$

welche aus R und A alle übrigen Grössen zu berechnen erlauben[a]. Da nun nach der 3. und 4. dieser Formeln bei gleichem Umfange p durch Verdoppeln der Seitenzahl das Apothema vergrössert, der Radius aber verkleinert wird, so müssen sich bei fortgesetztem Verdoppeln die Verhältnisse p : a und p : r einem Grenzwerte nähern, welchen wir mit 2π bezeichnen wollen, so dass für ein centrisches Unendlicheck der Fläche f die Beziehungen

$$p = 2r \cdot \pi \qquad f = \frac{p}{2} \cdot r = r^2 \cdot \pi \qquad r = \frac{p}{2\pi} = \sqrt{f : \pi} \qquad \mathbf{2}$$

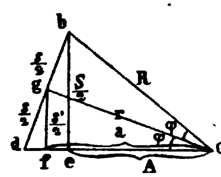
bestehen[b]. — Ein solches Unendlicheck kömmt aber offenbar mit dem ebenen Orte eines Punktes überein, der von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat, oder mit einer sog. **Kreislinie,** und dabei verhalten sich notwendig Teile der Kreislinie, oder sog. **Kreisbogen,** wie die durch die Radien ihrer Endpunkte bestimmten Winkel, die sog. **Mittelpunktswinkel**, so dass die einen durch die andern gemessen werden können. Es korrespondiert somit auch die Kreisteilung mit der Winkelteilung, und es ist in der That letztere der erstern jeweilen nachgebildet worden[c]. — Ist der Abstand d einer Geraden vom Centrum eines Kreises kleiner als dessen Radius r, so hat sie mit der Kreislinie zwei Punkte gemein, deren Abstand

$$s = 2\sqrt{r^2 - d^2} \qquad \mathbf{3}$$

Sehne (Chorde, Subtensa) heisst, während die Gerade selbst **Secante** genannt wird; dabei hälftet der zur Secante senkrechte Radius offenbar auch den von ihr abgeschnittenen Bogen, und hieraus folgt sodann, dass zwischen parallelen Secanten liegende Bogen einander gleich sind. Für d = r wird s = 0, und es geht die Secante in eine sog. **Tangente** über, welche mit der Kreislinie nur noch Einen Punkt gemein hat und sonst ganz ausser ihr liegt[d]. — Ein Winkel, dessen Scheitel in der Kreislinie oder auf der sog. **Peripherie** des Kreises liegt, heisst **Peripheriewinkel** und ist offenbar gleich der Hälfte des mit ihm auf gleichem Bogen stehenden Mittelpunktswinkels; Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bogen oder zusammen auf dem ganzen Kreise stehen, sind daher gleich oder

supplementär, — Peripheriewinkel im Halbkreise gleich Rechten [e]. — Der Winkel zweier Secanten wird durch die halbe Summe oder Differenz der zwischenliegenden Bogen gemessen, je nachdem ihr Durchschnittspunkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt; dabei bestimmt letzterer Sehnensegmente von gleichem Produkte, und zwar ist dieses Produkt, welches **Potenz des Punktes** heisst, für einen äussern Punkt gleich dem Quadrate der von ihm an den Kreis gezogenen Tangente. — Ein Vieleck heisst einem Kreise **eingeschrieben**, wenn seine Ecken in der Kreislinie liegen, — dagegen **umgeschrieben**, wenn seine Seiten Tangenten zu derselben sind. Beim eingeschriebenen Vierecke besteht der nach **Ptolemäus** benannte merkwürdige Satz: „Die Summe der Produkte der Gegenseiten ist gleich dem Produkte der Diagonalen“ [f]. — Dass die eingeschriebenen Vielecke centrisch nach den Ecken, die umgeschriebenen centrisch nach den Seiten sind, und beide, wenn die bestimmenden Kreispunkte equidistant sind, regelmässig werden, ist selbstverständlich; dagegen mag noch nachträglich bemerkt werden, dass hier zunächst nur die Form (0,1) in Betracht gezogen wurde, und das von einer Seite des regelmässigen n-Ecks und zwei Radien gebildete, alle wesentlichen Elemente enthaltende Dreieck als **Bestimmungsdreieck** bezeichnet wird [g].

Zu 57: *a.* Die beifolgende Figur ist unter der Annahme konstruiert, es sei $4\varphi = 360^0 : n$, so dass bce das halbe Bestimmungsdreieck eines regelmässigen n-Ecks, gcf dasjenige eines 2n-Ecks von gleichem Umfange, und bcd das ganze Bestimmungsdreieck eines 2n-Ecks ist, welches mit dem erstern gleichen Radius hat; das n-Eck des Apothemas R wurde dagegen in der Figur nicht repräsentiert, um sie nicht zu überladen. Die 1 lassen sich nach bekannten Sätzen aus der Figur ablesen. — *b.* Geht man entweder vom



Quadrate der Seite 1 ($A = 1/2$, $R = 1/2\sqrt{2} = 0{,}707107$) oder vom Sechsecke der Seite 1 ($A = 1/2\sqrt{3} = 0{,}866025$, $R = 1$) aus, so erhält man in angegebener Weise durch successives Verdoppeln:

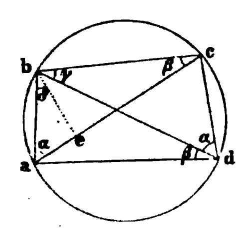
Eck	a	r	Eck	a	r
8	0,603553	0,653282	12	0,933013	0,965926
16	28417	40729	24	49469	57662
32	34573	37643	48	53566	55612
64	36108	36875	96	54589	55100
128	36492	36683	192	54845	54973
256	36588	36636	384	54909	54940
512	36612	36624	768	54925	54933
1024	36618	36621	1536	54929	54931
2048	36619	36620	3072	54930	54930

woraus für das Unendlicheck die übereinstimmenden Werte

$$\pi' = \frac{2}{0,636620} = 3,14159 \qquad \text{und} \qquad \pi'' = \frac{3}{0,954930} = 3,14159$$

hervorgehen. Vgl. 58—60. — *c.* Die Kreis- und Winkelteilung waren, wenigstens bei den Griechen, zur Zeit von **Aristarch** noch nicht normiert; denn nicht nur erwähnen seine Vorgänger **Autolykus** und **Euklid** nichts darüber, sondern er selbst würde sonst kaum (437) für Angabe eines Winkels von 87° die Umschreibung „$^1/_{30}$ des Quadranten weniger als ein Quadrant" gebraucht haben. Noch der etwas spätere **Archimedes** blieb auf dieser Stufe stehen, indem er z. B. in seinem „Arenarius" angab, dass der Sonnendurchmesser zwischen $^1/_{200}$ und $^1/_{164}$ des Quadranten falle. Bald nachher begann dagegen, vielleicht nach Vorgang der Babylonier, die Übung, den Sechsteil des Kreises sexagesimal abzuteilen, wodurch zunächst der ganze Kreis 360, d. h. so viele **Teile** (μοῖραι, partes) oder **Stufen** (dergeb, degré, gradus) erhielt, als das erste Rechnungsjahr Tage, oder der erste Monat Doppelstunden hatte; auf jeden dieser partes oder **Grade** kamen 60 Primen oder **Minuten** (πρῶται, partes minutæ primæ) — auf jede Minute 60 **Sekunden** (δευτέραι, partes minutæ secundæ), — etc. Zwar ist zweifelhaft, ob bereits **Eratosthenes** diese Teilung anwandte, da er z. B. angiebt, der Abstand der beiden Wendekreise betrage $^{11}/_{83}$ des Umkreises; denn es kann zwar (wie Delambre glaubte) dieser Bruch ein Näherungswert für $47^2/_3 : 360$ sein, was einen in Drittelsgrade geteilten Kreis voraussetzen würde, — aber es ist auch ebensogut möglich, dass er noch gar keinen geteilten Kreis besass, sondern einfach auf seinen Armillen die den beiden Sonnenwenden entsprechenden Punkte anmerkte, nachher ihre Distanz im Kreise herum auftrug und nun fand, dass sie bei 83maligem Auftrag den Kreis gerade 11 mal erschöpfe. Dagegen sprach der wenig spätere **Hypsikles** in seinem „Ἀναφορικός (Parisiis 1657 in 4.)" ausdrücklich von der 360-Teilung, und zur Zeit von **Hipparch** stand dieselbe bereits in ziemlich allgemeinem Gebrauche. — Bemerkenswert ist (vgl. Günthers „Studien" IV 249), dass schon in einem aus dem 15. Jahrhundert stammenden Codex der Münchner-Bibliothek eine Teilung des Grades in 100 Minuten à 100 Sekunden vorkömmt, — dass diese im Anfange des 17. Jahrhunderts durch **Gellibrand** neuerdings proponiert wurde und **Lagrange** 1783 sich beim Board of longitude für eine entsprechende Umarbeitung aller Tafeln verwendete. Zur Zeit der ersten französischen Revolution wurde sodann die Einteilung des Quadranten in 100 Grade ($1^d = 0^0,9 = 54'$) à 100 Minuten à 100 Sekunden beliebt, die noch gegenwärtig neben der 360-Teilung vielfach angewandt wird. Ausserdem wurde etwa im 16. Jahrhundert bei den Seeleuten die Einteilung des Quadranten in 8 Teile gebräuchlich, — während die Chinesen, Griechen und Araber ihn zweckmässiger in 3 oder (wie noch jetzt die Bergleute) in 6 Teile (Doppelstunden und Stunden) geteilt hatten, da man mit dem Radius die Dreiteilung sehr leicht ausführen und dann allfällig noch eine Bisection beifügen kann. Setzt man letztere fort, so gelangt man nach 4 weitern Bisectionen zur Teilung des Quadranten in 96 Teile (à 3375''), und es ist diese Teilung, welche sich schon (vgl. „Fellöker, Geschichte der Sternwarte der Benedictiner-Abtey Kremsmünster. Linz 1864 in 4.") auf einem von 1570 datierenden Kreise in Kremsmünster findet, noch in neuerer Zeit, z. B. von **Graham** (334), bei Kontrolteilungen zur Anwendung gekommen. — *d.* Für $d > r$ erhält man eine sog. **ideale** Sehne $s = 2i\sqrt{d^2 - r^2}$, deren Betrachtung mit der gleichseitigen Hyperbel zusammenhängt. — *e.* Hierauf beruht das von **Leonardo da Vinci** (Vinci bei Florenz 1452 — Cloux bei Amboise

1519; Maler, Bildhauer, Mathematiker und Physiker; vgl. Venturi „Paris 1797 in 4." und Grothe „Berlin 1874 in 8.") gelehrte, nette graphische Verfahren, um aus einer Zahl n die Quadratwurzel auszuziehen: Man trägt n in beliebigem Masstabe auf, — verlängert um 1, — konstruiert über $n + 1$ einen Halbkreis, — und misst die im Teilpunkte errichtete Senkrechte $x = \sqrt{n}$. Vgl. „Charles **Ravaisson**, Les manuscrits de Léonard da Vinci (Fac-simile mit franz. Übers.), Paris 1881 in fol." — *f.* **Ptolemäus** hat seinen Satz (Almag. Halma I 29) nicht nur ausgesprochen, sondern auch in folgender Weise bewiesen: Die beiden Winkel α und ebenso die beiden Winkel β sind als Peripheriewinkel auf gleichen Bogen gleich; zieht man nun be so, dass $\delta = \gamma$, so wird $\Delta abe \sim \Delta dbc$ und $\Delta bce \sim \Delta bda$, folglich verhält sich $ab : ae = db : dc$ und $bc : ce = bd : da$, — also ist $ab \cdot dc + bc \cdot da = bd \cdot ac$, w · z · b · w.



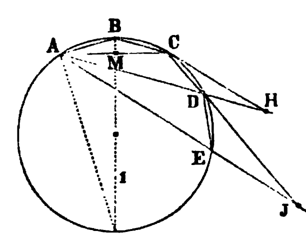
— *g.* Der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreieckes ist $360^\circ : n$, also jeder Basiswinkel $90^\circ - (180^\circ : n)$. So wird z. B. beim Zehnecke ersterer 36°, jeder der letztern $72 = 2 \times 36^\circ$, und es schneidet somit die Bisectrix eines der Basiswinkel vom Bestimmungsdreiecke ein ihm ähnliches Stück ab und vollzieht dabei auf dem Gegenschenkel einen sog. **goldenen Schnitt.** Bezeichnen somit r und s Radius und Seite des Zehnecks, so ist

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{r - s} \quad \text{oder} \quad \frac{s}{r} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{r}{s}\right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \qquad 4$$

folglich, wenn das Fünfeck von gleichem Radius die Seite S und das Apothema A hat, mit Hilfe von 1

$$S^2 = 4(r^2 - A^2) \qquad s^2 = 2r(r - A) \qquad S^2 = s^2 + r^2 \qquad 5$$

Beziehungen, welche uns später (61) gute Dienste leisten werden. — Louis **Bertrand** (Genf 1731 — ebenda 1812; Prof. math. Genf; vgl. Biogr. I) sagt in der Einleitung zu seinen „Elémens de Géométrie. Genève 1812 in 4.", er habe in seinem „Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. Genève 1778, 2 Vol. in 4." die Trigonometrie nach einer um 1753 bei **Euler** gehörten Vorlesung dargestellt, und es sind also mutmasslich folgende, in letzterm Werke (II 399) enthaltenen, namentlich auch gegenüber 63 interessanten Entwicklungen ebenfalls **Euler** zu verdanken: Wenn nämlich $AB = BC = CD =$ etc., und $CH = AC$, $DI = AD$, etc., so ist $\Delta ABC \sim CDH$, $\Delta ACD \sim DEI$, etc., also $AH = AB + AD$, $AI = AC + AE$, etc. Da nun nach Konstruktion die Dreiecke ABC, ACH, ADI, etc. ähnlich sind, so ist



$$AB : AC = AC : AH = AC : (AB + AD) = AD : AI = AD : (AC + AE) = \text{etc.} \qquad 6$$

Wenn demnach $AB = a$, folglich $a^2 = 2 \cdot MB$, so hat man

$$AC^2 = 4 \cdot AM^2 = 4(2 - MB) \cdot MB = 4a^2 - a^4 \qquad 7$$

und sodann nach 6 successive

$$4a^2 - a^4 = AC^2 = a(a + AD) \quad \text{oder} \quad AD = 3a - a^3 \qquad 8$$

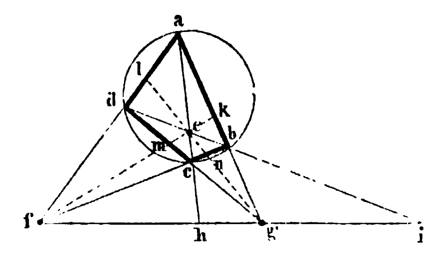
$$AC \cdot AD = a(AC + AE) \qquad AE^2 = 16a^2 - 20 \cdot a^4 + 8 \cdot a^6 - a^8 \qquad 9$$

etc. Es bestehen also Formeln, nach welchen man aus der Sehne eines Bogens

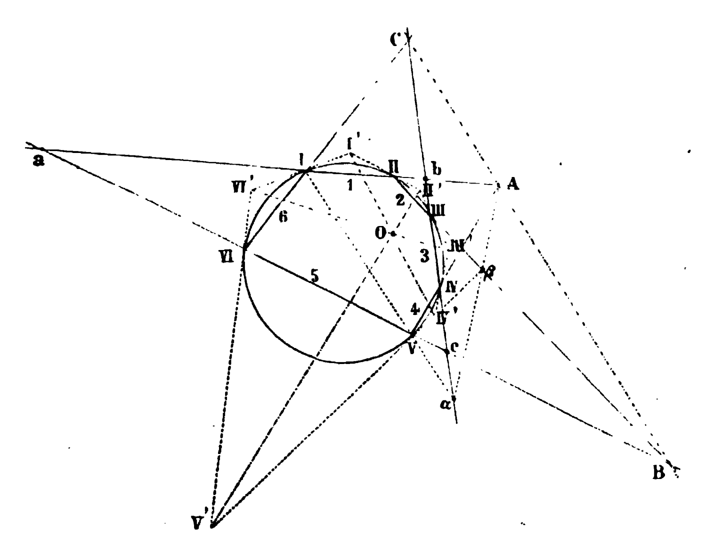
die Sehnen seiner Vielfachen leicht finden kann. — Wenn die Punkte b und d so in einem Durchmesser eines Kreises des Mittelpunktes o und Radius r liegen, dass $ob \cdot od = r^2$ ist, also $bi \perp od$ dem Punkte d als Berührungssehne entspricht, so heissen sie **reciprok** und teilen ac so, dass

$$\frac{ab}{bc} = \frac{r + ob}{r - ob} = \frac{r + (r^2 : od)}{r - (r^2 : od)} = \frac{od + r}{od - r} = \frac{ad}{dc}$$

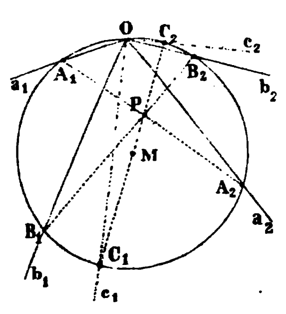
d. h. dass (56) a, b, c, d harmonische Punkte, folglich auch, wenn g ein beliebiger Kreispunkt ist, ga, gb, gc, gd harmonische Strahlen sind. Nun ist $\angle agc = 90^0$, also halbiert gc (nach 56 : 3) $\angle dgb$, also ist $ec = ch$, also halbiert bc den $\angle ebh$, und, da überdies $bf \perp ac$, so sind auch bf, be, bc, bh harmonische Strahlen, — folglich teilen der sog. **Pol** d und die ihm entsprechende, für einen äussern Punkt mit dessen Berührungssehne zusammenfallende sog. **Polare** bf die Sehne ge harmonisch. Umgekehrt ist notwendig von jeden zwei Punkten, welche eine Sehne harmonisch teilen, der eine Pol einer Geraden, welche durch den andern geht. — „In jedem eingeschriebenen Vierecke abcd bestimmen die Durchschnittspunkte der Diagonalen und der Gegenseiten ein Dreieck efg, in welchem jede Ecke Pol ihrer Gegenseite ist“; denn, da (56) aech und debi harmonische Punkte, also ga, ge, gc, gh und fa, fe, fc und fh harmonische Strahlen sind, so müssen hinwieder akbg, dmcg, aldf und bncf harmonische Punkte sein, — es liegen somit i und h in der Polaren von e, k und m in der Polaren von g, l und n endlich in der Polaren von f, w. z. b. w.



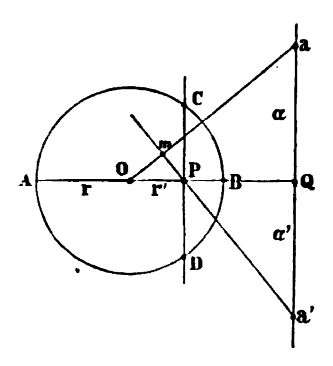
Nach diesem Satze kann man aber leicht zu jedem Punkte als Pol seine Polare, und, indem man für zwei Punkte einer Geraden die Polaren, und sodann den Durchschnittspunkt der letztern aufsucht, den Pol der Geraden bestimmen. — „Wenn man in einem eingeschriebenen Sechsecke je zwei Gegenseiten bis zu ihrem Durchschnitte verlängert, so liegen die drei Durchschnittspunkte in einer Geraden“; denn wenn man für $\triangle abc$ teils den Transversalensatz in Beziehung auf 2, 4, 6, teils für seine Ecken die Potenzgleichheit aufschreibt, so erhält man als Produkt der sechs Gleichheiten, dass $aA \cdot bC \cdot cB = Ab \cdot Cc \cdot Ba$ ist: Es liegen also die Punkte ABC so auf den Seiten des Dreiecks abc, wie solches einer Transversale zukömmt, oder also in einer Geraden, w. z. b. w. Dieser Satz, der offenbar **projektivischer Natur** ist, da durch Projektion die ihm zu Grunde liegenden Verhältnisse nicht verändert werden, — somit (83) für alle Kegelschnitte Giltigkeit hat, ist sowohl unter dem Namen des **Hexagrammum mysticum**, als unter dem Namen des **Satzes von Pascal** bekannt, da er einerseits sehr merkwürdig ist, und anderseits durch **Pascal** schon in seinem 16. Lebensjahre aufgefunden und an die Spitze seines auf 7 Seiten publizierten „Essai pour les coniques. Paris 1640 in 8.“ gestellt wurde. Von seiner Verwendung lasse ich zwei Beispiele folgen: Kennt man die 5 Punkte I bis V eines Kegelschnittes, so ist damit A, und für jede durch I gezogene Gerade auch C, — somit aber die Gerade CA und der Punkt B gegeben, welch letzterer mit V den in jener Willkürlichen liegenden Punkt VI des Kegelschnittes



bestimmt; man kann daher zu jeden 5 Punkten eines Kegelschnittes in leichtester Weise beliebig viele andere Punkte desselben finden. — Lässt man z. B. VI mit V zusammenfallen, so wird 5 zur Tangente an V, während IV in 6, und somit C in α, B in β übergeht: Es stellt somit βV jene Tangente dar, und in analoger Weise kann in jedem andern Punkte die Tangente, also unter anderm das dem eingeschriebenen Sechsecke entsprechende umgeschriebene Sechseck I' II' III' IV' V' VI' erhalten werden. Jede Ecke dieses letztern ist aber Pol einer Seite des erstern, und da somit z. B. 6 und 3 die Polaren der Punkte VI' und III' sind, so ist C der Pol der sie verbindenden Geraden VI' III', — ebenso A der Pol von I' IV', und B der Pol von II' V'. Da nun nach oben A, B, C in einer Geraden liegen, so müssen sich ihre Polaren in Einem Punkte O schneiden, und es besteht somit auch der Satz: „Wenn man in einem umgeschriebenen Sechsecke jede zwei Gegenecken verbindet, so schneiden sich die Verbindungslinien in Einem Punkte", — ein Satz, welcher ähnliche Anwendungen wie der Pascal'sche erlaubt, und den Namen von Charles-Julien **Brianchon** (Sèvres bei Paris 1785 — Paris 1870?; Artillerieoberst und dann Privatgel. in Paris) trägt, der ihn vor 1817 fand, da er denselben in seinem „Mémoire sur les lignes du second ordre. Paris 1817 in 8." mit den Worten „j'ai démontré autre part que ..." einleitet. — Zieht man in der frühern Konstruktion die Willkürliche z. B. parallel zu 2 und verbindet die Mitte der erhaltenen Sehne mit der Mitte von 2, so erhält man offenbar die Richtung einer Axe; bestimmt man zwei Axen, so ergiebt sich der Mittelpunkt. Im weitern lässt sich zeigen, dass, wenn O dieser Mittelpunkt ist, Oa_1 und Oa_2, Ob_1 und Ob_2 aber zwei Paare konjugierter Durchmesser sind, die Punkte $A_1 A_2 B_1 B_2$, in welchen letztere einen, aus einem beliebigen Punkte M durch O beschriebenen Kreis schneiden, eine sog. **Involution im Kreise** bilden, deren Pol in P liegt. Jede durch P gezogene Secante schneidet sodann



den Kreis in zwei Punkten, welche mit O ein neues Paar konjugierter Durchmesser bestimmen: So z. B. hat solches für den Durchmesser C_1MPC_2 statt, so dass Oc_1 und Oc_2 ebenfalls ein Paar konjugierter Axen darstellen, und zwar, da in diesem Falle $\angle C_1OC_2 = 90^0$ ist, die Hauptaxen. — Sind Q und CD, oder P und aQ, je Pol und Polare, also Q und P reciproke Punkte, und soll m der reciproke Punkt von a sein, so hat man $OP \cdot OQ = r^2$ und $Om \cdot Oa = r^2$, also



$$OP : Om = Oa : OQ \qquad \mathbf{10}$$

Hieraus folgt, dass $\triangle OPm \sim OaQ$ oder $Pm \perp Oa$ ist, so dass die Polare von a durch P führt, somit der Satz besteht: „Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich seine Polare um deren Pol, — und umgekehrt, wenn sich eine Gerade um einen festen Punkt dreht, so bewegt sich ihr Pol auf seiner Polare". Da ferner aus dem vorhergehenden $OQ = r^2 : r'$ und $Om = r^2 : Oa = r^2 \cdot r' : \sqrt{r^4 + \alpha^2 \cdot r'^2}$ folgen, somit $PQ = (r^2 - r'^2) : r'$ und $Pm = \sqrt{r'^2 - Om^2} = \alpha \cdot r'^2 : \sqrt{r^4 + \alpha^2 \cdot r'^2}$ ist, während sich $Qa' : PQ = Om : Pm$ verhält, so hat man

$$\alpha' = A : \alpha \qquad \text{wo} \qquad A = r^2 (r^2 - r'^2) : r'^2 \qquad \mathbf{11}$$

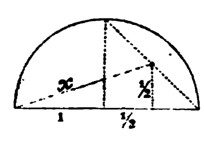
eine von α unabhängige Grösse ist. Man kann daher zu jedem Punkte a einen ihm konjugierten Punkt a' finden, und überdies ergiebt sich mit Hilfe von 11, dass, wenn aa', bb', cc' drei Paare solcher konjugierter Punkte sind, die Beziehung

$$ab \cdot ab' : ac \cdot ac' = a'b \cdot a'b' : a'c \cdot a'c' \qquad \mathbf{12}$$

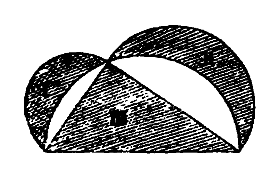
besteht, welche (56) als Definition einer Involution von 6 Punkten aufgestellt wurde. Ferner folgt aus 11, dass $\alpha \cdot \alpha' = A$ ist, oder dass der Punkt Q die Eigenschaft besitzt, dass das Produkt seiner Distanzen von zwei konjugierten Punkten konstant ist: Er heisst darum **Centrum der Involution** und ist offenbar selbst dem unendlich fernen Punkte konjugiert. — Und so weiter.

58. Die ersten Bestimmungen von Kreislänge und Kreisinhalt. — Dass sich der Radius 6 mal im Kreise herumtragen lässt, also der Umfang dieses letztern ein etwas mehr als Dreifaches seines Durchmessers sein muss, scheint schon die älteste Zeit bemerkt zu haben [a], — ja es ist sicher, dass dieses Verhältnis, welches wir jetzt mit π bezeichnen [b], schon sehr frühe auch als dasjenige der Fläche des Kreises zu dem Inhalte des durch seinen Radius bestimmten Quadrates erkannt und etwas genauer bestimmt wurde, — vielleicht anfänglich auf empirischem Wege [c], bald aber auch durch geometrische Betrachtungen: Wie die alten Egypter und Indier zu gewissen, gar nicht übeln Regeln für die Kreisrechnung gelangten, weiss man allerdings nicht [d], — dagegen kennt man mehr oder weniger den von den Griechen dafür eingeschlagenen Gedankengang, der dann schliesslich zu dem rationellen Verfahren führte, mit welchem wir uns unter der folgenden Nummer befassen werden [e].

Zu 58: *a.* So z. B. findet man im Ersten Buch der Könige den Bericht, es habe das von **Salomo** zur Zierde des von 1014—1007 erbauten Tempels bestimmte Waschgefäss, das sog. „eherne Meer", von einem Rande zum andern 10 Ellen gemessen und sei durch eine 30 Ellen lange Schnur umspannt worden. — *b.* Die Bezeichnung π wurde von **Euler** schon 1743 (vgl. Misc. Berol. VII 9) benutzt und sodann 1748 durch dessen „Introductio (I 93)" in allgemeinen Gebrauch eingeführt. — *c.* Etwa durch direktes Abmessen au Kreisen. So z. B. erhielt ich durch Umspannen von 6 kreisförmigen Kartons, deren Durchmesser von 10—60^{cm} variierten, im Mittel $\pi = 3{,}1488 \pm 0{,}0073$. — *d.* Nach dem mehrerwähnten Papyrus Rhind lehrten die alten Egypter, „es komme ein Quadrat, dessen Seite um $1/9$ kleiner sei als der Durchmesser eines Kreises, letzterm an Fläche gleich", d. h. es bestehe die Gleichheit $(2 \cdot r \cdot 8/9)^2 = r^2 \pi$ oder es sei $\pi \fallingdotseq 3{,}16$, — während den alten Indiern die damit zusammentreffende Annäherung $\pi = \sqrt{10} \fallingdotseq 3{,}16$ zugeschrieben wird. Erstere Angabe hat natürlich unendlich mehr historischen Wert als die Lehre der Pyramidalisten, es verhalte sich bei der grossen Pyramide von Gizeh, welche das Grab des 4000 v. Chr. verstorbenen Königs Cheops in sich bergen soll, der Basisumfang zur Höhe **genau** wie der Umfang eines Kreises zu seinem Radius, — und letztere ist namentlich dadurch von Interesse, dass sie vollständig mit dem jetzt noch (vgl. meine Notiz in Grunerts Archiv von 1843) als Handwerksregel beliebten konstruktiven Verfahren übereinkömmt, die Länge des Quadranten $x = \sqrt{(3/2)^2 + (1/2)^2} = 1/2 \sqrt{10}$ zu setzen. — Die Richtigkeit der Angabe, dass die Hindus „schon lange vor Archimedes" $\pi = 3927 : 1250 = 3{,}1416$ gesetzt haben, bleibt noch zu beweisen.



— *e.* Bei den Griechen erwarb sich im 5. Jahrhundert v. Chr. **Hippokrates** von Chio das Verdienst, den für damalige Zeit nicht unwichtigen Nachweis zu leisten, dass wenigstens einzelne krummlinig begrenzte Flächen dem Inhalte nach durch geradlinig begrenzte Figuren ersetzt werden können, wie dies z. B., unter Berücksichtigung der Giltigkeit des pythagoräischen Lehrsatzes für alle ähnlichen Figuren, in Bezug auf gewisse „Lunulæ" statt habe, da I + II = III sei, — dass also auch ein Versuch der Quadratur des Kreises Berechtigung habe.

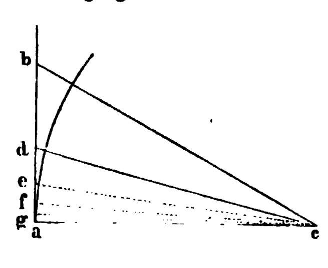


— Bald darauf hob der aus Attika gebürtige **Antiphon** (480—411) hervor, dass, wenn man einem Kreise ein Quadrat einschreibe, den 4 entstehenden Segmenten gleichschenklige Dreiecke, den neu entstehenden 8 Segmenten wieder solche, etc., und schliesslich alle diese eingeschriebenen Figuren summiere, man dem Kreise beliebig nahe kommen könne; dagegen gelang es ihm allerdings kaum, auf diesem, wohl gegenwärtig (vgl. meine Notiz in Bern. Mitth. von 1846) zur Not praktikabeln Wege, ein wirkliches Resultat zu erhalten, da die damalige Analysis die hiefür nötigen Mittel nicht bot, ja noch viele Jahrhunderte später der grosse **Vieta** (vgl. Opera p. 400) nur mit vieler Mühe einen ähnlichen Gang vollenden konnte.

59. Die Methode von Archimedes. — Der erste Grieche, welcher für die Kreisrechnung nicht nur eine richtige geometrische Methode vorschlug, sondern auch nach derselben ein wirkliches Resultat zu erhalten wusste, war unbestritten **Archimedes**. Nachdem er nämlich in seiner klassischen Schrift „De dimensione circuli" *a*

gezeigt, wie die Fläche eines Kreises aus seinem Umfange berechnet werden kann, schloss er den Kreis zwischen ein umgeschriebenes und ein eingeschriebenes 96-Eck ein, leitete in höchst scharfsinniger Weise für deren Perimeter Grenzwerte ab [b] und gelangte so schliesslich zu dem Satze: „Der Umfang eines Kreises wird erhalten, indem man dem Dreifachen des Durchmessers noch einen Teil desselben zufügt, der kleiner als $^{10}/_{70}$ und grösser als $^{10}/_{71}$ ist", — ein Satz, welcher nach Ableitung und Inhalt von jeher mit Recht als eine der Hauptleistungen dieses grossen Geometers betrachtet wurde [c].

Zu 59: *a.* Diese Schrift beschlägt in Ed. Peyrard p. 116—22. — *b.* **Archimedes** ging nämlich hiefür in folgender Weise vor: Ist $<$ bca ein Drittel eines Rechten, so ist $ab = \frac{1}{2} bc$. Unter der natürlich zulässigen, aber von Archimedes nicht näher begründeten Annahme, es sei $bc = 306$, hat man nun $ab = 153$ und $ac^2 = 306^2 - 153^2 = 70227$, folglich, da $70225 = 265^2$ ist,



$$\frac{ac}{ab} > \frac{265}{153}$$

Ist aber cd die Bisectrix des Winkels bca, so hat man (55 : d) successive

$$\frac{bc}{ac} = \frac{bd}{da} \qquad \frac{cb + ac}{bd + ad} = \frac{ac}{ad} \qquad \frac{ac}{ad} > \frac{571}{153} \qquad \frac{cd^2}{ad^2} > 1 + \frac{571^2}{153^2}$$

Da nun $153^2 + 571^2 = 349450$ und letztere Zahl sehr nahe dem Quadrate von $591\frac{1}{8}$ gleich ist, so folgt somit

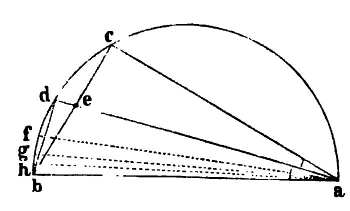
$$\frac{cd}{ad} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

Successive neue Bisectrissen ce, cf und cg ziehend, fand Archimedes auf entsprechende Weise nach und nach

$$\frac{ca}{ae} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153} \qquad \frac{ce}{ae} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153} \qquad \frac{ca}{af} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153} \qquad \frac{cf}{af} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}$$

$$\frac{ca}{ag} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153} \qquad \text{oder endlich} \qquad \frac{96 \cdot ag}{ca} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}$$

Der letzte Winkel gca ist aber offenbar $^1/_{48}$ eines Rechten, folglich die Hälfte des Centri-Winkels eines 96-Ecks, — also ist auch ag die halbe Seite, oder $96 \cdot ag$ der halbe Umfang eines 96-Ecks des Apothemas ac. Es ist somit das Apothema eines 96-Ecks in seinem halben Umfange, und um so mehr noch **der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises in seiner Peripherie nicht ganz $3\frac{1}{7}$ mal enthalten**, wodurch offenbar eine **obere** Grenze für π gefunden ist. — Um sodann noch eine untere Grenze zu bestimmen, ging **Archimedes** von dem ebenfalls $^1/_3$ R. betragenden Peripheriewinkel bac aus und erhielt, $ab = 1560$ annehmend,



in früherer Weise

$$\frac{ab}{bc} = \frac{1560}{780} \qquad \text{und} \qquad \frac{ac}{bc} < \frac{1351}{780}$$

Wenn aber ad eine Bisectrix ist, so verhält sich

$$\frac{be}{ec} = \frac{ab}{ac} \quad \text{so dass} \quad \frac{ab}{be} = \frac{ab + ac}{be + ec}$$

während aus $\triangle abd \sim bed$

$$\frac{db}{ab} = \frac{de}{be} \quad \text{und} \quad \frac{ad}{db} = \frac{db}{de} \quad \text{somit} \quad \frac{ad}{db} = \frac{ab}{be} = \frac{ab + ac}{bc} < \frac{2911}{780}$$

folgt, und hieraus ergiebt sich in früherer Weise

$$\frac{ab}{bd} < \frac{3013^3/_4}{780}$$

Sind sodann af, ag und ah weitere Bisectrissen, so erhält man successive analog

$$\frac{af}{bf} < \frac{5924^3/_4}{780} = \frac{1823}{240} \qquad \frac{ab}{bf} < \frac{1838^9/_{11}}{240} \qquad \frac{ag}{bg} < \frac{3661^9/_{11}}{240} = \frac{1007}{66}$$

$$\frac{ab}{bg} < \frac{1009^1/_6}{66} \qquad \frac{ah}{bh} < \frac{2016^1/_6}{66} \qquad \frac{ab}{bh} < \frac{2017^1/_4}{66} \qquad \frac{96 \cdot bh}{ab} > \frac{6336}{2017^1/_4} > 3\frac{10}{71}$$

folglich ist **der Durchmesser** schon in dem Umfange des eingeschriebenen 96-Ecks, und also noch um so eher **in dem Umfange des Kreises mehr als $3^{10}/_{71}$ mal enthalten,** womit auch noch jene **untere** Grenze erhalten ist. Es fällt also π zwischen $3^{10}/_{71} = 3{,}14084$ und $3^{10}/_{70} = 3{,}14286$, so dass $\pi \risingdotseq 3{,}1418$ gesetzt werden, ja $\pi \risingdotseq 3^1/_7$ angenommen werden darf. — *c.* Mit dem Archimed'schen Mittelwerte stimmen nahe die 3,1416 zusammen, welche **Aryabhata** (Pâtaliputra am oberen Ganges 476 geb.) in einem in Sanskrit-Versen verfassten, 1874 zu Leyden aufgelegten mathematisch-astronomischen Werke ohne nähere Begründung gab. Da der mit ihm nach

$$r = \frac{180^0}{\pi} = \frac{180 \cdot 60}{3{,}1416} = 3437',7 = 57^0\ 17',7$$

berechnete Minutenwert des Radius, der sog. **Gehren** von Wilh. **Matzka** (vgl. Arch. Grunert 8), mit den 3438' übereinstimmt, welche seine Landsleute schon früher zur sog. **Arcufication**, d. h. zur Umsetzung von Längen in Kreisminuten, benutzten, so liegt die Vermutung nahe, es möchten bereits letztere den Archimed'schen Wert gekannt haben.

60. Die neuern Bestimmungen. — Nachdem sich im Abendlande Verschiedene vergeblich bemüht hatten, in der Kreisrechnung über Archimedes hinauszukommen [a], gelang dies gegen das Ende des 16. Jahrhunderts infolge eines unter den holländischen Mathematikern entstandenen Wettkampfes [b] in gedoppelter Weise, indem durch Adrian **Metius** und **Ludolph** van Ceulen [c], auf dem Fundamente der Archimed'schen Methode weiter bauend, die Werte

$$\pi = {}^{355}/_{113} \qquad \pi = 3{,}14159\,26535\,89793\,2384\tfrac{6}{7}$$

erhalten wurden, von welchen der erste sich durch Einfachheit bei grosser Annäherung auszeichnet, der zweite aber als sog. **Ludolph'sche Zahl** wohl der weitgehendsten praktischen Anforderung mehr als genügen dürfte [d]. Immerhin wurde auch noch in der Folgezeit die Berechnung von π mehrfach an die Hand genommen, ja auf Hunderte

von Decimalen ausgedehnt, — vorerst durch etwelche Modifikation der bisherigen Verfahren [e], dann auf einer ganz neuen Basis, von der wir jedoch erst später (64) einen Begriff geben können.

Zu 60: *a.* Ich erwähne Nikolaus Chrypffs oder **Cusanus** (Cues bei Trier 1401 — Todi in Umbrien 1464; Sohn eines armen Schiffers, der sich zum Kardinal und Statthalter von Rom aufschwang; vgl. „Schanz: Der Cardinal Nic. von Cusa. Rottweil 1872—73 in 4.“), Oronce Fine oder **Finæus** (Briançon 1494 — Paris 1555; Prof. math. Paris), etc. — *b.* Als Simon **Duchesne** (ein aus der Franche-Comté gebürtiger Calvinist, der in Holland den Namen „Van der Eyck“, oder „a Quercu“, auch „Quercetanus“ annahm) in seiner Schrift „Quadrature du cercle, ou manière de trouver un quarré égal au cercle donné. Delft 1584 in 4.“ lehrte, dass, wenn man den Durchmesser eines Kreises in 44 Teile zerlege, 39 derselben die Seite eines dem Kreise gleichen Quadrates ergeben, somit zwischen die Archimed'schen Grenzwerte

$$\pi = \left(\frac{39}{22}\right)^2 = \frac{1521}{484} = 3\,\frac{10}{70^{10}/_{69}} \risingdotseq 3{,}14256$$

einschob, so entspann sich eine heftige Polemik, in deren Verlauf unter anderm **Metius** und **Ludolph** von ihren schönen Resultaten Kenntnis gaben. — Anhangsweise mag bemerkt werden, dass **Duchesne** auch eine Näherungskonstruktion auffand, welche **Reymers** 1588 in sein „Fundamentum“ aufnahm und mit $\pi = 4 \cdot \mathrm{Co}\,\alpha$ (wo α durch $\mathrm{Co}\,\alpha = \mathrm{Tg}\,\alpha$ bestimmt, oder $\alpha = 38^0\,10'\,21'',7$ ist) $=$ 3,1446 übereinkömmt. Solcher Versuche, π durch Konstruktion zu erhalten, sind seither zahllose gemacht worden, ja es wurde diese sog. **Quadratur des Zirkels** der beliebteste Tummelplatz für die Pseudo-Mathematiker, und der gute **Montucla** mühte sich vergeblich ab, diese durch seine „Histoire des recherches sur la quadrature du cercle. Paris 1754 in 12. (Nouv. éd. par Lacroix 1831)“ von der Unfruchtbarkeit solcher Bemühungen zu überzeugen. — *c.* Adriaan Anthoniszoon, genannt **Metius**, war Festungsingenieur und hatte zwei Söhne: Adrian II (Alkmaar 1571 — Franeker 1635; Prof. math. et med. Franeker) und Jakob (um 1630 als Glasschleifer in Alkmaar verstorben), von welchen der erstere als Student den Cerevis-Namen Metius führte, der sodann von der ganzen Familie adoptiert wurde. — **Ludolph** (Hildesheim 1539 — Leyden 1610) war Prof. math. et fortif. Leyden. Der Beiname „van Ceulen“ deutet einfach darauf hin, dass seine Familie ursprünglich von Köln stammte, — erwähnt ihn ja sein Zeitgenosse Alb. Girard als „Ludolf de Cologne“, während sein Vater als „Johannes von Cöllen“ aufgeführt wird. Vgl. für Ludolph die „Notice“ durch Vorsterman van Oijen in Boncomp. 1865. — *d.* Verwandelt man den Decimalbruch von π in einen Kettenbruch, so erhält man

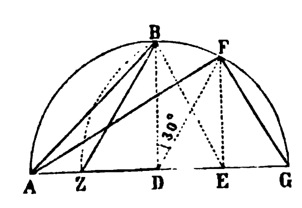
$$\pi = 3 + 1 : [7, 15, 1, 25, 1, 7, \ldots] = \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{9208}{2931}, \ldots$$

und könnte so leicht auf den Gedanken kommen, es habe auch **Metius** seinen Näherungswert auf diese Weise erhalten; dem ist aber nicht so, indem Adrian II in seiner „Arithmeticæ et Geometriæ Practica. Franeckeræ 1611 in 4.“ ausdrücklich sagt, es habe sein Vater P. M. (Piæ Memoriæ, — nicht Peter Metius, wie einzelne meinten) nach der Methode von Archimedes für π die Grenzwerte $^{377}/_{120}$ und $^{333}/_{106}$ erhalten und dann sowohl aus den beiden Zählern, als aus den beiden Nennern, je das Mittel genommen. — Während **Metius** das Libell, welches seinen Fund enthielt, nur in Abschriften verbreitete,

teilte dagegen **Ludolph** seine Untersuchungen in einer Druckschrift „Van de Circkel. Delft 1596 in fol." vollständig mit, und man sieht daraus, dass auch er wesentlich bei der Archimed'schen Methode stehen blieb, aber seine Rechnungen bis zum ein- und umgeschriebenen $60 \cdot 2^{29} = 32212\,25470$-Eck fortführte, sie mit den Worten abschliessend: „Die lust heeft, can naerder comen". Die erst nach seinem Tode erschienenen „Arithmetische en geometrische Fundamenten. Leyden 1615 in fol. (lat. durch Snellius)" sollen π bis auf 32 Stellen geben, bei deren Berechnung sein Schüler Pieter Corneliszoon mithalf, — ja aus der durch Snellius zum Drucke besorgten Schrift „De circulo et adscriptis liber. Lugd. Batav. 1619 in 4." geht hervor, dass Ludolph zur Kontrole π auch noch vom 3-, 4- und 5-Eck ausgehend berechnete, — und endlich sollen in seiner Grabschrift sogar 35 Stellen aufgeführt sein, zu deren Feststellung er bis zum 2^{65}-Eck fortgeschritten sei. — *e.* Von einem etwas modifizierten Wege für Berechnung von π sind bereits in 57:b Proben gegeben worden, und im übrigen verweise ich noch auf die Schriften: „**Adrianus Romanus**, In Archimedis circuli dimensionum expositio et analysis. Wurceburgi 1597 in fol., — Phil. **Lansbergius**, Cyclometriæ libri II. Middelburgi 1628 in 4., — Will. **Snellius**, Cyclometricus. Lugd. Batav. 1621 in 4., — Chr. **Huygens**, De circuli magnitudine inventa. Lugd. Batav. 1654 in 4., — etc."

61. Die Sehnenrechnung der Alten. — Als sich bei den Griechen die praktische Astronomie zu entwickeln begann, zeigte sich bald, dass viele Grössen nicht direkt gemessen, sondern nur aus ihren Beziehungen zu messbaren Grössen ermittelt werden können: Aus diesem Bedürfnisse heraus entstanden nunmehr die Anfänge der rechnenden Geometrie, und zwar in erster Linie, wie bereits früher (53) erwähnt wurde, die sog. Sehnenrechnung, zu deren Gunsten schon der grosse **Hipparch** eine Sehnentafel berechnete [a]. Allerdings ist leider diese erste Tafel nicht auf uns gekommen, und auch eine ihre Berechnung behandelnde Schrift von **Menelaus** spurlos verschwunden; dagegen kennen wir aus dem Almagest sowohl den mutmasslich entsprechenden Weg, welchen etwas später **Ptolemäus** zu demselben Zwecke einschlug, als die von letzterm erhaltene Tafel, und können uns daher dennoch ein richtiges Bild von dem Urzustande dieses praktisch wichtigsten Teiles der Geometrie entwerfen [b].

Zu 61: *a.* Nicht nur bezeugt dies **Theon** in seinem Kommentare zum Almagest, sondern es geht auch aus der einzigen uns von **Hipparch** selbst erhaltenen Schrift, seinem durch Dénis **Petavius** (Orléans 1583 — Paris 1652; Jesuit; Lehrer an verschiedenen Ordenskollegien, zuletzt Bibliothekar Paris) in seinem „Uranologium. Lutetiæ 1630 in fol." aufgenommenen Kommentar zu den Gestirnbeschreibungen von Eudoxus und Aratus, sicher hervor, dass er bereits mit Hilfe geometrisch abgeleiteter Rechnungsregeln unter Anwendung seiner Sehnentafel manche Aufgaben der sog. sphärischen Astronomie zu lösen wusste. — *b.* **Ptolemäus** teilte den Durchmesser des Kreises in 120 Teile und gab sodann die Sehnen oder sog. **Subtensen** (St) in solchen **Partes** und deren sexagesimalen Unterabteilungen. Für Berechnung einiger erster



Subtensen ging er von schon früher (57 und speciell 57 : 5) mitgeteilten, bereits **Euklid** bekannten Sätzen aus, nach welchen, wenn E in der Mitte von DG liegt, die Geraden AF, AB, BZ, FG und DZ der Reihe nach die Seiten der eingeschriebenen regelmässigen 3-, 4-, 5-, 6- und 10-Ecke vorstellen: Er hatte so folgeweise

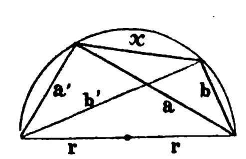
$St\ 36^0 = ZD = \sqrt{60^2 + 30^2} - 30 = 37^p\ 4'\ 55''$ $St\,60^0 = 60^p\ 0'\ 0''$

$St\ 72 = ZB = \sqrt{ZD^2 + 60^2} = 70\ 32\ 3$ $St\,90 = 60 \cdot \sqrt{2} = 84\ 51\ 10$

$St\,120 = AF = \sqrt{90^2 + 60^2 - 30^2} = 103\ 55\ 23$

und, da die Quadrate der Subtensen supplementärer Winkel sich zum Quadrate des Durchmessers ergänzen müssen,

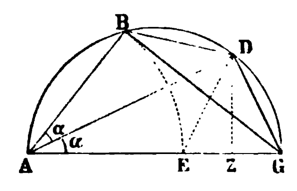
$$St\ 144^0 = \sqrt{120^2 - St^2\,36} = 114^p\ 7'\ 37''$$



Ferner schloss **Ptolemäus** aus dem seinen Namen tragenden Lehrsatze (57), dass, wenn die Sehnen a und b, folglich auch die Supplementarsehnen a' und b' bekannt seien, aus

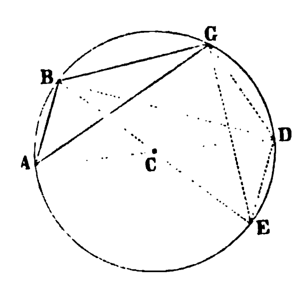
$$a \cdot b' = x \cdot 2r + a' \cdot b$$

die Sehne x der Differenz der beiden Winkel berechnet werden könne, — so z. B. aus St 72° und St 60° auch St 12° = $12^p\ 32'\ 56''$. — Hierauf zeigte er, wie man aus der Subtensa eines Bogens diejenige seiner Hälfte finden könne: Ist nämlich BG gegeben, also auch AB, und ist D die Mitte von BG, so mache man AE = AB und ziehe DZ ⊥ AG. Da nun △ADE ≅ ADB, so ist auch DE = DB = DG, — also ist ZG = ZE = $^1/_2$ (AG — AB) eine bekannte Grösse. Ferner ist △DGZ ∼ ADG, folglich $DG^2 = ZG \cdot AG$. So erhielt er z. B. aus St 12° successive St 6° = $6^p\ 16'\ 49''$, St 3° = $3^p\ 8'\ 28''$, St $1^1/_2{}^0 = 1^p\ 34'\ 15''$ und St $^3/_4{}^0 = 0^p\ 47'\ 8''$. — Ferner fand er, dass man aus den Subtensen zweier Bogen auch diejenige ihrer Summe finden kann:



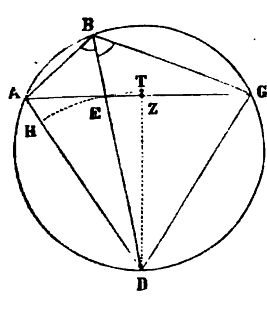
Sind nämlich die Subtensen AB und BG gegeben, also als Supplementarsehnen auch BD und GE, sowie DE = AB, so kann man nach der aus Viereck BGDE folgenden Beziehung

$$BD \cdot GE = BG \cdot DE + BE \cdot GD$$



die GD, also auch ihre Supplementarsehne, die gesuchte AG, berechnen. Mit Hilfe dieses Theoremes erhält man aber successive alle Subtensen von 0°, $1^1/_2{}^0$, 3°, $4^1/_2{}^0$, 6°, etc., so dass, um alle Subtensen von $^1/_2$ zu $^1/_2{}^0$ zu besitzen, nur noch je zwei zwischenliegende fehlen, zu deren Berechnung man die Sehnen von 1° und $^1/_2{}^0$ haben sollte. Zu Gunsten hievon leitete nun **Ptolemäus** in scharfsinniger Weise noch als Hilfssatz ab, dass sich die Ungleichheiten

$$BG > AB \quad \text{und} \quad \frac{BG}{AB} < \frac{Arc \cdot BG}{Arc \cdot AB}$$



entsprechen. Halbiert man nämlich $\angle$ ABG durch BD, so dass Arc AD = Arc DG, also auch AD = DG, — zieht DZ $\perp$ AG, so dass AZ = ZG, — und beschreibt von D aus mit dem Radius DE den Kreisbogen HET, so hat man Sect. DET $>$ $\triangle$DEZ und Sect. DEH $<$ $\triangle$DEA, also

$$\frac{ZE}{EA} = \frac{\triangle DEZ}{\triangle DEA} < \frac{\text{Sect. DET}}{\text{Sect. DEH}} = \frac{\angle EDZ}{\angle EDA}$$

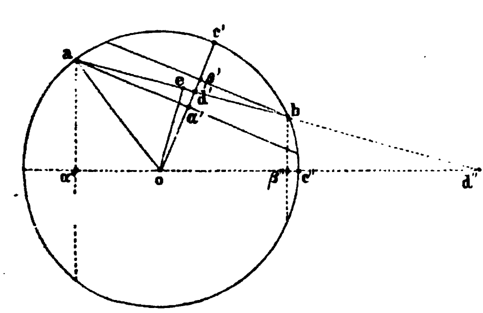
folglich die äussersten Werte um 1 vermehrend und dann noch doublierend,

$$\frac{AG}{AE} < \frac{\angle ADG}{\angle ADE} \quad \text{oder} \quad \frac{AE}{AG} > \frac{\angle ADE}{\angle ADG}$$

Zieht man aber letztere Ungleichheit von 1 ab und multipliziert den Rest mit ersterer, so erhält man unter Berücksichtigung, dass BD eine Bisectrix ist, successive

$$\frac{EG}{AG} < \frac{\angle EDG}{\angle ADG} \quad \text{und} \quad \frac{BG}{AB} = \frac{EG}{AE} < \frac{\angle EDG}{\angle ADE} = \frac{\text{Arc BG}}{\text{Arc AB}}$$

w·z·b·w. Ist also z. B. AB = St $^3/_4{}^0$ und BG = St 1^0, so hat man St $1^0 < \frac{4}{3}$ St $^3/_4{}^0 = 1^p\ 2'\ 50''\ 40'''$. Ist dagegen AB = St 1^0 und BG = St $1^1/_2{}^0$, so hat man St $1^0 > \frac{2}{3}$ St $1^1/_2{}^0 = 1^p\ 2'\ 50''\ 0'''$. Man hat also mit hinlänglicher Annäherung St $1^0 = 1^p\ 2'\ 50''$, woraus St $^1/_2{}^0 = 0^p\ 31'\ 25''$ folgt, und das Problem vollständig gelöst ist. — Die von **Ptolemäus** in dieser Weise für den ganzen Halbkreis von $^1/_2$ zu $^1/_2{}^0$ berechnete Tafel giebt überdies zur Erleichterung der Interpolation neben jeder Sehne ihren Zuwachs für 1'. — Anhangsweise füge ich bei, dass sich im Almagest auch die für damalige Zeit schwierige Aufgabe „zwei Bogen aus ihrer Summe oder Differenz, und dem Verhältnisse der Sehnen der Doppelbogen zu bestimmen" wesentlich in folgender Weise gelöst findet: Ist ab = m (also auch ae, oe und $\angle$ aoe) und $a\alpha : b\beta$ = n gegeben, so hat man m = ad $\pm$ db, n = $a\alpha : b\beta$ = ad : db, also m = n · db $\pm$ db oder db = m : (n $\pm$ 1). Man kennt also auch ed = ae $\mp$ db, folglich successive $\triangle$ode, $\angle$doe, $\angle$aod und Arc ae, womit die Aufgabe in der That gelöst ist. Abgesehen davon, dass diese Lösung später (88) Wichtigkeit erhalten wird, zeigt sie uns, wie schon **Ptolemäus** durch seine Untersuchungen zur Anwendung der Verhältnisse der **Sehnen doppelter Bogen** gedrängt wurde und so offenbar bereits nahe daran war, die Sinus einzuführen.



62. Die Goniometrie der Indier und Araber. — Inwieweit die Indier Kenntnis von den Arbeiten der Griechen hatten, lässt sich kaum genau ermitteln; dagegen ist es sicher, dass sie schon

bald nach der Zeit von Ptolemäus selbständig vorgingen und sich namentlich das grosse Verdienst erwarben, neben Sehne und Supplementarsehne eines Winkels auch deren Hälften, sowie die Ergänzungen dieser Hälften zum Radius, als Funktionen des halben Winkels und dessen Komplementes, d. h. unsere **Sinus**, **Cosinus**, **Cosinus versus** und **Sinus versus** [a], in die Rechnungen einzuführen, sowie für diese Grössen erste Tafeln zu berechnen [b]. Als sodann die Araber mit diesem Vorgange bekannt wurden [c], erkannten sie nicht nur alsbald die Vorzüglichkeit der neuen Rechnungsgrössen, sondern fügten ihnen nach und nach auch noch einige neue, den Verhältnissen der Sinus und Cosinus unter sich und zum Radius entsprechende Werte, unsere **Tangens**, **Cotangens**, **Cosecans** und **Secans** bei [d], — erhielten durch Einführung in die von **Ptolemäus** (61) erwiesenen Sätze und anschliessende weitere Überlegungen eine Reihe von Beziehungen, welche unsern Formeln

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{Si}^2\alpha + \mathrm{Co}^2\alpha = 1 & \mathrm{Tg}\,\alpha = \mathrm{Si}\,\alpha : \mathrm{Co}\,\alpha & \mathrm{Ct}\,\alpha = \mathrm{Co}\,\alpha : \mathrm{Si}\,\alpha \\ \mathrm{Cs}\,\alpha = 1 : \mathrm{Si}\,\alpha & \mathrm{Se}\,\alpha = 1 : \mathrm{Co}\,\alpha & \mathrm{Tg}\,\alpha \cdot \mathrm{Ct}\,\alpha = 1 \end{array}\right\} 1$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \mathrm{Tg}^2\alpha = 1 : \mathrm{Co}^2\alpha \qquad \mathrm{Co}\,\alpha = 1 : \sqrt{1+\mathrm{Tg}^2\alpha} \qquad \mathrm{Si}\,\alpha = \mathrm{Tg}\,\alpha : \sqrt{1+\mathrm{Tg}^2\alpha} \\ \mathrm{Si}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\mathrm{Co}\,\alpha}{2}} \quad \mathrm{Co}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\mathrm{Co}\,\alpha}{2}} \quad \mathrm{Tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\mathrm{Co}\,\alpha}{1+\mathrm{Co}\,\alpha}} = \frac{1-\mathrm{Co}\,\alpha}{\mathrm{Si}\,\alpha} = \frac{\mathrm{Si}\,\alpha}{1+\mathrm{Co}\,\alpha} \end{array}\right\} 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Si}\,(\alpha \pm \beta) = \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\beta \pm \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\beta \qquad \mathrm{Co}\,(\alpha \pm \beta) = \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\beta \mp \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\beta \\ \mathrm{Tg}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{Tg}\,\alpha \pm \mathrm{Tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{Tg}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\beta} \qquad \mathrm{Si}\,2\alpha = 2 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \qquad \mathrm{Co}\,2\alpha = \mathrm{Co}^2\alpha - \mathrm{Si}^2\alpha \end{array}\right\} 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Si}\,\alpha + \mathrm{Si}\,\beta = 2\,\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2(\alpha+\beta) \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2(\alpha-\beta) \qquad \mathrm{Si}\,\alpha - \mathrm{Si}\,\beta = 2\,\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2(\alpha-\beta) \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2(\alpha+\beta) \\ \mathrm{Co}\,\alpha + \mathrm{Co}\,\beta = 2\,\mathrm{Co}\,{}^1\!/_2(\alpha+\beta) \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2(\alpha-\beta) \qquad \mathrm{Co}\,\alpha - \mathrm{Co}\,\beta = -2\,\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2(\alpha+\beta) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2(\alpha-\beta) \\ \mathrm{Tg}\frac{\alpha-\beta}{2} : \mathrm{Tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\mathrm{Si}\,\alpha - \mathrm{Si}\,\beta}{\mathrm{Si}\,\alpha + \mathrm{Si}\,\beta} = \mathrm{Tg}\,(x - 45^0) \quad \text{wo} \quad \mathrm{Tg}\,x = \frac{\mathrm{Si}\,\alpha}{\mathrm{Si}\,\beta} \end{array}\right\} 4$$

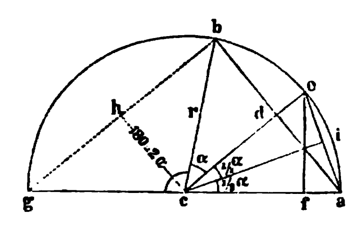
entsprechen [e], — ja kamen nach und nach dazu, nicht etwa nur die frühern Tafeln umzusetzen, sondern auch neue und schärfere Methoden aufzufinden, um solche selbständig zu berechnen [f].

Zu 62: *a.* Die Indier nannten die Sehne eines Winkels „jyâ" oder „jîva", — die halbe Sehne des doppelten Winkels aber eigentlich „ardhajîva", jedoch abgekürzt ebenfalls „jîva". Letzterer Name ging sodann bei den Arabern anfänglich in „dshiba", später in „dschaib (Busen)" über, und letztere Übung führte im 12. Jahrhundert **Plato von Tivoli** darauf, in seinen Übersetzungen den Namen **Sinus** zu gebrauchen, der nunmehr im Westen, früher zuweilen unter Beilage von „primus" oder „rectus", allgemeinen Eingang fand. — Für den Sinus des Komplementes benutzten die Indier den Namen „Kotijîva", wofür im Abendlande, nachdem längere Zeit die Bezeichnungen „Sinus secundus" und „Sinus Complementi" gebräuchlich gewesen waren, der von **Gunter** 1623 in seiner „Descriptio" vorgeschlagene Name **Cosinus** angenommen wurde. — Für die Ergänzung der Kotijîva zum Radius endlich benutzten die Indier die Bezeichnung „utkramajîva", wofür jetzt, nachdem zuweilen auch hiefür der

Name „Sinus secundus" gebraucht worden war, der von **Apian** gewählte Name **Sinus versus** allgemein gebräuchlich ist. — Wie die Namen, so variierten im Laufe der Jahrhunderte auch die Symbole vielfach, und ich will daher für ein- und allemal bemerken, dass ich nach reiflicher Überlegung

Si für Sinus	**Co** für Cosinus	**Tg** für Tangens	**Sv** für Sinus versus
Ct für Cotangens	**Se** für Secans	**Cs** für Cosecans	**Cv** für Cosinus versus

gewählt habe, da diese Symbole kurz sind, sich in den Formeln gut ausnehmen und sich auch leicht mit andern Zeichen kombinieren lassen, wie die Beispiele: **Asi** für Arcus Sinus, **Coh** für Cosinus hyperbolicus, **Ltg** für Logarithmus Tangens, etc., zeigen mögen. — ***b.*** Da $\triangle acd \backsim ecf$, so ist nach Definition $Si\,\alpha = ad = ef$, während $Co\,\alpha = Si\,(90 - \alpha) = gh = cd = cf$ und $Sv\,\alpha = af$. Nimmt man daher (59 : c) den Radius $r = 3438'$ an, so ist



$$Si\,30^0 = \frac{r}{2} = 1719$$
$$Si^2\,\alpha + Co^2\,\alpha = r^2 = 3438^2 \qquad \mathbf{5}$$
$$Sv\,\alpha = r - Co\,\alpha = 3438 - Co\,\alpha$$

Ferner ergiebt sich, dass

$$Si\,\frac{\alpha}{2} = ei = \tfrac{1}{2}\sqrt{ef^2 + fa^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{Si^2\,\alpha + (r - Co\,\alpha)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,r\,(r - Co\,\alpha)} \qquad \mathbf{6}$$

so dass man nach 5 und 6 successive

$$Si\,15^0 = 890 \qquad Si\,7^0\,30' = 449 \qquad Si\,3^0\,45' = 225$$

finden kann. Da nun $360 : 96 = 3^0\,45' = 225'$ ist, so fällt also von da ab (auf die Minute genau) der Sinus mit dem Bogen zusammen, und es erhielt daher der 96. Teil des Kreises für die Indier (in ähnlicher Weise wie für uns Si 1") eine besondere Wichtigkeit, so dass sie ihm einen eigenen Namen „Kramajîva (gerader Sinus)" gaben, aus welchem später bei den Arabern durch Verstümmelung der sodann auch in das Abendland übergegangene Name **Kardaga** entstand. Die Indier wählten sogar diese Kardaga als Einheit und drückten in derselben die Sinus der 24 Vielfachen von $3^0\,45'$ aus, welche anfänglich ihre Sinustafel gebildet zu haben scheinen. Dabei benutzten sie wahrscheinlich zur Erstellung dieser Tafel ähnliche Methoden wie die von Ptolemäus für seine Sehnentafel gebrauchten, und fanden erst nachträglich auf empirischem Wege, dass

$$Si\,(n+1)\cdot 225' = 2\cdot Si\,n\cdot 225' - Si\,(n-1)\,225' - \frac{1}{225}\cdot Si\,n\cdot 225' \qquad \mathbf{7}$$

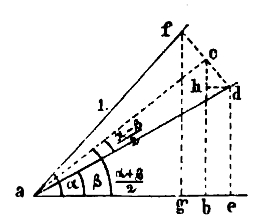
sei, — eine Formel, welche (nach 3') aus $Si\,(n+1)\,\alpha + Si\,(n-1)\,\alpha = 2\cdot Si\,n\,\alpha\cdot Co\,\alpha$ hervorgeht, wenn man $\alpha = 225'$ und annähernd $Co\,\alpha = 1 - (1 : 2\,\alpha)$ setzt. Der 1114 geborne **Bhâskara** soll sodann sogar eine Sinustafel für jeden Grad erstellt haben, wofür er wahrscheinlich die von ihm in dem Kapitel „Lilâvâti" seiner Schrift „Siddhânta ciromani (die Krönung des Systems)" mitgeteilte Formel

$$s = 4\,d\cdot b\cdot (p - b) : [{}^5\!/_4\cdot p^2 - b\,(p - b)] \qquad \mathbf{8}$$

benutzte, in welcher s, b, d, p der Reihe nach Sehne, Bogen, Durchmesser und Peripherie bezeichnen, — eine Näherungsformel, deren bis jetzt nicht enträtselte Entstehungsgeschichte ganz interessant wäre, da sie merkwürdiger Weise der Cosinusreihe sehr nahe kömmt: Ist nämlich α der Winkel, welcher der Supplementarsehne entspricht, so ist $s = d\cdot Co\,{}^1\!/_2\,\alpha$ und $b = (180 - \alpha)\cdot p : 360$, und hiefür geht 8, wenn schliesslich (58 : d) für 180 der indische Wert $\sqrt{10}$ eingeführt wird, successive in

$$\text{Co}\,\frac{\alpha}{2} = 4 \cdot \frac{180^2 - \alpha^2}{4 \cdot 180^2 + \alpha^2} = \frac{40 - 4\,\alpha^2}{40 + \alpha^2} = 1 - \frac{1}{8}\,\alpha^2 + \frac{1}{320} \cdot \alpha^4 - \cdots$$

über, was sich von der Cosinusreihe (40:8) nur dadurch unterscheidet, dass in letzterer α^4 den Faktor $^1/_{384}$ besitzt. — *c.* Ziemlich gleichzeitig mit der früher (5) erwähnten „Sûrya-Siddhânta" erhielten die Araber (16) auch eine andere, etwa ein Jahrhundert später durch **Brahmagupta** verfasste „Siddhânta (Erkenntnis, Wissenschaft in encyklopädischer Form)", von deren mathematischen Abschnitten seither **Colebrooke** in seiner „Algebra. London 1817 in 8." eine englische Übersetzung veröffentlichte, — und es war zunächst diese letztere, respektive eine um 820 durch Mohammed ben Musa **Alkhorizmi** im Auftrage von Almamun unternommene Bearbeitung derselben, durch welche die Araber mit den eben besprochenen goniometrischen Arbeiten der Indier bekannt wurden, so dass wohl hiemit die frühere Annahme zusammenhängt, es habe Mohammed ben Musa den Sinus eingeführt. — *d.* Unter den ältern Arabern scheint namentlich **Albategnius** sofort die Vorzüge der neuen Rechnungsgrössen erkannt zu haben; auch fügte er ihnen zu Gunsten der Gnomonik die, auf den Schatten werfenden Stab als Einheit bezogene **Umbra recta** bei, welche wir jetzt nach dem Vorgange von **Gunter** als **Cotangente** aufführen, — ja berechnete diese Umbra für die Stablänge 12 und jeden Grad, so dass wir ihm also auch eine erste Cotangententafel zu verdanken haben. Etwas später zog ferner **Abul Wefa** den Schatten eines horizontalen Stabes auf eine vertikale Wand, die sog. **Umbra versa**, in Betracht, und berechnete für sie, dem Stabe 60 Einheiten beilegend, ebenfalls eine Tafel, somit nach der bei uns seit **Finke** gebräuchlichen Benennung, eine **erste Tangententafel**; es ist sogar sehr wahrscheinlich, dass er auch unsere **Secans** und **Cosecans** einführte und berechnete, so dass die Araber mutmasslich schon im 10. Jahrhundert alle unsere sog. trigonometrischen Linien und die zu ihrer Verwendung dienlichen Tafeln besassen. — *e.* Die Formeln 1 beruhen teils auf der Annahme, dass der Radius, für welchen früher nach dem Vorgange von **Apian** der Name **Sinus totus** üblich war, gleich der Einheit sei, — teils auf den Definitionen; die 2 aber gehen aus den 1 ohne die mindeste Schwierigkeit hervor. Von den 3 folgen die ersten teils unmittelbar durch Umsetzung der in 61 entwickelten Sätze, — teils aus der Betrachtung, dass ein Winkel gleichzeitig mit seinem Sinus das Zeichen wechselt; die letzten sind Folgen der ersten.



Von den 4 endlich können die vier ersten entweder dadurch erhalten werden, dass man links α und β durch ihre halbe Summe und halbe Differenz ausdrückt und dann 3 anwendet, — oder, wie ich 1846 (Grunerts Archiv 7) zeigte, aus der beistehenden Figur, in welcher $ad = af$ und ac die Bisectrix von $\angle fad$ sein soll, da die Seiten links offenbar der Reihe nach durch $2 \cdot bc$, $2 \cdot ch$, $2 \cdot ab$ und $-2 \cdot dh$ dargestellt werden; die letzte aber ist eine leichte Folge der erstern. — *f.* Von den spätern Arabern erwarben sich **Abul Wefa** und **Ibn Junis** dadurch wesentliche Verdienste, dass sie die Sinus für jede 10. Minute und bis auf Quinten genau berechneten und namentlich auch die nötigen neuen Methoden aufstellten, um die Sinus von $^1/_2{}^0$ und 1^0 mit grösserer Annäherung zu erhalten, als es Ptolemäus möglich gewesen war. So z. B. ging **Abul Wefa** von der nach 3 mit $\text{Si}\,\alpha \cdot \text{Co}\,\beta < \text{Si}\,\alpha$ übereinstimmenden und daher für jede dem ersten Quadranten angehörenden Werte von α und β bestehenden Un-

gleichheit $$\mathrm{Si}\,(\alpha+\beta)-\mathrm{Si}\,\alpha<\mathrm{Si}\,\alpha-\mathrm{Si}\,(\alpha-\beta) \qquad \mathbf{9}$$

aus. Er erhielt nach derselben die Folge von Ungleichheiten

$$\ldots\ldots \mathrm{Si}\,(\alpha+3\beta)-\mathrm{Si}\,(\alpha+2\beta)<\mathrm{Si}\,(\alpha+2\beta)-\mathrm{Si}\,(\alpha+\beta)<\mathrm{Si}\,(\alpha+\beta)-\mathrm{Si}\,\alpha<$$
$$<\mathrm{Si}\,\alpha-\mathrm{Si}\,(\alpha-\beta)<\mathrm{Si}\,(\alpha-\beta)-\mathrm{Si}\,(\alpha-2\beta)<\mathrm{Si}\,(\alpha-2\beta)-\mathrm{Si}\,(\alpha-3\beta)<\ldots\ldots$$

konnte also schliessen, dass nur noch um so mehr die Ungleichheiten

$$\begin{aligned}
\mathrm{Si}\,(\alpha+3\beta)-\mathrm{Si}\,(\alpha+2\beta) &< \mathrm{Si}\,(\alpha+\beta)-\mathrm{Si}\,\alpha<\mathrm{Si}\,\alpha-\mathrm{Si}\,(\alpha-\beta)\\
\mathrm{Si}\,(\alpha+2\beta)-\mathrm{Si}\,(\alpha+\beta) &< \mathrm{Si}\,(\alpha+\beta)-\mathrm{Si}\,\alpha<\mathrm{Si}\,(\alpha-\beta)-\mathrm{Si}\,(\alpha-2\beta)\\
\mathrm{Si}\,(\alpha+\beta)-\mathrm{Si}\,\alpha &= \mathrm{Si}\,(\alpha+\beta)-\mathrm{Si}\,\alpha<\mathrm{Si}\,(\alpha-2\beta)-\mathrm{Si}\,(\alpha-3\beta)
\end{aligned}$$

bestehen. Durch Addition dieser letztern erhält man aber

$$\mathrm{Si}\,(\alpha+3\beta)-\mathrm{Si}\,\alpha<3\,[\mathrm{Si}\,(\alpha+\beta)-\mathrm{Si}\,\alpha]<\mathrm{Si}\,\alpha-\mathrm{Si}\,(\alpha-3\beta) \qquad \mathbf{10}$$

und somit für $\alpha = {}^{15}/_{32}{}^0$ und $\beta = {}^{1}/_{32}{}^0$

$$\mathrm{Si}\,{}^{18}/_{32}{}^0-\mathrm{Si}\,{}^{15}/_{32}{}^0<3\,[\mathrm{Si}\,30'-\mathrm{Si}\,{}^{15}/_{32}{}^0]<\mathrm{Si}\,{}^{15}/_{32}{}^0-\mathrm{Si}\,{}^{12}/_{32}{}^0 \qquad \mathbf{11}$$

Da nun für so kleine Winkel die Sinus nahe proportional den Bogen gesetzt werden dürfen, so kommen sich wegen $18-15=15-12$ der untere und obere Grenzwert so nahe, dass die Mittelgrösse unbedenklich gleich ihrem Mittel, also

$$\mathrm{Si}\,30'=\mathrm{Si}\,{}^{15}/_{32}{}^0+\frac{1}{6}\,[\mathrm{Si}\,{}^{18}/_{32}{}^0-\mathrm{Si}\,{}^{12}/_{32}{}^0] \qquad \mathbf{12}$$

gesetzt werden darf. Nun lassen sich aber nach der von **Ptolemäus** angewandten Methode die Sinus von 36 und 60°, folglich auch durch wiederholtes Halbieren diejenigen von ${}^{36}/_{64}={}^{18}/_{32}$ und ${}^{60}/_{128}={}^{15}/_{32}$, und somit auch derjenige von ${}^{12}/_{32}=4\,({}^{18}/_{32}-{}^{15}/_{32})$, mit jeder beliebigen Genauigkeit berechnen, folglich auch nach 12, mit der ihr zu Grunde liegenden, etwa bis zu einer Einheit in der 9. Decimale reichenden Sicherheit, Si 30' und sodann Si 1°, womit die bei **Ptolemäus** bestehende Schwierigkeit wirklich gehoben ist. — Anhangsweise füge ich noch bei, dass nach **Burckhardt** (Geogr. Ephem. IV 170) die Tafeln von **Ulugh Beg** auch eine von 0—45° reichende Tangententafel enthalten, welche für jede Minute und den Radius 60° bis auf Quarten geht.

63. Die Zeit von Rhäticus und Bürgi. — Leider gelangten die Errungenschaften der Araber nur sehr langsam und fragmentarisch nach dem Abendlande[a], und so mussten dort die **Purbach, Regiomontan** und **Coppernicus,** da sie das Bedürfnis fühlten, genauere Tafeln zu besitzen, als solche durch Umsetzung der Ptolemäischen Sehnentafeln erhältlich waren, dieselben nicht nur neu berechnen[b], sondern sich auch die dafür nötigen und eigentlich zum grossen Teil ebenfalls schon vorhandenen Hilfsmittel selbst schaffen, wobei dann allerdings gleichzeitig manche wertvolle Nebenresultate abfielen[c]. Während so diese Arbeiten nur in Einzelnheiten einen etwelchen Fortschritt repräsentierten und in anderm sogar hinter den Leistungen der Araber zurückblieben, so gelang es dagegen **Rhäticus** und **Bürgi,** sowohl nach Methode als nach Ergebnis, über dieselben hinauszukommen. Die von ersterm berechneten Tafeln sind als ein eigentliches Fundamentalwerk zu bezeichnen, auf dem zum Teil (24:c) die grossen Tafelnwerke des 17. Jahrhunderts basierten, ja durch diese einigermassen noch unsere gegenwärtigen Tafeln be-

ruhen[d], — die von ihm angewandten Methoden sind zum guten Teil originell[e], — und einige von ihm aufgefundene Beziehungen, wie z. B. die Formeln

$$\begin{aligned} \mathrm{Si\ na} &= 2\,\mathrm{Si}\,(n-1)\,a \cdot \mathrm{Co\ a} - \mathrm{Si}\,(n-2)\,a \\ \mathrm{Co\ na} &= 2\,\mathrm{Co}\,(n-1)\,a \cdot \mathrm{Co\ a} - \mathrm{Co}\,(n-2)\,a \end{aligned} \qquad \mathbf{1}$$

welchen ich noch die von seinen Zeitgenossen **Vieta**, **Finke** und **Stevin** gegebenen Formeln

$$\mathrm{Cs\ a} = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Ct}\ \tfrac{1}{2}\,a + \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}\,a] \qquad \mathrm{Ct\ a} = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Ct}\ \tfrac{1}{2}\,a - \mathrm{Tg}\ \tfrac{1}{2}\,a] \qquad \mathbf{2}$$

$$\mathrm{Si}\,(60^0 + a) - \mathrm{Si}\,(60^0 - a) = \mathrm{Si\ a} \qquad \mathrm{Tg}\,(45^0 \pm \tfrac{1}{2}\,a) = \mathrm{Se\ a} \pm \mathrm{Tg\ a} \qquad \mathbf{3}$$

beifüge, sind noch gegenwärtig von Interesse[f]. Was sodann **Bürgi** anbelangt, so sind die zwei von ihm für Berechnung einer zuverlässigen Sinustafel eingeschlagenen Wege, sowohl die anfänglich angewandte „cossische“ Methode[g], als der später aufgefundene, sich mutmasslich an die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}\,(n+2)\,a &= \mathrm{Si\ na} + 2 \cdot \mathrm{Si\ a} \cdot \mathrm{Co}\,(n+1)\,a \\ \mathrm{Co}\,(n+2)\,a &= \mathrm{Co\ na} - 2 \cdot \mathrm{Si\ a} \cdot \mathrm{Si}\,(n+1)\,a \end{aligned} \qquad \mathbf{4}$$

anlehnende „Kunstweg“[h], ebenfalls von hohem wissenschaftlichem Werte und lassen es darum doppelt bedauern, dass nicht nur die Publikation der von ihm berechneten und von seinen Zeitgenossen hochgestellten Tafel durch die Ungunst der Zeiten verhindert wurde, sondern auch diese selbst spurlos verschwunden ist[i].

Zu 63: *a.* Erste Spuren dürften teils die in Paris aufbewahrten Sinustafeln des **Johannes de Lineriis** (mutmasslich aus Lignières bei Amiens gebürtig; um 1370 Prof. math. Paris), teils ein aus der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts stammendes venetianisches Manuskript bilden, welches letztere nach „**Breckmann**, Trigonometrie. Leipzig 1880 in 8.“ unter dem (wohl an den Martologio des Jakobsstabes in 333 erinnernden) Titel „Martorologio“, neben nautischen und trigonometrischen Vorschriften, kleine Sinus-, Tangens- und Secans-Tafeln enthalten soll. — *b.* Die von **Purbach** berechnete Sinustafel hatte das Interval von 10′ und bezog sich auf den Radius 60000, — während **Regiomontan** auf das Interval von 1′ herabging und dagegen den Radius erst auf 600000, dann sogar, unter teilweisem **Abgehen vom Sexagesimalsystem**, auf 10 Millionen erhöhte. Die beiden letztern Tafeln wurden 1533 durch **Schoner** seiner Ausgabe von Regiomontans Trigonometrie (53 : d) beigegeben und derselben auch Purbachs „Tractatus super propositiones Ptolemæi de sinubus et chordis“ beigefügt, jedoch ohne dessen Tafel; ferner mag auf die Schrift „Instrumentum sinuum, seu primi mobilis, nuper a P. **Apiano** inventum. Adjectus est **Purbachii** tractatus sinuum una cum **Regiomontani** tabulis sinuum. Noribergæ 1541 in fol.“ hingewiesen werden. — Als **Rhäticus** 1539 nach Frauenburg reiste, überbrachte er **Coppernicus**, der schon längere Zeit selbständig ein Kapitel über Trigonometrie ausgearbeitet hatte, ein Exemplar derjenigen von **Regiomontan**, welches neuerlich von **Curtze** in Upsala wieder aufgefunden wurde und die Dedikation „Clar. viro D. D. Nicolao Copernico, præceptori suo G. Joachimus“ zeigt, — und da die Tafel, welche **Rhäticus** der von ihm

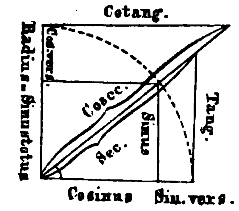
veranstalteten Ausgabe jenes Kapitels, dem „De lateribus et angulis triangulorum rectilinearum tum sphæricorum Libellus. Wittembergæ 1542 in 4. (deutsch durch Menzzer: Halberstadt 1857 in 4.)" beigab, nach Interval und Radius ganz mit der 2. Regiomontan'schen übereinstimmt, so lag ihr letztere auch wohl zu Grunde, obschon kaum ohne dass (und zwar zunächst durch Rhäticus) eine gründliche Prüfung vorangegangen war. Bemerkenswert ist, dass in dieser Tafel von 1542 bereits in jetzt üblicher Weise die Komplementärwinkel beigeschrieben sind und somit die Angabe unrichtig ist, es sei dies zuerst in „Christoph **Grienberger**, Elementa trigonometrica. Romæ 1630" geschehen: In der Hauptschrift „De revolutionibus", für welche die Tafel auf 10' und den Radius 100000 reduziert wurde, ist dies weggeblieben. — Ausser seinen Sinustafeln berechnete **Regiomontan** auch eine Tangententafel für den Radius 100000 und das Interval von 1°, welche er als **Tabula fecunda** seinen „Tabulæ directionum. Noribergæ 1475 in 4." beigab, und sodann Erasmus **Reinhold** für eine 2. Ausgabe (Tubingæ 1554) auf das Interval von 1' und den Radius von 10 Millionen erweiterte. Anderseits fand **Curtze** (Z. f. M. u. Ph. 20 von 1875) eine von **Coppernicus** herrührende Tafel auf, welche für den Sinus totus 10000 als „Ὑποτείνουσα" die Secanten aller Grade enthält, — und Francesco **Maurolico** (Messina 1494 — ebenda 1575; Geistlicher und Prof. math. Messina) gab in einem, verschiedene die Sphärik betreffende Schriften enthaltenden Sammelbande, welchen er „Messanæ 1558 in fol." erscheinen liess, als **Tabula benefica** eine ebensolche, den Radius auf 100000 erhöhend, dagegen dasselbe Interval beibehaltend. — *c.* Die von **Purbach, Regiomontan** und ihren nächsten Nachfolgern zur Erstellung von Tafeln benutzten Methoden stimmten im allgemeinen mit dem Ptolemäischen Verfahren überein, doch zeigen sie auch einzelne Eigentümlichkeiten: Während so z. B. **Regiomontan** Si 3° = $^1/_2$ St 6° nach der frühern, jede beliebige Genauigkeit erlaubenden Weise berechnete, so genügte ihm dagegen zur Bestimmung von Si 1° das Ptolemäische Näherungsverfahren nicht, und man ersieht aus seinem 1464 an Bianchini geschriebenen Briefe, dass er vorzog, hiefür die sich aus 62 : 3 ergebende Beziehung

$$\mathrm{Si}\,3a = \mathrm{Si}\,2a \cdot \mathrm{Co}\,a + \mathrm{Co}\,2a \cdot \mathrm{Si}\,a = 3\,\mathrm{Si}\,a - 4\,\mathrm{Si}^3 a \qquad 5$$

zu benutzen, d. h. eine unreine Gleichung 3. Grades zu lösen, was ihm aber (29) allerdings kaum anders als durch Versuch möglich war. — *d.* Nachdem sich **Rhäticus** zur Lebensaufgabe die Berechnung noch ausgedehnterer Tafeln gewählt hatte, widmete er sich derselben mit einer bewundernswürdigen Ausdauer, — gab in seinem „Canon doctrina triangulorum. Noribergæ 1551 in 4." eine erste Probe von seinen Arbeiten, — suchte und erhielt sodann von Maximilian II., sowie von einigen polnischen und ungarischen Magnaten die ihm nötige pekuniäre Hilfe, um während vielen Jahren mehrere Rechner halten zu können, — starb aber dennoch vor vollständiger Lösung derselben, zum Glücke jedoch einen Schüler, Lucius Valentin **Otho** (Magdeburg 1550? — Heidelberg 1605?; später Mathematikus des Kurfürsten Friedrich IV. von der Pfalz), hinterlassend, welcher seiner Nachfolge gewachsen war, und dann schliesslich auch wirklich das seinem Meister als schönstes Monument dienende „Opus Palatinum de Triangulis. Neostadii 1596 in fol." publizieren konnte. Dieses Werk enthält als Hauptteil einen Auszug aus den von **Rhäticus** berechneten Tafeln, der für jede 10. Sekunde und auf 10 Decimalen von 0—45° **links** die Sinus, Cosinus und Secans, **rechts** die Tangens, Cosecans und Cotangens giebt, unter Beifügung der ersten Differenzen und der Komplementärwinkel. — Als sodann mehrfach bemerkt wurde, dass die Cotangenten und Cosecanten der

ersten Grade nicht eine entsprechende Genauigkeit wie die übrigen Partien besitzen, unternahm Bartholomäus **Pitiscus** (Schlauen in Schlesien 1561 — Heidelberg 1613; Hofprediger von Friedrich IV.), diesem Fehler nachzuhelfen, und da hiefür nicht einmal die aus Othos Nachlass vorhandenen 15stelligen Sinustafeln ausreichten, so berechnete er die Sinus der 6 ersten Grade auf volle 25 Stellen, korrigierte mit ihrer Hilfe die zweifelhaften Angaben und liess sodann für die 86 ersten Seiten des Canons von Rhäticus Kartons drucken, welche durch schlechteres Papier und schlechtere Schrift kenntlich sind, aber bei den meisten Exemplaren fehlen. — Ferner hielt es **Pitiscus** für angegeben, auch jene 15stelligen, sich auf jede Sekunde des ersten Grades und jede 10. Sekunde der übrigen Grade beziehenden Sinustafeln von Rhäticus, samt den beigegebenen Differenzen, unter dem Titel „Thesaurus mathematicus. Francofurti 1613 in fol." aufzulegen, und in einem Anhange, welcher aber wieder bei den meisten Exemplaren fehlt, noch seine 25stelligen Tafeln der 6 ersten Grade beizufügen. — *e.* Auch **Rhäticus** erstellte zunächst für den von ihm zu 1000 Billionen angenommenen Radius ganz nach dem Ptolemäischen Verfahren eine mit dem Interval von 45′ von 0—90° gehende Sinustafel; dann aber setzte er nach beistehendem Schema, von 45′ ausgehend, die Bisection noch so lange fort, bis er bei Nro. 44 einen Winkel erreichte, dessen Sinus nur noch eine Einheit in der 15. Decimale betrug, und benutzte dann diese Tafel, um Kombinationen zu finden, welche ihm mit Hilfe der 62 : 3 auch gewisse andere Sinus zu berechnen ermöglichten: So fand er z. B., dass Nro. 6 — (8 + 11 + 13) = $29^{II}\ 59^{III}\ 33^{IV}\ 37^{V}\ 58^{VI}\ 7^{VII}\ 30^{VIII}$ sei, — konnte somit auch den Sinus dieses Winkels und sodann unter der erlaubten Voraussetzung, dass die Sinus kleiner und nahe gleicher Winkel letztern proportional seien, denjenigen von 30″ berechnen, — folglich auch denjenigen von 33° 45′ + 22′ 30″ + 30″ = 34° 8′, — und somit durch Bisection successive diejenigen von 17° 8′, 8° 32′, 4° 16′, 2° 8′, 1° 4′, 32′, 16′, 8′, 4′, 2′, 1′, 30″ und 15″. Mit Hilfe dieser Fundamentalbestimmungen konnte nun **Rhäticus** ohne Schwierigkeit, aber allerdings nur **durch kolossale Arbeit**, seine Sinustafel vollenden und sodann auch

Nro.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1..	22	30						
2	11	15						
3	5	37	30					
4..	2	48	45					
5	1	24	22	30				
6		42	11	15				
7..	....	21	5	37	30			
8		10	32	48	45			
9		5	16	24	22	30		
10..	....	2	38	12	11	15		
11		1	19	6	5	37	30	
12			39	33	2	48	45	
13..	....	....	19	46	31	24	22	30
14			9	53	15	42	11	15
.			.	.	.	.	.	.
.			.	.	.	.	.	.



$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \mathrm{r}\cdot\frac{\mathrm{Si}\,\alpha}{\mathrm{Co}\,\alpha} \qquad \mathrm{Ctg}\,\alpha = \mathrm{r}\cdot\frac{\mathrm{Co}\,\alpha}{\mathrm{Si}\,\alpha}$$

$$\mathrm{Se}\,\alpha = \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{Co}\,\alpha} \qquad \mathrm{Cs}\,\alpha = \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{Si}\,\alpha}$$

berechnen. — Noch bleibt beizufügen, dass, während die frühern Mathematiker, entsprechend beistehender Figur, die goniometrischen Funktionen an einem Kreise

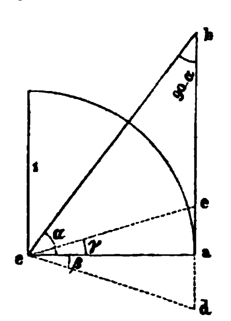
darstellten, dessen Radius der angestrebten Genauigkeit entsprach, schon **Rhäticus** den guten Gedanken hatte, die **Seitenverhältnisse** am rechtwinkligen Dreiecke in Betracht zu ziehen, wenn es auch noch nicht in der uns seit **Euler** gewohnten Form geschah, indem er einfach die Seiten seines „Triquetrum cum recto" als „Hypotenusa, Perpendiculum und Basis" einführte, je die eine gleich 1000 Billionen annehmend und die andern in dieser Einheit berechnend. Allerdings ist es, wie ich schon 1841 betonte, entschieden noch besser, den Seitenverhältnissen die Verhältnisse der Coordinaten (54) zu substituieren, um von vorneherein den ganzen Winkelraum zu beherrschen, und so ohne weiteres einzusehen, dass den 4 Quadranten für

die Funktionen	Sinus	Cosinus	Tangens	Cotangens
die Zeichenfolgen	+ + — —	+ — — +	+ — + —	+ — + —
und Grenzwerte	0 1	1 0	0 ∞	∞ 0

entsprechen, wo je die erste Grenze bei 0° und 180°, die zweite bei 90° und 270° eintrifft, — dass diese Funktionen periodisch sind und (abgesehen vom Zeichen) bei $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ und $360^\circ - \alpha$ je wieder die gleichen Werte annehmen, welche sie für α besassen, — dass man nur echte Brüche als Sinus oder Cosinus, dagegen jede Zahl als Tangens oder Cotangens betrachten, so z. B. immer

$$x = a \cdot \mathrm{Si}\,A \qquad y = a \cdot \mathrm{Co}\,A \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Tg}\,A = x : y \qquad a = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad 7$$

setzen darf, — etc. — *f.* Die aus 62 : 3 leicht folgenden Formeln 1 wurden etwa drei Jahre nach dem Tode von **Rhäticus** von **Vieta** in seinem „Canon mathematicus. Lutetiæ 1579 in fol." ebenfalls gegeben, und da er in demselben auch Sinus, Tangens und Secans, ganz entsprechend wie **Rhäticus**, als Verhältnisse von Perpendikel, Basis und Hypotenuse einführt, so muss man fast annehmen, er habe wenigstens die frühern Arbeiten desselben gekannt, wie dies bei Thomas **Finke** (Flensburg 1561 — Kopenhagen 1656?; Prof. math. et med. Kopenhagen), als er seine „Geometria rotundi. Basileæ 1583 in 4." schrieb, nach dessen eigener Aussage der Fall war. Die aus 62 : 1, 3 leicht folgenden und als Rechnungskontrolen schätzbaren Formeln 2 und die erste 3 scheinen dagegen **Vieta** eigentümlich zu sein, während die zweite 3 durch **Finke** aus beistehender Figur, in welcher $bd = bc$ und $be = ec$ sein soll, abgelesen, und noch später von **Stevin** benutzt wurde, um eine Tangententafel fast mühelos in eine Secantentafel umzusetzen. — *g.* Die „cossische" Methode von **Bürgi** bestand darin, dass er, wenn auch in etwas mühsamerer Weise (vgl. Astr. Mitth. 31 von 1872) als es später durch **Euler** (57 : 6 u. f.) geschah, Beziehungen zwischen der Sehne eines Bogens und derjenigen eines beliebigen aliquoten Teiles (entsprechend der Regiomontan'schen 5 für $^1/_3$) aufstellte, — das allgemeine Gesetz derselben erkannte, wie es durch umstehende Tafel (in welcher Nro. 3 mit 57 : 8 und Nro. 8 mit 57 : 9 übereinstimmt) repräsentiert wird, — und diese Beziehungen vor- und rückwärts, d. h. zum vervielfachen und teilen zu benutzen wusste. Kannte er z. B. die Subtensa a eines Bogens, so entnahm er seiner Tafel, dass ihm die Gleichungen



$$x_1 = 9 \cdot a - 30 \cdot a^3 + 27 \cdot a^5 - 9 \cdot a^7 + a^9$$
$$x_2^2 = 36 \cdot a^2 - 105 \cdot a^4 + 112 \cdot a^6 - 54 \cdot a^8 + 12 \cdot a^{10} - a^{12} \qquad 8$$

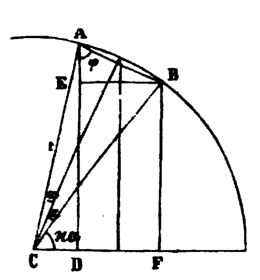
die Subtensen des 9- oder 6-fachen Bogens, und

Nro.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	1											
2		1										
3	3	—	1									
4		4	—	1								
5	5	—	5	+	1							
6		9	—	6	+	1						
7	7	—	14	+	7	—	1					
8		16	—	20	+	8	—	1				
9	9	—	30	+	27	—	9	+	1			
10		25	—	50	+	35	—	10	+	1		
11	11	—	55	+	77	—	44	+	11	—	1	
12		36	—	105	+	112	—	54	+	12	—	1
⋮			⋮			⋮			⋮			⋮

$$a = 9 \cdot x_3 - 30 \cdot x_3^3 + 27 \cdot x_3^5 - 9 \cdot x_3^7 + x_3^9$$

$$a^2 = 36 \cdot x_4^2 - 105 \cdot x_4^4 + 112 \cdot x_4^6 - 54 \cdot x_4^8 + 12 \cdot x_4^{10} - x_4^{12}$$

die Subtensen seines 9. oder 6. Teiles geben können. Allerdings bedurfte er für Anwendung der 9 noch Methoden um höhere numerische Gleichungen auflösen zu können, und es war zu diesem Zwecke, dass er sich die schon früher (31 und 32) behandelten beiden Verfahren ausdachte und zurechtlegte. — Um, wie **Bürgi** es wünschte, den Sinus für jede gerade Sekunde zu erhalten, hatte er die Subtensa für jede 4. Sekunde zu berechnen; da nun 4″ den 324000. Teil des ganzen Kreises ausmachen, so könnte man die Subtensa von 4″ suchen, indem man obige Tafel gehörig verlängern und dann die betreffende Gleichung auflösen würde. Jedoch sagt **Bürgi** launig: „Ich will dirs aber nit rathen diss zu besorgen, du möchtest das Nachtessen darüber versäumen“, und zeigt nun, dass wegen $324000 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ dasselbe viel einfacher erreicht werden könne, indem man erst 5 mal nach Nro. 4, dann 4 mal nach Nro. 3, und endlich 3 mal nach Nro. 5 teile. Nach dieser Vorarbeit könne man sodann verhältnismässig leicht nach der Tafel durch Vervielfachung auf andere Subtensen schliessen, — auch, teils zur Abkürzung, teils zur Kontrole, gewisse goniometrische Sätze, wie z. B. unsere 8′ und 1, beiziehen. — *h.* Immerhin musste sich **Bürgi** eingestehen, dass es „eine sehr langweilige arbeitt“ sei, auf diesem Wege eine grössere Sinustafel zu erstellen, — suchte daher nach andern Methoden, — und fand dann wirklich schliesslich einen ihn befriedigenden, sog. „Kunstweg“, welchen er in seiner „Arithmetica“ in dem leider unvollendet gebliebenen Kapitel „Wie der gantze Canon Sinuum durch die blosse Differentias je zweier Sinuum vom anfang bis zum ende zu erheben sey“ auseinander setzen wollte. Einen etwelchen Ersatz bietet es, dass **Bürgi** schon in der Einleitung zu seiner „Arithmetica“ dieser neuen Methode gedachte, beifügend: „wölliche invention hernach Reimarus unter meinem Namen publicirte“, — und dass sich wirklich auf Fol. 9 des **Reymers**'schen „Fundamentum“ von 1588 ein bezügliches Diagramm findet; aber dasselbe ist so unklar beschrieben, dass man sich dennoch aufs raten legen muss, und hiebei kam ich schliesslich zu der Ansicht, es habe sich **Bürgis** „Kunstweg“ auf ein Interpolationsverfahren



(36 : d), noch wahrscheinlicher aber auf unsere 4 gestützt, welche sich aus beistehender Figur, wo $\varphi = (n+1)\,\alpha$ und $AB = 2 \cdot Si\,\alpha$ ist, unmittelbar ablesen lassen; denn, wenn man einmal für irgend ein α Sinus und Cosinus bestimmt hat, so findet man nach ihnen, indem man $n = 0, 1, 2, \ldots$ setzt, successive die Sinus und Cosinus von 2α, 3α, $4\alpha, \ldots$, besonders wenn man sich eine Vielfachentafel von AB anlegt, wirklich in überraschend einfacher Weise durch blosse Additionen und Subtraktionen. Als ich später in „**Bramer**, Problema. Marpurg 1614 in 4." eine der vorstehenden ähnliche Methode entwickelt fand, wurde ich von der Richtigkeit meiner Ansicht nur noch mehr überzeugt, da **Bramer** wiederholt, ohne seinen Schwager und Lehrer zu nennen, Ideen desselben weiter ausgeführt hat. — *f.* Unbestrittene Thatsache ist, dass **Bürgi** schon geraume Zeit vor 1588 eine nach Doppelsekunden fortlaufende 8stellige Sinustafel erstellt hatte, nach welcher sich z. B. **Tycho** 1592 in einem Briefe an Rothmann angelegentlich erkundigte, — dass aber die damals schon beabsichtigte Publikation, in welcher die „Arithmetica" als Einleitung erscheinen sollte, immer aufgeschoben wurde, bis sie endlich durch die Zeitläufte, und vielleicht auch durch das Erscheinen des „Opus Palatinum", ganz dahin fiel.

64. Die Reform der Goniometrie durch und seit Euler.

— Die Grundlage der Reform, welche die Goniometrie durch **Euler** erfuhr, ist schon früher (40) gegeben worden, und es bleiben nur noch einige weitere Folgerungen nachzutragen: Führt man in 40 : 7, 8 für x links $m \cdot 90^0$, rechts $m \cdot {}^1/_2\pi$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} Si\, m \cdot 90^0 = m &\cdot 1{,}570\,7963 & Co\, m \cdot 90^0 = &\cdot 1{,}000\,0000 \\ - m^3 &\cdot 0{,}645\,9641 & - m^2 &\cdot 1{,}233\,7006 \\ + m^5 &\cdot 0{,}079\,6926 & + m^4 &\cdot 0{,}253\,6695 \\ - m^7 &\cdot 0{,}004\,6818 & - m^6 &\cdot 0{,}020\,8635 \\ + m^9 &\cdot 0{,}000\,1604 & + m^8 &\cdot 0{,}000\,9193 \\ - m^{11} &\cdot 0{,}000\,0036 & - m^{10} &\cdot 0{,}000\,0252 \\ + m^{13} &\cdot 0{,}000\,0001 & + m^{12} &\cdot 0{,}000\,0004 \\ - &\cdots & - &\cdots \end{aligned} \qquad 1$$

und hieraus für $m = 0{,}00000\,30864$

$$Si\, 1'' = 0{,}00000\,48481 = 1 : 206\,264{,}8 = \overline{4}{,}6855\,7487$$

sowie, wenn a eine kleinere Anzahl von Sekunden bezeichnet,

$$Si\, a = a \cdot Si\, 1'' \qquad a = Si\, a : Si\, 1'' \qquad Co\, a = 1 \qquad 2$$

und ähnliche Reihen und Beziehungen könnten auch für Tangens und Cotangens abgeleitet werden[a]. — Ferner kann man zeigen, dass auch die Gleichheiten

$$Si\; m \cdot 90^0 = \frac{m \cdot \pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} m^2\right) \left(1 - \frac{1}{16} m^2\right) \left(1 - \frac{1}{36} m^2\right) \cdots$$

$$Co\, m \cdot 90^0 = (1 - m^2) \left(1 - \frac{1}{9} m^2\right) \left(1 - \frac{1}{25} m^2\right) \left(1 - \frac{1}{49} m^2\right) \cdots \qquad 3$$

bestehen, nach welchen sich die Logarithmen der Sinus und Cosinus mit Hilfe von 39 : 3 unmittelbar berechnen lassen [b]. — Endlich mag noch Erwähnung finden, dass, infolge der namentlich durch und seit **Euler** erreichten Leichtigkeit im mathematischen Schreiben und Umgestalten, das Aufstellen goniometrischer Formeln zum leichten Spiele geworden ist [c] und so z. B. die Beziehungen

$$\frac{\pi}{4} = \text{Atg}\,{}^1\!/_2 + \text{Atg}\,{}^1\!/_3 = \text{Atg}\,{}^1\!/_2 + \text{Atg}\,{}^1\!/_5 + \text{Atg}\,{}^1\!/_8 = 5\,\text{Atg}\,\frac{1}{7} + 2\,\text{Atg}\,{}^3\!/_{79} \qquad \mathbf{4}$$
$$= 4\,\text{Atg}\,{}^1\!/_5 - \text{Atg}\,{}^1\!/_{239} = 2\,\text{Atg}\,{}^1\!/_3 + \text{Atg}\,{}^1\!/_7 = 4\,\text{Atg}\,{}^1\!/_5 - \text{Atg}\,{}^1\!/_{70} + \text{Atg}\,{}^1\!/_{99}$$

etc., erhalten wurden, welche in Verbindung mit der umgekehrten Tangentenreihe (40 : 17) viel leichtere Mittel zur Berechnung von π geben, als die früher (59, 60) dafür benutzten centrischen Vielecke [d].

Zu 64: *a.* **Euler**, der schon 1739 unter dem Titel „Methodus facilis computandi angulorum Sinus ac Tangentes tam naturales quam artificiales" eine betreffende Abhandlung geschrieben hatte, welche aber erst 1750 in den Petersb. Comment. jenes Jahres erschien, gab 1748 in seiner „Introductio" die beiden Reihen 1 bis auf 28 Decimalen und bis zur 30. Potenz von m, so dass man nach ihnen jede wünschbare Genauigkeit erlangen konnte. — *b.* Für die Ableitung der ebenfalls von **Euler** zuerst aufgestellten 3 vgl. Kap. 9 von dessen „Introductio", sowie die neuern Lehrbücher der Analysis. — *c.* So z. B. bestehen die nach dem frühern leicht zu verifizierenden Beziehungen

$$1 + \text{Si}\,\varphi = 2\,\text{Co}^2(45^0 - {}^1\!/_2\,\varphi) \qquad 1 - \text{Si}\,\varphi = 2\,\text{Si}^2(45^0 - {}^1\!/_2\,\varphi) \qquad \mathbf{5}$$
$$\text{Co}(45^0 - {}^1\!/_2\,\varphi) - \text{Si}(45^0 - {}^1\!/_2\,\varphi) = \sqrt{2}\cdot\text{Si}\,{}^1\!/_2\,\varphi \qquad \text{Si}(45^0 \pm \varphi) = \text{Co}(45^0 \mp \varphi)$$
$$\text{Co}^3\varphi - \text{Si}^3\varphi = (\text{Co}\,\varphi - \text{Si}\,\varphi)\cdot(1 - {}^1\!/_2\,\text{Si}\,2\varphi) \qquad \mathbf{6}$$
$$\text{Si a}\cdot\text{Si}(\text{b}-\text{c}) + \text{Si b}\cdot\text{Si}(\text{c}-\text{a}) + \text{Si c}\cdot\text{Si}(\text{a}-\text{b}) = 0 \qquad \mathbf{7}$$
$$\text{Co a}\cdot\text{Si}(\text{b}-\text{c}) + \text{Co b}\cdot\text{Si}(\text{c}-\text{a}) + \text{Co c}\cdot\text{Si}(\text{a}-\text{b}) = 0$$

etc., etc. — *d.* Für m = 1 folgt aus 3'

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - {}^1\!/_{16}\right)\left(1 - {}^1\!/_{36}\right)\cdots \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots} \qquad \mathbf{8}$$

eine schon von **Wallis** aufgefundene, höchst merkwürdige Faktorielle, welche aber so wenig als der von Lord **Brouncker** ungefähr gleichzeitig gegebene Ausdruck

$${}^1\!/_4\,\pi = 1 : [1 + 1 : (2 + 9 : (2 + 25 : (2 + 49 : (2 + \cdots))))] \qquad \mathbf{9}$$

für die wirkliche Berechnung von π taugt, da die Konvergenz eine gar zu geringe ist. Setzt man dagegen mit **Euler** (Introd. I 106) $45^0 = a + b$ und $\text{Tg a} = {}^1\!/_2$, so giebt 62 : 3, da $\text{Tg}\,45^0 = 1$ ist, $1 = ({}^1\!/_2 + \text{Tg b}) : (1 - \text{Tg b})$ oder $\text{Tg b} = {}^1\!/_3$, womit die erste der 4 erwiesen ist, und aus dieser folgt (40 : 17) sofort

$$\pi = 4\left[\begin{array}{l}\frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{3\cdot2^3} + \frac{1}{5\cdot2^5} - \frac{1}{7\cdot2^7} + \frac{1}{9\cdot2^9} - \cdots + \\ \frac{1}{1\cdot3} - \frac{1}{3\cdot3^3} + \frac{1}{5\cdot3^5} - \frac{1}{7\cdot3^7} + \frac{1}{9\cdot3^9} - \cdots\end{array}\right] \qquad \mathbf{10}$$

d. h. eine Reihe, woraus sich schon unter Anwendung von nur 7 Gliedern der ersten und 5 Gliedern der zweiten Zeile der ganz brauchbare Wert $\pi = 3{,}14160$ ergiebt. Zum Teil noch wesentlich rascher führen andere der 4, welche sämtlich ganz entsprechend erhalten und benutzt werden, zum Ziele, und es scheinen diese Verfahren in der neuern Zeit ausschliesslich angewandt worden

zu sein: Schon Abr. **Sharp** und John **Machin** (1680? — London 1752; Prof. Astr. London) berechneten π nach der dritten unserer 4 und ähnlichen, ihnen mutmasslich durch **Halley** mitgeteilten Formeln, und zwar der erstere auf 72, der zweite sogar auf 100 Decimalen. Sodann gab Thomas Fantet de **Lagny** (Lyon 1660 — Paris 1734; erst. Prof. Hydrogr. Rochefort, dann Akad. Paris), ohne sich über das angewandte Verfahren auszusprechen, π (Mém. Par. 1719) auf 127 Stellen, welche nachher auch **Euler**, ohne Prüfung und ohne seine Quelle zu nennen, in seiner „Introductio“ abdrucken liess. Als etwas später **Vega** (vgl. pag. 633 seines Thesaurus, und Acta Petrop. 9 von 1795) π nach unserer Nro. 5 auf 140 Stellen berechnete, stimmten die ersten 126 Stellen mit den von **Lagny** und **Euler** gegebenen überein, **mit einziger Ausnahme** der 113. Stelle, wo er statt 7 eine 8 fand, und dies veranlasste **Vega** seine Rechnung nach Nro. 3 zu wiederholen, wobei die 8 wieder erschien, folglich ein von **Lagny** nicht bemerkter Druckfehler und die von **Euler** benutzte Quelle entdeckt war, — zwei Entdeckungen, die allerdings **Vega** etwas teuer zu stehen kamen. Ein von **Zach** zu Ende des vorigen Jahrhunderts in Oxford aufgefundenes Manuskript von unbekannter Herkunft gab π auf 154 Stellen, welche später **Thibaut** in seinem „Grundrisse (5. A. von 1831, pag. 287)“ veröffentlichte, — und 1844 berechnete (vgl. Crelles Journ. 27) Zacharias **Dase** (Hamburg 1824 — ebenda 1861; Schnellrechner) im Laufe von kaum zwei Monaten nach der ihm von Prof. **Schulz** in Wien bekannt gegebenen Nro. 2 die 200 Decimalen

$$
\begin{aligned}
\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\\
83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\\
58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\\
20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679\\
82148\ 08651\ 32823\ 06647\ 09384\\
46095\ 50582\ 23172\ 53594\ 08128\\
48111\ 74502\ 84102\ 70193\ 85211\\
05559\ 64462\ 29489\ 54930\ 38196
\end{aligned}
$$

von welchen die 152 ersten sich nachträglich als genau übereinstimmend mit dem zur Zeit der Berechnung weder **Schulz** noch **Dase** bekannten Oxforder Manuskript erwiesen. Als **Dase**, bei Rückkehr nach Hamburg, **Schumacher** sein Resultat vorlegte, erfuhr er von diesem, dass auch Will. **Rutherford** π auf volle 208 Stellen, Thomas **Clausen** (Nübel in Schleswig 1801 — Dorpat 1885; Dir. Obs. Dorpat) sogar auf 250 Stellen berechnet habe: Die Vergleichung ergab, dass **Dase** mit **Rutherford** (Phil. Trans. 1841), der nach Nro. 6 gerechnet hatte, nur bis zur 152. Stelle (also genau bis zum Abschlusse der Oxforder-Angabe) übereinstimmte, — mit **Clausen** (A. N. 589 von 1847) dagegen, der nach Nro. 4 und 5 eine Doppelrechnung ausführte, bis zur 200. Stelle. Es sind also die 200 Stellen von **Dase** sicher richtig und reichten auch für mich hin, in einem Anhange zu meinen „Drei Mittheilungen über neue Würfelversuche. Zürich 1881—83 in 8.“, in Übereinstimmung mit den durch **Lindemann** und Charles **Hermite** (Dieuze 1822 geb.; Prof. math. Paris) erhaltenen theoretischen Resultaten, den empirischen Beweis zu leisten, dass die Folge der Decimalen von π sich ganz wie eine gesetzlose Reihe von gleicher Ausdehnung verhalte. Noch weiter zu gehen, wie es neuerlich durch **Richter** in Elbing (500 Decimalen) und W. **Shanks** (707 Decimalen) geschehen sein soll, dürfte denn doch als Zeitvergeudung bezeichnet werden.

65. Die ebene Trigonometrie vor Euler. — Nachdem **Ptolemäus** seine Sehnentafel erstellt hatte, konnte er dieselbe auch für Berechnung des ebenen Dreieckes verwerten: Da sich nämlich (55) um jedes Dreieck ein Kreis beschreiben lässt, so ist jede Seite die Sehne des doppelten Gegenwinkels und es besteht somit die, zuweilen fälschlich nach **Snellius** benannte, Analogie „Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sehnen der doppelten Gegenwinkel“ oder also „wie die Sinus der Gegenwinkel“; da er überdies jedes Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerfällen konnte und sowohl mit dem pythagoräischen Lehrsatze, als mit dessen Erweiterung auf das schiefwinklige Dreieck, bekannt war, so besass er bereits die Mittel, alle Aufgaben der sog. ebenen **Trigonometrie** zu lösen. Eine wertvolle Ergänzung bildet immerhin die nach **Heron** benannte Regel, dass ein Dreieck der Seiten a, b, c und des halben Umfanges $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ die Fläche

$$f = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \qquad 1$$

besitzt[a], welche in Verbindung mit der von **Regiomontan** zuerst aufgestellten Regel

$$f = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \mathrm{Si}\, A \quad \text{uns} \quad \mathrm{Si}\, A = \frac{2}{bc} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad 2$$

ergiebt, an welche Formel sich noch die weitern

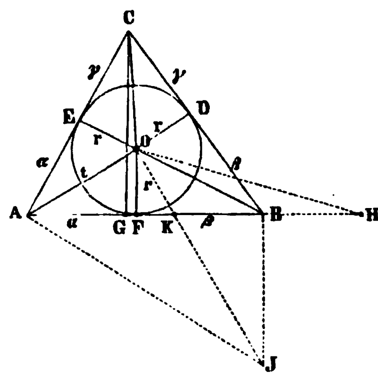
$$\mathrm{Si}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b \cdot c}} \quad \mathrm{Co}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{b \cdot c}} \quad \mathrm{Tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s \cdot (s-a)}} \qquad 3$$

anschliessen[b], sowie die merkwürdige Analogie

$$(a+b) : (a-b) = \mathrm{Tg}\, \tfrac{1}{2}(A+B) : \mathrm{Tg}\, \tfrac{1}{2}(A-B) \qquad 4$$

welche den Namen von **Finke** tragen sollte[c].

Zu 65: *a.* Die Flächenregel 1 wurde durch **Heron** von Alexandrien in der von ihm etwa ein Jahrhundert v. Chr. verfassten und noch später (330) zu besprechenden Schrift „Dioptra“ mitgeteilt und wesentlich in folgender Weise abgeleitet: Ist r der Radius des dem Dreiecke ABC eingeschriebenen und auf dessen Seiten die Segmente α, β, γ bestimmenden Kreises, sowie $BH = \gamma$ oder $AH = \alpha + \beta + \gamma = s$, so hat man



$$f = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = s \cdot r = 2 \cdot \triangle AOH \qquad 5$$

Zieht man aber $OJ \perp AO$ und $BJ \perp AB$, so ist AJ der Durchmesser eines durch O und B gehenden Kreises, also $\angle AJB = 180^\circ - AOB = \frac{1}{2}(EOF + FOD + DOE) - AOB = AOF + FOB + COD - AOB = COD$, folglich $\triangle ABJ \sim CDO$, während ohnehin $\triangle BKJ \sim FKO$. Man hat daher $(\alpha + \beta) : \gamma =$

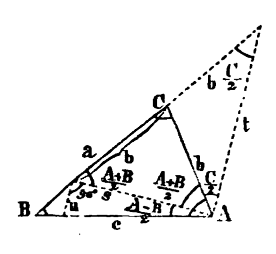
$BJ : r = BK : FK$ oder $s : \gamma = \beta : FK = \alpha \cdot \beta : r^2$, und somit nach 5

$$f = \sqrt{s^2 \cdot r^2} \qquad \text{wo} \qquad r^2 = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{s} \qquad 6$$

womit offenbar unsere 1 erwiesen ist. — *b.* Die aus $f = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CG$ sofort hervorgehende Flächenregel 2 wurde durch **Regiomontan** in Satz 26 des 2. Buches seiner Schrift „De triangulis" zuerst ausgesprochen. Da ferner laut Figur und 6

$$\text{Si}\frac{A}{2} = \frac{r}{t} \qquad \text{Co}\frac{A}{2} = \frac{\alpha}{t} \qquad \text{Tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{\alpha} \qquad t^2 = r^2 + \alpha^2 = \frac{\alpha}{s} \cdot b \cdot c \qquad 7$$

so erhält man auch die drei 3, deren zwei erste in „**Schooten,** Exercitationum mathematicarum libri V. Lugd. Bat. 1657 in 4." einem sonst unbekannten englischen Mathematiker Will. **Purser** zugeschrieben werden, während die dritte bei **Rhäticus** in Form einer Analogie erscheint. — *c.* Die 4 lässt sich aus der beistehenden, von mir schon früher (Grunerts Archiv 1846) mitgeteilten Figur ganz leicht ablesen, indem aus ihr



$$(a + b) : (a - b) = t : u = (t : s) : (u : s)$$

folgt, — und ebenso ergeben sich aus derselben die von Karl Brandan **Mollweide** (Wolfenbüttel 1774 — Leipzig 1825; Prof. Math. Halle und Leipzig) schon 1808 in der Monatl. Corresp. aufgestellten Proportionen

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\text{Co}\,\frac{1}{2}(A - B)}{\text{Si}\,\frac{1}{2}C} \qquad \frac{a - b}{c} = \frac{\text{Si}\,\frac{1}{2}(A - B)}{\text{Co}\,\frac{1}{2}C} \qquad 8$$

Es bleibt beizufügen, dass der durch 4 repräsentierte Satz zuerst durch Th. **Finke** in seiner bereits (63) erwähnten „Geometria rotundi" ausgesprochen wurde, wenn auch in der sehr schwerfälligen, nur von **Tycho** (vgl. meine Notiz in Astr. Viert. 15) noch überholten Form: „Ut semissis summæ crurum [$\frac{1}{2}(a + b)$] ad differentiam summæ semissis alteriusque cruris [$\frac{1}{2}(a + b) - b$], sic tangens semissis anguli crurum exterioris [Tg $\frac{1}{2}(180^0 - C)$] ad tangentem anguli quo minor interiorum semisse dicti reliqui minor est [Tg ($\frac{1}{2}(180 - C) - B$)], aut major, major", — dann aber in ganz einfacher und unserer 4 entsprechender Form durch P. **Crüger** in seiner überhaupt trefflichen „Synopsis Trigonometriæ. Dantisci 1612 in 12.", in welcher auch der erweiterte pythagoräische Lehrsatz in die, zur Bestimmung der Segmente und dadurch der Winkel, bequeme Analogie „Wie sich die grösste Seite eines Dreiecks zur Summe der beiden andern Seiten verhält, so verhält sich die Differenz der Letztern zur Differenz der Segmente der Erstern" übergeführt ist.

66. Die ebene Trigonometrie seit Euler. — Während es bis in die Mitte des vorigen Jahrhunderts Übung blieb, die trigonometrischen Rechnungsvorschriften in Lehrsätze, und namentlich in Proportionen oder sog. Analogien, einzukleiden, auch nur ausnahmsweise Schlussformeln aufzustellen, und in der Regel die Vorschriften bei jeder einzelnen Aufgabe successive durchzuführen, so vollzog sich nun plötzlich, auf die Initiative von **Euler** hin, ein totaler Umschwung: Dieser grosse Geometer hatte nämlich die glückliche Idee, die Seiten eines Dreieckes mit a, b, c und ihre Gegenwinkel mit A, B, C zu bezeichnen, und da er überdies die bereits früher (64)

hervorgehobene Gewandtheit im Schreiben und Umgestalten analytischer Ausdrücke besass, so gelang es ihm alsbald, jene zum Teil schwerfälligen Vorschriften durch die eleganten und übersichtlichen Formeln zu ersetzen, deren wir uns jetzt erfreuen und die wir auch schon in dem vorhergehenden anticipando gebraucht haben, um die Rechnungsvorschriften der frühern Zeit darzustellen [a]. Der Formelnvorrat selbst wurde, soweit es die ebene Trigonometrie anbelangt, nicht sehr bedeutend vermehrt, ja es bleiben den unter der vorhergehenden Nummer gegebenen nur etwa noch die aus ihnen leicht erhältlichen Formeln

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \mathrm{Co}\,A = (b+c+d)(b+c-d) \quad \text{wo} \quad d = 2\sqrt{bc} \cdot \mathrm{Co}\,{}^1/_2 A \qquad \mathbf{1}$$

$$c = a \cdot \mathrm{Co}\,B + b \cdot \mathrm{Co}\,A$$

$$\mathrm{Tg}\,{}^1/_2(A-B) = \mathrm{Tg}(45^\circ - \varphi) \cdot \mathrm{Ct}\,{}^1/_2 C \quad \text{wo} \quad \mathrm{Tg}\,\varphi = b : a \qquad \mathbf{2}$$

beigefügt zu werden, um eine ziemliche Vollständigkeit erzielt zu haben [b].

Zu 66: *a.* Der grosse Fortschritt in der Trigonometrie, und speciell die an das Ei des Columbus erinnernde rationelle Bezeichnung der Seiten und Winkel, datiert von der Abhandlung „**Euler**, Principes de la Trigonométrie sphérique (Mém. Berl. 1753)", aber immerhin zeigte sich auch da, wie langsam sich ein solcher vollständig Bahn bricht: Noch 1785 bezeichnete **Boscovich** die Seiten mit x, y, z, die Winkel mit p, q, r, — noch 1786 **Cagnoli** zwar die Winkel mit A, B, C, aber die Seiten mit BC, AC, AB, — etc. — Auffallend ist mir, dass nicht schon **Euler**, der doch die Formeln 65 : 1—3 kannte, auch daran dachte, den halben Umfang mit Einem Buchstaben zu bezeichnen und als Hilfsgrösse einzuführen, und dass dies erst, nachdem **Delambre** 1814 in seiner „Astronomie" (aber nur einmal I 232) einen blossen Anlauf genommen hatte, durch **Bowditch** (1829 in Bd. 1 seiner Übers. der Méc. cél.) und **Santini** (1830 in Bd. 1 seiner Astronomie) wirklich effektuiert wurde. — *b.* Dass sich für den speciellen Fall eines rechtwinkligen Dreiecks die allgemeinen Formeln noch etwas vereinfachen, ist selbstverständlich, und überdies hat **Lalande** für dasselbe die sich nach 62 : 2 für $C = 90^\circ$ leicht ergebende Formel

$$\mathrm{Tg}\,\frac{A}{2} = \frac{\mathrm{Si}\,A}{1 + \mathrm{Co}\,A} = \frac{a}{b+c} \qquad \mathbf{3}$$

aufgefunden, während **Snellius** und **Lambert** Näherungsformeln entwickelten, um aus den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks einen der spitzen Winkel ohne Hilfe trigonometrischer Tafeln finden zu können: Bezeichnet nämlich $\alpha' = \alpha \cdot \mathrm{Si}\,1'' = \alpha : \mu$, wo $\mu = 206265$ ist, den Bogenwert von α, so hat man (40 : 7, 8)

$$\mathrm{Si}\,\alpha = \alpha' - {}^1/_6 \cdot \alpha'^3 + {}^1/_{120} \cdot \alpha'^5 - \cdots \qquad \mathrm{Co}\,\alpha = 1 - {}^1/_2 \cdot \alpha'^2 + \frac{1}{24}\alpha'^4 - \cdots$$

und daher, je nachdem man mit **Snellius** bei der 3. oder mit **Lambert** bei der 5. Potenz von α' stehen bleibt,

$$\alpha = \frac{3 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}{2 + \mathrm{Co}\,\alpha} \cdot \mu \qquad \text{oder} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{Si}\,\alpha\,(14 + \mathrm{Co}\,\alpha)}{3\,(3 + 2 \cdot \mathrm{Co}\,\alpha)} \cdot \mu$$

und daher, wenn $\alpha = A$, $\mathrm{Si}\,\alpha = a : c$, $\mathrm{Co}\,\alpha = b : c$ gesetzt wird,

$$A = \frac{3a\mu}{2c + b} \qquad \text{oder} \qquad A = \frac{a \cdot (14 \cdot c + b)\,\mu}{3c\,(3c + 2b)} \qquad \mathbf{4}$$

wodurch in der That das Verlangte geleistet ist. — Für weitere Entwicklungen und Anwendungen muss auf die zahlreichen Specialschriften verwiesen werden, wie z. B. auf „Thom. **Simpson**, Trigonometry plane and spherical. London 1765 in 8., — Andrea **Cagnoli** (Zante 1743 — Verona 1816; Dir. Obs. Mailand, dann Prof. astr. Modena; vgl. Carlini, Notizie. Modena 1819 in 4.), Trigonometria piana e sferica. Paris 1786 in 4. (2. ed. Bologna 1804; franz. durch Chompré: Paris 1786 und 1808), — Christoph Friedrich v. **Pfleiderer** (Kirchheim 1736 — Tübingen 1821; Prof. math. et phys. Warschau und Tübingen) und G. Fr. v. **Bohnenberger**, Ebene Trigonometrie mit Anwendungen und Beiträgen zur Geschichte derselben. Tübingen 1802 in 8., — Joh. August **Grunert** (Halle 1797 — Greifswalde 1872; Prof. math. Greifswalde), Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie. Leipzig 1837 in 8., — Jos. **Dienger**, Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart 1855 in 8., — E. **Hammer**, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart 1885 in 8., — etc."

67. Die Tetragonometrie und Polygonometrie. — Da man jedes Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerfällen kann, so ist die Wegleitung gegeben, die Trigonometrie auch auf Aufgaben am Vierecke anzuwenden und es ist dies wirklich schon frühe, bald in speciellerer, wie z. B. durch **Snellius** [a], bald in allgemeinerer Weise, wie wohl zuerst durch **Girard** [b], mit Erfolg geschehen. Auch die entsprechende, diese sog. **Tetragonometrie** natürlich mit umfassende, Anwendung der trigonometrischen Beziehungen auf das Vieleck im allgemeinen, die sog. **Polygonometrie**, ist mehrfach bearbeitet worden. Ich muss mich jedoch darauf beschränken, einige grundlegende Beziehungen in folgender Weise abzuleiten: Bezeichnen $a_1\, a_2 \ldots a_n$ die Seiten, $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ aber die Drehwinkel eines n-Ecks, und $x_1\, y_1,\ x_2\, y_2, \ldots x_n,\ y_n$ die Coordinaten seiner Ecken in Beziehung auf a_1 als Axe und den Anfangspunkt von a_1 als Pol, so hat man offenbar

$$\begin{array}{lll} x_1 = a_1 & x_2 = x_1 + a_2 \cdot \mathrm{Co}\,\alpha_1 \;\cdots & x_h = x_{h-1} + a_h \cdot \mathrm{Co}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{h-1}) \cdots \\ y_1 = 0 & y_2 = y_1 + a_2 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha_1 \;\cdots & y_h = y_{h-1} + a_h \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{h-1}) \cdots \end{array}$$

und daher je durch Addition, da offenbar $x_n = 0$ und $y_n = 0$,

$$\begin{array}{l} 0 = a_1 + a_2 \cdot \mathrm{Co}\,\alpha_1 + a_3 \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha_1 + \alpha_2) + \cdots + a_n \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}) \\ 0 = \quad\quad a_2 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha_1 + a_3 \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha_1 + \alpha_2) + \cdots + a_n \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}) \end{array} \quad \mathbf{1}$$

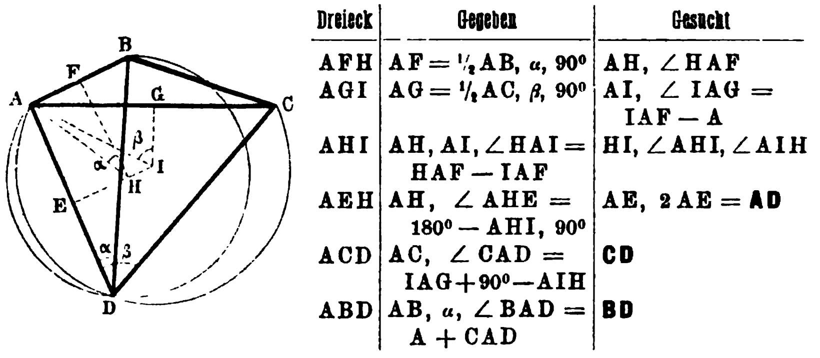
wozu noch (54), wenn r die Anzahl der Umdrehungen zählt,

$$4rR = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n \quad \mathbf{2}$$

hinzutritt. Aus diesen Grundgleichungen lassen sich sodann, analog wie es **Lexell** und **Lhuilier** im Detail ausgeführt haben [c], Formeln zur Berechnung einzelner Elemente aus den übrigen herleiten [d].

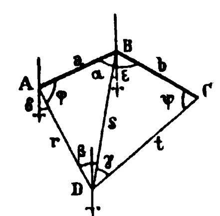
Zu 67: *a.* Will. **Snellius** löste, wenn man nicht mit **Oudemans** (Astr. Viert. 22 von 1887) auf eine von **Ptolemäus** behandelte und in der That sehr verwandte **astronomische** Aufgabe (210) zurückgreifen will, in seinem „Eratosthenes

batavus. Lugd. Batav. 1617 in 4." **zuerst** die, ungeschickter Weise später nicht nach ihm, sondern nach Laurent **Pothenot** (1660? — Paris 1732; Prof. math. und Akad. Paris), der sie 1692 als „Problème de géométrie pratique (Anc. Mém. Par. X)" neuerdings behandelte, benannte **geodätische** Aufgabe, die Lage eines Standpunktes D gegen drei bekannte Punkte A, B, C mit Hilfe der in D gemessenen Winkel α und β zu bestimmen, — und zwar zeigt das der Figur beigesetzte Schema, in welcher Weise sich **Snellius** bis zur Bestimmung der



Dreieck	Gegeben	Gesucht
AFH	$AF = \frac{1}{2}AB$, α, 90°	AH, $\angle$ HAF
AGI	$AG = \frac{1}{2}AC$, β, 90°	AI, $\angle$ IAG = IAF − A
AHI	AH, AI, $\angle$ HAI = HAF − IAF	HI, $\angle$ AHI, $\angle$ AIH
AEH	AH, $\angle$ AHE = 180° − AHI, 90°	AE, 2 AE = **AD**
ACD	AC, $\angle$ CAD = IAG + 90° − AIH	**CD**
ABD	AB, α, $\angle$ BAD = A + CAD	**BD**

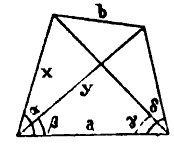
AB, CD und BD durcharbeitete. Jetzt geht allerdings die Sache leichter, indem man nach den aus Fig. und 62 : 4 folgenden Formeln



$$\varphi + \psi = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad \mathrm{Tg}\, x = \frac{\mathrm{Si}\,\psi}{\mathrm{Si}\,\varphi} = \frac{a \cdot \mathrm{Si}\,\gamma}{b \cdot \mathrm{Si}\,\beta} \qquad \mathbf{3}$$

$$\mathrm{Tg}\, \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \mathrm{Tg}\, \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) \cdot \mathrm{Ct}\,(45^0 + x)$$

erst die φ und ψ und sodann nach der Sinus-Proportion auch r, s und t berechnet. Für eine Reihe anderer, vorzugsweise graphischer Lösungen vgl. „**Gerling**, Die pothenot'sche Aufgabe: Marburg 1840 in 8." Für annähernde Bestimmungen kann man auch, nach dem Vorschlage von **Horner**, β und γ auf Strohpapier auftragen und D durch Versuch ermitteln, — oder, wenn man AB und ihre Orientierung ($\delta + \varphi$) kennt, die auf D an der Boussole für AD und BD gemachten Ablesungen δ und ε bei A und B antragen, — etc. — Eine andere, ebenfalls wichtige Aufgabe besteht darin, eine Distanz (a oder b) aus einer andern (b oder a) und den durch Messung bestimmten Winkeln α, β, γ, δ abzuleiten. Da nun wegen der Sinus-Proportion und 66 : 1



$$x : a = \mathrm{Si}\,\gamma : \mathrm{Si}\,(\alpha + \gamma) \qquad y : a = \mathrm{Si}\,\delta : \mathrm{Si}\,(\beta + \delta)$$

$$b^2 = (x + y + d)(x + y - d) \quad \text{wo} \quad d = 2\sqrt{x \cdot y} \cdot \mathrm{Co}\, \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

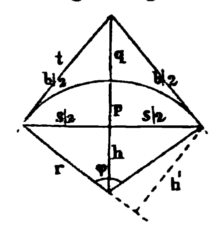
so ergiebt sich zur Lösung jener Doppelaufgabe die Formel

$$b = a \cdot \sqrt{(f + g + h)(f + g - h)}$$

wo $$f = \frac{\mathrm{Si}\,\gamma}{\mathrm{Si}\,(\alpha + \gamma)} \qquad g = \frac{\mathrm{Si}\,\delta}{\mathrm{Si}\,(\beta + \delta)} \qquad h = 2\sqrt{f \cdot g} \cdot \mathrm{Co}\, \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \qquad \mathbf{4}$$

Auch diese Aufgabe ist successive von **Swinden**, **Gerling**, **Hansen**, etc. gelöst worden; ihr den Namen des letzterwähnten beizulegen, ist ein abusus. — *b.* Vgl. für die betreffenden Arbeiten von **Girard** dessen „Tables des sinus, tangentes et sécantes selon le raid de 10000 parties, avec un traité succinct de la trigonométrie tant des triangles plans que sphériques. A la Haye 1616

in 12.", — für spätere: **Lambert** in Bd. 2 seiner „Beiträge", — ferner „St. **Biörnsen**, Introductio in Tetragonometriam. Hafniæ 1780 in 8., — etc." — *c.* Vgl. „Anders **Lexell** (Abo 1740 — Petersburg 1784; Prof. math. und Akad. Petersburg), De resolutione polygonorum rectilineorum (Comm. Petr. 1775/6), und: Two theorems by which the solution of polygons will be as easy as that of triangles by common trigonometry (Ph. Tr. 1775)", — und „Sim. **Lhuilier**, Polygonométrie. Genève 1789 in 4." — *d.* Anhangsweise mögen noch zur Ergänzung der Kreislehre folgende Beziehungen beigefügt werden: Bezeichnen φ, b, s, p, F und f der Reihe nach Mittelpunktswinkel, Bogen, Sehne, Pfeil, Kreisausschnitt (Sector) und Kreisabschnitt (Segment) in einem Kreise des Radius r, und besitzen h, h', q und t die aus der Figur ersichtlichen Bedeutungen, so hat man



$$b = \frac{\varphi}{180} \cdot r\pi = r \cdot \text{Arc}\,\varphi = r \cdot \varphi'' \cdot \text{Si}\,1'' \qquad h = r \cdot \text{Co}\,{}^1\!/_2\,\varphi \qquad \mathbf{5}$$

$$p = 2r \cdot \text{Si}^2\,{}^1\!/_4\,\varphi \qquad s = 2r \cdot \text{Si}\,{}^1\!/_2\,\varphi = 2\sqrt{p\,(2r - p)}$$

$$F = \frac{\varphi}{360} \cdot r^2\pi = \frac{b \cdot r}{2} = {}^1\!/_2\,r^2 \cdot \text{Arc}\,\varphi \qquad f = {}^1\!/_2\,r^2\,(\text{Arc}\,\varphi - \text{Si}\,\varphi) = {}^1\!/_2\,r\,(b - h') \qquad \mathbf{6}$$

$$h' = r \cdot \text{Si}\,\varphi \qquad t = r \cdot \text{Tg}\,{}^1\!/_2\,\varphi \qquad q = p \cdot \text{Se}\,{}^1\!/_2\,\varphi \qquad \mathbf{7}$$

Bezeichnet ferner x den Radius eines Kreises und b den Abstand zweier paralleler Sehnen 2a und 2c der Winkel 2α und 2β, so folgen

$$a = x \cdot \text{Si}\,\alpha \qquad b = x\,(\text{Co}\,\alpha - \text{Co}\,\beta) \qquad c = x \cdot \text{Si}\,\beta \qquad \mathbf{8}$$

$$\text{Tg}\,\frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{b}{c - a} \qquad \text{Tg}\,\frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{b}{c + a} \qquad \mathbf{9}$$

$$d = \sqrt{(a + x)\,(a - x)} \qquad c = \sqrt{(x + d - b)\,(x - d + b)} \qquad \mathbf{10}$$

wo d den Abstand der Sehne 2a vom Centrum bezeichnet. Man kann daher aus a, b, c nach 9 und 8 successive α, β, x, — oder auch aus a, b, x nach 10 successive d und c berechnen, was uns später (394 u. f.) wohl zu statten kommen wird.

68. Die Tafel- und Beobachtungsfehler. — Wenn man aus beobachteten Grössen mit Hilfe von log. trigon. Tafeln nach einer Formel eine Unbekannte berechnet, so hängt die Genauigkeit des Resultates einerseits von den Beobachtungsfehlern, anderseits aber auch von den Tafelfehlern ab. Wir werden später (355 u. f.) die einzelnen Beobachtungsmethoden wesentlich nach dem Einflusse taxieren, welchen die unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die aus den Gegebenen berechnete Grösse ausüben können und weisen hier vorläufig nur auf den Umstand hin, dass der resultierende Fehler offenbar nur von den wirklichen Beziehungen zwischen den Bekannten und der Unbekannten abhängen und somit bei Umgestaltung der Formeln keine Veränderung erleiden kann. Anders verhält es sich dagegen mit dem Einflusse der Tafelfehler, der gerade wesentlich von der Form abhängig ist, in welche die Formel gebracht

wird [a], — ferner von der Anzahl der zu ihrer Berechnung notwendigen Eingänge in die Tafeln, — und, bei trigonometrischen Rechnungen, auch ganz speciell von der Natur der in sie eingeführten goniometrischen Funktionen [b]. Wir werden ebenfalls später (z. B. 92) Gelegenheit finden, diese Verhältnisse an bestimmten Beispielen näher studieren zu können und erwähnen bloss noch, dass man sich bei Umgestaltung der Formeln davor hüten muss, die wirkliche Einfachheit durch unnötige Einführung von Hilfsgrössen einer bloss scheinbaren zu opfern und besser thut, durch passende Wahl der Hilfstafeln dafür zu sorgen, dass, ohne sich mit Decimalen zu überladen, der Einfluss der gegenwärtig (sogar bei nötigen Interpolationen) nie eine Einheit der letzten Stelle erreichenden Tafelfehler immer etwas kleiner bleibt als der, wie schon oben gesagt, von der Form unabhängige Einfluss der Beobachtungsfehler [c].

Zu 68: *a.* Soll eine Grösse x unter Anwendung von Logarithmentafeln nach

$$f(x) = \varphi(p_1, p_2, \ldots\ldots) \qquad 1$$

berechnet werden, wo die p diejenigen Bekannten sind, deren Logarithmen in Frage kommen, so hat man, wenn $\pm\, dw$ den Tafelfehler und M den Modulus der gemeinen Logarithmen bezeichnet, somit $\pm\, dw = d \cdot Lg\, p = M \cdot d \cdot Ln\, p = M \cdot dp : p$ oder also $dp = \pm\, p \cdot dw : M$ ist,

$$f'(x) \cdot dx = \frac{d\varphi}{dp_1} \cdot dp_1 + \frac{d\varphi}{dp_2} \cdot dp_2 + \cdots = \left[\pm \frac{d\varphi}{dp_1} \cdot p_1 \pm \frac{d\varphi}{dp_2} \cdot p_2 \pm \cdots\right] \cdot \frac{dw}{M} \qquad 2$$

folglich wird im Maximum

$$dx = \pm \frac{K \cdot dw}{M \cdot f'(x)} \qquad 3$$

wo K die absolute Summe der bei 2 in der Klammer enthaltenen Grössen darstellt. Wird 1 umgestaltet, so ändern sich im allgemeinen K und f' (x) und damit also auch der Einfluss dx der Tafelfehler. Für ein Beispiel vgl. 92. — *b.* Aus den log. trig. Tafeln ergiebt sich als Wert von 1″ in Einheiten der 7. Stelle

bei	für Sinus	für Cosinus	für Tangens
0°	301030	0	301030
15	79	6	84
30	36	12	49
45	21	21	42
60	12	36	49
75	6	79	84
90	0	301030	301030

wo bei 0° und 90° der Wert von 1″ bei 0° 0′ 10″ und 89° 59′ 50″ eingetragen wurde. Es geht hieraus namentlich hervor, dass bei Tang. noch im ungünstigsten Falle, nämlich bei 45°, 1″ vollen 42 Einheiten der 7stelligen Mantisse entspricht, also auf eine Einheit der letztern nur 0″,024 fallen, — während Sin. nur für Winkel unter 30°, Cos. nur für Winkel über 60° ebenso günstige Chancen zeigt, ja jener gegen 90°, dieser gegen 0 hin ganz unbrauchbar wird; daher der Vorzug, welchen Tang. bei den praktischen Rechnern geniesst. —

c. Vgl. die betreffenden Bemerkungen in „**Hoüel**, Etudes sur les modes d'enseignement dans les Mathématiques. Paris 1883 in 8.", wo entsprechende Untersuchungen, wie die unter a gegebene vorkommen. Namentlich spricht sich auch Hoüel gegen den Unfug aus, ganz brauchbare Formeln durch Einführung von Hilfsgrössen in andere umzusetzen „dont la simplicité apparente n'est qu'une illusion d'optique."

69. Begriff der Coordinaten-Geometrie. — Nachdem die Coordinaten (54) schon lange zur Festlegung einzelner Punkte und allfällig auch zur geometrischen Darstellung des Verlaufes einer Erscheinung benutzt worden waren [a], hatten im 17. Jahrhundert **Descartes** und **Fermat** den fruchtbaren Gedanken, das Gesetz einer Punktenfolge durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten auszudrücken, oder auch umgekehrt eine solche Gleichung geometrisch zu interpretieren. Besteht nämlich zwischen den Coordinaten x und y eine Gleichung

$$F(x, y) = 0 \qquad \text{oder} \qquad y = f(x) \qquad \mathbf{1}$$

welche so beschaffen ist, dass, wenn der Wert der einen Coordinate einen kleinen Zuwachs erhält, sich auch der Wert der andern Coordinate nur um eine kleine Grösse ändert, so bilden die dieser Bedingung entsprechenden Punkte eine kontinuierliche Folge von Lagen, sind also mit dem Wege eines Punktes, oder einer **Kurve**, zu vergleichen, und zwar heisst diese **algebraisch** (des n. Grades) oder **transcendent**, je nachdem die Gleichung algebraisch (des n. Grades) oder transcendent ist. Da ferner, wenn x' und y' die Coordinaten derselben Punkte auf ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem bezeichnen, dessen Abscissenaxe mit der frühern den Winkel φ bildet und dessen Anfangspunkt in Beziehung auf das erste System durch die Coordinaten α, β festgelegt ist, zwischen den alten und neuen Coordinaten die linearen Beziehungen

$$x = \alpha + x' \cdot \mathrm{Co}\,\varphi - y' \cdot \mathrm{Si}\,\varphi \qquad y = \beta + x' \cdot \mathrm{Si}\,\varphi + y' \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \qquad \mathbf{2}$$

$$x' = (x - \alpha) \cdot \mathrm{Co}\,\varphi + (y - \beta) \cdot \mathrm{Si}\,\varphi \qquad y' = (y - \beta)\,\mathrm{Co}\,\varphi - (x - \alpha) \cdot \mathrm{Si}\,\varphi \qquad \mathbf{3}$$

bestehen [b], so wird die Natur der Gleichungen 1 offenbar nicht verändert, wenn man die x, y durch die x', y' ersetzt oder eine sog. **Transformation der Coordinaten** ausführt, während sich die 1 dagegen (vgl. 73) bei passender Wahl von α, β, φ sehr vereinfachen können, — und dasselbe ist natürlich auch der Fall, wenn die rechtwinkligen Coordinaten in schiefwinklige oder in Polarcoordinaten umgesetzt werden. — In dem speciellen Falle einer Geraden erhält man statt den 1 ohne Schwierigkeit [c]

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \qquad \text{oder} \qquad y = a \cdot x + b \qquad \mathbf{4}$$

und es ist daher die Gerade eine algebraische Kurve ersten Grades, wobei $a = - A : B$ die Tangente des Winkels ist, welchen die

Gerade mit der Abscissenaxe bildet, $b = -C:B$ aber den Abstand des Durchschnittspunktes der Geraden in der Ordinatenaxe vom Anfangspunkte bezeichnet. Soll die Gerade 4 durch die beiden Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ gehen, so müssen die a und b offenbar den Bedingungen $y_1 = a \cdot x_1 + b$ und $y_2 = a \cdot x_2 + b$ entsprechen, oder es muss

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1) \qquad \text{somit} \qquad x_3 = x_1 - y_1 \cdot \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \qquad \mathbf{5}$$

sein, wo x_3 der Wert ist, welchen x für $y = 0$, d. h. für den Durchschnittspunkt der Geraden mit der Abscissenaxe, annimmt[d]. Hat man zwei Gerade

$$(1) \quad y = a_1 \cdot x + b_1 \qquad (2) \quad y = a_2 \cdot x + b_2 \qquad \mathbf{6}$$

so geben

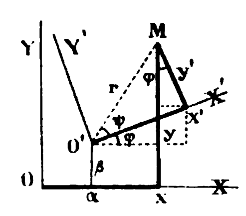
$$x_1 = -\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \qquad y_1 = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{a_1 - a_2} \qquad \mathrm{Tg}\,(1,2) = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 \cdot a_2} \qquad \mathbf{7}$$

die Coordinaten des Durchschnittspunktes und den von ihnen gebildeten Winkel. Es werden also die beiden Geraden parallel oder senkrecht zu einander sein, wenn

$$a_1 = a_2 \qquad \text{oder} \qquad a_1 = -1 : a_2 \qquad \mathbf{8}$$

ist, — etc.[e]. — Für weiteres muss auf die Anmerkungen und die Speciallitteratur verwiesen werden[f].

Zu 69: *a.* Vgl. „S. **Günther**, Die Anfänge und Entwicklungsstadien des Coordinatenprincips (Abh. nat. Ges. Nürnberg 6, und Bull. Boncomp. 10)". Speciell für **Oresme** bleibt dem 54 Gesagten beizufügen, dass er auf einer Geraden von einem beliebigen Punkte aus verschiedene Werte seiner „Longitudo" auftrug und in den erhaltenen Punkten Senkrechte errichtete, deren Länge den entsprechenden Werten der „Latitudo" gleich war, schliesslich die Enden der Senkrechten durch einen stetigen Zug verbindend. — *b.* Die 2 lassen sich direkt aus der beistehenden Figur ablesen, — die 3 aber gehen aus ihnen hervor, indem man $2' \cdot \mathrm{Co}\,\varphi + 2'' \cdot \mathrm{Si}\,\varphi$ und $2'' \cdot \mathrm{Co}\,\varphi - 2' \cdot \mathrm{Si}\,\varphi$ bildet. Führt man in die 2 und 3



$$x' = r \cdot \mathrm{Co}\,\psi \qquad x - \alpha = r \cdot \mathrm{Co}\,(\varphi + \psi)$$
$$y' = r \cdot \mathrm{Si}\,\psi \qquad y - \beta = r \cdot \mathrm{Si}\,(\varphi + \psi)$$

ein, so erhält man Formeln, welche den beiden ersten 62:3 entsprechen. — *c.* Nach der beistehenden Figur bestehen für jeden Punkt m die Flächenbeziehungen

$$\frac{\alpha \cdot y}{2} + \frac{\beta \cdot x}{2} = \frac{\alpha \cdot \beta}{2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \qquad \mathbf{9}$$

womit die Berechtigung von 4 erwiesen ist. Die α und β heissen wohl auch **Parameter.** Führt man $x = r \cdot \mathrm{Co}\,v$ und $y = r \cdot \mathrm{Si}\,v$ in 9 ein, so erhält man sofort

$$r = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \mathrm{Si}\,v + \beta \cdot \mathrm{Co}\,v} \qquad \mathbf{10}$$

als Polargleichung der Geraden, — während dieselbe 9, wenn d die Distanz

des Anfangspunktes von der Geraden, also

$$\frac{\alpha\beta}{2}=\frac{d}{2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad d=\frac{\alpha\cdot\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad Si(1,x)=\frac{d}{\alpha} \qquad Co(1,x)=-\frac{d}{\beta} \qquad \mathbf{11}$$

ist, in

$$x\cdot Si(1,x)-y\cdot Co(1,x)=d \qquad \mathbf{12}$$

übergeht, welche Otto **Hesse** (Königsberg 1811 — München 1874; Prof. math. Königsberg, Halle, Heidelberg und München) als **Normalform** der Gleichung einer Geraden einführte. — *d.* Die 5'' stimmt genau mit der Regula falsi (32 : 5) überein, wodurch der Vorgang bei letzterer in merkwürdiger Weise illustriert wird. In „Heinrich Hermann **Amstein** (Wyla bei Zürich 1840 geb.; Prof. math. Lausanne), Note sur la résolution numérique des équations (Bull. Vaud. 90 von 1884)" wird übrigens gezeigt, dass man in solcher Beziehung der Geraden mit Vorteil eine durch drei Punkte (Annahmen) gelegte gleichseitige Hyperbel substituieren könnte. — *e.* Die 7''' geht aus (1, 2) = (1, x) — (2, x) hervor. — Soll die Gerade (2) durch den Punkt (α, β) gehen und zu der Geraden (1) senkrecht stehen, so muss $\beta = a_2 \cdot \alpha + b_2$ und $1 + a_1 \cdot a_2 = 0$ sein; man erhält somit für den Fusspunkt der Senkrechten (7) die Coordinaten

$$x=\frac{\alpha+(\beta-b_1)\cdot a_1}{1+a_1^2} \qquad y=\frac{b_1+(a_1\cdot\beta+\alpha)\cdot a_1}{1+a_1^2} \qquad \mathbf{13}$$

und mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes ihre Länge

$$\delta=\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2}=\frac{\beta-b_1-\alpha\cdot a_1}{\sqrt{1+a_1^2}}=d-\alpha\cdot Si(1,x)+\beta\cdot Co(1,x) \qquad \mathbf{14}$$

— *f.* Aus der grossen Anzahl von Specialwerken über analytische Geometrie erwähne ich zur Ergänzung früherer Angaben: „**Monge**, Application de l'analyse à la géométrie. Paris 1805 in 4. (5. éd. par Liouville 1850), — S. **Lhuilier**, Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique. Paris 1809 in 4., — Charles **Dupin** (Varzy 1784 — Paris 1873; Marine-Ingenieur und Akad. Paris), Développements de géométrie. Paris 1813—22 in 4., — Emanuel **Develey** (Payerne 1764 — Lausanne 1839; Prof. math. Lausanne), Application de l'algèbre à la géométrie. Lausanne 1816 in 4., — **Brandes**, Lehrbuch der höhern Geometrie. Leipzig 1822—24, 2 Vol. in 4., — Louis-Etienne **Leféburo** de Fourcy (Paris 1787 — ebenda 1869; Prof. math. Paris), Géométrie analytique. Paris 1827 in 8. (5. éd. 1847), — Julius **Plücker** (Elberfeld 1801 — Bonn 1868; Prof. math. et phys. Bonn; vgl. Dronke: Bonn 1871 in 8.), Analytisch-geometrische Entwicklungen. Essen 1828—31, 2 Vol. in 4., ferner: System der analytischen Geometrie. Berlin 1835 in 4., ferner: Theorie der algebraischen Curven. Bonn 1839 in 4., ferner: System der Geometrie des Raumes. Düsseldorf 1846 in 4., und: Neue Geometrie des Raumes. Leipzig 1868—69, 2 Vol. in 4., — Leopold **Messbrugger** (Constanz 1796 — Aarau 1864; Prof. math. Aarau), Analytische Geometrie des Raumes. Aarau 1846 in 4., — M. **Chasles**, Traité de géométrie supérieure. Paris 1852 in 8., — George **Salmon** (Dublin 1819 geb.; Prof. theol. Dublin), Conic sections. London 1848 in 8. (6. ed. 1879; deutsch durch Fiedler: Leipzig 1860 u. später; franz. par Résal et Vaucheret: Paris 1870); ferner: Higher plane curves. Dublin 1852 in 8. (3. ed. 1879; deutsch durch Fiedler: Leipzig 1873), — und: A Treatise on the analytic geometry of three dimensions. Dublin 1862 in 8. (4. ed. 1882; deutsch durch Fiedler: Leipzig 1863—65 und später), — O. **Hesse**, Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes. Leipzig 1861 in 8. (3. Ausgabe von Gundelfinger 1876), und: Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Geraden, des Punktes und Kreises. Leipzig

1865 in 8., — E. **Gruhl**, Analytische Geometrie der Ebene. Berlin 1873 in 8., — H. **Ganter** und F. **Rudio**, Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig 1888 in 8., — etc."

70. Die Krümmungsverhältnisse der Kurven. — Unter den Aufgaben, mit welchen sich die Geometer des 17. Jahrhunderts vorzugsweise beschäftigten, nahm das sog. **Tangentenproblem**, d. h. das Auffinden von Vorschriften, um in einem Punkte x', y' einer Kurve $y = f(x)$ eine sich dieser möglichst anschliessende Gerade zu ziehen, eine hervorragende Stellung ein und wurde von ihnen in verschiedener Weise, namentlich so gelöst, dass für die **Tangente** die Gleichung

$$y - y' = p(x - x') \qquad \text{wo} \qquad p = dy' : dx' = f'(x) \qquad \textbf{1}$$

aufgestellt wurde, aus welcher sich dann sofort (69 : 8) für die im Berührungspunkte zu ihr gezogene Senkrechte, die sog. **Normale**, die Gleichung

$$y - y' = -(x - x') : p \qquad \textbf{2}$$

ergiebt, während die Formeln

$$\begin{array}{ll} \text{Tang.} = y' \cdot \sqrt{1 + p^2} : p & \text{Norm.} = y' \cdot \sqrt{1 + p^2} \\ \text{Subt.} = y' : p & \text{Subn.} = y' \cdot p \end{array} \qquad \textbf{3}$$

die zwischen Berührungspunkt und Axe liegenden Stücke von Tangente und Normale, sowie deren Projektionen auf die Axe ergeben [a]. — Um sodann ausser der durch die Tangente gegebenen Richtung der Krümmung auch ein Mass für ihren Betrag zu erhalten, wurde etwas später noch von einem Punkte der Normale aus ein sich möglichst an die Kurve anschliessender Kreis, der sog. **Krümmungskreis**, gezogen, dessen Radius offenbar das Gewünschte gab, und zwar fand man, dass sich nach

$$A = x - \frac{k \cdot f'(x)}{f''(x)} \qquad B = y + \frac{k}{f''(x)} \qquad R = \frac{k^{3/2}}{f''(x)} \quad \text{wo} \quad k = 1 + p^2 \qquad \textbf{4}$$

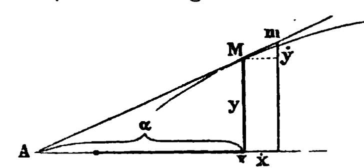
die Coordinaten A und B des Mittelpunktes dieses Kreises, sowie dessen Radius R berechnen lassen [b]. — Der Ort des Krümmungsmittelpunktes einer Kurve heisst **Evolute** dieser letztern, — diejenige Kurve, welche eine gegebene Linie zur Evolute hat, **Evolvente** derselben [c].

Zu 70: *a.* Legen wir durch x' y' und einen benachbarten Kurvenpunkt x'' y'' eine Gerade, so besteht für letztere unsere 69 : 5, und diese geht, wenn der zweite Punkt dem ersten unendlich nahe rückt, also die Secante zur Tangente wird, in unsere 1 über. — Die historische Entwicklung lässt sich etwa wie folgt resümieren: Schon **Descartes** löste das Tangentenproblem in mehrfacher, namentlich aber in der Weise, dass er, von einem beliebigen Punkte der Axe aus, einen die Kurve schneidenden Kreis oder auch eine sie schneidende Gerade zog und dann den Radius des Kreises oder die Lage der Geraden so abänderte, dass die beiden Schnittpunkte zusammenfielen, wodurch

er in letzterm Falle direkt die Tangente, in ersterm Falle aber zunächst die Normale und durch sie die Tangente erhielt, — jedoch offenbar nicht in einem gegebenen, sondern in einem von der Annahme abhängigen Punkte, so dass seine Lösung noch etwas unvollkommen war. — Dagegen schlug **Fermat** folgenden, bereits die Principien der Infinitesimalrechnung involvierenden Weg ein: Soll die Gerade AB die Kurve in einem Punkte M der Coordinaten x, y berühren, und vermehrt oder vermindert man x um eine kleine Grösse e, so ist die neue Ordinate y' der Kurve in beiden Fällen kleiner, oder in beiden Fällen grösser als die bis an AB reichende Senkrechte, so dass allgemein entweder $\alpha:(\alpha+e) < y:y'$ oder $\alpha:(\alpha+e) > y:y'$ ist. Für die nächste Nähe des Berührungspunktes verschwindet jedoch dieser Unterschied bis auf ein Minimum und man kann daher für ihn selbst in beiden Fällen

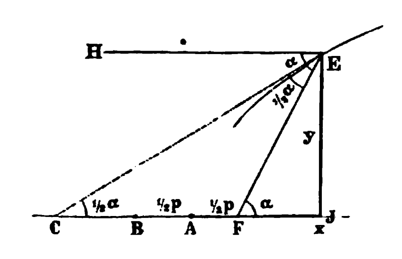
$$\frac{\alpha}{\alpha+e}=\frac{y}{y'} \quad \text{oder} \quad \alpha = y\cdot\frac{e}{y'-y}=y:p \qquad 5$$

setzen, d. h. entsprechend 3 die Subtangente und damit die Tangente bestimmen. Hat man z. B. eine Kurve der Gleichung $y^2 = m\cdot x$, so erhält man nach 5' sofort $\alpha^2:(\alpha+e)^2 = m\cdot x : m(x+e)$ oder $\alpha^2 = x(2\alpha+e)$, woraus, für $e=0$, $\alpha = 2x$ folgt. — In verwandter Weise ging später auch **Newton** (vgl. pag. 49 der Buffon'schen Übers. von 1740) vor: Er verlängerte das Kurvenelement Mm bis zum Durchschnitte A mit der Axe, — erhielt so die Proportion



$$\alpha : y = \dot{x} : \dot{y} \quad \text{oder} \quad \alpha = y\cdot\dot{x}:\dot{y} = y:p \qquad 6$$

und bestimmte nun das Verhältnis p seiner sog. **Fluxionen** $\dot{y}$ und $\dot{x}$ aus der Gleichung der Kurve, wodurch er ebenfalls die Subtangente erhielt. — Einen ganz eigentümlichen Weg schlug endlich **Roberval** ein, indem er in seinen „Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes (Anc. Mém. Paris VI)" als „Axiome ou principe d'invention" den Satz aufstellte: „La direction du mouvement d'un point, qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point là", und ihm als „Règle générale" die Vorschrift beifügte: „Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe examinez les divers mouvements qu'à le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: tous ces mouvements composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe". Er wandte diese Regel auf 13 Beispiele an, von welchen hier zur Illustration die Nro. 1 folgen mag: Bezeichnet A den Anfangspunkt der Coordinaten und sind B und F zwei von ihm equidistante Punkte der Axe, so zieht **Roberval** eine Folge von Senkrechten JE zu dieser letztern und schneidet auf jeder derselben von F aus mit dem zugehörigen BJ ein, wodurch er eine Folge von



Punkten E oder eine Kurve (nach 76 eine Parabel) erhält, welcher die Gleichung $y^2 = (x + \frac{1}{2} p)^2 - (x - \frac{1}{2} p)^2 = 2px$ entspricht. Will man zu E einen benachbarten Punkt erhalten, so muss man offenbar x und FE um dieselbe kleine Grösse vermehren, — also hat E nach FE und nach HE ∥ BJ dieselbe Geschwindigkeit, — somit halbiert die Resultierende den Winkel HEF, — folglich ist die Bisectrix EC dieses Winkels die Tangente in E. Da aus dieser Konstruktion die in die Figur eingetragenen Winkelbeziehungen folgen, so ist $CF = FE = BJ$, also die Subtangente $CJ = CF + FJ = BJ + FJ = (x + \frac{1}{2} p) + (x - \frac{1}{2} p) = 2x$. — *b.* Um die den **Krümmungskreis** (circulus osculationis, — früher auch: küssender Circul) bestimmenden 4 zu erhalten, seien x, $x + i$, $x - i$ die Abscissen dreier benachbarter Punkte einer Kurve $y = f(x)$. Man hat dann offenbar, wenn A, B die Mittelpunkts-Coordinaten und R den Radius des durch die drei Punkte bestimmten Kreises bezeichnen, nach dem pythagoräischen und Taylor'schen Lehrsatze

$$\begin{aligned}[x - A]^2 + [f(x) - B]^2 = R^2 = [x \pm i - A]^2 + [f(x \pm i) - B]^2 = \\ = [x \pm i - A]^2 + [f(x) \pm i \cdot f'(x) + \tfrac{1}{2} i^2 \cdot f''(x) \pm \cdots - B]^2\end{aligned} \quad 7$$

oder, wenn man die Quadrate ausführt, reduziert, durch $\pm 2i$ teilt und schliesslich $i = 0$ setzt,

$$0 = x - A + [f(x) - B] \cdot f'(x) \pm \tfrac{1}{2} [1 + f'(x)^2 + (f(x) - B) \cdot f''(x)] \quad 8$$

Schreibt man aber die 8 für beide Zeichen auf, addiert und subtrahiert dieselben und berücksichtigt 7, so gehen die 4, welche ich zuerst in dieser Form auf pag. 176 der 1813 durch **Lagrange** veranstalteten neuen Ausgabe seiner „Théorie des fonctions analytiques" gefunden habe, ohne weiteres hervor. — *c.* Schon **Huygens** zog die Osculationsverhältnisse in seinem „Horologium oscillatorium", wenn auch zunächst nur in Beziehung auf die Cycloide (80), in Betracht, und seine „Descripta ex evolutione" ist nichts anderes als unsere Evolvente. Später wurden sie namentlich von **Leibnitz** (Acta Erud. 1686) und Jak. **Bernoulli** (Acta Erud. 1692—94) behandelt, — sodann wieder durch **Euler** in seiner „Introductio", — und seither in jedem betreffenden Lehrbuche.

71. Die Rektifikation und Quadratur. — Für die Bestimmung der Länge s eines Kurvenstückes, oder für die sog. **Rektifikation**, bestehen, je nachdem man rechtwinklige oder Polarcoordinaten anwendet, die Formeln

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + p^2} \cdot dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + q^2} \cdot dv \quad \text{wo} \quad p = \frac{dy}{dx} \qquad q = \frac{dr}{dv} \quad 1$$

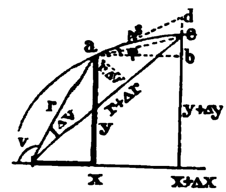
ist, a und b, oder α und β aber die dem Bogen zukommenden Grenzwerte von x oder v sind [a]. — Ebenso erhält man für die von einem Kurvenstücke und zwei Ordinaten oder zwei Radien vectoren eingeschlossene Fläche f, oder für die sog. **Quadratur**, die Formeln

$$f = \int_a^b y \cdot dx = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 \cdot dv \quad 2$$

in welchen a und b, oder α und β wieder die obige Bedeutung besitzen [b]. — Zum Schlusse mag noch angeführt werden, dass man

die nach 1 und 2 nötig werdenden Integrationen durch mechanische Mittel zu ersetzen gesucht hat, — die Rektifikation durch sog. **Curvimeter**, — die Quadratur durch sog. **Planimeter** [c].

Zu 71: *a.* Da sich unmittelbar aus der beistehenden Figur ergiebt, dass das Bogenelement $\Delta s > ae = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ist, und ebenso dass $\Delta s < ad + de = \Delta x \cdot Se\varphi + \Delta x \cdot Tg\varphi - \Delta y$ sein muss, so hat man



$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} < \frac{\Delta s}{\Delta x} < \sqrt{1 + Tg^2 \varphi} + Tg\,\varphi - \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

folglich, wenn man zu den Limes (41) übergeht und berücksichtigt, dass in diesem Falle auch $Tg\,\varphi = p$ wird, $ds = \sqrt{1+p^2} \cdot dx$, woraus sofort 1′ folgt. Durch ganz entsprechende Behandlung wird $ds^2 = r^2 \cdot dv^2 + dr^2$ und somit 1″ erhalten. — Diese allgemeinen Formeln 1 ergaben sich natürlich den ersten Bearbeitern der Infinitesimalrechnung fast von selbst, während früher ausser dem Kreise nur einige wenige einzelne Kurven, wie z. B. die Cycloide (80) rektifiziert werden konnten und für jede solche Operation ein Specialverfahren ausgedacht werden musste. Für einige betreffende Proben, sowie für Anwendungen der 1, wird auf spätere Sätze verwiesen. — *b.* Ganz entsprechend ergiebt sich aus obiger Figur, dass das von der Kurve, den Ordinaten y und $y + \Delta y$ und dem Stücke Δx der Abscissenaxe eingeschlossene Flächenelement Δf zwischen $y \cdot \Delta x$ und $(y + \Delta y) \cdot \Delta x$ liegt, dass also, wenn man zu den Limes übergeht, $df = y \cdot dx$ wird, woraus 2′ folgt, — während in ähnlicher Weise für Polarcoordinaten $df = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot dv$ und damit 2′ erhalten wird. — Die historische Entwicklung der Quadratur läuft mit derjenigen der Rektifikation parallel, und auch die Schlussanmerkung bei a hat für die Quadratur ebenfalls Giltigkeit. — *c.* Während dem Gedanken, die Länge einer krummen Linie dadurch zu bestimmen, dass man derselben mit einem Laufrädchen folge und dessen Bewegungen durch ein Räderwerk auf ein Zeigerwerk übertrage, wohl schon längst in Ausführung sog. **Curvimeter** Folge gegeben wurde, — sind dagegen die sog. **Planimeter**, welche eine Fläche durch Umfahren derselben ermitteln, ein Produkt der neuern Zeit: Zuerst (1814) scheint Joh. Martin **Hermann** (Pfronten bei Füssen 1785 — München 1841; Trigonometer) ein hiefür bestimmtes Instrument ausgedacht zu haben; dann folgten rasch aufeinander (1824) Titus **Gonnella** (Florenz 1794 — ebenda 1867; Prof. math. et mech. Florenz) und (1826) Johannes **Oppikofer** (Unter-Oppikon im Thurgau 1783 — Frauenfeld 1864; Strasseninspektor in Bern und Thurgau), welche, ohne nachweisbaren Zusammenhang mit Hermann oder unter sich, ganz ähnliche, sich an 2′ anschliessende Ideen zur Ausführung brachten, — und schliesslich erfand (1855) Jakob **Amsler** (Stalden bei Brugg 1823 geb.; erst Prof. math., dann Mechaniker in Schaffhausen) einen 2″ ersetzenden, zierlichen und relativ billigen **Polarplanimeter**, der bereits eine weite Verbreitung gefunden hat. Für weitern Detail über die Erfindungsgeschichte, Beschreibung, Theorie, etc., dieser Planimeter verweise ich auf die betreffenden Mitteilungen von Johannes **Wild** (Richtersweil 1814 geb.; Prof. geod. Zürich; vgl. Verh. techn. Ges. Zürich 1848), R. **Wolf** (Bern. Mitth. 1851, Note 197, Handb. I 192—94), J. **Amsler** (Zürch. Viert. 1856), M. **Bauernfeind** (Dingler 137), Chr. **Trunk** (Die Planimeter, Halle 1865 in 8.), E. **Fischer** (Schweiz. polyt. Z. 1868), A. **Favaro** (Beiträge zur Geschichte, Wien 1873 in 4.), etc.

72. Der Punkt der mittlern Entfernungen. — Hat man ein System von Punkten (x, y) und versteht unter **Moment eines Punktes in Beziehung auf eine Gerade** das Produkt seines Abstandes δ von der Geraden und einer beliebigen ihm zugeteilten Konstante m, so besitzt der Punkt

$$x = \Sigma\, mx : \Sigma\, m \qquad y = \Sigma\, my : \Sigma\, m \qquad 1$$

die Eigenschaft, dass, wenn man ihm $\Sigma\, m$ als Konstante zuordnet, für **jede** Gerade sein Moment gleich der Summe der Momente aller Punkte des Systemes ist[a]. Er heisst **Punkt der mittlern Entfernungen** oder **Schwerpunkt,** — jede durch ihn gehende und daher Null als Momentensumme besitzende Gerade aber **Schweraxe**[b]. — Wählt man den Schwerpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten und bezeichnet die Abstände der Punkte des Systemes von demselben mit $r_1, r_2, \ldots$, ihre Abstände von einem andern Punkte (a, b) dagegen mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, den Abstand des letztern vom Schwerpunkte aber mit r, so erhält man die merkwürdige Beziehung

$$\Sigma\, m \cdot \varrho^2 = \Sigma\, m \cdot r^2 + r^2 \cdot \Sigma\, m \qquad 2$$

welche oft mit dem Namen von **Steiner** belegt wird[c]. Haben alle Punkte gleiche Konstanten oder gleiches **Gewicht**, so ergiebt 2, dass **die Quadratsumme ihrer Abstände vom Schwerpunkte ein Minimum** ist. — Da sich zu jedem Punkte einer Geraden ein zweiter findet, welcher zu deren Mitte symmetrisch liegt, so fällt der Schwerpunkt einer gleichförmig belasteten Geraden in ihre Mitte und hat eine ihrer Länge proportionale Konstante. Ein Dreieck kann man sich aber als eine Folge von Parallelen zu einer Seite denken, und da die sämtlichen Schwerpunkte dieser Parallelen in die Gerade fallen, welche die Mitte jener Seite mit der Gegenecke verbindet, so ist somit diese letztere Gerade offenbar eine Schweraxe des Dreieckes und es fällt daher dessen Schwerpunkt mit dem bereits früher (55) so genannten Punkte zusammen. Der Schwerpunkt eines Vierecks oder Vielecks wird sich finden lassen, indem man dasselbe durch Diagonalen zweimal abteilt, je die Schwerpunkte der Teile aufsucht und diese verbindet. U. s. f. — Der Schwerpunkt des früher (71) berechneten Bogens s hat nach 1 die Coordinaten

$$x = \frac{1}{s} \cdot \int_a^b x \cdot ds \qquad y = \frac{1}{s} \cdot \int_a^b y \cdot ds \qquad 3$$

derjenige der früher (71) berechneten Fläche f aber, da der Schwerpunkt des Elementes df in die Höhe $\frac{1}{2}y$ fallen muss,

$$x = \frac{1}{f} \int_a^b x \cdot y \cdot dx \qquad y = \frac{1}{2f} \int_a^b y^2 \cdot dx \qquad 4$$

womit wohl die Schwerpunktsbestimmung genügend absolviert ist.

Zu 72: *a.* Mit Hilfe von 1 und 69:14 hat man nämlich

$$\delta \cdot \Sigma m = [d - x \cdot Si(1,x) + y \cdot Co(1,x)] \cdot \Sigma m = d \cdot \Sigma m - Si(1,x) \Sigma mx + Co(1,x) \Sigma my$$
$$= \Sigma m [d - x \cdot Si(1,x) + y \cdot Co(1,x)] = \Sigma m \cdot \delta$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist. — *b.* Der Schwerpunkt wurde durch „**Carnot**, Géométrie de position. Paris 1803 in 4." in die Geometrie eingeführt, ist dann aber namentlich durch die Arbeiten von **Steiner** für dieselbe wichtig geworden. — *c.* Da offenbar einerseits

$$\Sigma m\varrho^2 = \Sigma m[(x-a)^2 + (y-b)^2] = \Sigma m(x^2+y^2) - 2a\Sigma mx - 2b\Sigma my + (a^2+b^2)\Sigma m$$

und anderseits, weil nach der gemachten Annahme die Axen Schweraxen sind, $\Sigma mx = 0$ und $\Sigma my = 0$, so ergiebt sich 2 sofort. — Die durch 2 ausgedrückte Eigenschaft des Schwerpunktes war schon **Legendre** bekannt und wurde von ihm (vgl. 52) zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate benutzt, — sonst aber nicht beachtet; dagegen hat sie **Steiner** mutmasslich neuerdings gefunden und dann so ausgiebige Anwendung davon auf die Geometrie gemacht, dass er ein grosses Anrecht darauf besitzt.

73. Diskussion der Gleichungen zweiten Grades zwischen zwei Variabeln. — Da aus der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$a \cdot y^2 + b \cdot xy + c \cdot x^2 + d \cdot y + e \cdot x + f = 0 \qquad \textbf{1}$$

durch Differentiation

$$dy = -\frac{b \cdot y + 2c \cdot x + e}{b \cdot x + 2a \cdot y + d} \cdot dx \qquad \textbf{2}$$

folgt, so entspricht im allgemeinen jedem kleinen Zuwachse von x auch ein kleiner Zuwachs von y, und es stellt daher 1 eine Folge von Punkten oder eine Linie dar, welche, da eine der Konstanten durch Division weggeschafft werden kann, durch 5 Punkte bestimmt sein muss. Eliminiert man aus 1 und der Gleichung einer Geraden

$$y = \alpha \cdot x + \beta \qquad \textbf{3}$$

die Grösse x, so findet man die Gleichung

$$y^2[a\alpha^2 + b\alpha + c] + y[\alpha(\alpha d + e) - \beta(\alpha b + 2c)] + [c\beta^2 - \alpha\beta e + \alpha^2 f] = 0 \qquad \textbf{4}$$

und es hat daher eine Gerade mit einer Linie zweiten Grades zwei Punkte, oder einen Doppelpunkt, oder gar keinen Punkt gemein: Im erstern Falle heisst sie **Secante** und ihr zwischen den beiden Punkten liegender Teil **Sehne**, — im zweiten Falle wird sie **Tangente** genannt. — Bezeichnen u und t die Coordinaten der Mitte der Sehne, so hat man nach 3 und 4

$$t = \alpha \cdot u + \beta \qquad \text{und} \qquad t = \frac{\beta(\alpha b + 2c) - \alpha(\alpha d + e)}{2(a\alpha^2 + b\alpha + c)} \qquad \textbf{5}$$

und eliminiert man hieraus β, so erhält man für den Ort der Mitten aller um Atg α geneigten Sehnen

$$t = -\frac{\alpha b + 2c}{b + 2a\alpha} \cdot u - \frac{\alpha d + e}{b + 2a\alpha} \qquad \textbf{6}$$

d. h. eine Gerade, eine sog. **Axe.** Setzt man in dieser Gleichung statt α den Faktor von u, so erhält man für die Axe aller zu der ersten Axe parallelen Sehnen

$$t = \alpha \cdot u + M \qquad 7$$

so dass die neue Axe ein Element des ersten Sehnensystemes ist. Zwei solche Axen oder Sehnensysteme heissen **konjugiert** und ihr Winkel μ ist (69 : 7) durch

$$\mathrm{Tg}\,\mu = 2 \cdot \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{b(1-\alpha^2) + 2(a-c)\alpha} \qquad 8$$

bestimmt. Für $\mu = 90^0$, d. h. für

$$\alpha = \frac{a - c \mp k}{b} \qquad \text{wo} \qquad k = \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \qquad 9$$

nennt man die konjugierten Axen **Hauptaxen,** und es giebt nur Ein Paar solcher, da sich das Doppelzeichen auf beide Axen, nicht auf zwei Paare bezieht. Für den Durchschnittspunkt zweier Axen aber erhält man nach 6 und 69 : 7 die von α unabhängigen Coordinaten

$$A = \frac{2ae - bd}{g} \qquad B = \frac{2cd - be}{g} \qquad \text{wo} \qquad g = b^2 - 4ac \qquad 10$$

Es schneiden sich somit alle Axen in demselben Punkte, dem sog. **Mittelpunkte.** — Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt und dreht die Abscissenaxe in die Richtung der einen Hauptaxe, d. h. setzt man in 69 : 2

$$\begin{array}{llll} \alpha = A & \mathrm{Tg}\,\varphi = \dfrac{a-c-k}{b} & \mathrm{Si}^2\varphi = \dfrac{k-a+c}{2k} & \mathrm{Si}\,2\varphi = -\dfrac{b}{k} \\ \beta = B & \mathrm{Tg}\,2\varphi = -\dfrac{b}{a-c} & \mathrm{Co}^2\varphi = \dfrac{k+a-c}{2k} & \mathrm{Co}\,2\varphi = \dfrac{a-c}{k} \end{array} \qquad 11$$

und führt noch

$$h = b \cdot d \cdot e - a \cdot e^2 - c \cdot d^2 \qquad 12$$

ein, so verwandelt sich 1 in

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} = 1 \qquad \text{wo} \qquad \mathfrak{a}^2 = \frac{2(h - fg)}{g(a+c-k)} \qquad \mathfrak{b}^2 = \frac{2(h-fg)}{g(a+c+k)} \qquad 13$$

so dass die Linien zweiten Grades nach beiden Axen symmetrisch und die in die Hauptaxen fallenden Sehnen, die **grosse** und die **kleine Axe,** gleich $2\mathfrak{a}$ und $2\mathfrak{b}$ sind [a]. — Diejenigen Punkte der grossen Axe, welche von den Endpunkten oder **Scheiteln** der kleinen Axe um die halbe grosse Axe abstehen, heissen **Brennpunkte** [b] und ihre Entfernung $\mathfrak{a} \cdot e$ vom Mittelpunkte **Excentricität,** so dass die Beziehungen

$$e^2 = 1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2} = 1 + \frac{g}{(a+c+k)^2} = 1 - \frac{p}{\mathfrak{a}} \qquad \text{wo} \qquad p = \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}} = \sqrt{\frac{2(fg-h)}{(a+c+k)^3}} \qquad 14$$

bestehen [c]. Für $x = \mathfrak{a}e$ wird $y = p$, d. h. der sog. **Parameter** p ist gleich der Ordinate im Brennpunkte [d]. Umgekehrt hat man

$$\mathfrak{a} = \frac{p}{1-e^2} = -\frac{p}{g}(a+c+k)^2 \quad \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}\cdot p} = \mathfrak{a}\sqrt{1-e^2} = \frac{p(a+c+k)}{\sqrt{-g}} \qquad \mathbf{15}$$

Man sieht aus diesen Beziehungen, dass die Werte

g = −	e < 1	𝔞 = +	𝔟 = +
0	= 1	∞	∞
+	> 1	−	i

mit einander korrespondieren, und hierauf stützt sich die Einteilung der Linien zweiten Grades in **Ellipsen** ($g = -$), **Parabeln** ($g = 0$) und **Hyperbeln** ($g = +$), welche unter den folgenden Nummern nach ihren Special-Eigenschaften behandelt werden [e]. — Verlegt man den Anfangspunkt in den einen Scheitel der grossen Axe, d. h. lässt man in 13 die Abscisse x in $x - \mathfrak{a}$ übergehen, so erhält man für Ellipse, Parabel und Hyperbel

$$y^2 = 2px - \frac{p}{\mathfrak{a}}\cdot x^2 \qquad y^2 = 2px \qquad y^2 = 2px + \frac{p}{\mathfrak{a}}\cdot x^2 \qquad \mathbf{16}$$

Bezeichnen dagegen r_1 und r_2 die Radien vectoren eines Punktes in Beziehung auf die beiden Brennpunkte, so hat man

$$r^2 = (x \pm \mathfrak{a}e)^2 + y^2 \quad \text{oder} \quad r_1 = \mathfrak{a} + e\cdot x \qquad r_2 = \mathfrak{a} - e\cdot x \qquad \mathbf{17}$$

also für die Ellipse, wo $ex < \mathfrak{a}$, $r_1 + r_2 = 2\mathfrak{a}$, — für die Hyperbel, wo $ex > \mathfrak{a}$, $r_1 - r_2 = 2\mathfrak{a}$. — Bezeichnet man ferner die Winkel, welche r_1 und r_2 mit der grossen Axe gegen den nächstliegenden Scheitel hin bilden, mit v, so hat man

$$r = \mathfrak{a} \pm e(\mp r\cdot \mathrm{Co}\, v \mp \mathfrak{a}e) \quad \text{oder} \quad r = p:(1 + e\cdot \mathrm{Co}\, v) \qquad \mathbf{18}$$

als Polargleichung der Linien zweiten Grades in Beziehung auf den Brennpunkt [f]. — Bildet endlich die grosse Axe mit der Abscissenaxe einen Winkel n, so geht v in $(v - n)$ über und man erhält nach 18 für drei Punkte successive

$$p = r_1[1+e\cdot \mathrm{Co}(v_1-n)] = r_2[1+e\cdot \mathrm{Co}(v_2-n)] = r_3[1+e\cdot \mathrm{Co}(v_3-n)]$$

$$e = \frac{r_1 - r_2}{r_2 \mathrm{Co}(v_2-n) - r_1 \mathrm{Co}(v_1-n)} = \frac{r_1 - r_3}{r_3 \mathrm{Co}(v_3-n) - r_1 \mathrm{Co}(v_1-n)} \qquad \mathbf{19}$$

$$\mathrm{Tg}\, n = \frac{r_1 r_2(\mathrm{Co}\, v_2 - \mathrm{Co}\, v_1) + r_2 r_3(\mathrm{Co}\, v_3 - \mathrm{Co}\, v_2) + r_3 r_1(\mathrm{Co}\, v_1 - \mathrm{Co}\, v_3)}{r_1 r_2(\mathrm{Si}\, v_1 - \mathrm{Si}\, v_2) + r_2 r_3(\mathrm{Si}\, v_2 - \mathrm{Si}\, v_3) + r_3 r_1(\mathrm{Si}\, v_3 - \mathrm{Si}\, v_1)}$$

so dass eine Linie 2. Grades vollständig bestimmt ist, wenn man ausser dem Brennpunkte drei ihrer Punkte kennt [g].

Zu 73: *a.* Eine ähnliche Entwicklung von mir nahm **Littrow** als meine Erstlingsarbeit unter dem Titel „Beitrag zur Theorie der Curven 2. Grades" 1837 in Bd. 17 der Annalen der Wiener Sternwarte auf. — *b.* Statt dem aus physikalischen Gründen gewählten Namen **Brennpunkt** (focus, foyer) war früher der Name **Nabel** (umbilicus, nombril) gebräuchlich. — *c.* Da für die Parabel $a = b^2 : 4c$ und $k = a + c$, so folgt für sie aus 14

$$p = \frac{\sqrt{a \cdot e^2 + c \cdot d^2 - b \cdot d \cdot e}}{2(a+c)^{3/2}} = \frac{2c(2cd - be)}{(b^2 + 4c^2)^{3/2}} \qquad \textbf{20}$$

— *d.* Früher wurde die Doppelordinate im Brennpunkte **Parameter** genannt, so noch von **Euler** in seiner „Theoria motus", obschon er bereits mit der einfachen Ordinate rechnet. — *e.* Die Namen **Ellipse** und **Hyperbel** soll **Apollonius** eingeführt haben, — während der Name **Parabel** schon bei **Archimedes** erscheint. Vgl. „J. L. **Heiberg**, Die Kenntnisse des Archimedes über die Kegelschnitte (Zeitschr. f. M. u. Ph. 1880)". — *f.* Entsprechen zwei Radien vectoren r_1 und r_2 den Winkeln v_1 und $v_2 = 180^0 + v_1$, d. h. ergänzen sie sich zu einer Sehne, so ist nach 18 die Summe ihrer Reciproken

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1 + e \operatorname{Co} v_1}{p} + \frac{1 - e \operatorname{Co} v_1}{p} = \frac{2}{p} \qquad \textbf{21}$$

also konstant. — Wenn ferner v und r der 18 entsprechen, so genügen auch $v' = 180 + v$ und $r' = m \cdot r$, oder $v'' = 180 + v$ und $r'' = (m+1) r = r + r'$ den Gleichungen

$$r' = \frac{m \cdot p}{1 - e \operatorname{Co} v'} \quad \text{oder} \quad r'' = \frac{(m+1)\, p}{1 - e \cdot \operatorname{Co} v''} \qquad \textbf{22}$$

Wenn man daher jeden Radius vector einer Ellipse rückwärts um ein bestimmtes Vielfaches verlängert, oder die Summe des alten und neuen als Radius vector nimmt, so erhält man immer wieder eine Ellipse. — *g.* Der in 53 und 69 gegebenen Litteratur füge ich noch bei: „Philippe de **La Hire** (Paris 1640 — ebenda 1718; erst Maler und Architekt, dann Prof. math. und Akad. Paris), Théorie des coniques. Paris 1672 in fol. (lat. 1685), — de l'**Hospital**, Traité analytique des sections coniques. Paris 1707 in 4. (2 éd. 1720), — Robert **Simson** (Kirton-Hall 1687 — Glasgow 1768; Prof. math. Glasgow), Treatise on conic sections. Edinburgh 1735 in 4. (lat. 1750), — H. P. **Hamilton**, Analytical system of conic sections. Cambridge 1830 in 8., — **Chasles**, Traité des sections coniques. I. Paris 1865 in 8., — H. G. **Zeuthen**, Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthume. Deutsch durch R. v. Fischer-Benzen. Kopenhagen 1886 in 8., — etc."

74. Die Ellipse. — Für die Ellipse bestehen (73) die zwei Grundgleichungen

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} = 1 \qquad r_1 = \frac{p}{1 + e \cdot \operatorname{Co} v_1} \qquad \textbf{1}$$

von welchen die erste sich auf den Mittelpunkt, die zweite dagegen sich auf den Brennpunkt bezieht, — ferner ist

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\mathfrak{b}}{1-\alpha} \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\sqrt{1-e^2} = \sqrt{\mathfrak{a} \cdot p} = \mathfrak{a}(1-\alpha)$$

$$e^2 = 1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2} = 1 - \frac{p}{\mathfrak{a}} = \alpha(2-\alpha) \qquad p = \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}(1-e^2) = \mathfrak{b}(1-\alpha) \qquad \textbf{2}$$

$$q = \mathfrak{a}(1-e) = \frac{p}{1+e} \qquad \alpha = \frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = 1 - \frac{p}{\mathfrak{b}} = 1 - \sqrt{1-e^2} \fallingdotseq \frac{1}{2} e^2$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = x \cdot \operatorname{Se} v \qquad r_1 = \mathfrak{a} - e \cdot x \qquad r_2 = \mathfrak{a} + e \cdot x \qquad r_1 + r_2 = 2\mathfrak{a}$$

wo q die sog. **Periheldistanz**, α die sog. **Abplattung** bezeichnet[a]. —

Sodann folgen (70:1—4) für Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale und Krümmungskreis die Gleichungen und Formeln

$$y - y' = -\frac{b^2 \cdot x'}{a^2 \cdot y'} \cdot (x - x') \qquad y - y' = \frac{a^2 \cdot y'}{b^2 \cdot x'} \cdot (x - x') \qquad \mathbf{3}$$

$$\text{Tang.} = \frac{y'}{b^2\,x'} \sqrt{a^4\,y'^2 + b^4\,x'^2} \qquad \text{Norm.} = \frac{1}{a^2} \sqrt{a^4\,y'^2 + b^4 \cdot x'^2}$$

$$\text{Subt.} = \frac{a^2\,y'^2}{b^2 \cdot x'} \qquad \text{Subn.} = \frac{b^2\,x'}{a^2} \qquad \mathbf{4}$$

$$A = \frac{a^2 - b^2}{a^4} \cdot x^3 \qquad B = \frac{b^2 - a^2}{b^4} \cdot y^3 \qquad R = \frac{(a^4 \cdot y^2 + b^4 \cdot x^2)^{3/2}}{a^4 \cdot b^4} \qquad \mathbf{5}$$

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{a^2 \cdot y}{b^2 \cdot x} \quad \text{so dass} \quad y = (1 - e^2) \cdot \operatorname{Tg} \varphi \cdot x \qquad \mathbf{6}$$

wo φ den Winkel bezeichnet, welchen die Normale mit der grossen Axe bildet [b]. — Endlich erhält man

$$n = \frac{y}{\operatorname{Si} \varphi} = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{Si}^2 \varphi}} \qquad s = x - \frac{b^2}{a^2} \cdot x = e^2 \cdot x$$

$$N = \frac{n \cdot x}{x - s} = \frac{n}{1 - e^2} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{Si}^2 \varphi}} \qquad \mathbf{7}$$

$$A = \frac{e^2 \cdot \operatorname{Co}^2 \varphi}{1 - e^2 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi} \cdot x = \frac{e^2 \operatorname{Co}^3 \varphi}{a^2} \cdot N^3 = \frac{e^2}{a^2} \cdot x^3$$

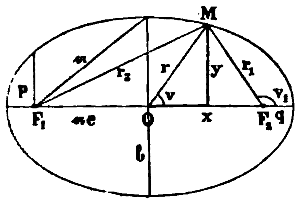
$$B = -\frac{e^2 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{Si}^2 \varphi} \cdot y = -\frac{e^2 (1 - e^2) \operatorname{Si}^3 \varphi}{a^2} \cdot N^3 = -\frac{e^2}{p^2} \cdot y^3 \qquad \mathbf{8}$$

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{Si}^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{1 - e^2}{a^2} \cdot N^3$$

$$r = a \sqrt{1 - e^2 \operatorname{Si}^2 \varphi + \frac{e^4 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi \cdot \operatorname{Co}^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{Si}^2 \varphi}} \fallingdotseq a\left(1 - \frac{e^2}{2} \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi\right) \qquad \mathbf{9}$$

wo n die Normale bezeichnet, s die Ergänzung der Subnormale zur Abscisse und N das von der kleinen Axe abgeschnittene Stück der Normale oder die sog. **Conormale** [c]. — Für weitere Beziehungen und Eigenschaften muss auf die Noten und die Specialschriften verwiesen werden [d].

Zu 74: *a.* Der Abstand eines Brennpunktes von dem nächstliegenden Scheitel der grossen Axe wurde als **Perihel-distanz**, und ebenso der in Teilen der grossen Axe ausgedrückte Axenunterschied als **Abplattung** zunächst zu Gunsten der Astronomie in die Geometrie eingeführt. Unter Hinweis auf die beistehende Figur bedürfen wohl sonst die 2 keiner weitern Erläuterung. — *b.* Da aus der Mittelpunktsgleichung 1



$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = f(x) \qquad \mathbf{10}$$

folgt, so erhält man durch logarithmieren und differentieren

$$f'(x) = -\frac{x \cdot y}{a^2 - x^2} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad f''(x) = -\frac{a \cdot b}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = -\frac{b^4}{a^2 \cdot y^3} \qquad \mathbf{11}$$

und damit aus 70 : 1—4 ohne Schwierigkeit unsere 4—6. — Führt man nach „**Euler**, Elémens de la Trigonométrie sphéroïdique (Mém. Berlin 1753)" die Hilfsgrössen a und d durch

$$a = \frac{2^{3/2} \cdot a^2 \cdot b^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \qquad \text{und} \qquad d = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \qquad \mathbf{12}$$

ein, so ergeben sich die Beziehungen

$$1 + d = \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \quad 1 - d = \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \quad 1 - d^2 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad a^2 + b^2 = \frac{2a^2}{(1 - d^2)^2}$$

$$a = \frac{a}{(1-d)\sqrt{1+d}} \quad b = \frac{a}{(1+d)\sqrt{1-d}} \quad a^2 \cdot Co^2 \varphi + b^2 \cdot Si^2 \varphi = \frac{a^2 + b^2}{2}(1 + d \cdot Co\, 2\varphi) \qquad \mathbf{13}$$

und man erhält, aus 6 und 10 entweder y oder x eliminierend,

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \cdot Tg^2 \varphi}} = \frac{a \cdot Co\, \varphi}{(1 - d)\sqrt{1 + d \cdot Co\, 2\varphi}}$$

$$y = \frac{b^2 \cdot Tg\, \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \cdot Tg^2 \varphi}} = \frac{a \cdot Si\, \varphi}{(1 + d)\sqrt{1 + d \cdot Co\, 2\varphi}} \qquad \mathbf{14}$$

Ferner, wenn man die erstern dieser Ausdrücke in die letzte 5 einsetzt und dann die 12 und 13 benutzt,

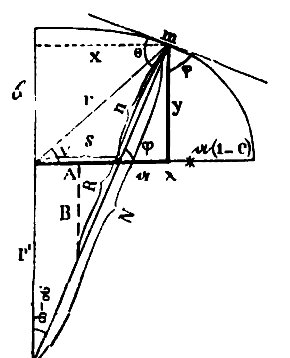
$$R = \frac{a^2 \cdot b^2}{(a^2 \cdot Co^2 \varphi + b^2\, Si^2 \varphi)^{3/2}} = a\,(1 + d \cdot Co\, 2\varphi)^{-3/2} \qquad \mathbf{15}$$

oder, wenn man in dieselben erstern Ausdrücke e^2 einführt, sowie die aus Fig. und 6 folgende Gleichheit

$$Tg\, v = \frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2} \cdot Tg\, \varphi = (1 - e^2) \cdot Tg\, \varphi \qquad \mathbf{16}$$

berücksichtigt, mit Hilfe von 2

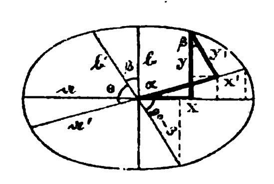
$$x^2 = \frac{a^2 \cdot Co^2 \varphi}{1 - e^2 \cdot Si^2 \varphi} = \frac{a^2}{1 + Tg\varphi \cdot Tg\, v}, \quad y^2 = \frac{a^2(1 - e^2)^2 Si^2 \varphi}{1 - e^2\, Si^2 \varphi}, \quad r^2 = \frac{a^2 \cdot Co\, \varphi}{Co\, v \cdot Co(\varphi - v)} \qquad \mathbf{17}$$



— *c.* Den Namen **Conormale** hat meines Wissens **Gerling** eingeführt. — Die erste 7 geht aus Fig. und 17'' hervor, — die zweite aus $s = x - y \cdot Ct\, \varphi$ und 6, — die dritte aus der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenusen N und n sind. Die 8 und die erste 9 folgen aus den 5, 7 und 17 ohne Schwierigkeit, ja sind zum Teil mit ihnen fast identisch. Die zweite 9 endlich folgt aus 2, da aus 17

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot \frac{1 - 2e^2 \cdot Si^2 \varphi + e^4\, Si^2 \varphi}{1 - e^2\, Si^4 \varphi}$$

hervorgeht. — *d.* Bezieht man einen Punkt der Ellipse, anstatt durch rechtwinklige Coordinaten auf die Hauptaxen, durch



schiefwinklige auf irgend zwei konjugierte Axen, d. h. setzt man in 1'

$$x = x' \cdot \mathrm{Co}\,\alpha - y' \cdot \mathrm{Si}\,\beta$$
$$y = x' \cdot \mathrm{Si}\,\alpha + y' \cdot \mathrm{Co}\,\beta$$

ein, wo α ein beliebiger Winkel, dagegen β nach 73 : 8 (unter Vergleichung von 1' und 73 : 1) durch

$$\mathrm{Tg}\,(90^0 + \beta) = -\frac{2\,b^2}{2\,a^2 \cdot \mathrm{Tg}\,\alpha} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Tg}\,\beta = \frac{a^2}{b^2} \cdot \mathrm{Tg}\,\alpha \qquad \mathbf{18}$$

bestimmt ist, so erhält man die neue Ellipsengleichung

$$1 = x'^2\left(\frac{\mathrm{Co}^2\,\alpha}{a^2} + \frac{\mathrm{Si}^2\,\alpha}{b^2}\right) + y'^2\left(\frac{\mathrm{Si}^2\,\beta}{a^2} + \frac{\mathrm{Co}^2\,\beta}{b^2}\right) - 2\,x'\,y'\left(\frac{\mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\beta}{a^2} - \frac{\mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\beta}{b^2}\right)$$

Bezeichnet man aber die halben konjugierten Axen mit a' und b', so hat man, da ihre Endpunkte 1' unterliegen,

$$a'^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{Co}^2\,\alpha}{a^2} + \frac{\mathrm{Si}^2\,\alpha}{b^2}\right) = 1 \qquad \text{und} \qquad b'^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{Si}^2\,\beta}{a^2} + \frac{\mathrm{Co}^2\,\beta}{b^2}\right) = 1 \qquad \mathbf{19}$$

während nach 18 der Faktor von $x' \cdot y'$ verschwindet. Es besteht somit auch noch für konjugierte Axen die 1' entsprechende Gleichung

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1 \qquad \mathbf{20}$$

Aus 19 und 18 folgen ferner

$$a'^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,\alpha + b^2\,\mathrm{Co}^2\,\alpha} = \frac{a^4 \cdot \mathrm{Co}^2\,\beta + b^4 \cdot \mathrm{Si}^2\,\beta}{a^2 \cdot \mathrm{Co}^2\,\beta + b^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,\beta}$$
$$b'^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2\,\mathrm{Co}^2\,\beta + b^2\,\mathrm{Si}^2\,\beta} = \frac{a^4 \cdot \mathrm{Si}^2\,\alpha + b^4\,\mathrm{Co}^2\,\alpha}{a^2\,\mathrm{Si}^2\,\alpha + b^2\,\mathrm{Co}^2\,\alpha} \qquad \mathbf{21}$$

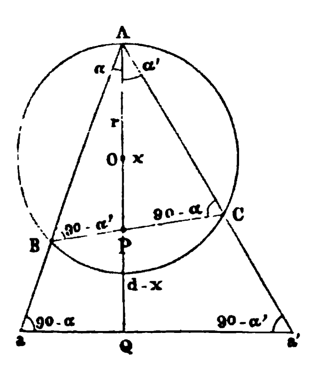
und hieraus geht durch Addition

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \qquad \mathbf{22}$$

hervor, so dass, wie schon **Apollonius** lehrte, die Quadratsumme der Halbaxen konstant ist. Da ferner $\theta = 90 - (\beta - \alpha)$ ist, so folgt aus 18 und 21

$$\mathrm{Si}\,\theta = \frac{\mathrm{Co}\,\alpha + \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\beta}{\sqrt{1 + \mathrm{Tg}^2\,\beta}} = \frac{a \cdot b}{a' \cdot b'} \qquad \mathrm{Tg}\,\theta = \frac{a^2 \cdot \mathrm{Tg}^2\,\alpha + b^2}{(a^2 - b^2) \cdot \mathrm{Tg}\,\alpha} \qquad \mathbf{23}$$

und aus ersterer Formel geht der ebenfalls schon **Apollonius** bekannte Satz hervor, dass die Fläche des durch zwei konjugierte Axen bestimmten Parallelogrammes konstant ist. — Verbindet man einen Ellipsenpunkt mit den Scheiteln einer der Hauptaxen, so erhält man zwei sog. **Supplementärsehnen**, deren jede halbiert wird, wenn man durch den Mittelpunkt eine Parallele zu der andern zieht: Diese Parallelen sind also offenbar (73) konjugierte Axen, und man kann daher sehr leicht zu einer Axe die ihr konjugierte Axe konstruieren. — Für die Sätze von **Pascal** und **Brianchon** auf das frühere (57) verweisend, füge ich noch bei: Zieht man in der Distanz d vom Mittelpunkte A eine Senkrechte zur grossen Axe, so wird diese von der letztern in Q, von einer um α zu der grossen Axe geneigten Axe in a, und von der zu dieser konjugierten und mit ihr nach oben den Winkel $\alpha + 90 - \beta$ bildenden Axe in a' so geschnitten, dass mit Hilfe von 18



$$\mathfrak{Q}\mathfrak{a} = \mathfrak{d} \cdot \mathrm{Tg}\,\alpha \qquad \mathfrak{Q}\mathfrak{a}' = \mathfrak{d} \cdot \mathrm{Tg}\,(90 - \beta) = \frac{\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2 \cdot \mathrm{Tg}\,\alpha} \quad \text{also} \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{a} \times \mathfrak{Q}\mathfrak{a}' = \frac{\mathfrak{d}^2 \cdot \mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2} \qquad \mathbf{24}$$

ist. Es sind also (57) a und a' konjugierte Punkte, — folglich bestimmen drei Paare konjugierter Axen 6 in Involution stehende Punkte und Q ist der Centralpunkt derselben. Zieht man mit beliebigem Radius r aus einem Punkte O von AQ durch A einen Hilfskreis, der die konjugierten Strahlen in B und C schneidet, so bestimmt BC auf AQ einen Punkt P, zu dessen Bestimmung man $x : AB = \mathrm{Co}\,\alpha' : \mathrm{Co}\,(\alpha' - \alpha)$ hat, so dass mit Hilfe von 24

$$x = \frac{AB : \mathrm{Co}\,\alpha}{1 + \mathrm{Tg}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\alpha'} = \frac{2r \cdot \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2} \qquad \mathbf{25}$$

folgt, somit P für alle Paare konjugierter Axen unverändert bleibt oder (57) **Pol der Involution** ist.

75. Die Quadratur und Rektifikation der Ellipse. — Die Quadratur der Ellipse bietet gegenwärtig keine Schwierigkeiten mehr dar, indem man nach den allgemeinen Formeln (71) fast unmittelbar [a]

$$f = \frac{\mathfrak{b}}{2\mathfrak{a}} \cdot \left[\beta \sqrt{\mathfrak{a}^2 - \beta^2} - \alpha \sqrt{\mathfrak{a}^2 - \alpha^2} + \mathfrak{a}^2 \left(\mathrm{Asi}\,\frac{\beta}{\mathfrak{a}} - \mathrm{Asi}\,\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)\right] \qquad \mathbf{1}$$

findet, wo α und β die Abscissen bezeichnen, deren zugehörige Ordinaten die Fläche begrenzen. Versteht man ferner unter f' die Fläche eines senkrecht zur grossen Axe abgeschnittenen Ellipsensegmentes, und unter F die Fläche der ganzen Ellipse, so erhält man aus 1 sofort [b]

$$f' = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \left[\mathfrak{a}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Asi}\,\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right) - \alpha \sqrt{\mathfrak{a}^2 - \alpha^2}\right] \qquad F = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot \pi \qquad \mathbf{2}$$

Schwieriger gestaltet sich die Rektifikation, wo sich kein geschlossener Ausdruck finden lässt, sondern die Integration durch Auflösung in Reihen vermittelt werden muss; aber immerhin hat schon **Euler** auf letzterm Wege [c], wenn s den vom Scheitel der grossen Axe und einem Punkte, dessen Normale mit ihr den Winkel φ bildet, begrenzten Ellipsenbogen bezeichnet, die rasch konvergierende Reihe

$$s = \mathfrak{a}(1 - e^2)(\alpha \cdot \varphi - \beta \cdot \mathrm{Si}\,2\varphi + \gamma \cdot \mathrm{Si}\,4\varphi - \cdots)$$

wo $\qquad \mathbf{3}$

$$\alpha = 1 + {}^3/_4\, e^2 + {}^{45}/_{64}\, e^4 + \cdots \qquad \beta = {}^3/_8\, e^2 + {}^{15}/_{32}\, e^4 + \cdots \qquad \gamma = {}^{15}/_{256}\, e^4 + \cdots$$

erhalten, aus welcher, wenn $\varphi = {}^1/_2\,\pi$ gesetzt wird, für den Ellipsenquadranten die Länge

$$S = \frac{\mathfrak{a}(1 - e^2)\,\alpha\pi}{2} = \frac{\mathfrak{a}\pi}{2}(1 - {}^1/_4\, e^2 - {}^3/_{64}\, e^4 - \cdots) \qquad \mathbf{4}$$

folgt [d].

Zu 75: *a.* Nach 71:2', 74:10 und 46:12 erhält man successive

$$f = \int_\alpha^\beta y \cdot dx = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \int_\alpha^\beta \sqrt{\mathfrak{a}^2 - x^2} \cdot dx = \frac{\mathfrak{b}}{2\mathfrak{a}} \left[x \sqrt{\mathfrak{a}^2 - x^2} + \mathfrak{a}^2 \cdot \mathrm{Asi}\,\frac{x}{\mathfrak{a}}\right]_\alpha^\beta$$

und hieraus unmittelbar 1. — *b.* Für $\beta = \alpha$ geht bei Dublieren 1 in 2' über, und dieses für $\alpha = 0$ und nochmaliges Dublieren in 2''. — *c.* Mit Benutzung von 74:15 wird das Bogenelement

$$ds = R \cdot d\varphi = a(1 + d \cdot Co\, 2\varphi)^{-3/2} \cdot d\varphi = a\left[1 + \frac{15}{16}d^2 - \frac{3}{2}d \cdot Co\, 2\varphi + \frac{15}{16}d^2 \cdot Co\, 4\varphi - \cdots\right]$$

woraus durch Integration zwischen den Grenzen 0 und φ

$$s = a\left[\left(1 + \frac{15}{16}d^2\right)\varphi - \frac{3}{4}d \cdot Si\, 2\varphi + \frac{15}{16}d^2 \cdot Si\, 4\varphi - \cdots\right] \qquad 5$$

folgt, wo nach 74:12 mit Hilfe von 74:2

$$a = \frac{\alpha(1 - e^2)}{(1 - 1/2\, e^2)^{3/2}} = \alpha(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{32}e^4 + \cdots\right) \qquad d = \frac{e^2}{2 - e^2} = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \cdots \qquad 6$$

ist. Substituiert man letztere Werte in 5, so geht unsere 3 hervor. — *d.* Die durch die Rektifikation der Ellipse veranlassten Untersuchungen führten nach und nach auch zur Betrachtung verwandter Integrale und es entstand so schliesslich die Lehre von den **elliptischen Funktionen**, für welche jedoch hier auf die betreffenden Specialschriften verwiesen werden muss, wie namentlich auf „**Legendre**, Traité des fonctions elliptiques. Paris 1825—28, 3 Vol. in 4., — **Abel**, Recherches sur les fonctions elliptiques (Crelle II von 1827 und später), — Gustav Jakob **Jacobi** (Potsdam 1804 — Berlin 1851; Prof. math. Königsberg, dann Akad. Berlin; vgl. Dirichlet in Berl. Abh. 1852 und: Gesammelte Werke, Berlin 1881—86, 4 Vol. in 4.), Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum. Regiomonti 1829 in 4., — **Durège**, Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig 1861 in 8. (4. A. 1887), — Karl Heinrich **Schellbach** (Eisleben 1805 geb.; Prof. math. Berlin), Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunktionen. Berlin 1864 in 8., — Alfred **Enneper** (? — Göttingen 1885; Prof. math. Göttingen), Elliptische Funktionen: Theorie und Geschichte. Halle 1876 in 8., — G. H. **Halphen**, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. Vol. 1. Paris 1886 in 8., — etc."

76. Die Parabel. — Für die Parabel bestehen (73) die zwei Grundgleichungen

$$y^2 = 2px \qquad r = \frac{p}{1 + Co\, v} = q \cdot Se^2\frac{v}{2} = q + x \qquad 1$$

von welchen sich die erste auf den Scheitel, die zweite auf den Brennpunkt bezieht, und in welchen p den Parameter, $q = 1/2\, p$ die Periheldistanz repräsentiert. Ferner erhält man für sie (70:1—4) für Tangente, Normale und Krümmungskreis [a]

$$y - y' = \frac{p}{y}(x - x') \qquad y - y' = -\frac{y}{p}(x - x') \qquad 2$$

$$Tang. = 2\sqrt{x(x+q)},\quad Norm. = 2\sqrt{q(x+q)},\quad Subt. = 2x,\quad Subn. = p$$

$$A = 3x + p \qquad B = -\frac{y^3}{p^2} \qquad R^2 = \frac{(2x+p)^3}{p} = \frac{4r^3}{q} \qquad 3$$

Bezeichnet s den vom Scheitel aus gemessenen Parabelbogen, F die von ihm, Ordinate und Axe eingeschlossene Fläche, und $f = F - 1/2\, y(x - q)$ den entsprechenden Parabelsector, so ist [b]

$$s = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p}{2}\,\mathrm{Ln}\,(y+\sqrt{p^2+y^2}) \qquad \mathbf{4}$$

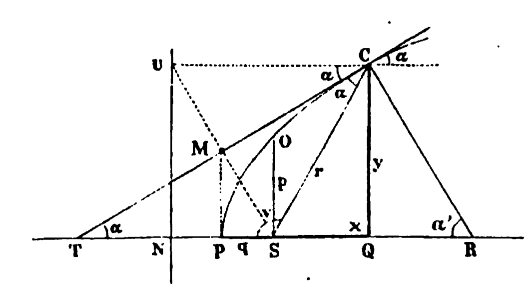
$$F = y^3 : 3p = {}^2/_3\, x\cdot y \qquad f = q^2\left[\mathrm{Tg}\,\frac{v}{2} + {}^1/_3\,\mathrm{Tg}^3\,\frac{v}{2}\right] \qquad \mathbf{5}$$

Für die vielen andern, höchst merkwürdigen Eigenschaften der Parabel muss teils auf die Noten, teils auf die bereits erwähnten Specialschriften verwiesen werden ^{e}.

Zu 76: *a.* Da sich nach 1 für die Parabel

$$f(x) = \sqrt{2px} \qquad f'(x) = \sqrt{\frac{p}{2x}} = \frac{p}{y} = \frac{y}{2x} \qquad f''(x) = \sqrt{\frac{p}{8x^3}} = \frac{p^2}{y^3} = \frac{y}{4x^2} \qquad \mathbf{6}$$

entsprechen, so werden die 2 und 3 aus den 70 : 1—4 ohne Schwierigkeit erhalten. — Ist $NP = q$, NU senkrecht und CU parallel zur Axe, so ist $r = q + x = NQ = CU$ und es steht daher jeder Punkt der Parabel von dem Brennpunkte und der sog. **Directrix** NU gleich weit ab, und da sich, wegen $TS = r$, CT und SU gegenseitig unter rechtem Winkel halbieren, so ergiebt ein einfaches Konstruktionsverfahren sowohl eine Folge von Punkten der Parabel als der ihnen entsprechenden Tangenten.



Überdies folgt daraus, dass $MP \perp TS$, und somit $MS^2 = PS\cdot TS = q\cdot r$ ist, wie dies schon **Newton** (Princ. 53) aussprach. — *b.* Nach 71 : 1 ergiebt sich mit Hilfe von 1 und 6

$$s = \int_0^x \sqrt{1+f'(x)^2}\cdot dx = \int_0^y \sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}\cdot\frac{y}{p}\cdot dy = \frac{1}{p}\int_0^y \sqrt{p^2+y^2}\cdot dy$$

und hieraus mit Hilfe von 46 : 11''' unsere 4, während aus 71 : 2 einerseits 5' und anderseits

$$f = \frac{1}{2}\int_0^v r^2\cdot dv = q^2\int_0^v \mathrm{Se}^4\,\frac{v}{2}\cdot\frac{dv}{2} = q^2\int_0^v\left(1+\mathrm{Tg}^2\,\frac{v}{2}\right)d\cdot\mathrm{Tg}\,\frac{v}{2}$$

also auch 5'', folgt. — *c.* Die Fläche f kann auch durch die Differenz von PCQ und SCQ dargestellt, also, wenn $q = 1$ angenommen wird,

$$f = \frac{y^3}{6} - \frac{(x-1)\,y}{2} = \frac{y^3}{24} + \frac{y}{2} \qquad \text{oder} \qquad 24f = y^3 + 12\cdot y \qquad \mathbf{7}$$

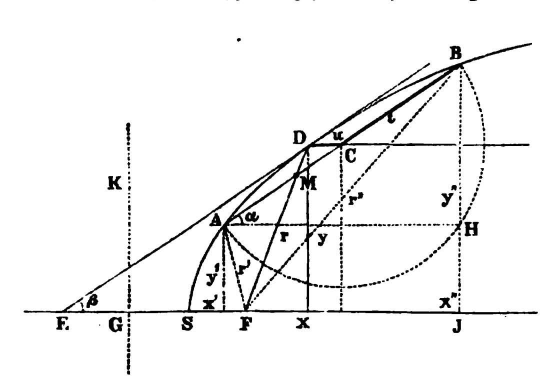
gesetzt werden, während man, da $QR = 2q = 2$ und $SR = (x-q) + 2q = r$ ist,

$$\alpha' = \frac{v}{2} \qquad y = 2\cdot\mathrm{Tg}\,\alpha' \qquad r = 1 + x = 1 + {}^1/_4\, y^2 \qquad \mathbf{8}$$

hat. Man kann daher nach 8 und 7 aus v successive α', y, r und f leicht berechnen und sodann umgekehrt eine auf diese Weise erstellte Tafel benutzen, um darin die einem gegebenen Argumente f entsprechenden Werte von v und r aufzuschlagen. Schon **Halley** hat in seiner Abhandlung „A Synopsis of the Astronomy of Comets (Ph. Tr. 1705; lat. in Tabulæ astronomicæ, Londini 1749 in 4.)" eine solche Tafel gegeben, bei welcher jedoch das von ihm als

„Medius motus" bezeichnete Argument f in Hundertsteln des Parabelsectors OSP ausgedrückt ist; da die Fläche dieses letztern (für $x = q = 1$ und $y = p = 2$) nach 5 gleich $^4/_3$ ist, so muss somit der nach 7 berechnete Wert von f noch mit $100 \times {}^3/_4 = 75$ multipliziert werden, um den entsprechenden der Halley'schen Tafel, von welcher unsere IX* ein Specimen giebt, zu erhalten. — Kennt man die Radien vectoren r_1 und r_2 zweier Parabelpunkte, sowie ihren Winkel w, so kann man leicht auch ihre Winkel v_1 und v_2 mit der Axe und sodann die Periheldistanz q finden: Führt man nämlich in 62:4 statt α und β die Komplemente von $^1/_2\, v_1$ und $^1/_2\, v_2$ ein, und berücksichtigt 1'', so erhält man

$$\text{Tg}\, {}^1/_4 (v_1 + v_2) = \text{Ct}\, {}^1/_4\, w \cdot \text{Tg}(x - 45^0) \quad \text{wo} \quad \text{Tg}\, x = \text{Co}\, {}^1/_2\, v_1 : \text{Co}\, {}^1/_2\, v_2 = \sqrt{r_2 : r_1} \qquad \textbf{9}$$



kann also successive x, $v_1 + v_2$, v_1 und v_2, sowie schliesslich nach 1'' auch q finden. Es ist 9 der moderne Ausdruck einer von **Lacaille** (Astron., éd. 1761, p. 278) ohne Beweis gegebenen Analogie. — Zieht man durch die Mitte C einer Parabelsehne AB eine Parallele CD zur Axe und an D eine Tangente DE, so hat man nach 2, 1 und Fig. successive

$$ES = x \qquad y = {}^1/_2 (y' + y'') \qquad y^2 = 4qx$$
$$y'^2 = 4qx' \qquad y''^2 = 4qx'' \qquad \textbf{10}$$
$$\text{Tg}\,\alpha = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2q}{y} = \frac{y}{2x} = \text{Tg}\,\beta$$

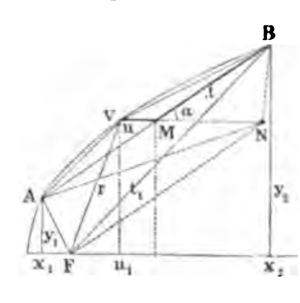
oder $\alpha = \beta$: Es ist somit die Tangente der Sehne parallel, — und umgekehrt, wenn man an einen Punkt der Parabel eine Tangente legt, so werden alle zu ihr parallelen Sehnen durch eine Parallele zur Axe halbiert. Auch folgt, dass $\angle DMC = AMF = EDF = \beta = DCM$, also $DM = u$ ist, während

$$u = \frac{x' + x''}{2} - x = \frac{1}{8 \cdot q}\left[y'^2 + y''^2 - 2\left(\frac{y' + y''}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{16 \cdot q}(y'' - y')^2 \qquad \textbf{11}$$
$$2t \cdot \text{Si}\,\alpha = y'' - y' \quad \text{oder} \quad t^2 = \frac{(y'' - y')^2}{4\,\text{Si}^2\,\alpha} = \frac{4q}{\text{Co}^2\, {}^1/_2\, v} \cdot u = 4ru$$

wird, so dass bei schiefwinkligen Coordinaten r, also auch der Abstand des Scheitels vom Brennpunkte, die q ersetzt. Der aus C über AB beschriebene Halbkreis geht offenbar durch H und es wird $AH = x'' - x' = r'' - r'$. Soll man daher durch A und B eine Parabel des Brennpunktes F legen, so beschreibe man über AB einen Halbkreis und schneide von A aus mit $r'' - r'$ auf denselben ein, wodurch man H erhält; dann ist FE ∥ AH die Axe, und trägt man $JG = r''$ ab, so ist GK ∥ BJ die Directrix, der in der Mitte zwischen F und G liegende Punkt S aber der Scheitel, womit alles übrige ebenfalls gegeben ist. — Aus 10 und 11 folgen successive

$$y''^2 - y'^2 = 4q(x'' - x') \qquad y'' + y' = 4q\,\frac{x'' - x'}{y'' - y'} = 4q \cdot \text{Ct}\,\alpha \qquad \textbf{12}$$
$$y = 2q \cdot \text{Ct}\,\alpha = \frac{t^2 \cdot \text{Si}\,2\alpha}{4u} \qquad x = \frac{y^2}{4q} = q \cdot \text{Ct}^2\,\alpha = \frac{t^2 \cdot \text{Co}^2\,\alpha}{4u}$$

Wenn man also zwei Punkte A und B der Parabel, sowie ihren sog. **Vertex** D kennt, somit auch t, u und α, so kann man nach 11 und 12 die q, y und x berechnen, also Hauptaxe, Scheitel und Brennpunkt finden. — Geht AB durch den Brennpunkt, so fällt M mit F zusammen, also wird $DF = u$, folglich, nach 11, $t^2 = 4u \cdot u$ oder $t = 2u$. — Bezeichnet S die Fläche des durch die Sehne AB gebildeten Parabelsegmentes und Δ diejenige des eingeschriebenen, wie man zu sagen pflegt, mit dem Segmente gleiche Basis und Höhe besitzenden Dreieckes AVB, — und setzt man



$$A = x_2 y_2 - x_1 y_1 \qquad B = (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) \qquad \mathbf{13}$$

so ergiebt sich nach 5' und 1

$$S = \frac{y_2^3 - y_1^3}{3p} - \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) = {}^2/_3 A - {}^1/_2 B \qquad \mathbf{14}$$

$$\Delta = \frac{y_1 + t_1}{2}(u - x_1) + \frac{t_1 + y_2}{2}(x_2 - u) - {}^1/_2 B = \frac{A}{2} - \frac{3}{8} B = {}^3/_4 S \qquad \mathbf{15}$$

d. h. der merkwürdige Satz, mit welchem **Archimedes** seine klassische Schrift „Quadraturæ Parabolæ (Ed. Peyrard 318—47)" abgeschlossen hat. Ferner kann man nach 14 auch die beiden durch AV und BV bestimmten Segmente berechnen und so deren Gleichheit erweisen, und damit zugleich, dass VM nicht nur das Dreieck, sondern auch das Segment AVB halbiert. Da ferner $\Delta = t \cdot u \cdot \mathrm{Si}\,\alpha$, so folgt nach 15

$$S = {}^4/_3\, t \cdot u \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \qquad \mathbf{16}$$

Ist nun FN ∥ AB und bezeichnet man Dreieck AFB mit f, so hat man (da FN als Parallele zur Tangente durch die Normale von V unter rechtem Winkel halbiert werden, also $VN = r$ sein muss)

$$f = \Delta ANB = 2 \cdot \frac{t \cdot MN \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}{2} = t(r - u)\,\mathrm{Si}\,\alpha$$

und daher endlich, mit Hilfe von 16, den Parabelsector

$$P = S + f = t(r + {}^1/_3 u) \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \qquad \mathbf{17}$$

eine Formel, von der wir später (495) Gebrauch machen werden.

77. Die Hyperbel. — Für die Hyperbel bestehen (73) die drei Grundgleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \qquad r = \frac{p}{1 + e \cdot \mathrm{Co}\,v} \qquad \mathbf{1}$$

von welchen sich die erste auf den Mittelpunkt, die zweite auf den Scheitel und die dritte auf den Brennpunkt bezieht, während $e > 1$ und $r_1 - r_2 = 2a$ ist. Sie besteht offenbar aus zwei unendlichen Ästen, welche sich den durch den Mittelpunkt unter dem Winkel $\alpha = \mathrm{Atg}(b : a)$ zur grossen Axe gezogenen Geraden, den sog. **Asymptoten**, fortwährend nähern, ohne sie je zu erreichen [a]. Bezeichnen x_1 und y_1 die auf diese Asymptoten bezogenen schiefwinkligen Coordinaten eines Hyperbelpunktes, so ergiebt sich aus 1 die merkwürdige, sog. Asymptotengleichung

$$x_1 \cdot y_1 = {}^1/_4 (a^2 + b^2) \qquad \mathbf{2}$$

deren Konstante **Potenz** der Hyperbel genannt wird [b]. — In dem Specialfalle $a = b$, wo die Hyperbel **gleichseitig** heisst, wird

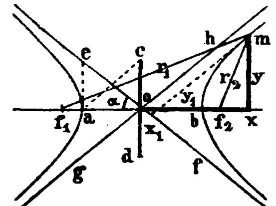
$$\alpha = 45^0 \qquad x_1 \cdot y_1 = {}^1/_2\, a^2 \qquad \mathbf{3}$$

Es stehen somit die Asymptoten zu einander senkrecht, und wenn man die durch Hyperbel, Asymptote und die den Abscissen a und b entsprechenden Ordinaten eingeschlossene Fläche mit F bezeichnet, so hat man nach 3 und 71 : 2

$$F = \int_a^b y_1 \cdot dx_1 = \frac{a^2}{2} \int_a^b \frac{dx_1}{x_1} = \frac{a^2}{2} \operatorname{Ln} \frac{b}{a} \qquad \mathbf{4}$$

Es sind also solche Flächen den natürlichen Logarithmen proportional und es hat somit eine gewisse Berechtigung, letztere als **hyperbolische Logarithmen** zu bezeichnen.

Zu 77: *a.* Die Grundeigenschaft der **Asymptoten** (von Ἀσύμπτωτος = nicht zusammenfallend) beruht darauf, dass aus 1'



$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} < \pm \frac{b}{a} \cdot x = \pm x \cdot \operatorname{Tg} \alpha \qquad \mathbf{5}$$

folgt. — *b.* Die 2 wird erhalten, indem man

$$x = (y_1 + x_1) \operatorname{Co} \alpha \qquad y = (y_1 - x_1) \operatorname{Si} \alpha$$

in 1' einführt. — Da sich die Flächen zweier gleichwinkligen Parallelogramme wie die Produkte ihrer Nebenseiten verhalten, so geht aus 2 unter anderm hervor, dass alle zwischen den Asymptoten liegenden Parallelogramme, bei welchen die Gegenecke des Mittelpunktes in der Hyperbel liegt, gleiche Fläche besitzen.

78. Die hyperbolischen Funktionen. — Bald nachdem **Riccati** und **Daviez** de Foncenex auf verschiedene Analogien hingewiesen hatten, welche zwischen Beziehungen am Kreise und an der gleichseitigen Hyperbel bestehen [a], wurde auch **Lambert** auf diese Verhältnisse aufmerksam und bearbeitete sie in einer Weise, dass die Neuzeit nur wenig wesentliches beizufügen hatte [b]: Nicht nur führte er (entsprechend wie Riccati) die Hyperbel-Coordinaten y, x und ihr Verhältnis y : x als **hyperbolische** Sinus (Sih), Cosinus (Coh) und Tangens (Tgh) der Doppelfläche φ ein, — sondern er hatte auch den trefflichen Gedanken, α als **Angulus communis** und ψ als **Angulus transcendens** beizuziehen, so dass er über die Relationen

$$\begin{array}{lll} \operatorname{Sih} \varphi = \operatorname{Tg} \psi & \operatorname{Coh} \varphi = \operatorname{Se} \psi & \operatorname{Tg} \alpha = \operatorname{Si} \psi \\ \operatorname{Tgh} \varphi = \operatorname{Sih} \varphi : \operatorname{Coh} \varphi = \operatorname{Tg} \alpha & & \operatorname{Coh}^2 \varphi - \operatorname{Sih}^2 \varphi = 1 \end{array} \qquad \mathbf{1}$$

verfügte [c]. Da überdies

$$\varphi = \pm \operatorname{Ln} (x \pm y) = \frac{1}{\operatorname{Lg} e} \cdot \operatorname{Ltg} (45^0 + {}^1/_2\, \psi) \qquad \mathbf{2}$$

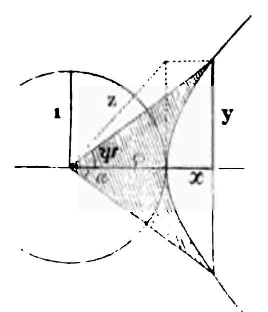
war [d], so ergaben sich **einerseits** die Beziehungen

$$x \pm y = e^{\pm\varphi} \qquad \mathrm{Sih}\,\varphi = {}^1\!/_2\,(e^{\varphi} - e^{-\varphi}) \qquad \mathrm{Coh}\,\varphi = {}^1\!/_2\,(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) \qquad 3$$

$$(\mathrm{Coh}\,\varphi \pm \mathrm{Sih}\,\varphi)^n = \mathrm{Coh}\,n\varphi \pm \mathrm{Sih}\,n\varphi \qquad 4$$

durch welche die erwähnte Analogie zwischen den cyklischen und hyperbolischen Funktionen erwiesen, sowie die Möglichkeit gegeben war, mit grösster Leichtigkeit auch andere, unsern frühern goniometrischen entsprechende Formeln abzuleiten [e], — und **anderseits** ein Mittel, um für das Argument ψ, für welches sich nach 1 aus den gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln ohne weiteres Sih, Coh und Tgh herausschreiben und die α finden lassen, auch noch die φ leicht zu berechnen, d. h. die zum wirklichen Gebrauche der hyperbolischen Funktionen nötigen Tafeln zu erstellen [f].

Zu 78: *a.* Vgl. „Vincenzo **Riccati** (Castelfranco bei Treviso 1707 — Treviso 1775; Jesuit; Prof. math. Bologna), Opuscula ad res physicas et mathematicas pertinentia. Bononiæ 1757 in 4. (namentlich Opusc. IV), — und: François **Daviez** de Foncenex (Thonon 1734 — Casale 1799; Kommandant der sardinischen Marine), Réflexions sur les quantités imaginaires (Misc. Taur. I von 1759; Nachtrag in II)". — *b.* **Lambert** wurde durch gewisse Verhältnisse, welche sich ihm (179) bei Lösung einer astronomischen Aufgabe erzeigten, auf die hyperbolischen Funktionen aufmerksam und beschäftigte sich nunmehr ernstlich mit denselben, wie uns sein „Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques (Mém. Berl. 1761; gelesen 1767, ausgegeben 1770)" zeigt. Nachher liess er noch in seinen „Observations trigonométriques (Mém. Berl. 1768; ausgeg. 1770)", und in seinen „Zusätzen zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen. Berlin 1770 in 8." weitere betreffende Untersuchungen folgen. — *c.* Laut Definition schwankt Sih zwischen 0 und ∞, Coh zwischen 1 und ∞, Tgh zwischen 0 und 1. — Nach 77 : 1' ist in unserm Specialfalle $x^2 - y^2 = 1$, also $z^2 = 1 + y^2 = x^2$ oder $z = x$, und hieraus gehen in Verbindung mit der Figur unsere 1 hervor. Den Winkel α bezeichnete **Lambert** als **Angulus communis**, da er für Kreis und Hyperbel Bedeutung hat, — den Winkel ψ, „qui nous fait passer des fonctions circulaires aux fonctions hyperboliques", nannte er anfänglich (analog astronomischem Gebrauche) „angle de commutation", später dagegen **Angulus transcendens**. — *d.* Bezeichnet F die Fläche des durch 2y bestimmten Hyperbelsegmentes, so ergiebt sich mit Hilfe von 71 : 2', 45 : 4' und 46 : 12''' successive



$$F = 2\int_1^x y \cdot dx = 2xy - 2\int_0^y x \cdot dy = 2xy - 2\int_0^y \sqrt{1+y^2} \cdot dy$$

$$= 2xy - \left[y\sqrt{1+y^2} + \mathrm{Ln}\,(y + \sqrt{1+y^2})\right] = xy - \mathrm{Ln}\,(x+y) \qquad 5$$

folglich

$$\varphi = xy - F = \mathrm{Ln}\,(x+y) = \mathrm{Ln}\,\frac{1}{x-y} = -\,\mathrm{Ln}\,(x-y)$$

womit 2' erwiesen ist. Hieraus erhält man aber mit Hilfe von 1, 39 : 7 und 62 : 2 successive

$$\varphi = \frac{\operatorname{Ln}(x+y) - \operatorname{Ln}(x-y)}{2} = \frac{1}{2\operatorname{Lg} e} \cdot \operatorname{Lg} \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2\operatorname{Lg} e} \cdot \operatorname{Lg} \frac{1+\operatorname{Si}\psi}{1-\operatorname{Si}\psi}$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{Lg} e} \cdot \frac{1-\operatorname{Co}(90^0+\psi)}{1+\operatorname{Co}(90-\psi)} = \frac{1}{\operatorname{Lg} e} \cdot \operatorname{Ltg}\left(45^0 + \frac{\psi}{2}\right)$$

d. h. auch die 2''. — *e.* Die 3 ergeben sich unmittelbar aus den 2', — die dem Moivre'schen Lehrsatz korrespondierende 4 aus 3'. Mit Hilfe der 3 lässt sich sodann die Richtigkeit der Formeln

$$\operatorname{Sih}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{Sih}\alpha \cdot \operatorname{Coh}\beta \pm \operatorname{Coh}\alpha \cdot \operatorname{Sih}\beta \qquad \operatorname{Coh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{Coh}\alpha \cdot \operatorname{Coh}\beta \pm \operatorname{Sih}\alpha \cdot \operatorname{Sih}\beta$$

$$\operatorname{Sih}\alpha \pm \operatorname{Sih}\beta = 2\operatorname{Sih}{}^1/_2(\alpha \pm \beta) \cdot \operatorname{Coh}{}^1/_2(\alpha \mp \beta) \qquad \text{etc.}$$

von welchen z. B. die dritte in 179 zur Anwendung kommen wird, leicht verifizieren. — *f.* Die von **Riccati** nur „gewünschten" Tafeln wurden sodann von **Lambert** in seinen zwei spätern Schriften wirklich gegeben, doch so, dass er zur Vereinfachung der Berechnung die sich ja ohnehin auf eine willkürliche Flächeneinheit beziehende φ durch $\varphi \cdot \operatorname{Lg} e$ ersetzte; unsere IV^b giebt, unter Reduktion seiner 7 auf 4 Decimalen, ein Specimen dieser Tafel. Manche neuere, wie z. B. „**Ligowski**, Taschenbuch der Mathematik. Berlin 1867 in 12." haben für ihre betreffende Tafel φ statt ψ als Argument gewählt, wodurch aber nach meiner Ansicht die Erstellung der Tafel mehr erschwert, als ihre Brauchbarkeit gefördert wird. — Für andere Tafeln und weitere Entwicklungen verweise ich auf die Speciallitteratur: „Will. **Wallace**, New Series for the quadrature of conic sections, and the computation of Logarithms (Edinb. Trans. 1806), — Chr. **Gudermann**, Theorie der Potenzial- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen. Berlin 1833 in 4., — W. **Gronau**, Tafeln für die hyperbolischen Sectoren und für die Logarithmen ihrer Sinus und Cosinus. Danzig 1863 in 8., und: Theorie und Anwendung der hyperbolischen Funktionen. Danzig 1865 in 8., — **Forti** e **Mossotti**, Tavole dei logaritmi delle funzioni circolari e iperboliche. Pisa 1863 in 12. (2. ed. 1870), — C. A. **Laisant**, Essai sur les fonctions hyperboliques. Paris 1874 in 8., — S. **Günther**, Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen. Halle 1881 in 8., — etc."

79. Einige Linien höhern Grades. — Da jeder Gleichung zwischen zwei Coordinaten, welche die eine als eine kontinuierliche Funktion der andern bedingt, eine Punktenfolge entspricht, so hat man so viele verschiedene Linien als es solche Gleichungen giebt, und aus diesen sind gewisse um ihrer merkwürdigen Eigenschaften willen besonders hervorgehoben worden, so z. B. die durch die algebraischen Gleichungen

$$y^3 = a \cdot x^2 \qquad y^2 = \frac{x^3}{a-x} \qquad \mathbf{1}$$

$$x^2 \cdot y^2 = (a+y)^2 \cdot (b^2 - y^2) \qquad x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$$

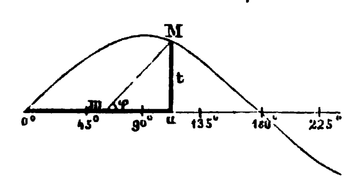
etc., dargestellten Kurven, welche der Reihe nach als **Neils Parabel, Cissoide des Diokles, Conchoide des Nikomedes, Lemniscate Jak. Bernoullis**, etc., bezeichnet werden *a*, — oder die durch die transcendenten Gleichungen

$$y = a^x \qquad r^2 = \frac{v}{2\pi} \qquad \text{oder} \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{2\pi} \text{Atg} \frac{x}{y}$$

$$y = \text{Si}\, x \qquad v = {}^1/\alpha \cdot \text{Ln} \frac{r}{a} \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = a^{\alpha \cdot \text{Atg}(x:y)} \qquad \mathbf{2}$$

etc., dargestellten Kurven, welche der Reihe nach **Logistik, parabolische Spirale, Sinusoide, logarithmische Spirale**, etc., heissen [b]. So interessant jedoch diese Kurven von geometrischem Standpunkte aus sind, so wenig Bedeutung haben sie, mit einziger Ausnahme der später (487) zur Anwendung kommenden Sinusoide und der unter der folgenden Nummer speciell zu behandelnden Roll-Linien, für die Astronomie, und ich muss mich daher darauf beschränken, für dieselben auf Specialwerke zu verweisen [c].

Zu 79: *a.* Die nach William **Neil** (Bishop-Torp in Yorkshire 1637 — White Waltham in Berkshire 1670; Privatgelehrter) benannte Kurve hat zunächst dadurch Interesse, dass es nach dem Zeugnisse von **Wallis** (Ph. Tr. 1673) schon 1657 **Neil** gelang, an derselben die Möglichkeit zu erweisen, auch andere Kurven als die Kreislinie zu rektifizieren. — Die nach **Diokles**, einem etwa im 6. Jahrhundert unserer Zeitrechnung lebenden griechischen Geometer, benannte Kurve wird, wie ich in meiner Note „Über die Fusspunktencurven der Linien zweiten Grades (Crelle 20 von 1840)" zeigte, unter anderm erhalten, wenn man vom Scheitel einer Parabel Senkrechte auf deren Tangenten fällt. — **Nikomedes** soll etwa 150 v. Chr. gelebt haben. — *b.* Die Logistik wurde mutmasslich zuerst von **Huygens** in einem Anhange zu seiner „Dissertatio de causa gravitatis" behandelt. — Die Konstruktion der Sinusoide geht aus der beistehenden Figur hervor. — Die logarithmische Spirale, welche die Eigentümlichkeit hat, dass sie sich in ihrer Evolute wiederholt, wurde namentlich durch Jakob



Bernoulli studiert und nach seinem Wunsche nebst den Worten „Eadem mutata resurgo" auf seinem Grabstein angebracht. — *c.* Den bereits erwähnten Schriften füge ich noch bei „Gabriel **Cramer** (Genf 1704 — Bagnols bei Nismes 1752; Prof. math. et philos. Genf; vgl. Biogr. III), Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genève 1750 in 4."

80. Die Roll-Linien. — Wälzt sich ein konvexes Vieleck der Fläche f auf einer Geraden, so beschreibt jeder damit verbundene Punkt eine aus Kreisbogen bestehende sog. **Roll-Linie**, welcher nach einer vollen Umwälzung eine aus Dreiecken und Sectoren bestehende Fläche

$$F = f + \frac{1}{2} \Sigma (a^2 \cdot \alpha) = \varphi + r^2 \pi \quad \text{wo} \quad \varphi = f + \frac{1}{2} \Sigma (r^2 \cdot \alpha) \qquad \mathbf{1}$$

ist, entspricht, sofern $a_1\, a_2 \ldots$ die Abstände des beschreibenden Punktes von den Vieleckseecken, $r_1\, r_2 \ldots$ diejenigen dieser Ecken von ihrem Schwerpunkte, $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots$ die Drehwinkel bezeichnen,

ferner r der Abstand des beschreibenden Punktes von dem Schwerpunkte, und endlich φ der Wert von F für $r = 0$ ist. Diese von **Steiner** zuerst aufgefundene Beziehung gilt natürlich auch noch, wenn das Vieleck, und damit die Roll-Linie, in eine Kurve übergeht [a]. — Rollt z. B. ein Kreis des Radius a auf einer Geraden den Winkel v ab, so beschreibt der vom Centrum um b abstehende Punkt eine Roll-Linie, für welche

$$y = a - b \cdot \mathrm{Co}\,v, \quad x = a \cdot v - b \cdot \mathrm{Si}\,v = a \cdot \mathrm{Aco}\frac{a-y}{b} - \sqrt{b^2-(a-y)^2} \qquad \mathbf{2}$$

ist. Sie hat den Namen **Cykloide** (Roulette, Trochoide) erhalten, und zwar speciell für $b = a$ **gemeine**, für $b < a$ **verlängerte**, für $b > a$ **verkürzte Cykloide** [b]. — Für die gemeine Cykloide gehen die 2 in

$$y = a(1 - \mathrm{Co}\,v), \quad x = a(v - \mathrm{Si}\,v) = a \cdot \mathrm{Aco}\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2} \qquad \mathbf{3}$$

über, während nach 70 : 1—4 für Tangente, Normale und Krümmungskreis

$$y - y' = (x - x') \cdot \mathrm{Ct}\,{}^1\!/_2 v \qquad y - y' = -(x - x') \cdot \mathrm{Tg}\,{}^1\!/_2 v$$

$$\mathrm{Tang.} = y' \cdot \mathrm{Se}\,{}^1\!/_2 v \qquad \mathrm{Norm.} = y' \cdot \mathrm{Cs}\,{}^1\!/_2 v \qquad \mathbf{4}$$

$$\mathrm{Subt.} = y' \cdot \mathrm{Tg}\,{}^1\!/_2 v \qquad \mathrm{Subn.} = y' \cdot \mathrm{Ct}\,{}^1\!/_2 v$$

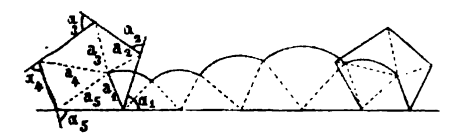
$$A = a(v + \mathrm{Si}\,v) \qquad B = -a(1 - \mathrm{Co}\,v) \qquad R = 4a \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2 v \qquad \mathbf{5}$$

folgen, und nach 71 : 1, 2 für Bogen und Fläche

$$s = 8a \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^1\!/_4 v \qquad f = {}^3\!/_2 a^2 v - 2a^2 \cdot \mathrm{Si}\,v + {}^1\!/_4 a^2 \cdot \mathrm{Si}\,2v \qquad \mathbf{6}$$

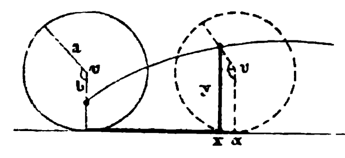
erhalten werden, woraus für $v = 2\pi$ als Länge der ganzen Cykloide $8a$, als Fläche derselben $3a^2\pi$ hervorgeht [c].

Zu 80: *a.* Der erste Ausdruck für F ergiebt sich unter Voraussetzung, dass die Drehwinkel α in Bogen ausgedrückt seien, von selbst, und da nach 72 : 2, wenn man die Konstanten m durch die α ersetzt,



$$\Sigma a^2 \cdot \alpha = \Sigma r^2 \cdot \alpha + 2r^2\pi$$

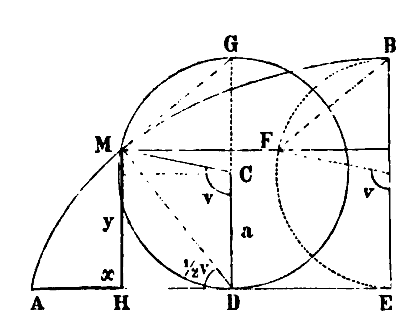
folgt, so erhält man auch den zweiten Ausdruck ohne die mindeste Schwierigkeit. **Steiner** hat letztern in seiner klassischen Abhandlung „Von dem Krümmungsschwerpunkte ebener Curven (Crelle 21 von 1840; auch Berl. Abh. 1838)" ausgesprochen. — *b.* Der Ausdruck für y und der erste Ausdruck für x lassen sich unmittelbar aus der Figur ablesen, und wenn man aus ihnen v eliminiert, so wird der zweite Ausdruck für x erhalten. — Der Cykloide war bei der Entwicklung der Geometrie im 17. Jahrhundert eine Hauptrolle zugeteilt: Die Lehre von den Krümmungsverhältnissen, den Quadraturen und Rektifikationen, etc., erwuchs



zunächst aus den Aufgaben, welche sich die **Roberval**, **Cavalieri**, **Pascal**, etc. in betreff dieser merkwürdigen Linie stellten, und ich bedaure lebhaft, dass mir der beengte Raum nicht erlaubt, im Detail auf diesen Process einzutreten, — auch mich nötigt, von andern Roll-Linien, wie z. B. von der beim Rollen eines Kreises auf einem Kreise entstehenden **Epicykloide**, Umgang zu nehmen. — *c.* Aus den 3 folgt durch Differentieren

$$dx = a(1 - \mathrm{Co}\,v) \cdot dv = y \cdot dv \qquad dy = a \cdot \mathrm{Si}\,v \cdot dv \qquad dx : dy = \mathrm{Tg}\,{}^1\!/_2 v \quad \mathbf{7}$$

und mit Hilfe hievon ergeben sich nach 70 : 1—4 sofort die 4 und 5. Da laut Figur $HD = y \cdot \mathrm{Ct}\,{}^1\!/_2 v$, so ist HD nach 4 die Subnormale, also MD Normale und MG Tangente in M. Ferner ergiebt sich nach den zwei ersten 5, dass der Ort des Krümmungsmittelpunktes einer Cykloide, oder (70) ihre Evolute, wieder eine gleiche Cykloide ist, deren Scheitel B' mit A zusammenfällt, während ihr Anfangspunkt A' in Beziehung auf AE symmetrisch zu B liegt oder dass, wie schon **Huygens** nachwies, beim Abwickeln einer Cykloide notwendig eine ihr gleiche Cykloide entsteht, — und nach der 3, dass der Krümmungshalbmesser doppelt so gross als die Normale ist. — Nach 7 und 71 : 1 erhält man ferner



$$s = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy = 4a \int_0^v \mathrm{Si}\,\frac{v}{2} \cdot \frac{dv}{2} = -4a \cdot \mathrm{Co}\,\frac{v}{2} + 4a = 8a \cdot \mathrm{Si}^2\,\frac{v}{4}$$

wodurch einerseits 6' erwiesen ist und anderseits die Gleichheit $MB = 4a - s = 4a \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2 v = 2 \cdot FB$ folgt, auf welche **Wren** schon 1658 Pascal aufmerksam machte. Endlich erhält man nach 7, 71 : 2 und 46 : 22

$$f = \int_0^y y \cdot dx = \int_0^v y^2 \cdot dv = 8a^2 \int_0^v \mathrm{Si}^4\,\frac{v}{2} \cdot \frac{dv}{2} = 8a^2 \int_0^v \mathrm{Si}^2\,\frac{v}{2} \cdot \frac{dv}{2} - a^2 \int_0^v \mathrm{Si}^2\,v \cdot dv$$

$$= 2a^2 (v - \mathrm{Si}\,v) - {}^1\!/_4 a^2 (2v - \mathrm{Si}\,2v)$$

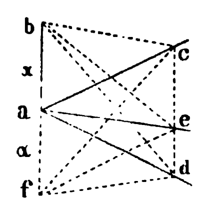
womit 6'' übereinstimmt und woraus für $v = 2\pi$, wie schon bemerkt, $3a^2\pi$ als Fläche der ganzen Cykloide folgt, — ein Resultat, welches auch aus 1 hervorgeht, da für die gemeine Cykloide offenbar $\varphi = 2a^2\pi$ wird.

81. Einleitung in die Raumgeometrie. — Eine Ebene wird durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte, also auch durch zwei sich im Endlichen oder Unendlichen schneidende Gerade, bestimmt, und schneidet daher jede andere Ebene in einer Geraden, ihrer sog. **Kante** (Spur, Knotenlinie). — Dreht sich abwechselnd eine in einer Ebene liegende Gerade in derselben um einen ihrer Punkte und dann die Ebene um die Gerade, so entsteht, wenn nach n Doppelbewegungen Gerade und Ebene wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehren, ein **n-Kant** oder **Raum-n-Eck**: Die Dreh-

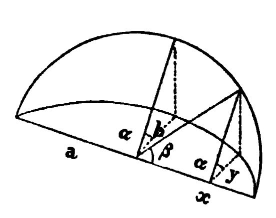
winkel der Geraden heissen **Kantenwinkel**, diejenigen der Ebene **Flächenwinkel**; beide haben die Umdrehung, welche der frühern Einteilung unterliegt, zur Einheit, und entsprechen nebst den Kanten, den Seiten, Winkeln und Ecken des n-Ecks. — Ehe wir jedoch zur nähern Betrachtung des n-Kants oder auch nur des Raumdreiecks übergehen können, müssen wir uns mit einigen Elementarsätzen bekannt machen: Zieht man von einem Punkte eine Gerade nach einer Ebene, und steht diese auf zwei durch ihren sog. **Fusspunkt** gehenden Geraden der Ebene senkrecht, so bildet sie auch mit jeder Dritten rechte Winkel und heisst darum **senkrecht zur Ebene**[a]: Der Fusspunkt wird **Projektion** des äussern Punktes auf die Ebene genannt, und die Entfernung des Punktes von derselben, welche offenbar seine kürzeste Verbindung mit der Ebene darstellt, **Abstand.** Ferner folgt, dass, wenn man unter **Projektion einer Geraden** die Verbindungslinie der Projektionen ihrer Endpunkte versteht, diese Projektion erhalten wird, indem man die Gerade mit dem Cosinus des Winkels multipliziert, welchen sie mit einer Parallelen zur Projektion bildet, — eine Regel, welche sich offenbar auch auf die Projektion einer Strecke auf irgend eine andere Gerade übertragen lässt[b]. Ebensoleicht lässt sich beweisen, dass, wenn zwei Gerade zu einer dritten parallel sind, sie auch unter sich parallel sein müssen, — dass Winkel mit parallelen Schenkeln gleich sind, — dass Parallele zu einer Senkrechten ebenfalls senkrecht stehen, — etc. — Wenn auf zwei Kanten Senkrechte in den sie bildenden Ebenen gezogen werden und diese sog. **Senkrechtenwinkel** gleich sind, so können auch die Flächenwinkel zur Deckung gebracht werden, sind daher ebenfalls gleich. Teilt man somit einen Senkrechtenwinkel in gleiche Teile und legt durch die Teillinien und die Kante Ebenen, so zerfällt auch der Flächenwinkel in gleiche Teile; also sind die Flächenwinkel den Senkrechtenwinkeln proportional und können durch sie gemessen werden. — Jede Ebene, welche durch eine Senkrechte zu einer Ebene gelegt wird, steht ebenfalls senkrecht, und umgekehrt müssen zwei zu einer dritten Ebene senkrechte Ebenen auch eine zu ihr senkrechte Kante haben. Zwei Ebenen, welche mit einer dritten Ebene parallele Kanten und gleiche Winkel bilden, heissen **parallel** und haben überall denselben Abstand von einander. Parallele zwischen parallelen Ebenen sind gleich, — jede zwei Gerade werden durch ein System von parallelen Ebenen proportional geschnitten, — etc. — Projiziert man endlich ein Dreieck der Fläche F auf eine durch seine Basis gelegte Ebene, so ist offenbar die Höhe der Projektion gleich der Projektion der Höhe, und somit, wenn φ den Projektionswinkel be-

zeichnet, die Fläche der Projektion $f = F \cdot Co\,\varphi$, — eine Beziehung, welche sich leicht auf jede Fläche und deren Projektion ausdehnen lässt [c].

Zu 81: *a.* Steht ba senkrecht zu ac und ad, so steht sie auch senkrecht zu irgend einer Dritten ae; denn zieht man eine beliebige Gerade cd, verlängert ba um af = ba und zieht die in der Figur angegebenen Hilfslinien, so ergiebt sich die Folge von Kongruenzen: Δabc $\cong$ afc, abd $\cong$ afd, bcd $\cong$ fcd, bde $\cong$ fde und bea $\cong$ fea, aus deren letzterer die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht. Zugleich folgt, dass sich ac = ad und bc = bd, ae $\perp$ cd und be $\perp$ cd, etc., entsprechen. — Ebensoleicht lassen sich successive die folgenden Sätze erweisen; ich muss jedoch des beschränkten Raumes wegen Umgang davon nehmen, dies weiter auszuführen. —



b. Es schliesst sich hieran der Satz: Projiziert man auf eine Gerade alle Seiten eines ebenen oder räumlichen Vielecks, so ist die Projektion irgend einer Seite gleich dem Gegensatze der algebraischen Summe aller andern; haben daher zwei Vielecke eine gemeinschaftliche Seite, so sind für eine und dieselbe Gerade die Summen der Projektionen aller übrigen Seiten derselben einander gleich. — *c.* Projiziert man z. B. einen Kreis auf eine durch einen seiner Durchmesser gelegte Ebene, so erhält man, da successive



$$a \cdot Co\,\alpha = b, \quad x = a \cdot Co\,\beta, \quad y = a \cdot Si\,\beta \cdot Co\,\alpha = b \cdot Si\,\beta$$

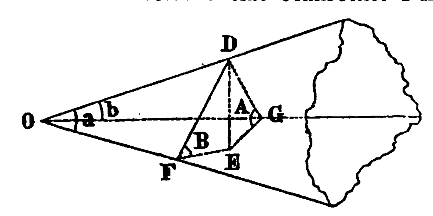
$$y^2 = b^2 (1 - Co^2 \beta) = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

folgen, eine Ellipse, und es ist daher, wenn F die Fläche dieser Ellipse bezeichnet, nach unserm Satze $F = a^2 \cdot \pi \cdot Co\,\alpha = a \cdot b \cdot \pi$, so dass auf diese Weise die Quadratur der Ellipse (75) in einfachster Weise vollzogen ist.

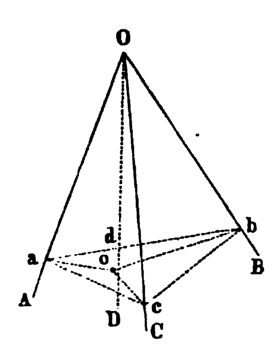
82. Das Raumdreieck. — In jedem Raumdreiecke oder Dreikant steht einer gleichen Seite ein gleicher, — einer grössern Seite ein grösserer Winkel gegenüber [a]. — Ferner ist in jedem Raumdreiecke auch die grösste Seite kleiner als die Summe der beiden übrigen, — die Summe aller drei Seiten kleiner als 360^0 [b]. — Fällt man von einem innerhalb eines Dreikants liegenden Punkte Senkrechte auf die Seiten desselben, so bestimmen diese ein neues Dreikant, welches **Polardreikant** des ersten heisst und die Eigenschaft besitzt, dass seine Seiten und Winkel zu den Winkeln und Seiten des erstern supplementär sind; da die Polarität gegenseitig ist, so ergiebt sich hieraus zugleich, dass die Winkelsumme eines Raumdreiecks immer grösser als 2 R ist, oder einen sog. **Excess** über die Winkelsumme des ebenen Dreiecks besitzt [c]. — Fällt man auf eine Seite eines Raumdreieckes von einem Punkte der Gegenkante eine Senkrechte, verlängert diese über ihren Fusspunkt hinaus um ihre eigene Länge und verbindet den so erhaltenen Punkt mit

dem Scheitel, so-bestimmt diese Verbindungslinie mit jener Seite ein neues Raumdreieck, welches zwar mit dem Gegebenen gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, aber nicht mit ihm vertauscht werden kann, dagegen mit ihm in Beziehung auf die gemeinschaftliche Seite in allen Teilen **symmetrisch** ist. — Haben endlich zwei Raumdreiecke alle drei Seiten, oder zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, oder eine Seite und die anliegenden Winkel, oder alle drei Winkel gleich, so stimmen je auch die übrigen Elemente überein und sie sind kongruent oder symmetrisch gleich, je nachdem sie in dieselbe Lage gebracht werden können oder eine Vertauschung nicht möglich ist [d].

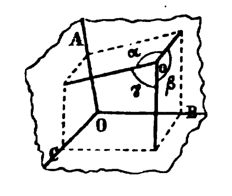
Zu 82: *a.* Zieht man von einem beliebigen Punkte D in einer der Kanten eines Raumdreiecks eine Senkrechte DE auf die Gegenseite, und von deren Fusspunkt E die Senkrechten EF und EG auf die beiden andern Kanten, so sind (81:a) auch die Verbindungen DF und DG senkrecht zu letztern, und somit $\angle DFE = B$ und $\angle DGE = A$ die den Winkeln an diesen Kanten entsprechenden Senkrechtenwinkel. Es ergiebt sich zugleich leicht, dass $a <, =, > b$ auch $DF <, =, > DG$, also $A <, =, > B$ entspricht, womit die ausgesprochenen Sätze erwiesen sind.



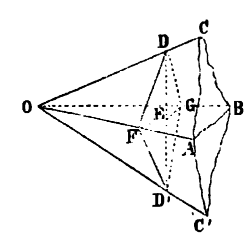
— *b.* Ist AOB die grösste Seite des Raumdreieckes $O - ABC$, so kann man auf sie $DOB = COB$ abtragen; zieht man sodann ab beliebig und macht $Oc = Od$, so folgt $db = cb$, also $ad < ac$, somit $AOD < AOC$ oder der ausgesprochene Satz. Schreibt man letztern für jedes der von a, b, c auslaufenden Raumdreiecke auf und addiert die drei Ungleichheiten, so ergiebt sich, dass die Summe der Basiswinkel der in O zusammenlaufenden Dreiecke grösser ist als die Summe der Basiswinkel der in irgend einem Punkte o der Ebene abc zusammenlaufenden Dreiecke, — also muss gegenteils die Summe der Winkel um O kleiner als diejenige der Winkel um o, d. h. kleiner als 360^0 sein, w. z. b. w.



— *c.* Aus der beistehenden Figur geht (81) ohne weiteres die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes hervor, — speciell, dass die Summen der Seiten eines Raumdreieckes und der Winkel seines Polardreieckes sich zu 6 R ergänzen: Da nun erstere Summe nach oben zwischen 0 und 4 R liegt, so muss letztere zwischen 2 und 6 R fallen.



— *d.* Der Satz vom symmetrischen Dreikant ergiebt sich unmittelbar aus der Figur, in welcher $ED' = ED$ sein soll. Ebenso wird die Richtigkeit der folgenden Sätze teils unmittelbar, teils mit Hilfe des Polardreieckes, leicht eingesehen. Dagegen mag sich noch die historische Notiz



anschliessen, dass die meisten der unter gegenwärtiger Nummer ausgesprochenen Fundamentalsätze schon von **Menelaus** am Kugeldreiecke (86) gegeben wurden; doch scheint er das Polardreieck noch nicht gekannt zu haben, und auch der für den Raum charakteristische Unterschied zwischen Kongruenz und Ähnlichkeit dürfte erst in der neuern Zeit zum vollen Bewusstsein gekommen sein, — so namentlich **Segner**, wie dessen „Defensio adversus censuram Berolinensem" vom Jahre 1741 belegen soll.

83. Vierflach und Vielflach. — Kann man durch eine Auswahl aus den $^1/_2\, n\,(n-1)$ Kanten, in welchen sich n Ebenen schneiden, sämtliche Ebenen so begrenzen, dass jede der gewählten Kanten beide Ebenen, denen sie angehört, abschliessen hilft, so erhält man eine Reihe von Vielecken, die einen Raum vollständig zwischen sich fassen oder einen Körper, ein sog. **n-Flach**, bilden. Für n = 4, 5, 6, 8, 12, 20, etc. heisst das n-Flach wohl auch Tetraeder, Pentaeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder, etc., im allgemeinen **Polyeder** [a]. — Der einfachste Körper ist das von vier Dreiecken begrenzte **Vierflach** oder **Tetraeder,** in welchem man eine der Seiten als **Grundfläche** und sodann die Entfernung der Gegenecke von derselben als **Höhe** bezeichnet [b]. — Verbindet man eine Ecke des Vierflachs mit irgend einem Punkte der Gegenseite und verlängert dann diese Verbindungslinie um ihre eigene Länge, so bestimmt der so erhaltene Punkt mit der Seite ein neues Vierflach, welches **Gegenvierflach** des ersten heisst und mit ihm sowohl gleiche Höhe als gleichen **Rauminhalt** oder **Volumen** besitzt [c]. Haben somit zwei Vierflache kongruente Grundflächen und gleiche Höhe, so sind sie auch gleich gross, da jedes von ihnen Gegenvierflach des andern sein kann, — und wenn man durch die Mitte einer Tetraederkante und deren beide Gegenecken einen Schnitt führt, so hat man das Tetraeder halbiert, da die beiden Teile notwendig in Beziehung auf die Schnittebene Gegenvierflache sind. — Stehen drei Seiten eines Vierflachs paarweise senkrecht zu einander, so heisst dasselbe **rechtwinklig,** und wenn zwei solche Vierflache je zwei von der rechten Ecke ausgehende Kanten gleich haben, so zerfallen sie, wenn man die dritten dieser Kanten im Verhältnisse ihrer Längen abteilt und durch die Teilpunkte Schnitte nach den Gegenecken führt, nach dem frühern Satze in gleiche Teile, — folglich verhalten sie sich wie diese dritten Kanten. Sind daher ABC, aBC, abC und abc die von der rechten Ecke ausgehenden Kanten von 4 rechtwinkligen Vierflachen der Volumina V, V', v', v, und setzt man (analog 55) v = 1, wenn die drei Dimensionen a = 1, b = 2,

c = 3 sind, so hat man

$$\frac{V}{v} = \frac{V}{V'} \cdot \frac{V'}{v'} \cdot \frac{v'}{v} = \frac{A}{a} \cdot \frac{B}{b} \cdot \frac{C}{c} \quad \text{und} \quad V = \frac{A \cdot B \cdot C}{1 \cdot 2 \cdot 3} = {}^1/_3 \cdot \frac{A \; B}{2} \cdot C \qquad \mathbf{1}$$

d. h. es ist der Inhalt gleich ein Drittel des Produktes aus Grundfläche und Höhe, — eine Regel, welche sich leicht auf jedes Tetraeder übertragen lässt [d]. — Bewegt sich eine Gerade um einen Punkt und folgt dabei irgend einer Figur als Leitlinie, so umschreibt sie einen sog. **pyramidalischen** Raum, und begrenzt man letztern durch eine schneidende Ebene, so entsteht die nach der Anzahl ihrer dreieckigen Seitenflächen benannte **Pyramide,** deren Inhalt, als Summe dreiseitiger Pyramiden oder Tetraeder von gleicher Höhe, offenbar noch gleich dem Drittel des Produktes aus Grundfläche und Höhe ist und die **gerade** heisst, wenn ihre Spitze senkrecht über dem Schwerpunkte der Basis steht [e]. — Ist die Leitlinie eine krumme Linie, so heisst die Pyramide **Kegel** oder **Konus** und die Summe der Seitenflächen **Mantel.** Bei einem geraden Kreiskegel der Höhe h und des Radius r sind offenbar alle Seitenkanten $k = \sqrt{r^2 + h^2}$, sein Mantel aber ist gleich einem Kreisausschnitte des Radius k und Bogens $2 r \pi$, so dass die Formeln

$$V = {}^1/_3 r^2 \cdot h \cdot \pi \qquad O = (k + r) r \cdot \pi \qquad \mathbf{2}$$

Volumen und Oberfläche zu berechnen lehren [f]. — Bewegt sich eine Gerade parallel mit sich selbst und folgt dabei irgend einer Figur als Leitlinie, so umschreibt sie einen **prismatischen** Raum; parallele Schnitte desselben sind kongruent und bestimmen als Grundflächen ein **Prisma,** das nach der Anzahl seiner Seitenflächen, welche offenbar Parallelogramme sind, benannt wird und dessen Inhalt gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe ist [g]. Ist auch die Leitlinie ein Parallelogramm, so heisst das Prisma **Parallelepipedon** oder besser **Zeilflach**; ein gleichseitiges Zeilflach wird **Rhomboëder,** — ein gleichseitig-rechtwinkliges aber **Würfel** oder **Kubus** genannt. Ist dagegen die Leitlinie eine krumme Linie, speciell ein Kreis, so erhält man einen **Cylinder** oder eine **Walze,** und wird die Höhe eines Kreiscylinders durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte seiner Grundflächen des Radius r dargestellt, so lehren offenbar

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h \qquad O = 2 (r + h) r \cdot \pi \qquad \mathbf{3}$$

Volumen und Oberfläche zu berechnen [h]. — Wird ein prismatischer Raum durch irgend zwei ebene, also im allgemeinen nicht parallele Schnitte begrenzt, so heisst der entsprechende Körper **Prismoid.** Ein solches lässt sich, wenn es dreiseitig ist, durch zu den parallelen Kanten senkrechte Schnitte (Querschnitte) in ein Prisma und zwei

Pyramiden zerlegen und ist daher gleich Querschnitt mal Mittel der parallelen Kanten. Nennt man endlich ein Vielflach mit zwei parallelen Grundflächen, dessen Seitenflächen Trapeze oder Dreiecke sind, **Obelisk**, so lässt sich zeigen, dass ein Obelisk gleich dem Sechstel eines Prismas von gleicher Höhe ist, dessen Grundfläche aus seinen beiden Grundflächen und dem vierfachen Querschnitte in halber Höhe besteht[4].

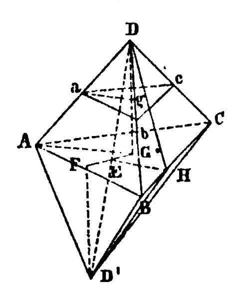
Zu 83: *a.* Den Namen **Vielflach** (n-Flach) statt Polyeder zu gebrauchen, schlug ich schon Mitte der Vierzigerjahre vor. — *b.* Bezeichnen a, b, c, d die Seiten eines Vierflachs, so ist (81) offenbar

$$a = b \cdot Co(a, b) + c \cdot Co(a, c) + d \cdot Co(a, d) \qquad 4$$

und analoge Gleichungen lassen sich auch für die drei übrigen Seiten aufschreiben; multipliziert man aber jede derselben mit der ihr vorstehenden Seite, so ergiebt sich, dass

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2bc \cdot Co(b, c) - 2bd \cdot Co(b, d) - 2cd \cdot Co(c, d) \qquad 5$$

wird. In dem speciellen Falle, wo $(b, c) = (b, d) = (c, d) = 90^0$, ist daher $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$, d. h. es besteht, wie wahrscheinlich schon **Descartes** fand, aber dann namentlich **Gua** (Mém. Paris 1783) betonte, im Raume ein höchst merkwürdiges Analogon zum pythagoräischen Lehrsatze. — *c.* Dass DE = ED' einander gegenseitig bedingen, und für jeden Punkt H, der in dem Umfange des Dreiecks ABC liegt, DEH = D'EH ist, liegt auf der Hand; wenn nun H den ganzen Umfang durchläuft, so beschreiben DEH und D'EH Vierflach und Gegenvierflach, also müssen auch diese letztern gleichen Inhalt haben. — Die Einführung des Gegenvierflachs und den darauf basierten Weg zur Bestimmung des Tetraedervolumens habe ich mir, wie die erste Ausgabe meines Taschenbuches beweist, schon vor 1852 ausgedacht. Früher war ich (vgl. Grunert VII) davon ausgegangen, dass jeder zu ABC parallele Schnitt abc ihm ähnlich sein, also die Proportion $abc : ABC = ab^2 : AB^2 = aD^2 : AD^2 = Dg^2 : DG^2$ bestehen muss, — dass somit bei zwei Tetraedern von gleicher Grundfläche und Höhe gleich hohe Parallelschnitte zur Grundfläche gleich gross sind, also auch die Tetraeder selbst als Summen von gleichen Elementen gleich gross sein müssen. — *d.* Die Ausdehnung der Volumregel vom rechtwinkligen auf irgend ein Tetraeder beruht darauf, dass man die Grundfläche jedes Tetraeders in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen und seine Spitze ohne Volumenänderung über den Teilpunkt der Basis der Grundfläche verschieben kann.



— Wählt man die von den Kanten b, c und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel α bestimmte Seite als Grundfläche, so ist mit Hilfe von 90:4

$$V = \frac{G \cdot H}{3} = {}^1/_3 \cdot \frac{b \cdot c}{2} \, Si\,\alpha \cdot a\, Si\,\gamma \cdot Si\,B$$

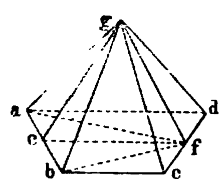
$$= \frac{a \cdot b \cdot c}{3} \cdot \sqrt{Si\,s \cdot Si\,(s - \alpha) \cdot Si\,(s - \beta) \cdot Si\,(s - \gamma)} \qquad 6$$

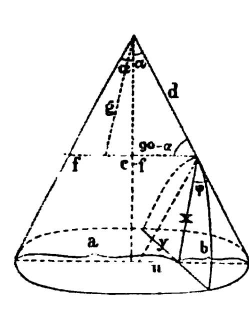
wo $s = {}^1/_2\,(\alpha + \beta + \gamma)$ ist. — Ist g ein parallel zu G in der Höhe h geführter Schnitt, so hat man $g : G = (H - h)^2 : H^2$, also $H = h\sqrt{G} : (\sqrt{G} - \sqrt{g})$, und

$H - h = h \cdot \sqrt{g}\,(\sqrt{G} - \sqrt{g})$, folglich den Inhalt des sog. **abgekürzten** Tetraeders

$$v = \frac{G \cdot H}{3} - \frac{g\,(H-h)}{3} = \frac{h}{3}\,(G + \sqrt{G \cdot g} + g) \qquad 7$$

— *e.* Hat die Pyramide ein Trapez zur Grundfläche, so stehen die Ecken derselben von dem durch die Spitze und die Mitten der nicht parallelen Seiten des Trapezes bestimmten Dreiecke, dem sog. **Hauptschnitte** efg, gleich weit ab, und wenn 2h die Höhe des Trapezes bezeichnet, so ist seine Fläche $abcd = ef \cdot 2h = 4 \cdot aef$, also das Volumen der Pyramide $V = 4 \cdot agef = {}^4/_3 \cdot gef \cdot k$, wo k den Abstand der Ecken vom Hauptschnitt bezeichnet. Es wird uns diese schon von **Steiner** ausgesprochene Regel in Note i grosse Dienste leisten. — *f.* Wird ein Kreiskegel des Winkels α in der Distanz d von der Spitze und unter dem Winkel φ zur Kante durch eine Ebene geschnitten, so lässt sich die entstehende Schnittlinie, der **Kegelschnitt**, leicht bestimmen: Da nämlich aus der Figur die Beziehungen $y^2 = a \cdot b$, $x : b = g : (c - f)$, $(a - c) : x = f : g$ und $d^2 - ({}^1/_2\,c)^2 = g^2 - (f - {}^1/_2\,c)^2$ oder $d^2 - g^2 = f\,(c - f)$ abgelesen werden können, so ergiebt sich für denselben ohne Schwierigkeit

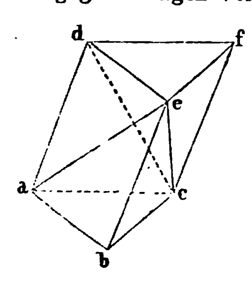


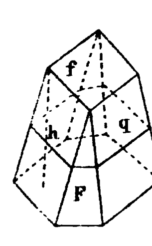


$$y^2 = (a - c + c)\,b = \left(\frac{f}{g} \cdot x + c\right) \cdot \frac{(c-f)\,x}{g} = 2px + qx^2 \qquad 8$$

$$\text{wo} \quad p = \frac{c \cdot (c - f)}{2g} \quad \text{und} \quad q = \frac{f\,(c - f)}{g^2} = \frac{d^2}{g^2} - 1$$

Je nachdem d.g kleiner, gleich oder grösser 1 ist, wird also (73) der Kegelschnitt zur Ellipse, Parabel oder Hyperbel, und man nannte daher dieses (mit dem gegenwärtigen Verhältnisse e der Excentricität übereinstimmende) Verhältnis früher **Charakteristik** des Kegelschnittes. — *g.* Ein dreiseitiges Prisma lässt sich durch zwei Diagonalebenen in drei gleiche Tetraeder $eabc = cdef = eacd$ zerlegen, und ist daher gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe; jedes andere Prisma aber lässt sich mit Hilfe von Diagonalebenen in dreiseitige zerfällen, somit nach derselben Regel berechnen. — *h.* Da der Kreiskegel für $\alpha = 0$ zum Cylinder wird und in diesem Falle die für den Kegel geltende Proportion $d : g = Co\,(\varphi - \alpha) : Co\,\alpha$ in $d : g = Co\,\varphi$ übergeht, so ist somit ein **Cylinderschnitt** immer eine Ellipse. — *i.* Beiläufig bemerkend, dass einige Schriftsteller statt **Obelisk** die weniger passenden Namen Prismoid oder Prismatoid benutzten, ist mit **Steiner** hervorzuheben, dass, wenn man alle Ecken des Obelisken mit einem beliebigen Punkte des in halber Höhe geführten Querschnittes verbindet, derselbe in zwei auf den Grundflächen stehende Pyramiden und eine Reihe von Trapezpyramiden, deren Hauptschnitte zusammen den Querschnitt ausmachen, zerfällt, folglich sein Inhalt wirklich





$$V = \frac{f \cdot h}{6} + \frac{F \cdot h}{6} + \frac{4}{3} \cdot q \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{6}\,(f + F + 4q) \qquad 9$$

ist, wie dies, aber auf einem viel komplizierteren Wege, schon in „**Koppe**, Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie. Essen 1843 in 8." gezeigt, dann aber von **Steiner** in vorstehender Weise dargethan und damit, in diesen grossen Geometer kennzeichnender Weise, gezeigt wurde, wie bei richtiger Auswahl der Mittel oft scheinbare Schwierigkeiten leicht überwunden werden können.

84. Die centrischen Vielflache und die Kugel. — Bezeichnen k, e, f der Reihe nach die Anzahl der Kanten, Ecken und Flächen eines sog. **konvexen**, d. h. keine einspringenden Winkel besitzenden Polyeders, so besteht[a] die den Namen von **Euler** tragende Beziehung

$$e + f = k + 2 \qquad 1$$

und aus dieser folgt, dass es nur fünf Körper giebt, bei welchen alle Flächen gleich viele Seiten haben und in allen Ecken gleich viele Kanten zusammenlaufen, nämlich ein Tetraeder, ein Oktaeder und ein Ikosaeder aus Dreiecken, — ein Hexaeder aus Vierecken, — und ein Dodekaeder aus Fünfecken, — an welche sich allfällig noch ein Unendlichflach anschliessen lässt[b]. — Ein Vielflach kann nach den Ecken, Kanten oder Seiten centrisch sein: Ist es centrisch nach den Ecken, so ist notwendig auch jede seiner Flächen centrisch nach den Ecken; ist es centrisch nach den Kanten, so ist jede seiner Flächen centrisch nach den Seiten; ist es centrisch nach den Seiten, so stehen die Projektionen seines Centrums auf zwei Nebenseiten von der Kante dieser letztern gleich weit ab, und jede durch den Mittelpunkt und eine Kante gelegte Ebene halbiert den Flächenwinkel an dieser Kante, während (83) der Inhalt eines solchen Vielflachs gleich ein Drittel des Produktes aus Oberfläche und Apothema ist; wenn endlich, was aber ausschliesslich bei den oben aufgezählten fünf Vielflachen vorkommen kann, derselbe Punkt in allen drei Beziehungen Centrum oder das Vielflach **centrisch** ist, so hat es gleiche Kanten, Seiten und Winkel, oder ist **regelmässig**[c]. — Der räumliche Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Punkte, dem sog. **Centrum**, einen unveränderlichen, **Radius** genannten, Abstand hat, heisst **Kugelfläche**, — der von der Kugelfläche begrenzte, mit einem centrischen Unendlichflach übereinkommende Körper **Kugel**. Steht eine Ebene von dem Kugelcentrum um den Radius ab, so hat sie offenbar mit der Kugel nur Einen Punkt gemein und heisst **tangierend** in diesem Punkte; ist dagegen ihr Abstand kleiner, so schneidet sie die Kugelfläche in einer Kreislinie, deren Centrum mit der Projektion des Kugelcentrums auf die Schnittebene zusammenfällt und deren Radius um so grösser ist, je mehr sich der Schnitt dem Kugelcentrum nähert: Schnitten durch das Centrum entsprechen grösste oder sog. **Hauptkreise**, und jede zwei solche halbieren sich infolge gemeinschaftlichen Durchmessers gegen-

seitig. Die Endpunkte des zu einem Kugelkreise senkrechten Kugeldurchmessers stehen von allen Punkten desselben gleich weit und zwar von einem Hauptkreise um 90° ab; sie heissen **Pole** des Kreises, — die Kreise von gemeinschaftlichen Polen **Parallelkreise**, — der zu ihnen gehörende Hauptkreis **Polarkreis** (Equator). Steht ein Punkt der Kugelfläche von zwei andern Punkten derselben um 90° ab, so ist er Pol des sie verbindenden Hauptkreisbogens, und umgekehrt misst dieser den Winkel am Pole; der durch die Pole zweier Hauptkreise bestimmte grösste Kreis halbiert deren Hälften nochmals unter rechtem Winkel; der Abstand der Pole misst den Winkel der beiden Hauptkreise; etc.[d].

Zu 84: *a.* Bezeichnet f_n die Anzahl der unter den Seitenflächen eines Polyeders vorkommenden n-Ecke, und e_n die Anzahl seiner n kantigen Ecken, so ist offenbar

$$3 f_3 + 4 f_4 + 5 f_5 + \cdots = 2k = 3 e_3 + 4 e_4 + 5 e_5 + \cdots \qquad 2$$

Denkt man sich nun das Polyeder, welches konvex sein soll, während seine Flächen die Seitenzahlen m, n, ⋯ haben mögen, auf eine Ebene projiziert, so werden die Projektionen gewisser Kanten eine Contour von e' Ecken bilden, zwischen welchen zwei Netze von Vielecken liegen, — gewissermassen ein oberes mit e'' und ein unteres mit e''' innern Ecken. Es wird also die Summe der sämtlichen Winkel der Projektion

$$[2(e'-2)R + 4e''R] + [2(e'-2)R + 4e''R] = 4(e-2)R$$

sein, während die Summe aller Kantenwinkel notwendig

$$2(m-2)R + 2(n-2)R + \cdots = 4(k-f)R$$

ist, und diese beiden Summen müssen gleich sein, da jedes n-Eck des Polyeders auch in der Projektion als n-Eck erscheint. Aus dieser Gleichsetzung ergiebt sich aber unsere 1, welche mutmasslich schon **Descartes** kannte, sodann namentlich **Euler** (Nov. Comm. Petr. 4) hervorhob und neuerdings **Steiner** (Crelle 1) in der eben mitgeteilten originellen Weise begründete. — *b.* Sind alle Flächen x-seitig und alle Ecken y-kantig, wo $x = 3 + \alpha$ und $y = 3 + \beta$ gesetzt werden kann, so hat man nach 2 und 1, wenn

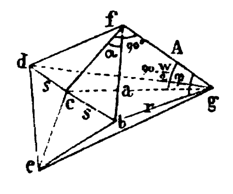
$$m = 2(x+y) - x \cdot y = 3 - (\alpha + \beta) - \alpha \cdot \beta \qquad 3$$

ist, successive

$$x \cdot f = 2k = y \cdot e \qquad k + 2 = \frac{2k}{y} + \frac{2k}{x}$$

$$k = \frac{2xy}{m} \qquad e = \frac{2k}{y} = \frac{4x}{m} \qquad f = \frac{2k}{x} = \frac{4y}{m} \qquad 4$$

Da nun offenbar nur solche Werte von α, β, m zulässig sind, welche für x, y, k, f, e ganze und positive Werte ergeben, so beschränkt sich die Anzahl der jene Bedingung erfüllenden Polyeder auf die fünf Aufgezählten. —



c. Sind $bd = 2s$ und g Kante und Centrum eines centrischen Körpers, e und f die Mittelpunkte der an bd stossenden n-Ecke, während m die Anzahl der an einer Ecke zusammentreffenden Flächen ist, und dreht man die Ebene fbg um bg, bis sie mit dbg, ebg, etc., zuletzt wieder mit fbg zusammenfällt, so ist die Summe aller 2m hiefür erforderlichen gleichen Einzel-

drehungen 360°, also z. B. $\angle$ fbgd = 180° : m, während $\angle$ bfge = α und $\angle$ bcgf = 90° ist. Wendet man daher auf Raumdreieck g — bcf die Formeln 87 : 1 an, so hat man

$$\text{Si}\ {}^1/_2\ w = \text{Co}\ {}^1/_m\ 180° \cdot \text{Cs}\ {}^1/_n\ 180° \qquad \text{Co}\ \varphi = \text{Ct}\ {}^1/_m\ 180° \cdot \text{Ct}\ {}^1/_n\ 180° \qquad \mathbf{5}$$

woraus sich, wenn A das Apothema der Seiten, a dasjenige der Kanten und r den Radius bezeichnet, die Formeln

$$\begin{aligned} A &= cf \cdot \text{Tg}\ {}^1/_2\ w = s \,.\, \text{Ct}\ {}^1/_n\ 180° \cdot \text{Tg}\ {}^1/_2\ w \\ a &= A \cdot \text{Cs}\ {}^1/_2\ w = s \cdot \text{Ct}\ {}^1/_n\ 180° \cdot \text{Se}\ {}^1/_2\ w \\ r &= A \cdot \text{Se}\ \varphi \quad = s \cdot \text{Tg}\ {}^1/_m\ 180° \cdot \text{Tg}\ {}^1/_2\ w \end{aligned} \qquad \mathbf{6}$$

ergeben. Nach diesen Formeln erhält man aber für 2s = 1, für das

	m	n	w	φ	A	a	r
Tetraeder	3	3	70° 31′ 44″	70° 31′ 44″	0,204124	0,353553	0,612372
Oktaeder	4	3	109 28 16	54 44 8	0,408248	0,500000	0,707107
Ikosaeder	5	3	138 11 23	37 22 38	0,755761	0,809016	0,951056
Hexaeder	3	4	90 0 0	54 44 8	0,500000	0,707107	0,866025
Dodekaeder	3	5	116 33 54	37 22 38	1,113516	1,309017	1,401258

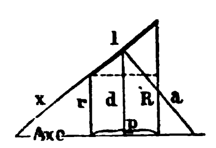
wo A den Radius der eingeschriebenen, r denjenigen der umgeschriebenen Kugel darstellt. — Auf die schon von **Kepler** ins Auge gefassten Stern-Vielflache kann ich hier nicht eintreten, sondern verweise dafür z. B. auf „Ludwig Christian **Wiener** (Darmstadt 1826 geb.; Prof. math. Darmstadt, Giessen und Karlsruhe), Über Vielecke und Vielflache. Leipzig 1864 in 4.“ — *d.* Die meisten dieser Elementarsätze über die Kugel finden sich schon bei den griechischen Geometern **Euklid, Theodosius, Menelaus,** etc.

85. Die sog. Guldin'schen Regeln. — Rotiert eine Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Gerade als Axe, so ist die von derselben beschriebene Fläche gleich ihrer Länge multipliziert mit dem Wege ihres Schwerpunktes [a], — und analog wird das Volumen des durch Rotation einer Fläche entstandenen Körpers erhalten, wenn man die Fläche mit dem Wege ihres Schwerpunktes multipliziert [b]. — Die Fläche einer zwischen zwei Parallelkreisen enthaltenen **Kugelzone** ist gleich dem Produkte aus der Peripherie eines Hauptkreises in den Abstand der beiden Ebenen oder der sog. **Höhe** der Zone [c]. Dieselbe Regel besteht natürlich auch noch für die sog. **Kugelhaube** (Calotte), wo die eine Ebene die Kugel tangiert, und ergiebt, wenn man die Höhe bis zum Durchmesser anwachsen lässt, für die ganze Kugeloberfläche $4\,r^2\pi$, zu welcher sich sodann die Fläche eines von zwei Hauptkreisen begrenzten Teiles, eines sog. **Möndchens**, ebenso verhält wie dessen Winkel zur Umdrehung. — Bezeichnen endlich V, V′ und V″ die Volumina der Kugel, eines Kugelausschnittes, dessen Basis die Höhe h hat, und des entsprechenden Kugelabschnittes, so ist

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi \qquad V' = \frac{2}{3} r^2 h \pi \qquad V'' = h^2 (r - {}^1/_3 h)\, \pi \qquad \mathbf{1}$$

während der einer Kugelzone entsprechende Kugelteil als Differenz zweier Abschnitte berechnet wird [d].

Zu 85: *a.* Dreht sich eine Ebene um eine ihrer Geraden als Axe, so beschreibt jede in der Ebene liegende Gerade l (83) eine Fläche



$$F = \frac{2R\pi(l+x)}{2} - \frac{2r\pi \cdot x}{2}$$

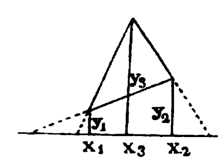
Nun verhält sich $(l+x):l = R:(R-r)$ und $l:x = (R-r):r$. Wenn ferner d der Mitte von l entspricht, sowie $a \perp l$ ist, so hat man $d = \frac{1}{2}(R+r)$ und $d:a = p:l$. Es zieht sich also obige Formel successive in

$$F = (R+r)\cdot l\cdot\pi = 2d\pi\cdot l = 2a\pi\cdot p \qquad 2$$

zusammen. Bilden nun die Geraden $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ eine ebene gebrochene Linie und bezeichnen $g_1\, g_2\, g_3 \ldots$ die Abstände ihrer einzelnen Schwerpunkte von einer in der Ebene liegenden Drehaxe, g aber den Abstand des Schwerpunktes der ganzen Linie, so ist (72) $\Sigma l\cdot g = g\cdot\Sigma l$, und man hat daher nach 2

$$F = 2\pi g\cdot\Sigma l \qquad 3$$

d. h., wenn man die gebrochene Linie in eine Kurve übergehen lässt, die ausgesprochene Regel. — *b.* Bezeichnen $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$, $x_3\, y_3$ die Coordinaten der auf eine Drehaxe ihrer Ebene bezogenen Ecken eines Dreiecks der Fläche F, — ist ferner (72) $G = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$ der Abstand des Dreieck-Schwerpunktes von der Drehaxe, — und bedenkt man, dass aus Kombination dreier Trapeze und der entsprechenden abgekürzten Kegel



$$F = \frac{1}{2}\left[y_1(x_3-x_2) + y_2(x_1-x_3) + y_3(x_2-x_1)\right]$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left[(y_1^2+y_3^2+y_1y_3)(x_3-x_1)+(y_3^2+y_2^2+y_3y_2)(x_2-x_3)-(y_1^2+y_2^2+y_1y_2)(x_2-x_1)\right]$$

folgt, wo V das Volumen des bei der Rotation entstehenden Körpers ist, so ergiebt sich

$$V = 2G\pi\cdot F \qquad 4$$

oder die zweite der ausgesprochenen Regeln, welche sich schon in den Sammlungen von **Pappus** finden, dann aber namentlich von Paul **Guldin** in seinem Werke „De centro gravitatis libri IV. Viennæ 1635—40 in 4." einlässlich behandelt und darum mit dessen Namen belegt wurden. — *c.* Dreht sich ein Stück eines centrischen Vieleckes um eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade seiner Ebene, so ist nach 2 die von ihm beschriebene Fläche gleich dem Produkte der Projektion jenes Stückes auf die Drehaxe in den Umfang eines Kreises, dessen Radius gleich dem Apothema des Vieleckes ist. Hieraus folgt aber sofort die Regel für die Kugelzone. — *d.* Haben somit ein Cylinder, ein Kegel und eine Kugel 2r zu Höhe und Durchmesser, so ist, wie schon **Archimedes** lehrte, der erstere gleich der Summe der beiden letztern.

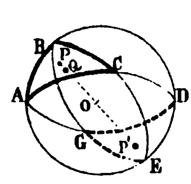
86. Das Kugeldreieck und sein Polardreieck. — Verbindet man drei Punkte der Kugelfläche teils durch Gerade mit dem Mittelpunkte, teils paarweise durch Hauptkreise, so entstehen gleichzeitig ein **Dreikant** und ein sog. **Kugeldreieck** oder **sphärisches Dreieck**, deren Seiten und Winkel gleiches Mass haben, so dass die

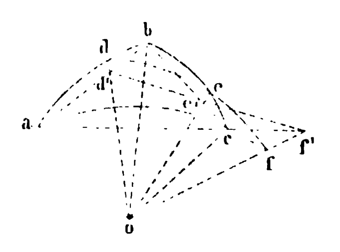
Elemente des Kugeldreiecks notwendig alle für das Dreikant bestehenden Beziehungen eingehen. — Verlängert man die das Dreikant bildenden Radien rückwärts, so erhält man ein sog. **Gegendreieck,** das mit dem ursprünglichen Dreiecke gleiche Seiten, gleiche Winkel und gleiche Fläche hat [a]. Die den drei Winkeln A, B, C eines sphärischen Dreiecks der Fläche F entsprechenden Möndchen übertreffen somit die halbe Kugeloberfläche um 2 F und man hat daher

$$2r^2\pi + 2F = \frac{4r^2\pi}{360}(A+B+C) \quad \text{oder} \quad F = \frac{e}{90}\cdot r^2\pi \qquad \mathbf{1}$$

wo (82) e den halben Excess bezeichnet [b]. — In Beziehung auf die merkwürdigen Eigenschaften des Kugeldreieckes beschränke ich mich darauf, **einerseits** hervorzuheben, dass jede sphärische Transversale die Seiten eines sphärischen Dreieckes oder ihre Verlängerungen so schneidet, dass die Produkte der Sinus der nicht aneinanderliegenden Abschnitte gleich werden [c], — und **anderseits** zu erwähnen, dass, wenn man aus den drei Ecken eines Kugeldreieckes mit dem Radius 90° Kreise zieht, ein neues Dreieck entsteht, welches jene Ecken zu Polen hat und **Polardreieck** des ersten heisst, dass ferner die Polarität gegenseitig ist und jede Seite des einen Dreiecks den Gegenwinkel des andern zu zwei Rechten ergänzt [d].

Zu 86: *a.* Sind z. B. ABC und DEG Gegendreiecke, und zieht man einen Durchmesser PP', der senkrecht zu der Ebene der drei Punkte ABC steht und sie in Q schneidet, so steht Q offenbar von ABC gleich weit ab, also sind auch die Bogenabstände PA = PB = PC = P'D = P'E = P'G; da sich nun jede zwei gleichschenklige sphärische Gegendreiecke ohne weiteres zur Deckung bringen lassen, also gleich sind, so hat man ABC = APB + BPC + CPA = DP'E + EP'G + GP'D = DEG, w. z. b. w. — *b.* Dieser wichtige Flächensatz scheint zuerst, aber noch ohne scharfen Beweis, von **Girard** in seiner „Invention nouvelle“ von 1629 ausgesprochen worden zu sein; einen solchen soll zuerst, und zwar wesentlich in obiger Weise, **Cavalieri** in seinem „Directorium generale uranometricum. Bologna 1632 in 4.“ gegeben haben. — *c.* Die Erweiterung des Transversalensatzes auf das Raumdreieck lässt sich in folgender Weise erhalten: Da in einem gleichschenkligen Dreiecke jede durch die Spitze gezogene Gerade die Basis und den Winkel an der Spitze so teilt, dass sich die Abschnitte der Basis wie die Sinus der Winkelsegmente verhalten, so bestehen die Proportionen



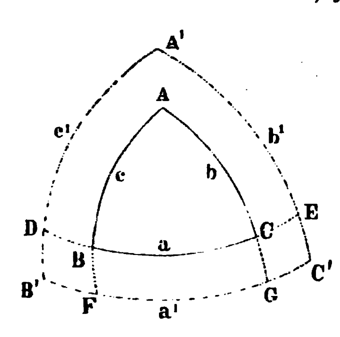


$$\frac{ad'}{d'b} = \frac{\mathrm{Si}\,ad}{\mathrm{Si}\,db} \qquad \frac{be'}{e'c} = \frac{\mathrm{Si}\,be}{\mathrm{Si}\,ec} \qquad \frac{cf'}{f'a} = \frac{\mathrm{Si}\,cf}{\mathrm{Si}\,fa}$$

und hieraus ergiebt sich durch Multiplikation

$$\frac{ad'\cdot be'\cdot cf'}{d'b\cdot e'c\cdot f'a} = \frac{\mathrm{Si}\,ad\cdot\mathrm{Si}\,be\cdot\mathrm{Si}\,cf}{\mathrm{Si}\,db\cdot\mathrm{Si}\,ce\cdot\mathrm{Si}\,fa} \qquad \mathbf{2}$$

Da nun (55) das erstere Verhältnis gleich der Einheit ist, so muss auch das zweite gleich derselben sein, d. h. der ausgesprochene Satz bestehen, welchen wahrscheinlich schon **Menelaus**, jedenfalls spätestens **Ptolemäus** kannte, wenn auch natürlich noch in der Form eines Sehnensatzes. — *d.* Sind A B C die Pole der Seiten des Dreieckes A' B' C', so ist A' B = 90° = A' C, also auch A' Pol von B C, etc., so dass die Polarität gegenseitig ist. Ferner folgt 90° = DB + a und 90° = BE, also 180° = DE + a = A' + a, etc., womit auch der zweite Teil des Satzes erwiesen ist. — Das Polardreieck scheint zuerst durch **Snellius** konstruiert und benutzt worden zu sein; es ist offenbar dem Polardreikant (82) entsprechend.



87. Die Raumtrigonometrie der alten Zeit. — Selbstverständlich mussten **Hipparch** und seine Nachfolger, um aus den von ihnen (61 u. f.) berechneten Tafeln den gehofften Nutzen zu ziehen, d. h. um gewisse Grössen aus andern berechnen zu können, auch die hiefür nötigen Regeln aufstellen, und diess gelang ihnen zunächst für das rechtwinklige Raumdreieck mit Hilfe des Transversalensatzes (86), indem ihnen derselbe eine Reihe von Proportionen oder sog. **Analogien** ergab, die nach unserer jetzigen Bezeichnung und Schreibweise durch die Formeln

$$\begin{array}{lll} \text{Co}\,c = \text{Co}\,a \cdot \text{Co}\,b & \text{Si}\,a = \text{Si}\,c \cdot \text{Si}\,A & \text{Tg}\,a = \text{Si}\,b \cdot \text{Tg}\,A \\ \text{Tg}\,b = \text{Tg}\,c \cdot \text{Co}\,A & \text{Co}\,A = \text{Co}\,a \cdot \text{Si}\,B & \text{Ct}\,A = \text{Co}\,c \cdot \text{Tg}\,B \end{array} \qquad \mathbf{1}$$

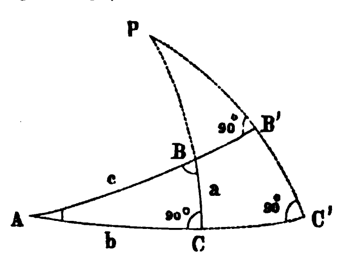
repräsentiert werden, in welchen c als die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite angenommen ist [a]. Da sie ferner ein schiefwinkliges Kugeldreieck in zwei rechtwinklige zerlegen konnten, so fanden sie bald auch, dass man wenigstens gewisse Aufgaben an ersterm durch wiederholte Anwendung jener Analogien ebenfalls lösen könne [b], während es ihnen nur ausnahmsweise gelang, die Rechnung im allgemeinen durchzuführen oder sog. **Schlussformeln** aufzustellen, so dass in dieser Beziehung wohl nur die durch die Formeln

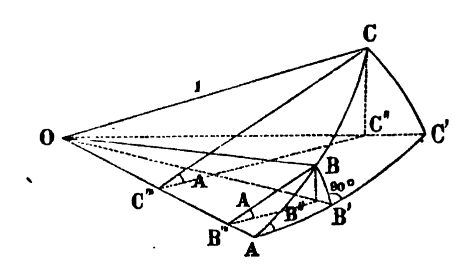
$$\begin{array}{l} \text{Si}\,a : \text{Si}\,b : \text{Si}\,c = \text{Si}\,A : \text{Si}\,B : \text{Si}\,C \\ \text{Co}\,a = \text{Co}\,b \cdot \text{Co}\,c + \text{Si}\,b \cdot \text{Si}\,c \cdot \text{Co}\,A \end{array} \qquad \mathbf{2}$$

ausgedrückten Sätze der ältern Zeit zugeschrieben werden dürfen [c].

Zu 87: *a.* Wie **Hipparch**, der wenigstens die zweite der Formeln 1 kannte und (198—99) anwandte, vorging, weiss man nicht; dagegen ist sicher, dass **Menelaus** in seinen „Sphæricorum libri III" (welche **Halley** aus arabischen und hebräischen Übersetzungen soweit herzustellen wusste, dass sie aus seinem Nachlasse „Oxoniæ 1758 in 8." erscheinen konnten) eine Reihe grundlegender Sätze aufstellte und dass er den als **Regula sex quantitatum** bezeichneten Transversalensatz (86) jedenfalls kannte, wahrscheinlich auch zur Ableitung

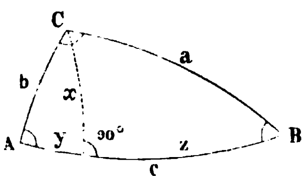
einiger trigonometrischer Grundbeziehungen benutzte. Letzteres geschah jedenfalls spätestens durch **Ptolemäus** und zwar in folgender Weise: Ist Dreieck ABC in C rechtwinklig und macht man AB' = 90° = AC', so dass A Pol von B'C', somit B' = 90° = C' und B'C' = A ist, — verlängert auch BC und B'C', bis sie sich in P treffen, wodurch P zum Pole von AC wird, — und schreibt endlich für Dreieck ABC und Transversale PC' den mehrerwähnten Satz auf, so erhält man unmittelbar die erste der 1, welche allerdings bei den Griechen noch nicht in dieser einfachen Form ausgedrückt, sondern in den Satz eingekleidet war: „Das Verhältnis der Sehne des doppelten Bogens AC' zur Sehne des doppelten Bogens CC' ist aus dem Verhältnisse der Sehne des doppelten Bogens BP zur Sehne des doppelten Bogens CP, und aus dem Verhältnisse der Sehne des doppelten Bogens AB' zur Sehne des doppelten Bogens BB' zusammengesetzt". In ähnlicher Weise erhält man die drei folgenden 1, indem man mit **Ptolemäus** den Dreiecken BPB', CPC' und AB'C' die Transversalen AC', AB' und PC giebt, — und endlich die zwei letzten 1, indem man 1'' und 1''' für das rechtwinklige Dreieck BPB' aufschreibt. Diese zwei letztern erscheinen allerdings bei **Ptolemäus** noch nicht, sondern erst bei dem im 11. Jahrhundert zu Sevilla lebenden (mit dem ebendaselbst um 763 verstorbenen Chemiker Abu-Mussah-Djafar-al-Sofi, genannt Geber, nicht zu verwechselnden) Abû Muhammed Dschâbir ibn Aflah oder **Geber**, dessen durch Gherardo Cremonese ins Lateinische übersetzte und nachmals von P. **Apian** als Anhang zu seinem „Instrumentum primi mobilis" unter dem Titel „Gebri filii Affla libri IX de Astronomia. Norimbergæ 1534 in fol." herausgegebene Schrift in ihrem ersten Buche eine bemerkenswerte Anleitung zur Trigonometrie enthält. Besonders ist hervorzuheben, dass sich **Geber** als Grundlage die aus den Gleichheiten Si BB' = BB'' = BB''' · Si A = Si AB · Si A und Si CC' = CC'' = CC''' · Si A = Si AC · Si A hervorgehende, **Regula quatuor quantitatum** genannte Proportion





$$\text{Si AB} : \text{Si AC} = \text{Si BB}' : \text{Si CC}' \quad \mathbf{3}$$

ableitete und durch Anwendung derselben auf die frühere Figur die sämtlichen sechs 1 zu erhalten wusste. — *b.* Sind z. B. b, c und A gegeben, so zieht man den Hauptkreisbogen x von C senkrecht zu AB, hat sodann nach den 1 und der Figur



$$\text{Si x} = \text{Si b} \cdot \text{Si A} \qquad \text{Tg y} = \text{Tg b} \cdot \text{Co A}$$
$$\text{z} = \text{c} - \text{y} \qquad \text{Co a} = \text{Co x} \cdot \text{Co z} \quad \mathbf{4}$$

und kann somit successive die Hilfsgrössen x, y, z, sowie schliesslich das Element a berechnen. — *c.* Da aus den 1 und 4

$$\text{Si x} = \text{Si b} \cdot \text{Si A} \qquad \text{Si x} = \text{Si a} \cdot \text{Si B} \qquad \text{Tg x} = \text{Si y} \cdot \text{Tg A}$$
$$\text{Tg y} = \text{Tg b} \cdot \text{Co A} \qquad \text{Co a} = \text{Co x} \cdot \text{Co (c} - \text{y)}$$

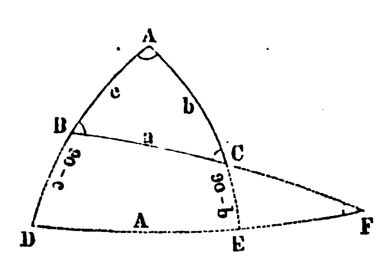
folgen, so erhält man die 2, indem man aus den zwei ersten x, und aus der letzten mit Hilfe der übrigen x und y eliminiert. Die erste 2 war mutmasslich schon den Griechen bekannt, während die zweite von **Albategnius** in seinem „De scientia stellarum liber (Ed. Bern. Ugulottus, Bononiæ 1645 in 4.)“ gegeben wurde, ja schon deren Umformung in

$$1 - \text{Co A} = 1 - \frac{\text{Co a} - \text{Co b} \cdot \text{Co c}}{\text{Si b} \cdot \text{Si c}} \quad \text{oder} \quad \text{Sv A} = \frac{\text{Co (b} - \text{c)} - \text{Co a}}{\text{Si b} \cdot \text{Si c}} \qquad 5$$

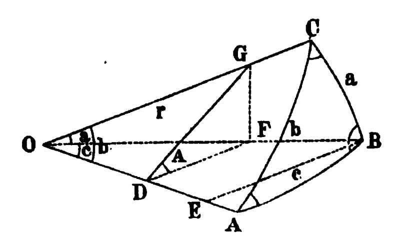
welcher wir (89) im Abendlande erst gegen Ende des 16. Jahrhunderts begegnen werden. Wie gewandt überhaupt die Araber in Anwendung der Trigonometrie waren, wird uns noch später (364) eine durch **Ibn Junis** aufgefundene Methode der Azimutalbestimmung belegen.

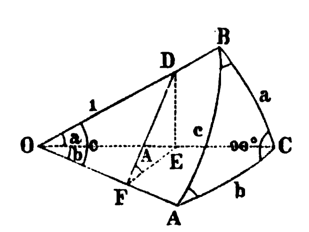
88. Die Fortschritte zur Zeit der Regiomontan und Coppernicus. — Während in der ältern Zeit die trigonometrische Lösung gewisser Aufgaben meist erst bei eintreffendem Bedürfnis versucht wurde, erwarb sich **Regiomontan**, wie bereits früher (53) angedeutet wurde, das grosse Verdienst, nicht nur die ihm aus dem Almagest bekannten Sätze in geschickter Art für die Sinusrechnung umzuarbeiten und in wünschbarer Weise zu ergänzen, sondern auch zu einem eigentlichen Lehrbuche der Trigonometrie zusammenzustellen [a]. — Wenigstens in erster Linie ganz unabhängig von ihm [b] arbeitete sodann auch **Coppernicus** mit Erfolg auf diesem Gebiete, und obschon sich natürlich seine Schlussresultate wesentlich mit denjenigen seines Vorgängers deckten, so fand er doch zum Teil neue Wege auf, welche für die weitere Entwicklung der Trigonometrie von grosser Bedeutung waren [c], — und dasselbe ist von den betreffenden Untersuchungen seines Schülers **Rhäticus** zu sagen, da sich in dessen, allerdings durch eine unnötige Specialisierung sehr weitläufig und fast ungeniessbar gewordenen Entwicklungen, ebenfalls mancher fruchtbare Gedanke findet [d]. Der durch den damaligen Stand der Arithmetik wünschbaren sog. **Prostaphäresis,** sowie der bemerkenswerten **Analogien Nepers,** wird im folgenden (89, 90) speciell gedacht werden, — und in Beziehung auf die bereits (86) besprochene glückliche Idee von **Snellius,** das Polardreieck einzuführen, bleibt nur noch hervorzuheben, dass mit Hilfe dieses letztern jeder Satz der sphärischen Trigonometrie, in welchem die Seiten und Winkel nicht in symmetrischer Weise vorkommen, in leichtester Weise in einen zweiten umgesetzt werden kann [e].

Zu 88: *a.* Für **Regiomontans** Werk kann auf 53 : d verwiesen werden; dagegen ist in Beziehung auf die von ihm angewandte Methode beizufügen, dass er zwei der Dreiecksseiten zu 90° ergänzte und dann die dritte Seite bis zum Durchschnitte F mit der dadurch erhaltenen DE verlängerte. Waren nun z. B. **a, b, c bekannt,** so hatte er nach 87 : 1 aus den rechtwinkligen Dreiecken BDF und CEF die Formeln Co c = Si BF · Si F und Co b =



$\mathrm{Si\,CF \cdot Si\,F}$, also, wenn α das bekannte Verhältnis $\mathrm{Co\,c : Co\,b}$ bezeichnet, $\mathrm{Si\,BF : Si\,CF} = \alpha$, während $\mathrm{BF - CF} = \mathrm{a}$ ebenfalls bekannt war; er konnte somit nach der Ptolemäischen Methode (61 : b) auch BF und CF selbst finden, folglich nach 87 : 1 mit Hilfe derselben zwei Dreiecke DF und EF, somit das Mass DE des Winkels A. Auf ganz ähnliche Weise konnte er, wenn **A, B, C bekannt** waren, die Seite a finden, — etc. — ***b.*** Vgl. hiefür das 63 : b Beigebrachte. — ***c.*** Auch **Coppernicus** ging zunächst vom Almagest aus; doch substituierte er bisweilen, wie es jetzt so ziemlich allgemeiner Gebrauch geworden ist, dem Kugeldreiecke das ihm entsprechende Raumdreieck, an welchem er gewisse Hilfskonstruktionen ausführte, welche ihm die Anwendung der ebenen Trigonometrie erlaubten: Waren z. B. die drei Seiten **a, b, c gegeben**, so zog er $\mathrm{GD \perp OA}$, $\mathrm{BE \perp OA}$ und $\mathrm{DF \parallel BE}$, so dass A durch den Senkrechtenwinkel GDF dargestellt wurde. Er hatte sodann $\mathrm{OD = r \cdot Co\,b}$, $\mathrm{GD = r \cdot Si\,b}$, $\mathrm{OE = r \cdot Co\,c}$, $\mathrm{BE = r \cdot Si\,c}$, $\mathrm{DF : BE = OD : OE}$ oder $\mathrm{DF = r \cdot Si\,c \cdot Co\,b : Co\,c}$; aus OD und DF konnte er die Hypotenuse OF, — aus dieser, r und a auch GF, — und endlich, da er nun alle Seiten des Dreiecks GDF kannte, den gesuchten Winkel A berechnen. — ***d.*** Sein Nachfolger **Rhäticus** hatte den guten Gedanken, das eben geschilderte Verfahren seines Meisters schon auf das rechtwinklige Kugeldreieck anzuwenden, wo sich in der That Alles noch viel einfacher gestaltet; denn, wenn man $\mathrm{OD} = 1$ annimmt, $\mathrm{DE \perp OC}$ und $\mathrm{EF \perp AO}$ zieht, wodurch auch $\mathrm{DF \perp AO}$ und $\angle \mathrm{DFE = A}$ wird, so entnimmt man der Figur ohne weiteres, dass $\mathrm{Si\,a = Si\,c \cdot Si\,A}$, also analog $\mathrm{Si\,b = Si\,c \cdot Si\,B}$, — ferner dass $\mathrm{Co\,c = Co\,a \cdot Co\,b}$ und $\mathrm{Si\,c \cdot Co\,A = FE = Co\,a \cdot Si\,b = Co\,a \cdot Si\,c \cdot Si\,B}$ oder $\mathrm{Co\,A = Co\,a \cdot Si\,B}$ und analog $\mathrm{Co\,B = Co\,b \cdot Si\,A}$, — und mit Hilfe dieser Beziehungen ergeben sich sodann ohne Schwierigkeit $\mathrm{Tg\,a = Si\,a : Co\,a = Si\,c \cdot Si\,A : (Co\,A : Si\,B) = Si\,c \cdot Si\,B \cdot Tg\,A = Si\,b \cdot Tg\,A}$, $\mathrm{Tg\,b = Si\,b : Co\,b = Si\,c \cdot Si\,B : (Co\,c : Co\,a) = Tg\,c \cdot Co\,A}$, $\mathrm{Co\,c = Co\,a \cdot Co\,b = (Co\,A : Si\,B) \cdot (Co\,B : Si\,A) = Ct\,A \cdot Ct\,B}$, — d. h. alle 6 Grundformeln 87 : 1. — Allerdings ging **Rhäticus** selbst bei Ausführung seiner Idee nicht diesen einfachen Weg, sondern verlor sich, wie schon oben angedeutet wurde, in Ausscheidung aller möglichen Fälle und in Anwendung aller erdenklichen Hilfskonstruktionen, so dass er schliesslich damit in seinen „De triangulis globi cum angulo recto libri III“ volle 126 Folioseiten füllte und nicht weniger als 129 verschiedene Regeln aufstellte, die sich natürlich sämtlich auf obige 6 zurückführen lassen. Noch weitläufiger und, soweit möglich, konfuser, sind die von seinem Schüler **Otho** verfassten, sogar 341 Folioseiten





beschlagenden „De triangulis globi sine angulo recto libri V", auf welche näher einzutreten sich kaum lohnen würde. — *e.* Das Polardreieck wurde von **Snellius** in seinen „Doctrinæ triangulorum canoniæ libri IV", welche Mart. **Hortensius** „Lugd. Batav. 1627 in 8." aus seinem Nachlass herausgab, behandelt. Für Anwendung desselben vgl. 90.

89. Die sog. Prostaphäresis. — Wie die Sinustafeln an Genauigkeit zunahmen, wurden auch die bei Ausführung der bestehenden Rechnungsvorschriften nötigen Multiplikationen und Divisionen immer mühsamer und es entstand das Bedürfnis, die Anzahl dieser lästigen Operationen möglichst zu vermindern. Die schliessliche Folge war (22—24) die Erfindung der Logarithmen; aber auch ein Übergangsstadium, die Einführung der sog. **Prostaphäresis** oder der Kunst, ein Produkt in eine Summe oder Differenz überzuführen, darf nicht übersehen werden [a]. Diese letztere wurde zunächst durch die Paul **Wittich** und Jost **Bürgi** gepflegt, indem ersterer die Hipparch'sche Formel

$$\mathrm{Si\,a} = \mathrm{Si\,c} \cdot \mathrm{Si\,A} \quad \text{in} \quad \mathrm{Si\,a} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Si}(90^{\circ} - c + A) - \mathrm{Si}(90^{\circ} - c - A)\right] \qquad \mathbf{1}$$

umzusetzen wusste [b], und letzterer sogar die einer solchen Umwandlung bedeutend mehr Schwierigkeiten entgegensetzende Formel

87 : 2 $$\mathrm{Co\,a} = \mathrm{Co\,b} \cdot \mathrm{Co\,c} + \mathrm{Si\,b} \cdot \mathrm{Si\,c} \cdot \mathrm{Co\,A}$$

je nachdem sie zur Berechnung von a oder A dienen sollte, in

$$\mathrm{Co\,a} = {}^1/_2\,[\mathrm{Co}\,(b - c) + \mathrm{Co}\,(b + c) + \mathrm{Co}\,(A - x) + \mathrm{Co}\,(A + x)]$$

wo $$\mathrm{Co\,x} = {}^1/_2\,[\mathrm{Co}\,(b - c) - \mathrm{Co}\,(b + c)] \qquad \mathbf{2}$$

oder in $$\mathrm{Co\,A} = \frac{2\,\mathrm{Co\,a} - \mathrm{Co}\,(b - c) - \mathrm{Co}\,(b + c)}{\mathrm{Co}\,(b - c) - \mathrm{Co}\,(b + c)} \qquad \mathbf{3}$$

überführte [c], wobei namentlich die Anwendung der Hilfsgrösse x für die damalige Zeit als ein eigentliches Meisterstück zu bezeichnen ist [d].

Zu 89: *a.* Unter **Prostaphäresis** (zusammengezogen aus πρόσθεσις = Addition und ἀφαίρεσις = Subtraktion) hatten früher die Astronomen die bald additive, bald subtraktive **Gleichung** (204) verstanden. — *b.* Paul **Wittich** (Breslau 1555? — ebenda 1587; vgl. meine Notiz in Astr. Viert. 17) erfand die durch 1 repräsentierte Umsetzung, als er 1580 einige Monate bei Tycho als Rechner zubrachte und teilte sie sodann Bürgi bei einem Besuche in Kassel mit. Inwieweit **Tycho** bei dieser Erfindung beteiligt war, weiss man nicht sicher; aber, da dieser zwar ein vorzüglicher Beobachter, jedoch nur ein höchst mittelmässiger Mathematiker war, und (vgl. meine Notiz in Astr. Viert. 15) weder er, noch **Longomontan**, den alsbald in Kassel gemachten Fortschritten auf diesem Gebiete zu folgen vermochten, so hat man wohl den Löwenanteil **Wittich** gutzuschreiben. — *c.* Die 2 und 3 konnte ich (vgl. Astr. Mitth. 32 von 1873) einem in Kassel aufbewahrten, **Bürgis** eigenhändige Berechnung einer von ihm 1590 XII 23 gemachten Mars-Beobachtung enthaltenden Blatte entnehmen. Dabei ist sicher anzunehmen, dass **Bürgi** von dem frühern Versuche

von **Albategnius**, eine seiner 3 entsprechende Umgestaltung zu erhalten, nichts wusste, und überdies ist durch Bürgis 3 die von Albategnius gegebene 87 : 5 weit überholt, — von der **Bürgi** unbestreitbar eigentümlichen und ihn besonders ehrenden 2 nicht einmal zu sprechen. Für die ganz unberechtigten Ansprüche von **Rothmann** verweise ich auf die bereits erwähnte Mitth. 32. — *d.* Jakob **Christmann** soll in seiner „Theoria lunæ. Heidelbergæ 1611 in fol." behaupten, es habe schon **Werner** in einem ungedruckt gebliebenen Traktate „De triangulis" von der Prostaphäresis Gebrauch gemacht: Genaueres wird jedoch nicht mitgeteilt, und andere zeitgenössische Schriftsteller, wie **Ursinus** (vgl. dessen Cursus mathematicus von 1618), **Reymarus** (vgl. dessen Tractatus von 1597), etc, gehen nur bis auf Wittich und Bürgi zurück. Reymarus fügt in Beziehung auf **Bürgi** bei, es sei diesem nach und nach gelungen, die Auflösung aller Dreiecke durch die Prostaphäresis vermittelst der Sinus, Tangenten und Secanten zu bewerkstelligen und es habe Jak. **Curtius** von Senftenau (? — Prag 1594; Prokanzler Rudolf II.) hievon dem **Clavius** Nachricht gegeben, der nun die Erfindung erweitert, sowie 1590 **Tycho** darüber geschrieben habe. **Clavius** handelte nun allerdings noch im ersten Buche seines „Astrolabium tribus libris explicatum. Moguntiæ 1611 in fol." von der Prostaphäresis und ersetzte z. B., die Hilfsgrössen α und β durch $\mathrm{Si}\,\alpha = \mathrm{Tg}\,a$ und $\mathrm{Si}\,\beta = \mathrm{Tg}\,b$ — 1 einführend (was nicht einmal allgemein zulässig ist), die Formel

$$\mathrm{Si}\,x = \mathrm{Tg}\,a \cdot \mathrm{Tg}\,b \text{ durch } \mathrm{Si}\,x = \mathrm{Tg}\,a + \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Si}(90^0 - \alpha + \beta) - \mathrm{Si}(90^0 - \alpha - \beta)] \quad 4$$

aber historische Angaben, oder Neues von Bedeutung, habe ich bei ihm nicht gefunden.

90. Die Reform und Erweiterung der Trigonometrie durch und seit Euler. — Die grossen Verdienste, welche sich **Euler**, wie schon früher (64, 66) hervorgehoben wurde, um die Entwicklung der Goniometrie und Trigonometrie erwarb, kamen ganz besonders der Raumtrigonometrie zu statten, die durch ihn, sozusagen auf Einen Schlag, fast alle die eleganten Formeln erhielt, deren wir uns noch heute erfreuen. Nicht nur fügte er den frühern zwei Grundformeln

$$\mathrm{Si}\,a : \mathrm{Si}\,A = \mathrm{Si}\,b : \mathrm{Si}\,B = \mathrm{Si}\,c : \mathrm{Si}\,C \qquad \mathrm{Co}\,a = \mathrm{Co}\,b \cdot \mathrm{Co}\,c + \mathrm{Si}\,b \cdot \mathrm{Si}\,c \cdot \mathrm{Co}\,A \quad 1$$

die allerdings aus ihnen leicht hervorgehenden

$$\begin{aligned} \mathrm{Co}\,A &= \mathrm{Co}\,a \cdot \mathrm{Si}\,B \cdot \mathrm{Si}\,C - \mathrm{Co}\,B \cdot \mathrm{Co}\,C \\ \mathrm{Co}\,C \cdot \mathrm{Si}\,B &= \mathrm{Co}\,c \cdot \mathrm{Si}\,A - \mathrm{Co}\,a \cdot \mathrm{Co}\,B \cdot \mathrm{Si}\,C \end{aligned} \quad 2$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Co}\,c \cdot \mathrm{Si}\,b &= \mathrm{Co}\,C \cdot \mathrm{Si}\,a + \mathrm{Co}\,A \cdot \mathrm{Co}\,b \cdot \mathrm{Si}\,c \\ \mathrm{Co}\,a \cdot \mathrm{Co}\,B &= \mathrm{Si}\,a \cdot \mathrm{Ct}\,c - \mathrm{Si}\,B \cdot \mathrm{Ct}\,C \end{aligned} \quad 3$$

bei [a], — sondern man verdankt ihm auch die bei Anwendung von Logarithmen so äusserst bequemen Formeln

$$\mathrm{Si}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}(s-b)\,\mathrm{Si}(s-c)}{\mathrm{Si}\,b \cdot \mathrm{Si}\,c}},\quad \mathrm{Co}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}\,s \cdot \mathrm{Si}(s-a)}{\mathrm{Si}\,b \cdot \mathrm{Si}\,c}},\quad \mathrm{Tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}(s-b)\,\mathrm{Si}(s-c)}{\mathrm{Si}\,s \cdot \mathrm{Si}(s-a)}}$$

$$\mathrm{Si}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}\,e \cdot \mathrm{Si}(A-e)}{\mathrm{Si}\,B \cdot \mathrm{Si}\,C}},\quad \mathrm{Co}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}(B-e)\,\mathrm{Si}(C-e)}{\mathrm{Si}\,B \cdot \mathrm{Si}\,C}},\quad \mathrm{Tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}\,e \cdot \mathrm{Si}(A-e)}{\mathrm{Si}(B-e)\,\mathrm{Si}(C-e)}} \quad 4$$

in welchen s und e halben Umfang und halben Excess bezeichnen [b], — und ebenso die Anleitung, um, in Umkehrung des Bürgi'schen

Verfahrens (89), einzelne Formeln durch Einführung passender Hilfswinkel zu Gunsten der logarithmischen Rechnung umzugestalten, so z. B. die 1'' durch

$$\text{Co a} = \text{Co b} \cdot \text{Co}(c - u) \cdot \text{Se u} \quad \text{wo} \quad \text{Tg u} = \text{Tg b} \cdot \text{Co A} \qquad \mathbf{5}$$

zu ersetzen. Unsere bequemen Relationen

$$\frac{\text{Si}\,{}^1\!/_2(A+B)}{\text{Co}\,{}^1\!/_2(a-b)} = \frac{\text{Co}\,{}^1\!/_2\,C}{\text{Co}\,{}^1\!/_2\,c} \qquad \frac{\text{Si}\,{}^1\!/_2(A-B)}{\text{Si}\,{}^1\!/_2(a-b)} = \frac{\text{Co}\,{}^1\!/_2\,C}{\text{Si}\,{}^1\!/_2\,c}$$
$$\frac{\text{Co}\,{}^1\!/_2(A+B)}{\text{Co}\,{}^1\!/_2(a+b)} = \frac{\text{Si}\,{}^1\!/_2\,C}{\text{Co}\,{}^1\!/_2\,c} \qquad \frac{\text{Co}\,{}^1\!/_2(A-B)}{\text{Si}\,{}^1\!/_2(a+b)} = \frac{\text{Si}\,{}^1\!/_2\,C}{\text{Si}\,{}^1\!/_2\,c} \qquad \mathbf{6}$$

finden sich dagegen bei Euler noch nicht [c], wohl aber die am leichtesten aus ihrer paarweisen Verbindung hervorgehenden, jedoch auch in anderer Weise erhältlichen

$$\text{Tg}\,{}^1\!/_2(A+B) = \frac{\text{Co}\,{}^1\!/_2(a-b)}{\text{Co}\,{}^1\!/_2(a+b)}\,\text{Ct}\,{}^1\!/_2\,C$$
$$\text{Tg}\,{}^1\!/_2(A-B) = \frac{\text{Si}\,{}^1\!/_2(a-b)}{\text{Si}\,{}^1\!/_2(a+b)}\,\text{Ct}\,{}^1\!/_2\,C$$
$$\text{Tg}\,{}^1\!/_2(a+b) = \frac{\text{Co}\,{}^1\!/_2(A-B)}{\text{Co}\,{}^1\!/_2(A+B)}\,\text{Tg}\,{}^1\!/_2\,c \qquad \mathbf{7}$$
$$\text{Tg}\,{}^1\!/_2(a-b) = \frac{\text{Si}\,{}^1\!/_2(A-B)}{\text{Si}\,{}^1\!/_2(A+B)} \cdot \text{Tg}\,{}^1\!/_2\,c$$
$$\text{Tg}\,{}^1\!/_2(A+B) : \text{Tg}\,{}^1\!/_2(A-B) = \text{Tg}\,{}^1\!/_2(a+b) : \text{Tg}\,{}^1\!/_2(a-b)$$

welche allerdings, schon lange vor ihm, **Neper** in seinen sog. **Analogien** gegeben hatte und welchen wir jetzt noch die zuweilen ebenfalls sehr bequemen

$$\text{Tg}(A+B) = -\frac{p \cdot \text{Si B}}{1 - p \cdot \text{Co B}} \quad \text{wo} \quad p = \left[\text{Tg}\,\frac{c}{2} \cdot \text{Co B} + \text{Ct a}\right]\text{Si c}$$
$$\text{Tg}(A-B) = \frac{q \cdot \text{Si B}}{1 - q \cdot \text{Co B}} \qquad q = \left[\text{Ct}\,\frac{c}{2} \cdot \text{Co B} - \text{Ct a}\right]\text{Si c} \qquad \mathbf{8}$$

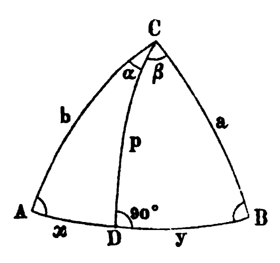
beizufügen wissen [d]. — Die neuere Zeit hat ferner für die Bestimmung des Excesses die eleganten Formeln

$$\text{Si e} = \frac{\text{Si}\,{}^1\!/_2 a \cdot \text{Si}\,{}^1\!/_2 b}{\text{Co}\,{}^1\!/_2\,c} \cdot \text{Si C}, \quad \text{Co e} = \frac{\text{Co}\,{}^1\!/_2 a \cdot \text{Co}\,{}^1\!/_2 b + \text{Si}\,{}^1\!/_2 a \cdot \text{Si}\,{}^1\!/_2 b \cdot \text{Co C}}{\text{Co}\,{}^1\!/_2\,c}$$
$$\text{Tg e} = \frac{\text{Si a} \cdot \text{Si b} \cdot \text{Si C}}{1 + \text{Co a} + \text{Co b} + \text{Co c}}, \quad \text{Tg}^2\,\frac{e}{2} = \text{Tg}\,\frac{s}{2} \cdot \text{Tg}\,\frac{s-a}{2} \cdot \text{Tg}\,\frac{s-b}{2} \cdot \text{Tg}\,\frac{s-c}{2} \qquad \mathbf{9}$$

aufgefunden [e], — und überdies, unter Benutzung des vorstehenden, noch manche andere merkwürdige und nützliche Entwicklungen ausgeführt [f].

Zu 90: *a.* In seiner bereits citierten klassischen Abhandlung von 1753 löste **Euler** zuerst mit Hilfe der Infinitesimalrechnung das Problem „Sur la surface d'une sphère étant donnés deux points quelconques, trouver la ligne la plus courte entre ces deux points", und leitete aus den dabei erhaltenen Beziehungen unsere 1', 1'', 2' und 3'' als Grundformeln der sphärischen Tri-

gonometrie ab, wohin wir ihm hier nicht folgen, sondern bloss bemerken wollen, dass die 1 mit 87 : 2 übereinstimmen: Schreibt man nun die zweite derselben für das Polardreieck auf und ersetzt sodann (86) jedes Element durch sein Supplement aus dem ursprünglichen Dreieck, so erhält man 2', — und wenn man diese auch für Co C aufschreibt, dann aus beiden Co A eliminiert, so ergiebt sich 2'', aus der sodann entweder mit Hilfe des Polardreieckes 3', oder, indem man beidseitig mit Si C dividiert und 1' benutzt, 3'' folgt. — In einer spätern Abhandlung „Trigonometria sphærica universa primis principiis breviter et dilucide derivata (Act. Petrop. 1779," zeigte sodann **Euler**, dass man schon mit drei Grundformeln ausreiche, und etwas später wies Jean Paul **Gua** de Malves (Carcassonne 1712 — Paris 1786; Abbé und Akad. Paris) in seiner „Trigonométrie sphérique (Mém. Par. 1783)" nach, dass man sogar alle übrigen Beziehungen aus der Einen Grundformel 1'' ableiten könne, — einen Nachweis, den später **Lagrange** in seinen „Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques (Journ. de l'éc. pol., Cah. 6 von 1799)" noch ungemein vereinfachte. — Einen eigentümlichen Weg schlug Roger Joseph **Boscovich** (Ragusa 1711 — Mailand 1787; Jesuit; folgeweise Prof. math. Rom und Pavia, dann „Directeur de l'optique de la marine" in Paris; vgl. Ricco, Elogio, Milano 1789 in 8.) in seiner „Trigonometria sphærica. Romæ 1745 (23 p.) in 4." ein: Mit Hilfe der sechs Beziehungen 87 : 1 am rechtwinkligen Raumdreiecke, leitete er ausser der 1' die ihm eigentümlichen Analogien



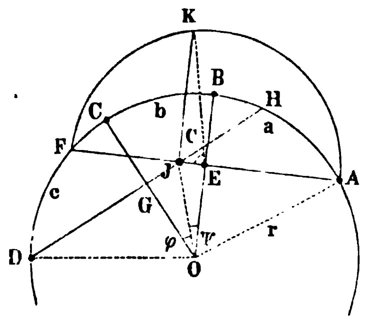
$$\text{Co}\,\alpha : \text{Co}\,\beta = \text{Tg a} : \text{Tg b} \qquad \text{Si x} : \text{Si y} = \text{Tg B} : \text{Tg A} \qquad \mathbf{10}$$

$$\text{Co x} : \text{Co y} = \text{Co b} : \text{Co a} \qquad \text{Si}\,\alpha : \text{Si}\,\beta = \text{Co A} : \text{Co B} \qquad \mathbf{11}$$

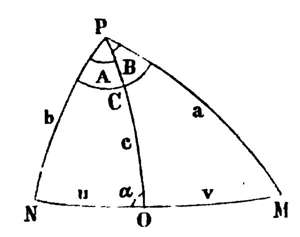
und aus den 11, da sich in jeder Proportion die Summe der beiden ersten Glieder zu ihrer Differenz, wie die Summe der beiden letzten Glieder zu deren Differenz verhält, unter Benutzung der 62 : 4, die zwei weitern

$$\text{Ct}\frac{x+y}{2} : \text{Tg}\frac{x-y}{2} = \text{Ct}\frac{b+a}{2} : \text{Tg}\frac{b-a}{2} \qquad \text{Tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \text{Tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \text{Ct}\frac{A+B}{2} : \text{Tg}\frac{B-A}{2} \qquad \mathbf{12}$$

ab, wodurch er in der That die Mittel besass, alle Aufgaben am sphärischen Dreiecke in einfachster Weise zu lösen. — In seiner „Construction plane de la Trigonométrie sphérique (Opera III)" machte ferner **Boscovich** einen interessanten Versuch, die sphärischen Dreiecke durch ebene Konstruktionen graphisch aufzulösen, welchen ich glaube, wenigstens durch Ein Beispiel illustrieren zu sollen: Um aus den drei Seiten a, b, c eines Kugeldreieckes den Winkel C zu finden, verzeichnet er einen beliebigen Kreis, — trägt in diesem AB = a, BC = b, CD = c auf, — zieht die Radien der beiden mittlern Punkte B und C, und auf diese von den beiden äussersten Punkten A und D die Senkrechten AF und DH, welche sich in J schneiden, — konstruiert über AF einen Halbkreis, — und errichtet endlich in J die Senkrechte JK, welche nun den gesuchten Bogen KF = C bestimmt.



Dass diese Konstruktion theoretisch ganz richtig ist, lässt sich nun, ohne auf die uns zu weit abführenden Betrachtungen von Boscovich einzugehen, in folgender Weise leicht zeigen: Man erhält nämlich aus der Figur **einerseits** $JO \cdot Co\,\varphi = r \cdot Co\,c$ und $JO \cdot Co\,\psi = r \cdot Co\,a$, also $Co\,a : Co\,\psi = Co\,c : Co\,(b - \psi)$, oder $Co\,a \cdot Tg\,\psi = (Co\,a - Co\,a \cdot Co\,b) : Si\,b$, und **anderseits** $Co\,C = JE : KE = Co\,a \cdot Tg\,\psi : Si\,a$; es ist also $Co\,C = (Co\,c - Co\,a \cdot Co\,b) : Si\,a \cdot Si\,b$, wie es nach 1'' wirklich sein soll. — Vgl. auch die Notizen in 104 : a und 178 : a. — *b.* Die Formeln 4' gehen mit Hilfe der 62 : 2 aus 1'' leicht hervor, wobei für s auf 66 : a verwiesen wird, — und die 4'' folgen aus ihnen mit Hilfe des Polardreieckes, dessen halber Umfang offenbar zum halben Excesse des ursprünglichen Dreieckes ebenfalls supplementär ist. — *c.* Die 6 werden leicht erhalten, indem man nach 4' und 4'' in die zwei ersten der 62 : 3 substituiert und etwas reduziert. Sie wurden fast gleichzeitig durch **Delambre** in der Conn. d. temps für 1808, — durch **Mollweide**, der überdies die entsprechenden Formeln für das ebene Dreieck gab, im Novemberheft 1808 der Mon. Corr., — und durch **Gauss** 1809 in seiner Theoria motus mitgeteilt, — doch immerhin so, dass ihnen der in Deutschland gebräuchliche Name der **Gauss'schen Formeln** gerade am wenigsten zukömmt. — *d.* Die 8, welche uns z. B. in 609 gute Dienste leisten werden, sind nach leichter Reduktion zu erhalten, indem man in 62 : 3''' die α und β durch A und B, sowie rechts für Tg A den nach unserer letzten 3 gebildeten Wert $Si\,B : (Ct\,a \cdot Si\,c - Co\,c \cdot Co\,B)$ einführt. — *e.* Die zwei ersten Formeln 9 ergeben sich, da $e = \frac{1}{2}(A + B + C - 180^0)$, also $Si\,e = -Co\,\frac{1}{2}(A + B + C)$ und $Co\,e = Si\,\frac{1}{2}(A + B + C)$ ist, mit Hilfe von 62 : 3 und unserer 6 ohne Schwierigkeit, — die dritte folgt aus ihnen unter Beizug von 1'', — und die vierte endlich, welche man nach dem Zeugnisse von Legendre **Lhuilier** verdankt, wird erhalten, indem man in $Tg^2\,\frac{1}{2}\,e = (1 - Co\,e) : (1 + Co\,e)$ für Co e den Wert einsetzt und 4' berücksichtigt. — *f.* Als Beispiel weiterer Entwicklungen gebe ich noch die folgende: Sind M, O, N drei Punkte eines grössten Kreises und ist P irgend ein anderer Kugelpunkt, so hat man nach 1', 3' und der Figur



$$\frac{Si\,u \cdot Si\,\alpha}{Si\,v \cdot Si\,\alpha} = \frac{Si\,b \cdot Si\,A}{Si\,a \cdot Si\,B}$$

$$\frac{Si\,u \cdot Co\,\alpha}{Si\,v \cdot Co\,\alpha} = \frac{Co\,b \cdot Si\,c - Si\,b \cdot Co\,c \cdot Co\,A}{-Co\,a \cdot Si\,c + Si\,a \cdot Co\,c \cdot Co\,B}$$

also durch Gleichsetzung der beiden Werte

$$Ct\,a \cdot Si\,A + Ct\,b \cdot Si\,B = Ct\,c \cdot Si\,C \qquad \mathbf{13}$$

In dem speciellen Falle, wo u = v ist, erhält man durch analoge Entwicklung

$$Si^2\,u = Si^2\,\frac{a-b}{2} + Si\,a \cdot Si\,b \cdot Si^2\,\tfrac{1}{2}\,C \qquad \mathbf{14}$$

$$Tg\,c \cdot Si(A - \tfrac{1}{2}C) = Si\,\tfrac{1}{2}C \cdot Tg\,\tfrac{1}{2}(a-b), \quad Tg\,c \cdot Co(A - \tfrac{1}{2}C) = Co\,\tfrac{1}{2}C \cdot Tg\,\tfrac{1}{2}(a+b) \qquad \mathbf{15}$$

und so weiter.

91. Die Beziehungen zwischen den beiden Trigonometrien.

— Der auffallend ähnliche Bau, welchen gewisse Formeln am sphärischen Dreiecke mit solchen am ebenen Dreiecke zeigen[a], hängt natürlich damit zusammen, dass ersteres, wenn der Kugelradius im Verhältnisse zu seinen Seiten zunimmt, sich letzterm

wie einem Grenzwerte nähert. Folge davon ist, dass, wenn man die Seiten des erstern in Bogen ausdrückt und die dritten Potenzen derselben vernachlässigt, die sämtlichen Formeln in die entsprechenden am letztern übergehen [b]. Aber wenn man auch nur die fünften und höhern Potenzen wegwerfen will, so kann man ein Kugeldreieck wie ein ebenes behandeln, falls man zuvor jeden seiner Winkel **um ein Drittel des Excesses** vermindert [c], eine Lehre, welche man als **Satz von Legendre** bezeichnet [d] und in der Geodäsie mit grossem Nutzen verwendet [e].

Zu 91: *a.* Man erinnere sich an die Sinus- und Tangentenproportionen — vergleiche 65 : 3, 8 mit 90 : 4, 6, — etc. Da ferner 90 : 1'' sich leicht in

$$\text{Si}^2\,{}^1/_2\,a = (\text{Si}\,{}^1/_2\,b \cdot \text{Co}\,{}^1/_2\,c)^2 + (\text{Co}\,{}^1/_2 b \cdot \text{Si}\,{}^1/_2\,c)^2 - 2(\text{Si}\,{}^1/_2 b \cdot \text{Co}\,{}^1/_2 c)(\text{Co}\,{}^1/_2 b \cdot \text{Si}\,{}^1/_2 c)\text{Co}\,A \quad \mathbf{1}$$

umsetzen lässt, so ist auch die Analogie mit dem erweiterten pythagoräischen Lehrsatze hergestellt. — *b.* Setzt man die Sinus den Winkeln proportional und die Cosinus, wo sie mit solchen Sinus multipliziert sind, gleich der Einheit, so erhält man z. B. aus 1 sofort $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{Co}\,A$, — und entsprechend in andern Fällen. — *c.* Bezeichnet man durch $a'\,b'\,c'$ die Verhältnisse der Seiten a, b, c zum Radius r, so erhält man nach 90 : 1'' mit Hilfe von 40 : 7, 8 bei Wegwerfung der fünften Potenzen

$$\text{Co}\,A = \frac{\text{Co}\,a' - \text{Co}\,b' \cdot \text{Co}\,c'}{\text{Si}\,b' \cdot \text{Si}\,c'} = \frac{{}^1/_2(b'^2 + c'^2 - a'^2) + {}^1/_{24}(a'^4 - b'^4 - c'^4 - 6b'^2 \cdot c'^2)}{b' \cdot c'\,[1 - {}^1/_6(b'^2 + c'^2)]}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit $1 + {}^1/_6(b'^2 + c'^2)$ multipliziert, wieder die 5. Potenzen wegwirft und die a b c restituiert,

$$\text{Co}\,A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}{24\,b \cdot c \cdot r^2} \quad \mathbf{2}$$

Bezeichnet man aber die Winkel eines ebenen Dreiecks der Seiten a b c mit $A'\,B'\,C'$ und setzt angenähert dessen Fläche f der Fläche des sphärischen Dreieckes gleich, so hat man (66, 86)

$$\text{Co}\,A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \frac{bc \cdot \text{Si}\,A'}{2} = f = 2er^2\,\text{Si}\,1''$$

also

$$\text{Si}^2 A' = \frac{2[a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)]}{4b^2c^2}, \quad \frac{4b^2c^2\,\text{Si}^2 A'}{24 \cdot b \cdot c \cdot r^2} = {}^2/_3\,e\,\text{Si}\,A' \cdot \text{Si}\,1''$$

und hiefür geht 2 in

$$\text{Co}\,A = \text{Co}\,A' - {}^2/_3\,e \cdot \text{Si}\,A' \cdot \text{Si}\,1'' \quad \mathbf{3}$$

über. Setzt man nun $A = A' + x$, so ist offenbar x eine kleine Grösse und man hat daher

$$\text{Co}\,A = \text{Co}\,A' \cdot \text{Co}\,x - \text{Si}\,A' \cdot \text{Si}\,x = \text{Co}\,A' - x \cdot \text{Si}\,A' \cdot \text{Si}\,1'' \quad \mathbf{4}$$

folglich durch Vergleichung von 3 und 4

$$x = {}^2/_3\,e \qquad \text{oder also} \qquad A' = A - \frac{2e}{3} \quad \mathbf{5}$$

was mit dem oben Ausgesprochenen genau übereinstimmt. — *d.* Praktiziert wurde dieses Verfahren allerdings schon früher (vgl. 422); aber als eigentliche Lehre wurde es kaum vor „**Legendre,** Sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre (Mém. Par. 1787)" vorgeführt, — ja eine förmliche Begründung dieser letztern wurde von Legendre erst 1799 in seiner einleitenden Abhandlung zu Delambres „Méthodes analytiques

pour la détermination d'un arc du méridien" nachgeliefert. — Nach **Baeyer** zeigte **Bessel**, dass man eigentlich statt 5

$$A' = A - \frac{2e}{3} - \frac{(2e)^2}{90}[2\,Ct\,A' - Ct\,B' - Ct\,C'] \qquad 6$$

setzen sollte, — jedoch fügt er bei, dass das neue Korrektionsglied noch nicht 0",01 ausmache, wenn die Seiten nicht über 25 Meilen (185 Kil.) betragen. Vgl. auch „**Nell**, Zur höhern Geodäsie (Z. f. M. u. Ph. 1874)". — *e.* Anhangsweise mag noch folgende Untersuchung folgen: In dem speciellen Falle, wo c so klein ist, dass die 4. Potenz von $c \cdot Si\,1''$ vernachlässigt werden darf, erhält man aus 1" mit Hilfe der goniometrischen Reihen

$$Co\,a = Co\,b\left(1 - \frac{c^2\,Si^2\,1''}{2}\right) + Si\,b \cdot Co\,A\left(c \cdot Si\,1'' - \frac{c^3 \cdot Si^3\,1''}{6}\right)$$

$$= Co\,b + c \cdot Si\,b \cdot Co\,A \cdot Si\,1'' - \frac{c^2}{2}\,Co\,b\,Si^2\,1'' - \frac{c^3}{6}\,Si\,b \cdot Co\,A \cdot Si^3\,1''$$

Man kann daher $\quad a = b + c \cdot P + c^2 \cdot Q + c^3 \cdot R$

setzen, wo P, Q, R zu bestimmende Koeffizienten sind, und hieraus folgt wieder mit Hilfe jener Reihen

$$Co\,a = Co\,b \cdot Co\,(cP + c^2Q + c^3R) - Si\,b \cdot Si\,(cP + c^2Q + c^3R)$$

$$= Co\,b - cP \cdot Si\,b \cdot Si\,1'' - \frac{c^2}{2}\left(P^2\,Co^2 b + \frac{2\,Q\,Si\,b}{Si\,1''}\right) Si^2\,1'' -$$

$$- \frac{c^3}{6}\left(\frac{6\,PQ\,Co\,b}{Si\,1''} + \frac{6\,R\,Si\,b}{Si^2\,1''} - P^3 \cdot Si\,b\right) \cdot Si^3\,1''$$

Die Vergleichung der beiden Werte von Co a giebt sodann drei Koeffizienten-Gleichungen, aus welchen

$$P = -Co\,A \qquad Q = \frac{1}{2}\,Ct\,b \cdot Si^2 A \cdot Si\,1'' \qquad R = {}^1\!/_2\,Co\,A \cdot Si^2 A\left(\frac{1}{3} + Ct^2\,b\right) Si^2\,1''$$

folgen, und man erhält somit schliesslich

$$a = b - c \cdot Co\,A + \frac{c^2}{2}\,Ct\,b \cdot Si^2 A \cdot Si\,1'' + \frac{c^3}{4}\,Si\,A \cdot Si\,2\,A\left(\frac{1}{3} + Ct^2\,b\right) Si^2\,1'' \qquad 7$$

Ferner hat man entsprechend 90 : 3"

$$Tg\,B = \frac{Si\,A}{Ct\,b \cdot Si\,c - Co\,c \cdot Co\,A} \qquad Tg\,C = \frac{Si\,A}{Ct\,c \cdot Si\,b - Co\,b \cdot Co\,A} \qquad 8$$

Wenn nun c klein ist, so sind auch C und $x = 180 - (A + B)$ klein. Substituiert man aber in

$$Tg\,x = Tg\,[(90 - A) + (90 - B)] = \frac{Ct\,A \cdot Tg\,B + 1}{Tg\,B - Ct\,A}$$

aus 8 den Wert von Tg B, ersetzt Si c und Co c wie früher durch ihre Reihenwerte und führt die Division inklusive der Glieder mit c^3 aus, so erhält man

$$Tg\,x = c \cdot Si\,A \cdot Si\,1''\left[\begin{array}{l} Ct\,b + \frac{c}{2}\,Si\,1'' \cdot Co\,A\,(1 + 2\,Ct^2\,b) - \\ - \frac{c^2}{6}\,Si^2\,1'' \cdot Ct\,b\,[1 - 6\,Co^2 A\,(1 + Ct^2\,b)] \end{array}\right]$$

folglich, da $x \cdot Si\,1'' = Tg\,x - {}^1\!/_3\,Tg^3\,x + \cdots$ ist,

$$180 - B = A + c \cdot Si\,A \cdot Ct\,b + \frac{c^2}{2}\,Si\,A \cdot Co\,A\,(1 + 2\,Ct^2\,b)\,Si\,1'' +$$

$$+ \frac{c^3}{6}\,Si\,A \cdot Ct\,b\,[Co^2 A\,(6 + 8\,Ct^2\,b) - (1 + 2\,Ct^2\,b)]\,Si^2\,1'' \qquad 9$$

Endlich hat man nach 8'' bei entsprechender Behandlung

$$\text{Tg C} = \frac{\text{Si A}}{\text{Si b}}\left[c \cdot \text{Si } 1'' + c^2 \text{Si}^2 1'' \cdot \text{Co A} \cdot \text{Ct b} + \frac{c^3}{3} \text{Si}^3 1'' (1 + 3 \text{Co}^2 \text{A} \cdot \text{Ct}^2 \text{b})\right]$$

oder, da $C \cdot \text{Si } 1'' = \text{Tg C} - \frac{1}{3} \text{Tg}^3 \text{C}$ ist,

$$C = \frac{c \cdot \text{Si A}}{\text{Si b}}\left[1 + c \cdot \text{Si } 1'' \cdot \text{Co A} \cdot \text{Ct b} + \frac{c^2}{3} \text{Si}^2 1'' [\text{Co}^2 \text{A} (1 + 4 \text{Ct}^2 \text{b}) - \text{Ct}^2 \text{b}]\right] \quad \textbf{10}$$

Wir werden von diesen Reihen in 433 Gebrauch machen; hier mag nur noch erwähnt werden, dass sie z. B. schon von **Puissant** in seiner Géodésie gegeben wurden.

92. Die sog. Fehlergleichungen. — Durch Differentiation der 90 : 1'' erhält man leicht die zwischen kleinen Veränderungen der Dreieckselemente bestehenden Beziehungen

$$\begin{aligned} da &= \text{Co C} \cdot db + \text{Co B} \cdot dc + \text{Si B} \cdot \text{Si c} \cdot dA \\ db &= \text{Co A} \cdot dc + \text{Co C} \cdot da + \text{Si C} \cdot \text{Si a} \cdot dB \\ dc &= \text{Co B} \cdot da + \text{Co A} \cdot db + \text{Si A} \cdot \text{Si b} \cdot dC \end{aligned} \quad \textbf{1}$$

welche man als **Fehlergleichungen** bezeichnet. Eliminiert man aus je zwei derselben die dc, so ergiebt sich, dass auch

$$\begin{aligned} \text{Ct a} \cdot da - \text{Ct b} \cdot db &= \text{Ct A} \cdot dA - \text{Ct B} \cdot dB \\ \text{Si B} \cdot da - \text{Co c} \cdot \text{Si A} \cdot db &= \text{Si c} \cdot dA + \text{Si a} \cdot \text{Co B} \cdot dC \\ \text{Si A} \cdot db - \text{Co c} \cdot \text{Si B} \cdot da &= \text{Si c} \cdot dB + \text{Si b} \cdot \text{Co A} \cdot dC \end{aligned} \quad \textbf{2}$$

und endlich, wenn man aus 2'' und 2''' die db eliminiert, dass überdies

$$dA = \text{Si b} \cdot \text{Si C} \cdot da - \text{Co c} \cdot dB - \text{Co b} \cdot dC \quad \textbf{3}$$

ist [a]. Wir werden später von diesen Beziehungen wiederholt, namentlich aber in der Theorie der Beobachtungsmethoden, einen ausgedehnten Gebrauch zu machen haben [b].

Zu 92: *a.* Solche Fehlergleichungen finden sich zuerst in der 1722 aus dem Nachlasse von Roger Cotes oder **Cotesius** (Burbage in Leicestershire 1682 — Cambridge 1716; erst Schüler, dann Freund von Newton, und Prof. astr. Cambridge) als Anhang zu dessen „Harmonia mensurarum" ausgegebenen „Aestimatio errorum in mixte mathesi per variationes partium trianguli plani et sphærici"; aber noch unter der Form von 28 Theoremen, von welchen z. B. das 17. einem Specialfalle unserer 2' entspricht, indem es lautet: „Sind in einem sphärischen Dreiecke eine Seite und ihr Gegenwinkel konstant (db = o = dB), so verhält sich die Variation einer der beiden andern Seiten (da) zur Variation ihres Gegenwinkels (dA), wie sich die Tangente dieser Seite (Tg a) zur Tangente ihres Gegenwinkels (Tg A) verhält". Noch in „**Lacaille**, Calcul des différences dans la trigonométrie sphérique (Mém. Par. 1741)", und in „**Cagnoli**, Trigonometria piana e sferica. Parigi 1786 in 4." wurden wesentlich diese Cotesius'schen Analogien wiederholt, — in letzterer Schrift sogar auf 139 Nummern ausgedehnt; dagegen finden sich in „**Boscovich**, Des formules différentielles de trigonométrie (Opera IV 316—94)" die Fehlergleichungen in der oben gegebenen Form, und dabei gereicht es diesem höchst verdienten und viel zu wenig beachteten Gelehrten zu grosser Ehre, dass er unsere 1', 2', 2'' und 3 als „équations générales" ausgewählt hat. — *b.* Anhangsweise

komme ich noch auf die in 68 begonnene Untersuchung zurück: Hat man z. B.

$$\text{Co}\, c = \text{Co}\, a \cdot \text{Se}\, b \qquad 4$$

so ist, nach der in 68 gewählten Bezeichnung, $x = c$, $f(x) = \text{Co}\, c$, $p = \text{Co}\, a$, $q = \text{Co}\, b$, $\varphi = p : q$, also $dx = dc$, $f'(x) = -\text{Si}\, c$, $d\varphi : dp = 1 : q$ und $d\varphi : dq = -p : q^2$, folglich nach 68 : 3

$$dc = \pm \frac{dw}{M \cdot \text{Si}\, c}\left[\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\right] = \pm \frac{2\, \text{Ct}\, c}{M} \cdot dw \qquad 5$$

Nun erhält man aber aus 4 durch Umgestaltung

$$\text{Tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{Co}\, c}{1+\text{Co}\, c}} = \sqrt{\frac{\text{Co}\, b - \text{Co}\, a}{\text{Co}\, b + \text{Co}\, a}} = \sqrt{\text{Tg}\frac{a+b}{2} \cdot \text{Tg}\frac{a-b}{2}} \qquad 6$$

so dass nunmehr $x = c$, $f(x) = \text{Tg}\frac{c}{2}$, $p = \text{Tg}\frac{a+b}{2}$, $q = \text{Tg}\frac{a-b}{2}$, $\varphi = \sqrt{p \cdot q}$, also $dx = dc$, $f'(x) = 1 : 2 \cdot \text{Co}^2\frac{a}{2}$, $d\varphi : dp = \frac{1}{2}\sqrt{q : p}$, $d\varphi : dq = {}^1/_2 \sqrt{p : q}$, folglich nach 68 : 3

$$dc = \pm \frac{dw}{M} \cdot 2\, \text{Co}^2 \frac{c}{2}\left[{}^1/_2 \sqrt{pq} + {}^1/_2 \sqrt{pq}\right] = \pm \frac{\text{Si}\, c}{M} \cdot dw \qquad 7$$

zu setzen ist. Da nun das Verhältnis $2\, \text{Ct}\, c : \text{Si}\, c = 2\, \text{Co}\, c : (1 - \text{Co}^2 c)$ für $\text{Co}\, c = \sqrt{2} - 1 = \text{Co}\, 65^1/_2{}^0$ gleich der Einheit wird, so ist 6 gegenüber 4 wirklich etwas im Vorteil, so lange $c < 65^1/_2{}^0$ ist, und entsprechend kann in andern Fällen diskutiert werden.

93. Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes. — Die Lage eines Punktes im Raume wird, analog wie in der Ebene, durch rechtwinklige Coordinaten (x, y, z), von denen x noch **Abscisse**, y noch **Ordinate**, z aber **Applikate** heissen mag, gegeben, — oder auch durch den **Radius vector** (r) und die von ihm mit den Axen gebildeten Winkel (α, β, γ), wo für letztere die zwei Winkel (v, w) eintreten können, welche der Radius vector mit seiner Projektion auf die Ebene XY, und diese mit der Axe X bilden. Diese Coordinaten hängen durch die Beziehungen

$$x = r \cdot \text{Co}\alpha = r \cdot \text{Co}\, v \cdot \text{Co}\, w, \quad y = r \cdot \text{Co}\beta = r \cdot \text{Co}\, v \cdot \text{Si}\, w, \quad z = r \cdot \text{Co}\gamma = r \cdot \text{Si}\, v$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{Co}^2\alpha + \text{Co}^2\beta + \text{Co}^2\gamma = 1 \qquad 1$$

mit einander zusammen, während offenbar nach

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \qquad 2$$

die Distanz d zweier Punkte ($x_1\, y_1\, z_1$) und ($x_2\, y_2\, z_2$) berechnet werden kann [a]. — Hat man von einem Coordinatensystem XYZ auf ein Parallelsystem X′Y′Z′ überzugehen, so sind die neuen Coordinaten

$$x' = x - X \qquad y' = y - Y \qquad z' = z - Z \qquad 3$$

wo X, Y, Z die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in Beziehung auf das alte System bezeichnen [b]. — Haben dagegen die beiden Coordinatensysteme gleichen Anfangspunkt, aber verschiedene Richtung der Axen, und sind $a_1\, b_1\, c_1$, $a_2\, b_2\, c_2$, $a_3\, b_3\, c_3$ der Reihe

nach die Cosinus der Winkel, welche jede der Axen X'Y'Z' mit den Axen XYZ, oder jede der Ebenen Y'Z', X'Z', X'Y' mit den Ebenen YZ, XZ, XY bildet, so hat man

$$\begin{array}{ll} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' & x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' & y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' & z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{array} \qquad 4$$

und es bestehen die Beziehungen

$$\begin{array}{lll} a_1 = Co\varphi \cdot Co\psi + Si\varphi \cdot Si\psi \cdot Co\theta & b_1 = Co\varphi \cdot Si\psi - Si\varphi \cdot Co\psi \cdot Co\theta & c_1 = Si\varphi \cdot Si\theta \\ a_2 = Si\varphi \cdot Co\psi - Co\varphi \cdot Si\psi \cdot Co\theta & b_2 = Si\varphi \cdot Si\psi + Co\varphi \cdot Co\psi \cdot Co\theta & c_2 = -Co\varphi \cdot Si\theta \\ a_3 = -Si\psi \cdot Si\theta & b_3 = Co\psi \cdot Si\theta & c_3 = Co\theta \end{array} \qquad 5$$

wo θ der Winkel der Ebenen X'Y' und XY ist, φ und ψ aber die Winkel sind, welche deren Knotenlinie mit den Axen X' und X bildet [c]. — Jede Fläche wird durch eine, in einem bestimmten Punkte der Ebene XY errichtete Senkrechte in bestimmten Abständen von dieser Ebene geschnitten, und ihr Gesetz muss sich daher durch eine Gleichung

$$z = f(x, y) \qquad \text{oder} \qquad F(x, y, z) = 0 \qquad 6$$

ausdrücken lassen; dabei heisst, je nachdem diese Gleichung vom n. Grade oder transcendent wird, auch die Fläche vom n. Grade oder transcendent. So z. B. besteht für jeden Punkt einer Ebene zwischen seinen Coordinaten eine Gleichung ersten Grades

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \text{oder} \qquad Ax + By + Cz + D = 0 \qquad 7$$

und umgekehrt ist jede Fläche ersten Grades eine Ebene. Bezeichnet n den Winkel der Ebene mit der XY, so kann man n nach

$$Tg\, n = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{a \cdot b} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C}$$

oder

$$Co\, n = \frac{ab}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad 8$$

berechnen [d]. — Da sich ferner eine Linie im Raume immer als Durchschnitt zweier Flächen, speciell eine Gerade als Durchschnitt zweier Ebenen denken lässt, so kann letztere durch zwei Gleichungen

$$x = \alpha \cdot z + \gamma \qquad y = \beta \cdot z + \delta \qquad 9$$

gegeben werden, welche offenbar den Projektionen der Geraden auf die Ebenen der XZ und YZ entsprechen. — Eliminiert man aus den Gleichungen zweier Geraden

$$x = a_1 z + b_1 \quad y = a_2 z + b_2 \quad \text{und} \quad x = \alpha_1 z + \beta_1 \quad y = \alpha_2 z + \beta_2 \qquad 10$$

die Coordinaten xyz, so erhält man die Proportion

$$(a_1 - \alpha_1) : (a_2 - \alpha_2) = (b_1 - \beta_1) : (b_2 - \beta_2) \qquad 11$$

welche die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen jener vier

Gleichungen, d. h. für das Schneiden der Geraden, enthält. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind

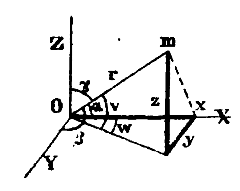
$$x = \frac{a_1\beta_1 - b_1\alpha_1}{a_1 - \alpha_1} \qquad y = \frac{a_2\beta_2 - b_2\alpha_2}{a_2 - \alpha_2} \qquad z = -\frac{b_1 - \beta_1}{a_1 - \alpha_1} \qquad \mathbf{12}$$

so dass die beiden Geraden für $a_1 = \alpha_1$ und $a_2 = \alpha_2$ sich im Unendlichen schneiden oder parallel werden. Im allgemeinen wird der Winkel (1, 2) der beiden Geraden durch

$$\mathrm{Co}(1,2) = \frac{1 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2}{\sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = \qquad \mathbf{13}$$
$$= \mathrm{Co}(1,x)\,\mathrm{Co}(2,x) + \mathrm{Co}(1,y)\,\mathrm{Co}(2,y) + \mathrm{Co}(1,z)\,\mathrm{Co}(2,z)$$

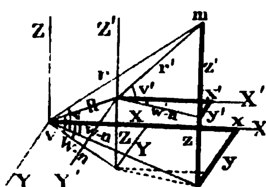
erhalten, und es ist somit $1 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$ die Bedingung des Senkrechtstehens.

Zu 93: *a.* Die Raumcoordinaten wurden mutmasslich bald nach denjenigen in der Ebene eingeführt, jedenfalls die drei rechtwinkligen x, y, z, wenn auch ohne Benennungen, spätestens durch **Euler** in seiner Introductio ganz in unserm Sinne; dass jemand vor mir der z den vakant gewordenen Namen **Applikate** beilegte, ist mir nicht bekannt. — Bezeichnen r_1 und r_2 die Distanzen der beiden Punkte vom Anfangspunkte, so ist trigonometrisch



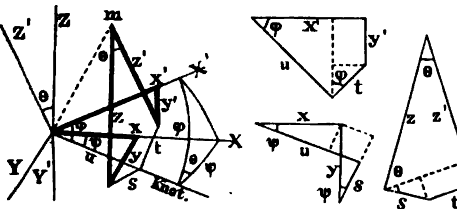
$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \,\mathrm{Co}(r_1, r_2) \qquad \mathbf{14}$$
also nach 2 $$r_1 \cdot r_2 \,\mathrm{Co}(r_1, r_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

— *b.* Die 3 ergeben sich unmittelbar aus der Figur. Führt man in dieselben nach 1 die Polarcoordinaten ein, so erhält man



$$r' \cdot \mathrm{Co}\, v' \cdot \mathrm{Co}(w' - n) = \\ = r \cdot \mathrm{Co}\, v \cdot \mathrm{Co}(w - n) - R \cdot \mathrm{Co}\, V \cdot \mathrm{Co}(W - n)$$
$$r' \cdot \mathrm{Co}\, v' \cdot \mathrm{Si}(w' - n) = \\ = r \cdot \mathrm{Co}\, v \cdot \mathrm{Si}(w - n) - R \cdot \mathrm{Co}\, V \cdot \mathrm{Si}(W - n) \qquad \mathbf{15}$$
$$r' \cdot \mathrm{Si}\, v' = r \cdot \mathrm{Si}\, v - R \cdot \mathrm{Si}\, V$$

wo n eine willkürliche Grösse bezeichnet. — *c.* Da sowohl x y z als x' y' z' durch r zu einem Vierecke ergänzt werden, also (81 : b) die Summe der Projektionen der erstern auf irgend eine Gerade gleich der Summe der Projektionen der zweiten auf dieselbe Gerade sein muss, so ergeben sich die 4 ohne weiteres. Anderseits liest man aus den beistehenden Figuren die Beziehungen



$$x' = u \cdot \mathrm{Co}\,\varphi + t \cdot \mathrm{Si}\,\varphi$$
$$y' = u \cdot \mathrm{Si}\,\varphi - t \cdot \mathrm{Co}\,\varphi$$
$$z' = z \cdot \mathrm{Co}\,\theta + s \cdot \mathrm{Si}\,\theta$$
$$s = y \cdot \mathrm{Co}\,\psi - x \cdot \mathrm{Si}\,\psi$$
$$t = z \cdot \mathrm{Si}\,\theta - s \cdot \mathrm{Co}\,\theta$$
$$u = x \cdot \mathrm{Co}\,\psi + y \cdot \mathrm{Si}\,\psi$$

ab, und wenn man aus diesen die Hilfsgrössen s, t, u eliminiert, so ergeben sich durch Vergleichung mit 4 sofort die 5. — Setzt man ferner in der Gleichheit $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ entweder für x y z

oder für $x' y' z'$ ihre Werte aus 4 ein, so folgt, dass

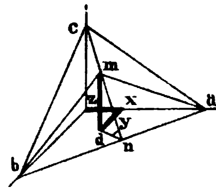
$$1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$
$$= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \qquad 16$$

$$0 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3$$
$$= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 \qquad 17$$

und ebenso lassen sich mit Hilfe von 5 die Gleichheiten

$$\begin{array}{lll} a_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2 & a_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3 & a_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ b_1 = c_2 a_3 - c_3 a_2 & b_2 = c_3 a_1 - c_1 a_3 & b_3 = c_1 a_2 - c_2 a_1 \\ c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 & c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 & c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array} \qquad 18$$

leicht verifizieren. — Die obige Ableitung der 5 gab ich schon 1848 in den Berner-Mitteilungen. Die Relationen 18 scheint **Lagrange** zuerst aufgestellt und benutzt zu haben. — *d.* Bezeichnen a, b, c die Abstände der Schnittpunkte der Axen vom Anfangspunkte, so besteht (83) die Volumengleichheit



$$\frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot 3} = \frac{a \cdot b \cdot z}{2 \cdot 3} + \frac{a \cdot c \cdot y}{2 \cdot 3} + \frac{b \cdot c \cdot x}{2 \cdot 3}$$

woraus sofort 7' und auch die Berechtigung von 7'' hervorgeht. — Geht die Ebene durch den Anfangspunkt, so ist $D = 0$, — ist sie zu einer der Axen parallel, so verschwindet das entsprechende Glied der Gleichung, — soll sie durch drei Punkte $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2)$, $(x_3\, y_3\, z_3)$ gehen, so muss 7 für jeden derselben bestehen, und hieraus ergiebt sich

$$\begin{array}{l} A = z_1 (y_3 - y_2) + z_2 (y_1 - y_3) + z_3 (y_2 - y_1) \\ B = x_1 (z_3 - z_2) + x_2 (z_1 - z_3) + x_3 (z_2 - z_1) \\ C = y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_1) \\ D = z_1 (y_2 x_3 - y_3 x_2) + z_2 (y_3 x_1 - y_1 x_3) + z_3 (y_1 x_2 - y_2 x_1) \end{array} \qquad 19$$

Die 8' geht aus $\operatorname{Tg} n = z : d$ mit Hilfe von 69 hervor. — Bezeichnen n', n'', n''' die Winkel, welche eine Ebene mit den XY, XZ und YZ bildet, so hat man nach 8 offenbar $\operatorname{Co}^2 n' + \operatorname{Co}^2 n'' + \operatorname{Co}^2 n''' = 1$; bezeichnen ferner f', f'', f''' die Projektionen eines beliebigen Flächenstückes f dieser Ebene auf die drei Coordinatenebenen, so hat man (81) : $f' = f \cdot \operatorname{Co} n'$, $f'' = f \cdot \operatorname{Co} n''$, $f''' = f \cdot \operatorname{Co} n'''$, — also in Verbindung beider

$$f'^2 + f''^2 + f'''^2 = f^2 \qquad 20$$

worin der von Charles **Tinseau** de Gennes (Besançon 1750? — 1800; Genie-Offizier) 1774 der Par. Akad. (vgl. Sav. étrang. 1780) mitgeteilte und nach ihm benannte Satz besteht, aus welchem derjenige von **Gua** (83 : a) als Specialfall hervorgeht. — *e.* Die 13 erhält man, indem man durch den Pol Parallele zu den beiden Geraden zieht, auf diesen beliebige Distanzen ϱ_1 und ϱ_2 abträgt und den trigonometrisch bestimmten Abstand der so erhaltenen zwei Punkte dem durch 2 Gegebenen gleichsetzt.

94. Die Krümmungsverhältnisse. — Legt man durch einen Punkt $(x_1\, y_1\, z_1)$ einer Fläche $z = f(x, y)$ und zwei benachbarte Punkte $(x_1 + \alpha_1,\ y_1,\ z_1 + \gamma_1)$ und $(x_1,\ y_1 + \beta_1,\ z_1 + \gamma_2)$ derselben Fläche eine Ebene, so erhält man (93) als Gleichung derselben

$$z - z_1 = (x - x_1) \cdot \frac{\gamma_1}{\alpha_1} + (y - y_1) \cdot \frac{\gamma_2}{\beta_1} \qquad 1$$

Sind nun α_1 und β_1, folglich auch die beiden γ, verschwindend klein, so wird die Ebene **tangierend**, während 1 in

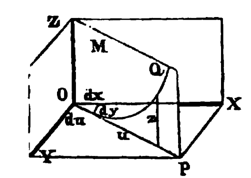
$$z - z_1 = p(x - x_1) + q(y - y_1) \quad \text{wo} \quad p = \frac{dz}{dx} \qquad q = \frac{dz}{dy} \qquad 2$$

übergeht, somit (93 : 8) ihr Winkel gegen die XY durch

$$\text{Co}\,n = 1 : \sqrt{1 + p^2 + q^2} \qquad \text{oder} \qquad \text{Tg}\,n = \sqrt{p^2 + q^2} \qquad 3$$

bestimmt wird. — Errichtet man in dem Berührungspunkte eine Senkrechte zu der tangierenden Ebene und legt durch diese sog. **Normale** irgend eine andere Ebene M, so schneidet letztere die Fläche in einer Kurve, zu welcher man (70) den Krümmungskreis suchen kann. Dreht man M, so verändert sich im allgemeinen der Krümmungshalbmesser, nimmt aber für eine zu der ersten senkrechte Stellung jeweilen einen solchen Wert an, dass die Reciproken der beiden Krümmungshalbmesser sich zu einer nur von der Lage des Punktes abhängigen, also für ihn konstanten Grösse ergänzen, in welcher somit ein **Krümmungsmass** liegt [a]. — Für weitere Untersuchungen muss auf die Specialwerke verwiesen werden [b].

Zu 94: *a.* Wählt man die tangierende Ebene als Ebene der XY, so fällt natürlich die Normale in die Axe der Z. Eine durch letztere gelegte Ebene M schneidet die Fläche in einer Kurve OQ, zu der die Kante OP, welche M in XY bildet, Tangente ist, und welcher in O (70 : 4) ein Krümmungskreis des Radius



$$R_1 = \frac{[1 + (dx : du)^2]^{3/2}}{d^2z \cdot du^2} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{3/2}}{d^2z \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}} \qquad 4$$

entspricht. Da aber OP Tangente ist, so muss $dz = 0$ sein, während, wenn

$$r = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \qquad s = \left(\frac{d^2z}{dx \cdot dy}\right) \qquad t = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \qquad w = \frac{dy}{dx} \qquad 5$$

sind, nach 41 : 7 sofort $d^2z = r \cdot dx^2 + 2s \cdot dx \cdot dy + t \cdot dy^2$ folgt. Es geht also 4 in

$$R_1 = \frac{dx^2 + dy^2}{d^2z} = \frac{1 + w^2}{r + 2sw + t \cdot w^2} \qquad 6$$

über. Mit Hilfe hievon ergiebt sich aber, dass, wenn man w in $-1 : w$ und R_1 in R_2 übergehen lässt,

$$R_2 = \frac{1 + w^2}{r \cdot w^2 - 2sw + t} \qquad \text{und somit} \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = r + t \qquad 7$$

wird, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist. — *b.* Die Krümmung der Flächen wurde in allgemeiner Weise zuerst durch den jungen **Clairaut** in seinen ausgezeichneten „Recherches sur les courbes à double courbure. Paris 1731 in 4.“ behandelt, — später auch von **Euler**, **Monge**, etc., — und dann wieder in ganz hervorragender Weise durch **Gauss** in seinen „Disquisitiones generales circa superficies curvas (Comm. Gotting. 1827; franz. Paris 1852 in 8.)“. Aus der neuesten Zeit sind zu vergleichen „L. **Cremona**, Preliminare di una teoria geometrica delle superficie. Bologna 1866 in 4. (deutsch durch Curtze, Berlin 1870 in 8.), — Eduard **Mahler**, Die Fundamentalsätze der allgemeinen Flächen-

theorie. Wien 1880 in 8., — August **Haas**, Versuch einer Darstellung der Geschichte des Krümmungsmasses. Tübingen 1881 in 4., — etc."

95. Die Komplanation und Kubatur. — Bezeichnet dO ein Flächenelement, so ist (81, 94)

$$dO = dx \cdot dy \cdot \mathrm{Se}\, n = dx \cdot dy \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2} \qquad \mathbf{1}$$

ein Ausdruck, welchen man, um die Oberfläche zu erhalten, zwei mal, z. B. zuerst nach x und dann nach y, zu integrieren hat. Setzt man, um diese Operation zu erleichtern,

$$dx = P \cdot d\varphi + Q \cdot d\psi \qquad dy = P' \cdot d\varphi + Q' \cdot d\psi \qquad \mathbf{2}$$

so hat man, da für die Integration nach x offenbar y als konstant anzusehen ist, $P' \cdot d\varphi + Q' \cdot d\psi = 0$, oder

$$d\psi = -\frac{P'}{Q'} \cdot d\varphi \qquad \text{folglich} \qquad dx = \frac{P \cdot Q' - Q \cdot P'}{Q'} \cdot d\varphi$$

zu setzen. Für die zweite Integration ist sodann φ als konstant anzusehen, also $dy = Q' \cdot d\psi$ einzuführen, und es ist somit

$$O = \iint (PQ' - QP') \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot d\varphi \cdot d\psi \qquad \mathbf{3}$$

womit das Problem der **Komplanation** erledigt ist[a]. — Bezeichnet sodann dV das durch dO und seine Projektion auf XY bestimmte prismatische Körperelement, so ist offenbar

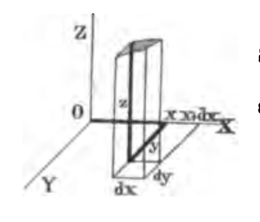
$$dV = dx \cdot dy \cdot z \qquad \mathbf{4}$$

und hieraus findet sich entsprechend

$$V = \iint (PQ' - QP')\, z \cdot d\varphi \cdot d\psi \qquad \mathbf{5}$$

womit auch die **Kubatur** absolviert ist[b]. — Im übrigen muss ich mich darauf beschränken, unten und später einige Beispiele der Anwendung zu geben[c].

Zu 95: *a.* Für die Ableitung von 3 und 5 ist die beistehende Figur zu konsultieren. — Als Beispiel der Komplanation füge ich vorläufig folgendes bei: Der Kugelgleichung



$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

genügen die Werte

$$x = r \cdot \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,\psi \qquad y = r \cdot \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,\psi \qquad z = r \cdot \mathrm{Co}\,\varphi$$

also erhält man successive

$$P = \frac{dx}{d\varphi} = r\,\mathrm{Co}\,\varphi\,\mathrm{Co}\,\psi \qquad Q = \frac{dx}{d\psi} = -r\,\mathrm{Si}\,\varphi\,\mathrm{Si}\,\psi$$

$$P' = \frac{dy}{d\varphi} = r\,\mathrm{Co}\,\varphi\,\mathrm{Si}\,\psi \qquad Q' = \frac{dy}{d\psi} = r\,\mathrm{Si}\,\varphi\,\mathrm{Co}\,\psi$$

$$p = \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z} = -\mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,\psi \qquad q = \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z} = -\mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,\psi$$

$$P \cdot Q' - Q \cdot P' = r^2\,\mathrm{Si}\,\varphi\,\mathrm{Co}\,\varphi \qquad \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{1}{\mathrm{Co}\,\varphi}$$

$$O = r^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \mathrm{Si}\,\varphi \cdot d\varphi\, d\psi = r^2 \Big[-\mathrm{Co}\,\varphi \Big[\psi \Big]_0^{2\pi} \Big]_0^{\pi} = 4 r^2 \pi$$

Dazu kömmt die historische Angabe, dass die Alten, und noch **Archimedes**, nur die Oberflächen der geraden Cylinder und Kegel, der Kugeln und Kugelzonen, in ähnlicher Weise zu berechnen wussten, wie es früher (83, 85) gelehrt wurde. Erst im 17. Jahrhundert wagte man sich daran, auch die Komplanation einiger andern Flächen zu versuchen, und es gelang damals namentlich **Huygens** das parabolische und hyperbolische Conoid, sowie das Sphäroid, zu bewältigen, doch fehlten noch allgemeine Methoden, welche dann aber bald darauf die Infinitesimalrechnung in obstehender Weise an die Hand gab. — *b.* Beispielsweise erhalten wir für die Kugel nach 5 unter Anwendung der obigen Hilfswerte

$$V = r^3 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} Co^2\varphi \cdot Si\varphi \cdot d\varphi \cdot d\psi = r^3 \Big[-\tfrac{1}{3} Co^3\varphi \Big[\psi \Big]_0^{2\pi} \Big]_0^{\pi} = \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$$

Schon **Archimedes** gelang es, ausser der Kugel (85), das Sphäroid und das parabolische Conoid zu kubieren, und im 17. Jahrhundert wussten die **Roberval**, **Cavalieri**, **Wallis**, etc., noch die Volumina mehrerer anderer Körper zu berechnen; aber eine allgemeine Methode wurde ebenfalls erst von der Infinitesimalrechnung in obstehender Weise gegeben. — *c.* Nach 4 stellt

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot dx \cdot dy \qquad \text{wo} \qquad z = e^{-(x^2+y^2)} \qquad 6$$

das Volumen des von einer Fläche der Gleichung $z = e^{-(x^2+y^2)}$ begrenzten Körpers dar. Da nun z für alle Punkte der Ebene XY, welche vom Anfangspunkte denselben Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ haben, gleich wird, so ist dieser Körper durch Rotation um die Axe der Z entstanden, kann also auch als die Summe von zur Ebene der XY senkrechten Cylinderschalen des Volumens $2r\pi \cdot dr \cdot z$ betrachtet werden, so dass

$$V = \int_0^{\infty} 2r\pi \cdot z \cdot dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot 2r \cdot dr = -\pi \Big[e^{-r^2} \Big]_0^{\infty} = \pi \qquad 7$$

wird. Setzt man aber

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx \text{ so ist auch } U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y} \cdot dy \text{ also } U^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \cdot dy = V$$

folglich hat man mit Hilfe von 7

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = U = \sqrt{V} = \sqrt{\pi} \qquad 8$$

ein bestimmtes Integral, welches zuerst **Cauchy** auf diese leichte Weise erhalten haben soll.

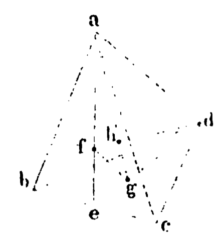
96. Der Punkt der mittlern Entfernungen. — Die (72) für die Schwerpunkte ebener Gebilde gefundenen Gesetze tragen sich grossenteils durch Beifügen der dritten Coordinate und allfälliges Ersetzen der Geraden durch eine Ebene unverändert auf den Raum über, — und manche andere Regeln lassen sich wenigstens mit Hilfe derselben leicht ableiten. So z. B. ergiebt sich, dass der Schwerpunkt einer Pyramide von der Spitze um $^3/_4$ ihrer Verbindungslinie mit dem Schwerpunkte der Basis absteht, — dass

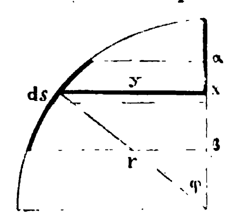
der Schwerpunkt eines Prismas die Verbindungslinie der Schwerpunkte seiner Grundflächen halbiert, — etc.[a]. — Es lassen sich aber auch allgemeine Regeln für die Bestimmung der Schwerpunkte von Flächen und Körpern aufstellen: Bezeichnen nämlich $x'\ y'\ z'$ die Coordinaten des Schwerpunktes einer Fläche O oder eines Körpers V, so hat man ganz allgemein nach der Definition des Punktes der mittlern Entfernungen

$$x' \cdot O = \iint x \cdot dO \qquad y' \cdot O = \iint y \cdot dO \qquad z' \cdot O = \iint z \cdot dO \qquad \mathbf{1}$$
$$x' \cdot V = \iiint x \cdot dV \qquad y' \cdot V = \iiint y \cdot dV \qquad z' \cdot V = \iiint z \cdot dV \qquad \mathbf{2}$$

und kann somit die Lösung der Aufgabe in allen Fällen auf einige Integrationen zurückführen[b].

Zu 96: *a.* Wenn man die Schwerpunkte g und f zweier Seiten eines Vierflachs mit den Gegenecken a und d verbindet, so erhält man offenbar zwei Schweraxen, in deren Durchschnittspunkt h der Schwerpunkt des ganzen Körpers liegen muss. Da nun $be = ec$, $ef = \frac{1}{3} ea$, $eg = \frac{1}{3} ed$, also $fg \parallel ad$, so hat man $gh : ha = gf : ad = ef : ea = 1 : 3$, also $ha = 3 \cdot gh$ oder $ha = \frac{3}{4} ag$, womit der ausgesprochene Satz für das Vierflach erwiesen ist, — also, da jede Pyramide in Vierflache gleicher Höhe zerlegbar ist, auch für die Pyramide. — *b.* Soll man z. B. den Schwerpunkt einer Kugelzone bestimmen, so weiss man zum voraus, dass er in die Senkrechte vom Kugelcentrum auf die bestimmenden Ebenen fällt, — und (85) dass $O = 2r\pi(\beta - \alpha)$, folglich $dO = 2r\pi \cdot dx$ ist. Man hat daher nach 1'





$$x' \cdot 2r\pi(\beta - \alpha) = \int_\alpha^\beta x \cdot 2r\pi \cdot dx = r\pi(\beta^2 - \alpha^2)$$

oder
$$x' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

d. h. es halbiert der Schwerpunkt der Kugelzone ihre Höhe.

97. Diskussion der Gleichungen zweiten Grades zwischen drei Variabeln. — Die kontinuierliche Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0 \qquad \mathbf{1}$$

stellt eine Fläche zweiten Grades vor und es ist daher eine solche im allgemeinen durch neun Punkte bestimmt. Setzt man $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, $z = z' + \gamma$ und nimmt α, β, γ so an, dass sie den Gleichungen

$$a\alpha + d\beta + e\gamma + g = b\beta + d\alpha + f\gamma + h = c\gamma + e\alpha + f\beta + k = 0 \qquad \mathbf{2}$$

genügen, so geht 1 in die Gleichung

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2dx'y' + 2ex'z' + 2fy'z' + m = 0 \qquad \mathbf{3}$$

über, in welcher nur gerade Dimensionen der Coordinaten vorkommen, so dass ihr auch der Punkt $(-x', -y', -z')$ genügt,

oder die Fläche zweiten Grades in dem neuen Anfangspunkte einen **Mittelpunkt** besitzt [a]. Setzt man in 3

$$x = A \cdot z + B \qquad y = C \cdot z + D \qquad 4$$

so erhält man für die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Fläche 2. Grades eine Gleichung 2. Grades, deren halbe Summe der Wurzeln für die Mitte der entsprechenden Sehne

$$z = -\frac{aAB + bCD + d(AD + BC) + eB + fD}{aA^2 + bC^2 + c + 2dAC + 2eA + 2fC} \qquad 5$$

giebt. Eliminiert man B und D aus den 4 und 5, d. h. geht man von der Geraden auf ein System paralleler Geraden über, so erhält man

$$x(aA + dC + e) + y(dA + bC + f) + z(eA + fC + e) = 0 \qquad 6$$

oder der Ort der Mitten aller parallelen Sehnen ist eine durch den Mittelpunkt gehende, sog. **diametrale Ebene,** in Beziehung auf welche die ebenfalls durch den Mittelpunkt gehende der parallelen Sehnen **konjugierte Axe** genannt wird. Wenn

$$A = \frac{aA + dC + e}{eA + fC + c} \qquad C = \frac{dA + bC + f}{eA + fC + c} \qquad 7$$

so stehen (93) Axe und diametrale Ebene zu einander senkrecht, und da bei Elimination von A aus den beiden 7 für C eine Gleichung 3. Grades erhalten wird, so hat eine Fläche 2. Grades mindestens Eine, vielleicht drei solcher Axen, die man als **Hauptaxen** bezeichnet. — Transformiert man nach 93 : 4 die Coordinaten nochmals und setzt zur Bestimmung von φ, ψ, θ die sich ergebenden Koeffizienten von xy, xz, yz gleich Null, was wieder auf eine Gleichung dritten Grades, also sicher auf mindestens Ein mögliches Wertsystem jener drei Grössen führt, — so geht 3 über in

$$\mathbf{A} \cdot x^2 + \mathbf{B} \cdot y^2 + \mathbf{C} \cdot z^2 = 1 \qquad \text{oder} \qquad \frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{c}^2} = 1 \qquad 8$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die sog. **Halbaxen** bezeichnen. Vergleicht man 8 mit 3, so findet man nach 6, dass nunmehr der Axe $x = A \cdot z$, $y = C \cdot z$ die konjugierte Ebene

$$\frac{A}{\mathfrak{a}^2} \cdot x + \frac{C}{\mathfrak{b}^2} \cdot y + \frac{1}{\mathfrak{c}^2} \cdot z = 0 \qquad 9$$

entspricht. Sucht man hienach successive, indem man $A = \infty$ und $C = 0$, oder $A = 0$ und $C = \infty$, oder $A = 0$ und $C = 0$ setzt, zu den Coordinatenaxen XYZ die konjugierten Ebenen, so findet man für sie der Reihe nach die Gleichungen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ der drei Ebenen YZ, XZ und XY, zu welchen jene senkrecht stehen, so dass sie Hauptaxen sind. — Verlegt man ferner den Anfangspunkt der Coordinaten in einen der Scheitel der Hauptaxe $2\mathfrak{a}$,

d. h. lässt man x in $x - a$ übergehen, so erhält man nach 8 als Scheitelgleichung der Flächen 2. Grades

$$x = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2p_1} + \frac{z^2}{2p_2} \quad \text{wo} \quad p_1 = \frac{b^2}{a} \quad p_2 = \frac{c^2}{a} \qquad \mathbf{10}$$

gesetzt wurde. — Die Flächen 2. Grades zerfallen hienach, je nachdem die Grössen α, β, γ endlich oder unendlich werden, d. h. je nachdem erstere einen zugänglichen Mittelpunkt haben oder nicht haben, in zwei Hauptklassen: Die erste Klasse wird durch 8 dargestellt und umfasst das sog.

Ellipsoid . . . . $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hyperboloid mit einem Mantel $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ **11**

Hyperboloid mit zwei Mänteln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Die zweite Klasse wird dagegen durch 10 für $a = \infty$ dargestellt und umfasst das sog.

Elliptische Paraboloid $x = \frac{y^2}{2p_1} + \frac{z^2}{2p_2}$

Hyperbolische Paraboloid $x = \frac{y^2}{2p_1} - \frac{z^2}{2p_2}$ **12**

so dass im ganzen bei den Flächen zweiten Grades fünf Arten unterschieden werden [b].

Zu 97: *a.* Aus den Bedingungsgleichungen 2 folgen

$$\alpha = 1/q\,[bcg - f^2g - cdh + efh + dfk - bek]$$
$$\beta = 1/q\,[gef - gcd - he^2 + hac + kde - kaf] \qquad \mathbf{13}$$
$$\gamma = 1/q\,[dfg - gbe - afh + deh + abk - d^2k]$$

wo $q = cd^2 - 2def - abc + be^2 + af^2$

ist, während in 3 $m = g\cdot\alpha + h\cdot\beta + k\cdot\gamma + 1$ **14**

eingeführt wurde. — *b.* Für eingehendere Untersuchungen muss auf die bereits citierten Specialschriften verwiesen werden; einzig das für uns besonders wichtige Ellipsoid und ein Specialfall desselben, das Sphäroid, werden unter den folgenden Nummern noch weiter zu behandeln sein.

98. Das Ellipsoid. — Setzt man in 97 : 1 eine der Coordinaten gleich Null, so erhält man für den Schnitt der zu ihr senkrechten Coordinatenebene, also, da das betreffende Coordinatensystem jede beliebige Lage zu der Fläche haben kann, auch für den Schnitt jeder Ebene, eine Gleichung 2. Grades; es ist also z. B. jeder ebene Schnitt eines Ellipsoides eine Linie 2. Grades, und zwar, da er notwendig eine geschlossene Linie sein muss, eine Ellipse. Wird das Ellipsoid auf ein Coordinatensystem bezogen,

dessen Axen mit seinen Hauptaxen zusammenfallen, so hat es (97 : 11) die Gleichung

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y^2}{\mathfrak{b}^2}+\frac{z^2}{\mathfrak{c}^2}=1 \qquad 1$$

und hieraus geht sofort hervor, dass die den drei Coordinatenebenen XY, XZ und YZ entsprechenden Schnittlinien der Reihe nach die Halbaxen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ haben. Nimmt ferner z einen konstanten Wert c an, so reduziert sich 1 auf

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}'^2}+\frac{y^2}{\mathfrak{b}'^2}=1 \quad \text{wo} \quad \mathfrak{a}'^2=\frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{c}^2}(\mathfrak{c}^2-c^2) \quad \mathfrak{b}'^2=\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{c}^2}(\mathfrak{c}^2-c^2) \quad \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{b}'}=\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \qquad 2$$

d. h. jeder zur XY parallelen Ebene entspricht ein Schnitt, welcher ihrem Schnitte ähnlich ist, — ein Satz, der offenbar auch auf die übrigen Coordinatenebenen ausgedehnt werden kann. — Da aus 1 durch Differentiation

$$\frac{x\cdot dx}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y\cdot dy}{\mathfrak{b}^2}+\frac{z\cdot dz}{\mathfrak{c}^2}=0 \quad \text{oder} \quad p=\frac{dz}{dx}=-\frac{x\cdot\mathfrak{c}^2}{z\cdot\mathfrak{a}^2} \quad q=\frac{dz}{dy}=-\frac{y\cdot\mathfrak{c}^2}{z\cdot\mathfrak{b}^2} \qquad 3$$

folgt, so erhält man (94 : 2)

$$z-z_1=-\frac{x_1\,\mathfrak{c}^2}{z_1\,\mathfrak{a}^2}(x-x_1)-\frac{y_1\,\mathfrak{c}^2}{z_1\,\mathfrak{b}^2}(y-y_1) \quad \text{oder} \quad \frac{x\cdot x_1}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y\cdot y_1}{\mathfrak{b}^2}+\frac{z\cdot z_1}{\mathfrak{c}^2}=1 \qquad 4$$

als Gleichung der das Ellipsoid im Punkte ($x_1\ y_1\ z_1$) tangierenden Ebene. — Da ferner 1 die Werte

$$x=\mathfrak{a}\cdot\mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}\,\psi \qquad y=\mathfrak{b}\cdot\mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Si}\,\psi \qquad z=\mathfrak{c}\cdot\mathrm{Co}\,\varphi \qquad 5$$

genügen, so erhält man, indem man ganz entsprechend wie früher (95) rechnet, $P\cdot Q'-Q\cdot P'=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\cdot\mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}\,\varphi$, und somit das Volumen des Ellipsoides

$$V=\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\int_{\psi=0}^{\psi=2\pi}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}\cdot\mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}^2\varphi\cdot d\varphi\cdot d\psi=\frac{4}{3}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}\cdot\pi \qquad 6$$

Überhaupt lassen sich die verschiedenen der früher erhaltenen allgemeinen Vorschriften verhältnismässig leicht auf das Ellipsoid anwenden [a].

Zu 98: *a.* Zwei Ellipsoide der Axen $\alpha>\beta>\gamma$, $\alpha'>\beta'>\gamma'$ und der Gleichungen

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \qquad \frac{x'^2}{\alpha'^2}+\frac{y'^2}{\beta'^2}+\frac{z'^2}{\gamma'^2}=1 \qquad 7$$

für welche $\alpha:\alpha'=\beta:\beta'=\gamma:\gamma'$ oder $\alpha^2-\alpha'^2=\beta^2-\beta'^2=\gamma^2-\gamma'^2$ 8

heissen **ähnlich** oder **homofokal**, und ihre Punkte (x y z) und (x' y' z') **korrespondierend**, wenn

$$x:x'=\alpha:\alpha' \qquad y:y'=\beta:\beta' \qquad z:z'=\gamma:\gamma' \qquad 9$$

Für korrespondierende Punkte homofokaler Ellipsoide besteht somit die Beziehung

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) =$$
$$= x^2\left(1 - \frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{\beta'^2}{\beta^2}\right) + z^2\left(1 - \frac{\gamma'^2}{\gamma^2}\right) = \alpha^2 - \alpha'^2 \qquad \mathbf{10}$$

und es ist somit die Differenz der Quadrate ihrer Abstände vom Mittelpunkte gleich der Differenz der Quadrate zweier entsprechender Halbaxen. — Korrespondieren den vom Mittelpunkte um ϱ und ϱ_1 abstehenden Punkten $(x\,y\,z)$ und $(x_1\,y_1\,z_1)$ eines Ellipsoides auf einem homofokalen Ellipsoide die Punkte $(x'\,y'\,z')$ und $(x_1'\,y_1'\,z_1')$ in den Abständen ϱ' und ϱ_1', so hat man nach 93:14 und unserer 9

$$\varrho \cdot \varrho_1' \cdot \mathrm{Co}(\varrho \cdot \varrho_1') = x x_1' + y y_1' + z z_1' = x' \cdot x_1 + y' \cdot y_1 + z' \cdot z_1 = \varrho' \cdot \varrho_1 \,\mathrm{Co}(\varrho', \varrho_1) \qquad \mathbf{11}$$

d. h. wenn man auf zwei homofokalen Ellipsoiden zwei beliebige Punkte wählt und sodann durch die ihnen korrespondierenden Punkte ersetzt, so wird dadurch das Produkt der Abstände in den Cosinus ihres Winkels nicht verändert. — Ist $\beta^2 = \alpha^2 + h$ und $\gamma^2 = \alpha^2 + k$, so ist nach 8'' offenbar auch $\beta'^2 = \alpha'^2 + h$ und $\gamma'^2 = \alpha'^2 + k$, und wenn somit ein Punkt $(\xi\,\upsilon\,\zeta)$ auf dem homofokalen Ellipsoide liegen soll, so muss nach 7' die Gleichung

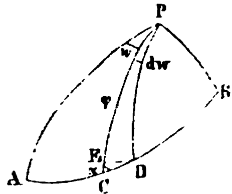
$$\xi^2 + \frac{\alpha'^2}{\alpha'^2 + h} \cdot \upsilon^2 + \frac{\alpha'^2}{\alpha'^2 + k} \cdot \zeta^2 = \alpha'^2 \qquad \mathbf{12}$$

bestehen, welche in Beziehung auf α'^2 vom dritten Grade ist und notwendig eine positive reelle Wurzel haben muss, da die Seite links, wenn man α'^2 von 0 bis ∞ zunehmen lässt, erst grösser und dann kleiner als die Seite rechts wird, — es also notwendig Einen Wert von α'^2 geben muss, welcher der Gleichheit genügt. Man kann also durch jeden Punkt Ein Ellipsoid legen, das zu einem gegebenen Ellipsoide homofokal ist und sogar mit Hilfe von 12 die Axen dieses Ellipsoides bestimmen. Ebenso kann man offenbar auch durch jeden Punkt ein ähnliches Ellipsoid legen.

99. Das Sphäroid. — In dem speciellen Falle, wo zwei Axen eines Ellipsoides, z. B. $2\mathfrak{a}$ und $2\mathfrak{b}$, einander gleich, somit alle zu ihrer Ebene parallelen Schnitte Kreise (Parallelkreise) des Radius $\mathfrak{a}$ und alle durch die dritte Axe geführten Schnitte (Meridiane) Ellipsen der Axen $2\mathfrak{a}$ und $2\mathfrak{c}$ sind, kann dasselbe offenbar als durch Rotation dieser Ellipse um $2\mathfrak{c}$ entstanden gedacht werden und es wird daher in diesem Falle **Rotationsellipsoid**, wohl auch (namentlich wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ wenig verschieden sind), **Sphäroid** genannt. Da wir später (419 u. f.) ein solches Sphäroid als Grundgestalt unserer Erde erkennen und (432—33) eine Reihe specieller Rechnungen auf demselben auszuführen haben werden, so wollen wir uns vorläufig auf die Bemerkung beschränken, dass man die kürzeste Verbindung zweier Punkte eines Sphäroides **geodätische Linie** genannt hat und dass diese die merkwürdige Eigenschaft besitzt, jeden Meridian unter einem Winkel (Azimut) so zu schneiden, dass dessen **Sinus dem Abstande des Durchschnittspunktes von der Rotationsaxe umgekehrt proportional** ist [a].

Zu 99: *a.* Ist AB eine beliebige Verbindungslinie zweier Punkte A und B einer Rotationsfläche, — sind PC und PD zwei einander nahe Meridiane, —

und ist PE = PD, also DE ein Parallel, dessen Radius mit r bezeichnet werden mag, während R der Radius von EC sein soll, so hat man offenbar successive



$$ds = CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = \sqrt{R^2 \cdot d\varphi^2 + r^2 dw^2}$$

$$s = \int U \cdot dw \quad \text{wo} \quad U = \sqrt{R^2 \cdot p^2 + r^2} \quad p = \frac{d\varphi}{dw} \qquad 1$$

Lassen wir nun φ in $\varphi + z$ übergehen, wo z eine willkürliche Funktion von w ist, welche für A und B verschwindet, so erhalten wir entsprechend für die neue Verbindung von A und B

$$s' = \int U' \cdot dw \qquad \text{und} \qquad p' = \frac{d(\varphi + z)}{dw} = p + \frac{dz}{dw}$$

während nach dem Taylor'schen Lehrsatze, wenn $U = F(\varphi, p)$ gesetzt wird,

$$U' = F\left(\varphi + z, p + \frac{dz}{dw}\right) = U + \frac{dU}{d\varphi} \cdot z + \frac{dU}{dp} \cdot \frac{dz}{dw} + \cdots$$

ist. Multipliziert man aber letztere Gleichheit beidseitig mit dw und integriert mit Hilfe von 1, so erhält man

$$s' - s = \int \frac{dU}{d\varphi} \cdot z \cdot dw + \int \frac{dU}{dp} \cdot dz + \cdots \qquad 2$$

Wenn nun s ein Minimum werden soll, so muss s' — s für jeden Wert von $\pm$ z einen positiven Wert erhalten; da man aber z willkürlich, folglich auch so klein annehmen kann, dass die Glieder der ersten Ordnung grösser werden als die Summe der übrigen, so folgt, dass ein Minimum nur eintreten kann, wenn die mit z ihr Zeichen wechselnden Glieder der ersten Ordnung verschwinden. Man hat demnach, da

$$d\left[\frac{dU}{dp} \cdot z\right] = \frac{dU}{dp} \cdot dz + z \cdot d\left(\frac{dU}{dp}\right) \quad \text{also} \quad \int \frac{dU}{dp} \cdot dz = \frac{dU}{dp} \cdot z - \int z \cdot d\left(\frac{dU}{dp}\right)$$

ist, für das Minimum

$$0 = \int \frac{dU}{d\varphi} \cdot z \cdot dw + \int \frac{dU}{dp} dz = \frac{dU}{dp} \cdot z + \int z \left[\frac{dU}{d\varphi} \cdot dw - d\left(\frac{dU}{dp}\right)\right] \qquad 3$$

Da aber z, und somit das erste Glied rechts, für beide Grenzen des Integrals verschwinden, sonst aber z willkürlich bleiben soll, so muss somit

$$0 = \frac{dU}{d\varphi} \cdot dw - d\left(\frac{dU}{dp}\right) \quad \text{oder} \quad 0 = \int \frac{dU}{d\varphi} \cdot dw - \frac{dU}{dp} \quad \text{oder} \quad \int dU = p \cdot \frac{dU}{dp}$$

oder

$$U = p \cdot \frac{dU}{dp} + \text{Const.} \qquad \text{folglich} \qquad \text{Const.} = U - p \cdot \frac{dU}{dp} \qquad 4$$

sein. Setzt man aber hier nach 1

$$U = \sqrt{R^2 \cdot p^2 + r^2} \qquad \text{und somit} \qquad \frac{dU}{dp} = \frac{R^2 p}{\sqrt{R^2 p^2 + r^2}}$$

so wird

$$\text{Const.} = \sqrt{R^2 p^2 + r^2} - \frac{R^2 p^2}{\sqrt{R^2 p^2 + r^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 p^2 + r^2}} \qquad 5$$

Da nun

$$\text{Tg}\,\alpha = \frac{ED}{EC} = \frac{r \cdot dw}{R \cdot d\varphi} = \frac{r}{p \cdot R} \qquad \text{also} \qquad p = \frac{r}{R} \cdot \text{Ct}\,\alpha$$

so folgt schliesslich

$$\text{Const.} = r^2 : \sqrt{R^2 \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot \text{Ct}^2\,\alpha + r^2} = r \cdot \text{Si}\,\alpha \qquad 6$$

d. h. es hat der ausgesprochene Satz für jede Rotationsfläche, also auch für das Sphäroid, statt. — Nachdem **Euler** die Beziehungen am Sphäroide in seiner

Abhandlung „Elémens de la Trigonométrie sphéroïdique (Mém. Berl. 1753, ausgeg. 1755)“ mit gewohnter Meisterschaft entwickelt hatte, widmete ihnen **Legendre**, der auch den Namen „geodätische Linie“ zuerst einführte, in dem „Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendant de la figure de la terre (Mém. Par. 1787), und der: Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroide (Mém. Par. 1806)“ neue Bearbeitungen. Vgl. ferner die Abhandlung „J. J. **Baeyer**, Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche. Berlin 1862 in 4.“, welcher ich bei obigen Rechnungen im wesentlichen folgte.

100. Die Flächen höhern Grades und die sog. Kurven von doppelter Krümmung. — Von der speciellen Betrachtung der Flächen höhern Grades und der nicht an eine Ebene gebundenen Raumkurven oder der sog. **Linien von doppelter Krümmung** muss hier, des beschränkten Raumes wegen, als von einem für uns abliegenden Abschnitte der Geometrie, Umgang genommen werden, — und ich beschränke mich auf folgendes: Lässt man in der eine Fläche vorstellenden Gleichung $F(x, y, z, w) = 0$ die Grösse w nach und nach andere und andere Werte annehmen, so erhält man eine Schar von Flächen, deren je zwei aufeinander folgende sich in einer Kurve, der sog. **Charakteristik**, schneiden werden, — die Gesamtheit aller dieser Kurven bildet die sog. **einhüllende** Fläche jener Schar. Ist speciell die gegebene Fläche eine Ebene, welche beständig einer Geraden parallel ist oder durch einen gegebenen Punkt geht, so heisst die einhüllende Fläche **cylindrisch** oder **konisch**; bei beiden sind die charakteristischen Kurven Gerade und es lassen sich daher beide, sowie überhaupt alle Flächen, welche sich als Ort einer Geraden denken lassen, deren zwei nächste Lagen derselben Ebene angehören, auf einer Ebene ausbreiten. Solche Flächen werden **developpabel** genannt, während dagegen für Flächen, welche dieser Bedingung nicht genügen, der populäre Ausdruck „wintsch“ oder **windschief** (gauche) in die Geometrie eingeführt worden ist [a].

Zu 100: *a.* Noch bemerkend, dass **Klügel** den Namen „windschief“ in Vorschlag gebracht haben soll, verweise ich im übrigen für diesen Abschnitt auf die bereits angeführten Lehrbücher der analytischen Geometrie und die citierten Specialschriften der **Clairaut**, **Gauss**, etc., welch' letztern ich noch „Marie-Charles **Meusnier** (Tours 1754 — Mainz 1793, wo ihm eine Kugel das Bein abriss; Genie-Oberst und Divisionsgeneral), Mémoire sur la courbure des surfaces (Sav. étrang. X von 1776), — Wilhelm **Schell** (Fulda 1826 geb.; Prof. math. Marburg), Theorie der Kurven von doppelter Krümmung. Leipzig 1859 in 8., — etc.“ beifüge.

101. Begriff der Chorographie. — Als eine wichtige Anwendung der Geometrie mag sich an dieselbe noch eine kurze Darstellung der Kartenprojektionslehre oder der sog. **Chorographie** [a] anschliessen und hier zunächst ein Begriff derselben gegeben werden: Seit den ältesten Zeiten ist die Aufgabe, beliebige Teile der Erde

oder der scheinbaren Himmelskugel auf einer Ebene darzustellen, in der Weise in Angriff genommen worden, dass man zunächst das System der dem abzubildenden Teile zugehörigen Meridiane und Parallelkreise zu verzeichnen suchte und dann erst in dieses sog. **Kartennetz** den eigentlichen Detail eintrug [b]. Da sich nun aber weder Kugel noch Rotationsellipsoid auf eine Ebene ausbreiten lassen, so bleiben zu besagtem Zwecke nur drei wesentlich verschiedene Wege offen: **Entweder** verwendet man, um die nötigen Punkte oder Liniensysteme abzubilden, die gewöhnlichen perspektivischen oder Polarprojektionen, — **oder** man substituiert der abzubildenden Fläche durch Approximation eine abwickelbare, z. B. eine cylindrische oder konische Fläche, — **oder** man sucht endlich ein speciell dem gerade vorliegenden Zwecke konvenables Verfahren auf, durch welches ein passendes Bild, namentlich ein solches erhalten werden kann, bei welchem die Abbildung wenigstens in ihren kleinsten Teilen, sei es dem abgebildeten ähnlich oder **konform** ist, sei es in einem bestimmten Flächenverhältnisse zu demselben steht oder als **equivalent** betrachtet werden darf. Wir werden in dem folgenden diese sämtlichen drei Wege verfolgen, wenn auch zunächst die perspektivischen Projektionen, als die für uns wichtigsten, behandelt werden sollen [c].

Zu 101: *a.* Chorographie ist aus χῶρος = Land, und γράφειν = schreiben, zusammengesetzt. — *b.* Der noch jetzt für eine Kartensammlung gebräuchliche Name **Atlas** wurde durch **Mercator** eingeführt; früher wurden entsprechende Werke als „Theatrum orbis, — Speculum mundi, — etc.“ bezeichnet. Bemerkenswert ist auch, dass **Mercator** auf jeder seiner Karten die dafür angewandte Projektionsart angab, — ein Verfahren, das leider die neuere Zeit selten mehr anwendet. — *c.* In älterer Zeit standen den Karten sog. **Itinerarien** zur Seite, welche sich wesentlich auf Angabe der Verkehrsstrassen und Distanzen beschränkten. Am berühmtesten war ein, wahrscheinlich in der zweiten Hälfte des 4. Jahrhunderts von einem Römer **Castorius** verfertigtes Itinerarium, das gewöhnlich nach seinem spätern Besitzer Konrad **Peutinger** (Augsburg 1558 — ebenda 1614; Ratschreiber in Augsburg) benannt wird; vgl. „Konr. **Miller,** Die Weltkarte des Castorius, genannt die Peutinger'sche Tafel. Ravensburg 1888 in 8. (Die Tafel in $^2/_3$ des Originales hat 447^{cm} Länge auf 22^{cm} Höhe.)“

102. Die sog. perspektivischen Projektionen. — Unter Voraussetzung der Kugelgestalt ist die sog. **perspektivische** Projektion, bei welcher jeder Punkt da verzeichnet wird, wo ein vom **Auge** (Pol) nach ihm gezogener Strahl die gewählte Bildebene schneidet, mit Recht eine der beliebtesten. Es wird dabei in der Regel angenommen, dass das um a vom Auge abstehende Kugelcentrum in die Senkrechte von ersterm auf die um b entfernte Bildebene falle und die Ebene des gewählten Ausgangsmeridianes durch das Auge gehe, somit ebenfalls zu der Bildebene senkrecht

stehe. Hat nun ein Punkt M die Länge λ und Breite φ und bezieht man sein Bild m auf ein Coordinatensystem, dessen Axe mit dem Durchschnitte der Ebene des Ausgangsmeridianes und der Bildebene zusammenfällt und dessen Anfangspunkt die Projektion des Centrums auf die Bildebene, der sog. **Augpunkt**, ist, so ergeben sich die Formeln

$$x = b \cdot \frac{Co\,\varphi \cdot Co\,\alpha \cdot Co\,\lambda - Si\,\varphi \cdot Si\,\alpha}{a + Si\,\varphi \cdot Co\,\alpha + Co\,\varphi \cdot Si\,\alpha \cdot Co\,\lambda} \qquad \mathbf{1}$$
$$y = b \cdot \frac{Co\,\varphi \cdot Si\,\lambda}{a + Si\,\varphi \cdot Co\,\alpha + Co\,\varphi \cdot Si\,\alpha \cdot Co\,\lambda}$$

wo α den vom Centrum der Kugel gesehenen Abstand ihres Poles vom Augpunkte bezeichnet, — und es können daher die Coordinaten des Bildes jedes gegebenen Punktes leicht berechnet werden[a]. — Eliminiert man φ aus den beiden 1 und setzt

$$Si\,\alpha \cdot Si\,\lambda = p \qquad Co\,\alpha \cdot Si\,\lambda = q \qquad \mathbf{2}$$

so erhält man als Gleichung der **Abbildung des Meridianes** der Länge λ

$$A y^2 + B x y + C x^2 + D y + E x + F = 0 \qquad \mathbf{3}$$

wo

$$A = a^2 (1 - q^2) - Co^2 \lambda \qquad C = a^2 Si^2 \lambda - q^2 \qquad E = -2 b p q \qquad \mathbf{4}$$
$$B = 2 (1 - a^2) \cdot q \cdot Co\,\lambda \qquad D = 2 b p \cdot Co\,\lambda \qquad F = -b^2 p^2$$

Es stellen sich also die Meridiane als Linien des 2. Grades dar, und zwar erhält man (73), wenn noch die Hilfsgrössen

$$G = B^2 - 4 A C = 4 a^2 p^2 (1 - a^2 - p^2)$$
$$H = B D E - A E^2 - C D^2 = -4 a^2 b^2 p^4 (1 - p^2) \qquad \mathbf{5}$$
$$K = \sqrt{(A - C)^2 + B^2} = (a^2 - 1)(q^2 + Co^2 \lambda)$$
$$r^2 = a^2 - (1 - p^2)$$

eingeführt werden, je nachdem G negativ, Null oder positiv wird, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wobei

$$\mathfrak{A} = \frac{2 A E - B D}{G} = \frac{b \cdot p \cdot q}{r^2} \qquad \mathfrak{B} = \frac{2 C D - B E}{G} = -\frac{b p \cdot Co\,\lambda}{r^2} \qquad \mathbf{6}$$

Abscisse und Ordinate des Mittelpunktes geben, —

$$\mathfrak{a} = \sqrt{\frac{2 (H - F G)}{G (A + C - K)}} = \frac{b}{r} \qquad \mathfrak{b} = \sqrt{\frac{2 (H - F G)}{G (A + C + K)}} = \frac{a \cdot b \cdot p}{r^2} \qquad \mathbf{7}$$

die grosse und kleine Halbaxe, —

$$P = \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}} = a^2 \cdot p^2 \cdot \frac{b}{r^3} \qquad E = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{(a^2 - 1)(1 - p^2)} \qquad \mathbf{8}$$
$$Q = \mathfrak{a} (1 - E) = \frac{b}{r^2} \left[r - \sqrt{(a^2 - 1)(1 - p^2)} \right]$$

Parameter, Verhältnis der Excentricität und Periheldistanz, — und endlich

$$w = Atg \frac{A - C - K}{B} = Atg\, q \cdot Se\,\lambda = \tfrac{1}{2} Atg \frac{2 q \cdot Co\,\lambda}{Co^2 \lambda - q^2} \qquad \mathbf{9}$$

den Winkel der grossen Axe mit der Abscissenaxe [b]. — Eliminiert man dagegen λ aus den beiden 1 und setzt

$$m'^2 = \mathrm{Co}(\varphi + \alpha) \cdot \mathrm{Co}(\varphi - \alpha) \qquad p' = a \cdot \mathrm{Co}\,\alpha + \mathrm{Si}\,\varphi$$
$$n'^2 = [a + \mathrm{Si}(\varphi + \alpha)]\,[a + \mathrm{Si}(\varphi - \alpha)] \qquad q' = a \cdot \mathrm{Si}\,\varphi + \mathrm{Co}\,\alpha \qquad \mathbf{10}$$

so erhält man für die **Abbildung des Parallels** der Breite φ die Gleichung

$$A' \cdot y^2 + B' \cdot xy + C' \cdot x^2 + D' \cdot y + E' \cdot x + F' = 0 \qquad \mathbf{11}$$

wo

$$A' = p'^2 \qquad B' = 0 \qquad C' = n'^2 \qquad D' = 0$$
$$E' = 2\,b\,q' \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \qquad F' = -\,b \cdot m'^2 \qquad \mathbf{12}$$

Es stellen sich also auch die Parallelkreise als Linien des zweiten Grades dar, und zwar, da für sie entsprechend 5

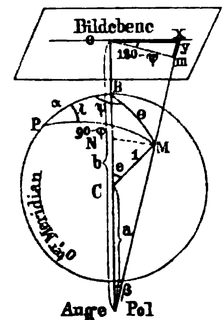
$$G' = -\,4\,p'^2 \cdot n'^2 \qquad H' = -\,4\,b^2 \cdot p'^2 \cdot q'^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,\alpha \qquad K' = p'^2 - n'^2 \qquad \mathbf{13}$$

werden, in der Regel als Ellipsen, und nur wenn $\alpha > \varphi$ und zugleich $a \overline{\overline{<}} \mathrm{Si}(\alpha - \varphi)$, also n'^2 Null oder negativ wird, als Parabeln oder Hyperbeln, wobei entsprechend 6 bis 9

$$\mathfrak{A}' = -\frac{b\,q' \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}{n'^2} \qquad \mathfrak{B}' = 0 \qquad \mathfrak{a}' = \frac{b\,p' \cdot \mathrm{Co}\,\varphi}{n'^2} \qquad \mathfrak{b}' = \frac{b \cdot \mathrm{Co}\,\varphi}{n'}$$
$$P' = \frac{b \cdot \mathrm{Co}\,\varphi}{p'} \qquad E' = \sqrt{1 - \frac{n'^2}{p'^2}} \qquad \mathrm{Tg}\,w' = \frac{0}{0} \qquad \mathrm{Tg}\,2w' = 0 \qquad w' = 0 \qquad \mathbf{14}$$

werden [c].

Zu 102: *a.* Aus der beistehenden Figur ergeben sich, sozusagen fast unmittelbar, die Beziehungen



$$x = -\,b \cdot \mathrm{Tg}\,\beta \cdot \mathrm{Co}\,\psi \qquad y = b \cdot \mathrm{Tg}\,\beta \cdot \mathrm{Si}\,\psi$$
$$\mathrm{Tg}\,\beta = \frac{MN}{PN} = \frac{\mathrm{Si}\,\theta}{a + \mathrm{Co}\,\theta} \qquad \mathrm{Si}\,\theta \cdot \mathrm{Si}\,\psi = \mathrm{Si}\,\lambda \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \qquad \mathbf{15}$$
$$\mathrm{Si}\,\theta \cdot \mathrm{Co}\,\psi = \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,\alpha - \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\lambda$$
$$\mathrm{Co}\,\theta = \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,\alpha + \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\lambda$$

aus deren Kombination die 1 hervorgehen. — *b.* Aus den beiden 1 folgt, dass

$$\frac{x}{y} = \frac{\mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\lambda - \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}{\mathrm{Si}\,\lambda} \qquad \mathbf{16}$$

während die zweite derselben

$$a^2 y^2 (1 + \mathrm{Tg}^2\,\varphi) = [\,b \cdot \mathrm{Si}\,\lambda - y \cdot \mathrm{Si}\,\alpha\,\mathrm{Co}\,\lambda - y\,\mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi\,]^2$$

ergiebt. Eliminiert man aber $\mathrm{Tg}\,\varphi$ aus diesen beiden Ausdrücken, so ergeben sich, unter Benutzung der 2, die 3 und 4. — *c.* Quadriert man den Quotienten der beiden 1 und führt sodann den aus 1' folgenden Wert von $\mathrm{Co}\,\lambda$ unter Berücksichtigung der 10 ein, so erhält man die 11 und 12.

103. Die stereographische Projektion. — Wird bei der perspektivischen Projektion das Auge an die Kugel herangerückt, d. h. $a = 1$ und somit

$$r = p = \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\lambda \qquad n' = p' = q' = \mathrm{Co}\,\alpha + \mathrm{Si}\,\varphi \qquad \mathbf{1}$$

angenommen, so ziehen sich die allgemeinen Formeln (102) in

$$\mathfrak{A} = \mathrm{b} . \mathrm{Ct}\,\alpha \quad \mathfrak{B} = -\mathrm{b} \cdot \mathrm{Ct}\,\lambda \cdot \mathrm{Cs}\,\alpha \quad \mathfrak{a} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{p}} = \mathfrak{b} \quad \mathrm{Tg}\,\mathrm{w} = \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\lambda$$

$$\mathfrak{A}' = -\frac{\mathrm{b} . \mathrm{Si}\,\alpha}{\mathrm{p}'} \quad \mathfrak{B}' = 0 \quad \mathfrak{a}' = \frac{\mathrm{b} \cdot \mathrm{Co}\,\varphi}{\mathrm{p}'} = \mathfrak{b}' \quad \mathrm{w}' = 0 \qquad \mathbf{2}$$

zusammen. Es folgt hieraus, dass sich in diesem Falle, wo die Projektion **stereographisch** heisst, alle Meridiane und alle Parallele, somit, da jeder grösste Kreis als Meridian und jeder kleine Kreis als Parallel gedacht werden kann, überhaupt jeder Kugelkreis wieder als Kreis abbildet. Ferner lässt sich leicht zeigen, dass der Winkel zweier Meridiane durch das Projizieren nicht verändert wird, auch Meridiane und Parallele nach wie vor zu einander senkrecht stehen [a], — dass die stereographische Abbildung dem Abgebildeten konform ist [b], — und dass sie überhaupt teils im allgemeinen, teils in den besonders wichtigen Fällen, wo $\alpha = 0$ (Polar- oder Equatoreal-Projektion), $90 - \varphi$ (Zenital- oder Horizontal-Projektion), oder 90^0 (Meridian-Projektion) ist [c], eine Reihe von Eigenschaften in sich vereinigt, welche sie mit Recht zu einer der häufigst angewandten Projektionen gemacht haben [d].

Zu 103: *a.* Um den Winkel zu bestimmen, unter welchem sich zwei ihrer Grösse und Lage nach gegebene Kreise schneiden, erhält man aus

$$\mathrm{d}^2 = \mathrm{r}^2 + \varrho^2 - 2\,\mathrm{r}\,\varrho\,\mathrm{Co}\,\mu$$
$$\mathrm{d}^2 = (\alpha - \mathrm{a})^2 + (\beta - \mathrm{b})^2$$

durch Elimination von d die Formel

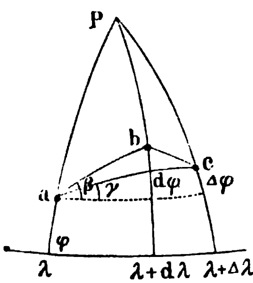
$$\mathrm{Co}\,\mu = \frac{\mathrm{r}^2 + \varrho^2 - [(\alpha - \mathrm{a})^2 + (\beta - \mathrm{b})^2]}{2\,\mathrm{r}\,\varrho} \qquad \mathbf{3}$$

Wendet man diese auf die stereographische Abbildung zweier Meridiane der Längen λ_1 und λ_2 an, so erhält man mit Hilfe von 2

$$\mathrm{Co}\,\mu_1 = \frac{\mathrm{Si}^2\lambda_1 + \mathrm{Si}^2\lambda_2 - (\mathrm{Co}\,\lambda_1\,\mathrm{Si}\,\lambda_2 - \mathrm{Si}\,\lambda_1\,\mathrm{Co}\,\lambda_2)^2}{2\,\mathrm{Si}\,\lambda_1\,\mathrm{Si}\,\lambda_2} = \mathrm{Co}(\lambda_1 - \lambda_2) \quad \text{oder} \quad \mu_1 = \lambda_1 - \lambda_2$$

Wendet man sie dagegen auf einem Meridian der Länge λ und einen Parallel der Breite φ an, so ergiebt sich

$$\mathrm{Co}\,\mu_2 = \mathrm{Si}\,\lambda \cdot \frac{(\mathrm{Co}\,\alpha + \mathrm{Si}\,\varphi)^2 + \mathrm{Co}^2\varphi \cdot \mathrm{Si}^2\alpha - (1 + \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\varphi)^2}{2\,\mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,\alpha\,(\mathrm{Co}\,\alpha + \mathrm{Si}\,\varphi)} = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 90^0$$



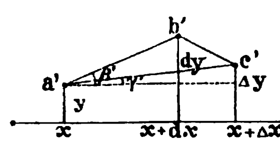
womit die ausgesprochenen Sätze, welche nach **Halley** (Phil. Tr. 1695) schon **Hooke** und **Moivre** gekannt haben sollen, bewiesen sind. — *b.* Sind λ und φ die Coordinaten eines Kugelpunktes a, so stellen $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ und $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ einen ihm benachbarten Punkt b vor, und es wird b nach seiner relativen Lage gegen a und dessen Parallel offenbar sehr angenähert durch

$$\mathrm{ab}^2 = \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\lambda^2 \cdot \mathrm{Co}^2\varphi \qquad \mathrm{Tg}\,\beta = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda \cdot \mathrm{Co}\,\varphi} \qquad \mathbf{4}$$

dargestellt. Ist c ein anderer benachbarter Punkt der Coordinaten $\lambda + \Delta\lambda$ und $\varphi + \Delta\varphi$, so hat man entsprechend

$$ac^2 = \Delta\varphi^2 + \Delta\lambda^2 \cdot Co^2\varphi \qquad Tg\,\gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda \cdot Co\,\varphi} \qquad \mathbf{5}$$

und es ist die Gestalt des Dreieckes bac durch das Verhältnis ab : ac und den Winkel $bac = \beta - \gamma$ vollständig bestimmt. Bezeichnen ferner a' b' c' die Abbildungen der drei Punkte a b c auf einer Ebene und sind $x, y;\ x + dx,\ y + dy;\ x + \Delta x,\ y + \Delta y$ die Coordinaten dieser Abbildungen, so hat man offenbar die Beziehungen



$$a'b'^2 = dx^2 + dy^2 \qquad a'c'^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad Tg\,\beta' = \frac{dy}{dx} \qquad Tg\,\gamma' = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \mathbf{6}$$

wo die Gestalt der Abbildung durch das Verhältnis a' b' : a' c' und den Winkel $b'a'c' = \beta' - \gamma'$ bestimmt ist. Wenn daher für eine gewisse Projektion

$$a'b' : ab = a'c' : ac \qquad \text{und} \qquad \beta' - \gamma' = \beta - \gamma \qquad \mathbf{7}$$

wird, so ist offenbar die Abbildung in ihren kleinsten Teilen dem Abgebildeten gleichförmig oder **konform.** Dabei bestimmt

$$M = a'b' : ab \qquad \mathbf{8}$$

die **Vergrösserung** der Abbildung oder deren **Masstab** an der betreffenden Stelle, und es wird daher der Masstab für die ganze Karte konstant sein oder wechseln, je nachdem M von λ und φ unabhängig oder eine Funktion dieser Grössen ist. — Durch Differentiation der 102 : 1 erhält man nun für perspektivische Projektionen

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{b}{n^2} \cdot \left[Co\,\varphi \cdot Si\,\lambda\,(a \cdot Co\,\alpha + Si\,\varphi)\,d\lambda + (Co\,\lambda + a \cdot m)\,d\varphi\right] \\ dy &= \frac{b}{n^2} \cdot \left[(a\,Co\,\lambda + m)\,Co\,\varphi \cdot d\lambda - (a \cdot Si\,\varphi + Co\,\alpha)\,Si\,\lambda \cdot d\varphi\right] \end{aligned} \qquad \mathbf{9}$$

$$\text{wo} \quad m = Co\,\varphi \cdot Si\,\alpha + Si\,\varphi \cdot Co\,\alpha \cdot Co\,\lambda \qquad n = a + Co\,\alpha\,Si\,\varphi + Si\,\alpha\,Co\,\varphi\,Co\,\lambda \qquad \mathbf{10}$$

ist, und hieraus folgt mit Hilfe von 6'

$$a'b'^2 = \frac{b^2}{n^4}\left[\begin{aligned} &[(a \cdot Co\,\lambda + m)^2 \cdot Co^2\varphi + (a \cdot Co\,\alpha + Si\,\varphi)^2 \cdot Co^2\varphi \cdot Si^2\lambda]\,d\lambda^2 + \\ &[(a \cdot Si\,\varphi + Co\,\alpha)^2 \cdot Si^2\lambda + (Co\,\lambda + a \cdot m)^2]\,d\varphi^2 + \\ &2\,(a^2 - 1)\,(m \cdot Co\,\alpha - Si\,\varphi \cdot Co\,\lambda)\,Co\,\varphi \cdot Si\,\lambda \cdot d\varphi \cdot d\lambda \end{aligned}\right] \qquad \mathbf{11}$$

Für die stereographische Projektion oder $a = 1$ hat man somit

$$a'b'^2 = \frac{b^2(p^2 + q^2 Si^2\lambda)}{n^4} \cdot \left[d\varphi^2 + d\lambda^2 \cdot Co^2\varphi\right] \quad \text{wo } p = m + Co\,\lambda,\ q = Co\,\alpha + Si\,\varphi \qquad \mathbf{12}$$

oder, da in diesem Falle $p^2 + q^2 Si^2\lambda = n^2$ wird, und anderseits 4 besteht,

$$a'b' = \frac{b}{n} \cdot ab \qquad \mathbf{13}$$

Anderseits hat man für $a = 1$ nach 6 mit Hilfe von 9, 12, 4, 5

$$Tg\,\beta' = -\frac{p - q \cdot Si\,\lambda \cdot Tg\,\beta}{q \cdot Si\,\lambda + p \cdot Tg\,\beta} \qquad Tg\,\gamma' = -\frac{p - q \cdot Si\,\lambda \cdot Tg\,\gamma}{q \cdot Si\,\lambda + p \cdot Tg\,\gamma}$$

$$Tg\,(\beta' - \gamma') = \frac{Tg\,\beta' - Tg\,\gamma'}{1 + Tg\,\beta' \cdot Tg\,\gamma'} = \frac{(p^2 + q^2 Si^2\lambda)(Tg\,\beta - Tg\,\gamma)}{(p^2 + q^2 Si^2\lambda)(1 + Tg\,\beta \cdot Tg\,\gamma)} = Tg\,(\beta - \gamma) \qquad \mathbf{14}$$

Es sind also die beiden Bedingungen 7 wirklich erfüllt und damit die Behauptung erwiesen. Die Vergrösserung endlich ist nach 8, 13, 10 und 102 : 15

$$M = \frac{b}{n} = \frac{b}{1 + Co\,\theta} = \frac{b}{2}\,Se^2\,\frac{\theta}{2} \qquad \mathbf{15}$$

und wechselt daher mit θ. Wird, wie gewöhnlich, $b = 1$ angenommen, so schwankt der Masstab von $\theta = 0$ bis $\theta = 90^0$ von $1/2$ bis 1, und wird erst erheblich grösser, wenn man noch einen beträchtlichen Teil der unterhalb der Bildebene liegenden Halbkugel mit in die Darstellung einzubeziehen nötig hat. — *c.* Die Übertragung der 2 auf die erwähnten speciellen Fälle und die sich daran anschliessenden weitern Folgerungen bieten keine Schwierigkeiten dar, und überdies werden wir noch in 360 Gelegenheit erhalten, darauf zurückzukommen und auch von den konstruktiven Methoden der ältern Zeit Kenntnis zu nehmen. — *d.* Dem Namen nach soll die stereographische Projektion zuerst bei François **Aguillon** (Brüssel 1566 — Antwerpen 1617; Jesuit und Prof. math. Antwerpen) in seinen „Opticorum libri VI. Antwerpiæ 1613 in fol." vorkommen; dagegen wurde sie schon (360) durch **Hipparch** zur Konstruktion von Planisphärien und sodann durch **Mercator** und Guillaume **Postel** (Dolerie in der Normandie 1510 — Paris 1581; Prof. math. Paris) zur Darstellung der Hemisphären der Erde angewandt. Eine erste, etwas eingehende Theorie derselben findet sich in „S. **Klügel**, Geometrische Entwicklung der Eigenschaften der stereographischen Projektion. Berlin 1788 in 8.", — während dagegen die Theorie der konformen Abbildungen namentlich durch **Gauss** in seiner Abhandlung „Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird (Schumachers astron. Abh. III von 1825)" gegeben wurde.

104. Die orthographische Projektion. — Wird bei der perspektivischen Projektion das Auge ins Unendliche entfernt, d. h. $a = \infty = b$ angenommen, so erhält man eine sog. **orthographische** Projektion, für welche somit (102) die Beziehungen

$$\mathfrak{A} = 0 = \mathfrak{B} \quad \mathfrak{a} = 1 \quad \mathfrak{b} = \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\lambda \quad P = \mathrm{Si}^2\alpha \cdot \mathrm{Si}^2\lambda \quad \mathrm{Tg}\,w = \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\lambda$$
$$\mathfrak{A}' = -\mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\varphi \quad \mathfrak{B}' = 0 \quad \mathfrak{a}' = \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \quad \mathfrak{b}' = \mathrm{Co}\,\varphi \qquad \mathbf{1}$$
$$P' = \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Se}\,\alpha \quad w = 0$$

bestehen, so dass sich im allgemeinen sowohl die Meridiane als die Parallele in Ellipsen abbilden. Es ist daher diese Projektion, abgesehen von Vereinfachungen darbietenden speciellen Fällen ($\alpha = 0$, 90), da sie mühsamer ist, ohne dieselben Vorteile zu gewähren, viel weniger beliebt als die vorhergehende [a].

Zu 104: *a.* Am meisten wurde die Meridian-Projektion ($\alpha = 90^0$) benutzt, doch auch diese weniger für Karten, als zur Erstellung von Hilfsnetzen. Namentlich erstellte sich **Lacaille** (vgl. Bodes Erläuterungen von 1793) mit ihrer Hilfe einen sog. **Reduktionsrahmen**, mit welchem er verschiedene Aufgaben über Auf- und Untergang, Reduktion von Monddistanzen, etc., zu lösen wusste. — Für die Verwendung dieser und anderer perspektivischer Projektionen auf die graphische Lösung sphärischer Dreiecke vgl. 178 : a.

105. Die centrale Projektion. — Wird endlich bei der perspektivischen Projektion das Auge in das Centrum der Kugel versetzt, d. h. $a = 0$ angenommen, so erhält man die sog. **centrale** Projektion, für welche somit (102), wenn überdies $b = 1$ ange-

nommen und zur Abkürzung

$$p = \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\lambda \qquad r^2 = p^2 - 1 \qquad n^2 = \mathrm{Si}\,(\varphi + \alpha) \cdot \mathrm{Si}\,(\varphi - \alpha) \qquad \mathbf{1}$$

gesetzt wird, die Beziehungen

$$\mathfrak{A} = \frac{p \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\lambda}{r^2}, \quad \mathfrak{B} = -\frac{p \cdot \mathrm{Co}\,\lambda}{r^2}, \quad \mathfrak{a} = \frac{1}{r}, \quad \mathfrak{b} = 0, \quad P = 0, \quad \mathrm{Tg}\,w = \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\lambda \qquad \mathbf{2}$$

$$\mathfrak{A}' = -\frac{\mathrm{Si}\,2\alpha}{2n^2}, \quad \mathfrak{B}' = 0, \quad \mathfrak{a}' = \frac{\mathrm{Si}\,2\varphi}{2n^2}, \quad \mathfrak{b}' = \frac{\mathrm{Co}\,\varphi}{n}, \quad P' = \mathrm{Ct}\,\varphi, \quad w' = 0$$

bestehen. Da r^2 negativ und somit $\mathfrak{a}$ imaginär, so würden sich die Meridiane als Hyperbeln abbilden, fallen aber wegen $\mathfrak{b} = 0$ mit Geraden zusammen, welche mit der Abscissenaxe den Winkel w einschliessen; die Parallele stellen sich für $\alpha = 0^\circ$ als Kreise, für $\alpha < \varphi$ als Ellipsen, für $\alpha = \varphi$ als Parabeln, und für $\alpha > \varphi$ als Hyperbeln dar. — Die centrale Projektion, welche wohl auch **gnomonische** genannt wird, steht zwar in manchen Beziehungen ebenfalls gegen die stereographische weit zurück; aber anderseits hat sie auch Specialeigenschaften, welche sie dennoch in vielen Fällen zur Anwendung empfehlen: **Erstens** stellt sie offenbar die Kugelfläche wirklich so dar, wie sie von ihrem Mittelpunkte aus erscheint, was für Darstellung der scheinbaren Himmelskugel von grosser Bedeutung ist; **zweitens** bilden sich bei ihr, da die Ebene jedes grössten Kreises durch das Auge geht, nicht nur die Meridiane, sondern überhaupt alle Hauptkreise als Gerade ab, — es stellt sich also die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugel auch durch die kürzeste Verbindung ihrer Abbildungen auf der Ebene dar, — und wenn sich durch drei oder mehr Punkte auf der Kugel ein grösster Kreis legen lässt, so fallen auch ihre Abbildungen in eine Gerade, was z. B. für Anwendung der Alignements-Methode (389—90) offenbar von grösster Wichtigkeit ist [a].

Zu 105: *a.* Allerdings ist neben diesen vorzüglichen Eigenschaften nicht zu übersehen, dass bei der centralen Projektion, wie man auch die Bildebene legen mag, nur die halbe Kugel abgebildet werden kann, — dass schon für letzteres die Bildebene bis ins Unendliche ausgedehnt werden sollte, was sich praktisch auch nicht gut ausführen lässt, — und überdies begreiflich die äussern Teile ganz auseinander gerissen werden. Man hat jedoch diesen Übelständen dadurch abzuhelfen gewusst, dass man der Einen Bildebene eine Folge von Bildebenen substituierte: Schon Christoph Grienberger oder **Grünberger** (Hall im Tyrol 1561 — Rom 1636; Jesuit und Prof. math. Rom) soll in seiner „Prospectiva nova cœlestis. Romæ 1612 in 4." einen betreffenden Vorschlag gemacht haben, — und Ignace-Gaston **Pardies** (Pau 1636 — Paris 1673; Jesuit; erst Prof. math. Pau, dann Prof. rhet. Paris) projizierte in seiner „Globi cœlestis in tabulas planas redacti descriptio. Opus posthumum. Parisiis 1674 in fol." die Kugel wirklich auf die sechs Seiten eines sie tangierenden Würfels. Noch später wurden ähnliche Methoden wiederholt zur Konstruktion von Erd-

und Himmelskarten benutzt, — ja noch vor wenig Jahren schlug Elie de **Beaumont** (Canon 1798 — Paris 1874; Prof. geol. und Sekretär der Akademie zu Paris) vor, die Erde zu geologischen Zwecken auf einem Pentagon-Dodekaeder abzubilden.

106. Einige andere Projektionsarten. — Da sich nur eine schmale equatoreale Zone der Kugel mit einer erträglichen Annäherung durch eine cylindrische Fläche ersetzen lässt, dagegen die dadurch erhaltenen sog. **Plattkarten**, deren Netz offenbar aus zwei zu einander senkrechten Systemen von Parallelen besteht, sehr leicht konstruierbar und benutzbar sind und namentlich für Seekarten noch andere grosse Vorteile darbieten [a], so entstand schon frühe die Aufgabe, als Surrogate **cylindrischer** Projektionen, Karten zu entwerfen, bei welchen die Vorteile blieben und die Nachteile beschränkt waren. Sie wurde zunächst in der Weise zu lösen versucht, dass man das Verhältnis der Längen- und Breitengrade des Parallelnetzes der mittlern Breite der Karte entsprechen liess [b], — dann durch Gerhard **Mercator** [c] mit durchschlagendem Erfolge und wirklich bestmöglichst gelöst, indem er „die Breitengrade in demselben Verhältnisse wachsen liess, in welchem der Equator zu dem betreffenden Parallel steht“ [d]. — Ebensogut wie der Cylinder an eine equatoreale, schliesst sich an irgend eine andere Zone der Mantel eines sie in ihrer mittlern Breite tangierenden Kegels an, bei dessen Abwicklung die Parallele in konzentrische Kreisbogen übergehen, während die Meridiane mit Radien zusammenfallen [e]. Aber auch diese **konischen** Projektionen genügen nur für sehr schmale Zonen, so dass auch da wieder im Verlaufe der Zeit verschiedene und zum Teil nicht unbedeutende Modifikationen beliebt wurden [f]. Es muss jedoch hier für weitern Detail, und die nicht unbedeutende Anzahl noch ganz anderer Vorschläge für die Entwerfung von Karten, auf die Speciallitteratur verwiesen werden [g].

Zu 106: *a.* Bei den Seefahrern waren von jeher die Plattkarten besonders darum beliebt, weil sich auf ihnen die zum Kurshalten wichtige, alle Meridiane unter demselben Winkel schneidende **Linea rhombica** (Windstrich, Rumb) als Gerade darstellt. Diese Linie wurde schon von **Nonius** in seiner Schrift „De arte navigandi. Conimbræ 1546 in 4.“ in Betracht gezogen, — dann ganz besonders von W. **Snellius** in seinen „Tiphis Batavus. Lugd. Batav. 1624 in 4.“, wo auch der jetzt dafür gebräuchliche Ausdruck **Loxodrome** (von λοξός = schief, und ὁ δρόμος = der Lauf)“ zuerst vorkommen soll; in der neuern Zeit wird sie in den meisten Werken über Chorographie und Nautik behandelt, auch in einigen Specialschriften, wie z. B. in „**Friesach**, Über Loxodromie. Graz 1874 in 8.“ Vgl. auch „**Günther**, Geschichte der loxodromischen Curve (Studie VI von 1879)“. — *b.* Das Verfahren, den Parallelen die Distanz g, den Meridianen aber die Distanz $g \cdot \text{Co}\,\varphi$ zu geben, wo g die Länge eines Equatorgrades und φ die mittlere Breite des darzustellenden Komplexes

bezeichnet, wurde früher viel angewandt, — ja schon der zur Zeit von Nero lebende Phönizier **Marinus** Tyrius soll ein entsprechendes Verhältnis benutzt haben, — und ebenso der dem 5. Jahrhundert angehörende **Agathodämon**, welchem man die den ältesten Ausgaben der Geographie des Ptolemäus beigegebenen Karten zuschreibt; noch Thomas **Schöpf** (Breisach 1522? — Bern 1577; Stadtarzt in Bern) bediente sich für seine 1577 ausgegebene, bemerkenswerte Karte des Berner-Gebietes (vgl. Gesch. d. Verm. pag. 18—21) eines entsprechenden Netzes. — *c.* Gerhard Kremer oder **Mercator** (Rupelmonde in Flandern 1512 — Duisburg 1594), der als Verfertiger von Karten und Instrumenten in Löwen und Duisburg lebte, ist nicht nur durch die nach ihm benannte Projektion verdient, sondern auch dadurch, dass die meisten ältern Verfahren durch ihn verbessert und die meisten neuern sich, wenigstens ihrem Grundprincipe nach, auf ihn zurückführen lassen: Es fällt ihm für die Chorographie dieselbe Bedeutung zu, welche Hipparch für die Astronomie im allgemeinen hatte. Vgl. für ihn namentlich „**Breusing**, Gerhard Kremer genannt Mercator, der deutsche Geograph. Duisburg 1869 in 8." — *d.* Nach unserer jetzigen Ausdrucksweise besteht der Gedanke von **Mercator** darin, dass, wenn das Bild eines Punktes der Länge λ und Breite φ die Coordinaten x und y habe, letztere beim Wachsen der Länge und Breite um $d\lambda$ und $d\varphi$ die Zuschläge

$$dx = g \cdot d\lambda \qquad dy = g \cdot d\varphi \cdot \operatorname{Se}\varphi \tag{1}$$

erhalten, woraus durch Integration nach 46 : 21'

$$x = g \cdot \lambda + \text{Const.} \qquad y = g \cdot \operatorname{Ltg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \text{Const.}$$

oder, wenn zur Bestimmung der Konstanten angenommen wird, dass $\lambda = 0 = \varphi$ auch $x = 0 = y$ entspreche, und überdies gemeine Logarithmen zur Anwendung kommen sollen, die Regeln

$$x = g \cdot \lambda \qquad y = 0{,}434\,2945 \cdot g \cdot \operatorname{Ltg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) \tag{2}$$

hervorgehen, welche die von **Mercator** gegebene Vorschrift näher präcisieren. Ferner folgt aus 1 nach 103 : 6, 4

$$a'b'^2 = dx^2 + dy^2 = g^2(d\lambda^2 + \operatorname{Se}^2\varphi \cdot d\varphi^2) = g^2 \cdot \operatorname{Se}^2\varphi \cdot ab^2$$

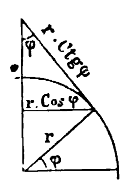
$$\operatorname{Tg}\beta' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{d\lambda \cdot \operatorname{Co}\varphi} = \operatorname{Tg}\beta \qquad \text{oder} \qquad \beta' = \beta \tag{3}$$

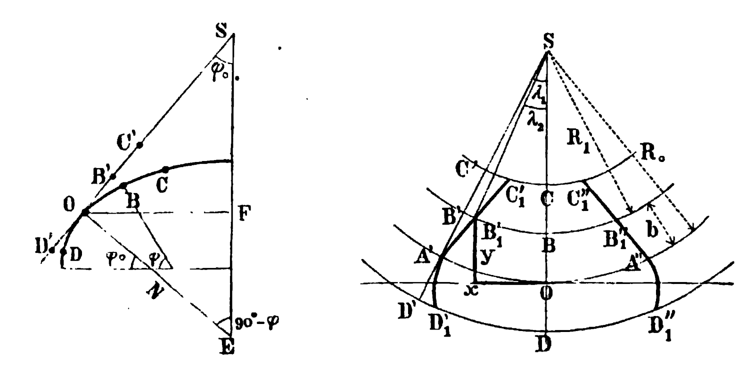
so dass die Mercator-Projektion die beiden Bedingungen 103 : 7 erfüllt, oder konform ist, während allerdings der Masstab nach 103 : 8 durch

$$M = a'b' : ab = g \cdot \operatorname{Se}\varphi \tag{4}$$

gegeben wird, also zwischen den weiten Grenzen g und ∞ schwankt. Es kömmt somit **Mercator** auch das Verdienst zu, die **erste** konforme Projektion, und zwar mit vollem Bewusstsein, eingeführt zu haben. — Wenn auch (vgl. Apelts Reform d. Sternk. p. 83) schon etwas vor Mercator dem kaiserlichen Kosmographen Don **Alonso de Santa Crux** das Grundprincip vorgeschwebt haben mag, so bleibt jedenfalls **Mercator** das Verdienst dasselbe zuerst genauer formuliert und 1569 zur Erstellung seiner berühmten Seekarte, von welcher sich wenigstens Ein Exemplar auf der Pariser-Bibliothek erhalten hat, verwendet zu haben. Sie wurde auch von Jodocus **Hondius** für seinen Atlas von 1590 richtig angewandt und sodann durch Edw. **Wright** in seiner Schrift „Certain Errors in Navigation detected and corrected. London 1599 in 4." behandelt. Letzterer setzte das von Mercator zu 1° angenommene Interval auf 1' herunter, während erst 1645 Henry **Bond** die unserer 2 entsprechende genaue Regel gegeben zu

haben scheint. — *e.* Bei der eigentlichen konischen Projektion, welche schon **Ptolemäus** kannte, wird der mittlere Parallel, wenn der Radius der Kugel $r = 57{,}3 \cdot g$ als Einheit genommen wird, mit dem Radius Ct φ, der um α Grade von ihm abstehende Parallel mit dem Radius Ct $\varphi \pm \alpha \cdot g$ beschrieben; der mittlere Meridian ist eine Gerade aus dem Centrum, und die übrigen Gradmeridiane werden erhalten, indem man auf dem mittlern Parallel nach links und rechts wiederholt $g \cdot$ Co φ aufträgt und durch die so erhaltenen Punkte ebenfalls Gerade nach dem Centrum zieht. — Statt derselben wurde jedoch früher häufig ein Verfahren angewandt, das gewissermassen einen Übergang von den cylindrischen zu den konischen Projektionen bildet: Die Parallele wurden wie bei den Plattkarten verzeichnet, dann auf den beiden äussersten derselben, von dem sie unter rechtem Winkel schneidenden ersten Meridiane aus, die ihren Breiten zukommenden $g \cdot$ Co φ_1 und $g \cdot$ Co φ_2 nach beiden Seiten wiederholt aufgetragen und nun die übrigen Meridiane durch die Verbindungen der entsprechenden Punkte dargestellt. Schon in der „Ulm 1482“ durch den Benediktiner Nicolaus **Donis** zu Reichenbach besorgten Ausgabe der Ptolemäischen Geographie sollen sich auf diese Weise erstellte Karten vorfinden, und noch der merkwürdige Autodidakt, der Bauer Benedikt **Roth** von Affoltern bei Aarberg, benutzte (vgl. Gesch. d. Verm. p. 92) dieses Verfahren bei der von ihm 1730 publizierten Schweizerkarte. — Bei beiden Methoden konnte der 1616 von Mathias **Hirzgarter** (Maschwanden 1574 — Zürich 1653; Pfarrer in Zollikon; vgl. Biogr. I) auf seiner Karte von Rhätien beschriebene **Circinus geographicus**, ein Proportionalzirkel mit Cosinusscale, der die Produkte $g \cdot$ Co φ abzunehmen erlaubte, Verwendung finden. — *f.* Die konische Projektion wurde z. B. nach dem Vorschlage von Jos. **Delisle** in der Weise abgeändert, dass man den tangierenden durch einen in zwei mittlern Parallelen einschneidenden Kegel ersetzte, — oder auch, wie es schon **Ptolemäus**, und dann wieder **Stabius**, praktiziert haben sollen, dadurch, dass die Aufträge von $g \cdot$ Co φ nicht nur auf den mittlern, sondern auf jeden Parallel gemacht, und nachher die erhaltenen Punkte durch Kurven verbunden wurden. Letztere Methode wurde sodann durch **Mercator** noch weiter ausgebildet und in neuerer Zeit durch Rigobert **Bonne** (Raucourt bei Sédan 1727 — Paris 1795; Ingénieur-Geographe), nach dem sie gewöhnlich benannt wird, in folgender Weise auch auf das Sphäroid ausgedehnt: Besitzt die Meridian-





ellipse die halbe grosse Axe a und die Excentricität e, so entspricht (74 : 7)

der Breite φ_0 $$R_0 = OS = N \cdot Ct\, \varphi_0 = \frac{a \cdot Ct\, \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \cdot Si^2\, \varphi_0}}$$ 5

Ist nun $OB' = OB = b$, $B'C' = BC = c$, etc., so werden von S aus mit $SO = R_0$, $SB' = R_1 = R_0 - b$, $SC' = R_2 = R_1 - c$, etc., Kreisbogen beschrieben, welche die Parallele darstellen, — dann, SO als erster Meridian angenommen, um den Meridian der Länge λ zu erhalten, $OA' = \lambda \cdot g_0$, $BB'_1 = \lambda \cdot g_1$, etc. aufgetragen (wo g_0, g_1, etc. den Gradlängen der betreffenden Parallele entsprechen) und die erhaltenen Punkte durch eine Kurve verbunden. Dass die so erhaltenen Meridiane, je weiter sie von dem mittleren Meridiane abstehen, auch um so mehr von Senkrechten zu den Parallelen abweichen werden, somit auf solche Weise keine konforme Abbildung erhältlich ist, bedarf kaum eines Beweises; da hingegen die Masse längs Meridian und Parallel in dem Abgebildeten und in der Abbildung übereinstimmen, so besteht notwendig zwischen ihren Elementen Flächengleichheit, und es ist daher diese, für Karten von geringerer Ausdehnung beliebte Projektion, eine **equivalente** oder **homalographische** (von ὁμαλός = gleich). — *g.* Für weitern Detail verweise ich auf „**Euler**, De repræsentatione superficiei sphæricæ super plano (Comm. Petrop. 1777), — **Lagrange,** Sur la construction des cartes géographiques (Mém. Berl. 1779), — **Cagnoli,** Della più esatta costruzione delle carte geografiche (Mem. Soc. ital. 1799), — Georg Andreas **Fischer** (Okrylla bei Meissen 1763 — Dresden 1833; Prof. math. Dresden), Anleitung zur praktischen Entwerfung der vorzüglichsten geographischen Netze. Dresden 1809 in 8., — **Puissant,** Théorie des projections des cartes. Paris 1810 in 4., — **Henry,** Mémoire sur la projection des cartes géographiques adoptée au dépôt de la guerre. Paris 1810 in 4., — J. J. **Littrow,** Chorographie. Wien 1833 in 8., — A. **Germain,** Traité des projections des cartes géographiques. Paris (1867) in 8., — d'**Avézac,** Coup d'œil historique sur la projection des cartes (Bull. Soc. géogr. 1867), — Heinr. **Gretschel,** Lehrbuch der Karten-Projection. Weimar 1873 in 8., — A. **Tissot,** Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques. Paris 1881 in 8. (deutsch durch Hammer: Stuttgart 1887), — Matteo **Fiorini,** Le projezioni delle carte geografiche. Bologna 1881 in 8., Atl. in 4., — Oscar **Möllinger** (Solothurn 1850 — Colon 1887, wo er als Ingenieur am Panamakanal dem mörderischen Klima erlag), Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen. Zürich 1882 in 8., — A. **Breusing,** Leitfaden durch das Wiegenalter der Kartographie bis zum Jahre 1600. Frankfurt 1883 in 8., — Norbert **Herz** (Olmütz 1858 geb.; Direktor der Kuffner'schen Sternwarte in Ottakring bei Wien), Lehrbuch der Landkartenprojectionen. Leipzig 1885 in 8., — Theobald **Fischer,** Sammlung mittelalterlicher Welt- und Seekarten. Venedig 1886 in 8., — etc."

V. Einige Vorkenntnisse aus der Mechanik.

C'est dans les ouvrages d'application qu'il faut étudier les méthodes d'analyse; on y juge de leur utilité et on y apprend la manière de s'en servir. *(Lagrange.)*

---

107. Einleitendes. — Jede Bewegung erfordert Zeit, und jede Veränderung des Bewegungszustandes eine Ursache, die Einwirkung einer sog. **Kraft,** bei welcher Angriffspunkt, Richtung und Grösse zu unterscheiden sind. Wirken mehrere Kräfte zugleich, so heissen sie **Komponenten,** — eine sie ersetzende einzelne Kraft nennt man deren **Resultante,** — und ist letztere Null, so sagt man, die Kräfte stehen im **Gleichgewichte.** Die Lehre vom Gleichgewichte heisst **Statik,** — die Lehre von der Bewegung **Dynamik,** — beide zusammen bilden die **Mechanik**[a]. — Die **reine,** d. h. die von der Physik abgelöste und sich als eine mathematische Wissenschaft konstituierende Mechanik, ist ein Produkt der neuern Zeit; denn wenn auch bereits **Archimedes** das Princip des Hebels aufstellte und die mathematische Lösung mechanischer Probleme inaugurierte, — später **Stevin** mit dem Satze von der schiefen Ebene noch ein zweites Princip einführte, — bald darauf **Galilei** durch Entdeckung der Gesetze des freien Falles auf diejenigen der gleichförmig beschleunigten Bewegung geführt wurde, — und endlich **Huygens** die Lehre von der Centralbewegung beifügte, — so war es doch eigentlich erst **Varignon**[b], der sich in seinem „Projet d'une nouvelle mécanique. Paris 1687 in 4. (2 éd. 1725, 2 Vol.)“ das Verdienst erwarb, die reine Mechanik auf dem Princip des sog. Kräfteparallelogrammes (108) systematisch aufzubauen und dadurch zu einer selbständigen Wissenschaft zu erheben. Nachher ging es dann allerdings rasch vorwärts, zumal die damaligen Fortschritte der Analysis auch da grossen Vorschub leisteten, und es können namentlich die von **Euler** verfasste „Mechanica. Petropoli 1736, 2 Vol. in 4. (deutsch von

Wolfers: Greifswalde 1848—55, 3 Vol. in 8.)", — der von **d'Alembert** geschriebene „Traité de dynamique. Paris 1743 in 4. (2 éd. 1758)", — und die **Lagrange** zu verdankende „Mécanique analytique. Paris 1788 in 4. (3 éd. durch Bertrand 1853; deutsch durch Murhard: Göttingen 1797, — durch H. Servus: Berlin 1887)" gewissermassen als Etappen der Entwicklung bezeichnet werden, welche die neue Wissenschaft im Laufe des vorigen Jahrhunderts erhielt. Auf den eigentlichen Detail dieses successiven, sich auch im gegenwärtigen Jahrhundert fortsetzenden Ausbaues, kann jedoch natürlich hier nur insofern eingetreten werden, als sich unter den folgenden Nummern dazu beiläufig Gelegenheit ergiebt; im übrigen ist auf die Fachlitteratur zu verweisen [c].

Zu 107: *a.* Die drei Namen **Statik, Dynamik** und **Mechanik** sind aus dem Griechischen abgeleitet und hängen mit στατικός = wägend, δύναμις = Kraft, und μηχανή = Maschine zusammen. — *b.* Pierre **Varignon** (Caen 1654 — Paris 1722) war erst Theologe, dann Prof. math. und Akad. in Paris. Vgl. Fontenelle in Mém. Par. 1722. — *c.* Den oben genannten Werken füge ich noch bei: „Jakob **Hermann** (Basel 1678 — ebenda 1733; Prof. math. Padua, Akad. Petersburg, Prof. moralphil. Basel), Phoronomia. Amstelod. 1716 in 4., — Joseph-François **Marie** (Rhodez 1738 — Memel 1801; Prof. math. Paris), Traité de méchanique. Paris 1774 in 4. (enthält treffliche anonyme Beiträge seines Schülers Legendre), — Louis **Poinsot** (Paris 1777 — ebenda 1859; Prof. math. und Akad. Paris), Eléments de statique. Paris 1804 in 8. (12 éd. par Bertrand 1877, mit Notice sur Poinsot; deutsch durch H. Servus, Berlin 1887), — **Poisson,** Traité de mécanique. Paris 1811, 2 Vol. in 8. (2 éd. 1833; deutsch von E. Schmidt, Stuttgart 1825—26), — **Whewell,** A treatise on dynamics. Cambridge 1823 in 8. (7. ed. 1847), — **Möbius,** Lehrbuch der Statik. Leipzig 1837, 2 Vol. in 8., — Claude-Louis-Marie-Henry **Navier** (Dijon 1785 — Paris 1836; Ingenieur, Prof. mech. und Akad. Paris), Résumé des leçons de mécanique données à l'école polytechnique. Paris 1841 in 8. (deutsch durch L. Meyer, Hannover 1855), — Wolfgang v. **Deschwanden** (Stans 1819 — Zürich 1866; Prof. math. Zürich), Abriss der Mechanik. Zürich 1848 in 8., — Ottaviano Fabricio **Mossotti** (Novara 1791 — Pisa 1863; Prof. math. Pisa), Lezioni di meccanica rationale. Firenze 1850 in 8., — Ferdinand **Redtenbacher** (Steyer 1809 — Karlsruhe 1863; Prof. mech. Zürich und Karlsruhe; vgl. Skizze von Sohn Rudolf: München 1879 in 8.), Principien der Mechanik. Mannheim 1852 in 8. (2. A. 1859), — Michel **Jullien** (1827 geb.), Problèmes de mécanique. Paris 1855, 2 Vol. in 8., — **Delaunay,** Traité de mécanique rationelle. Paris 1856 in 8. (7 éd. 1870), — **Sturm,** Cours de mécanique. Paris 1861, 2 Vol. in 8. (posth. par Prouhet; 5 éd. par St-Germain 1883), — **Jacobi,** Vorlesungen über Dynamik. Berlin 1866 in 4. (posth. durch Clebsch), — Eugen Karl **Dühring** (Berlin 1833 geb.; Docent in Berlin; später erblindet), Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Leipzig 1872 in 8. (3. A. 1887; mehr philos. Reflexion als Geschichte), — Aug. **Ritter,** Lehrbuch der analytischen Mechanik. Hannover 1873 in 8., — Ami-Henri **Résal** (1828 geb.; Prof. math. Besançon und Paris), Traité de mécanique générale. Paris 1873—81, 6 Vol. in 8., — **F. Reuleaux,** Theoretische Kinematik. Braunschweig 1875 in 8., — Eduard **Ott** (Basadingen im Thurgau 1848 geb.; Prof. math. Solothurn und Bern), Elemente der Mechanik. Zürich 1877 in 8., — Josef

Somoff (Gouv. Moskau 1815 — Petersburg 1876; Prof. math. Petersburg), Theoretische Mechanik (aus dem Russ. durch Ziwet, Leipzig 1878—79, 2 Vol. in 8.), — Christian Moritz **Rühlmann** (Dresden 1811 geb.; Prof. mech. Hannover), Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik und der damit im Zusammenhang stehenden mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1885 in 8., — Josef **Finger**, Elemente der reinen Mechanik. Wien 1886 in 8., — etc.“

108. Die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. — Zwei Kräfte, welche, in entgegengesetzter Richtung an einem Punkte angebracht, sich Gleichgewicht halten, heissen **gleich**; fügt man daher Kräften eine ihrer Resultante gleiche, aber entgegengesetzte Kraft bei, eine sog. **Gegenresultante**, so entsteht Gleichgewicht. Der Angriffspunkt einer Kraft darf in ihrer Richtung verlegt werden, vorausgesetzt, der neue Angriffspunkt sei mit dem alten starr verbunden. Die Resultante von Kräften, welche nach einer Geraden wirken, ist gleich ihrer algebraischen Summe. — Die Resultante zweier gleichen Kräfte halbiert notwendig ihren Winkel; folglich steht ein Rhombus im Gleichgewichte, wenn man an zwei Gegenecken desselben je zwei gleiche, nach den Seiten wirkende Kräfte anbringt. Mit Hilfe dieses einfachen Satzes lässt sich aber ohne Schwierigkeit zeigen [a], dass die Diagonale des durch zwei Kräfte P und Q bestimmten Parallelogrammes der Grösse und Richtung nach die Resultierende R derselben darstellt, also

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q \cdot \mathrm{Co}\,(P, Q)$$
$$P : Q : R = \mathrm{Si}\,(Q, R) : \mathrm{Si}\,(R, P) : \mathrm{Si}\,(P, Q) \qquad \mathbf{1}$$

ist, und somit speciell für $(P, Q) = 90^0$

$$R^2 = P^2 + Q^2 \qquad P = R \cdot \mathrm{Co}\,(P, R) \qquad Q = R \cdot \mathrm{Co}\,(Q, R) \qquad \mathbf{2}$$

wird. Dieser sog. **Satz vom Kräfteparallelogramm** lässt sich aber offenbar auf den Raum ausdehnen oder zum Kräfteparallelepipedon erweitern, und wenn daher auf einen Punkt mehrere Kräfte P wirken, welche mit den Axen X, Y, Z eines durch den Punkt gelegten rechtwinkligen Coordinatensystemes die Winkel α, β, γ bilden, so kann man vorerst jede derselben durch drei nach diesen Axen wirkende Komponenten $P \cdot \mathrm{Co}\,\alpha$, $P \cdot \mathrm{Co}\,\beta$, $P \cdot \mathrm{Co}\,\gamma$ ersetzen, sodann die Summen

$$X = \Sigma\,P \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \qquad Y = \Sigma\,P \cdot \mathrm{Co}\,\beta \qquad Z = \Sigma\,P \cdot \mathrm{Co}\,\gamma \qquad \mathbf{3}$$

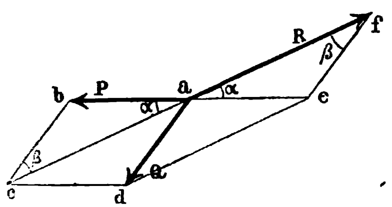
bilden, und hieraus Grösse und Richtung der allgemeinen Resultierenden R nach

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad \mathrm{Co}\,(R, X) = \frac{X}{R} \quad \mathrm{Co}\,(R, Y) = \frac{Y}{R} \quad \mathrm{Co}\,(R, Z) = \frac{Z}{R} \quad \mathbf{4}$$

berechnen [b].

Zu 108: *a.* Teilt man nämlich die Seiten eines Parallelogrammes im Verhältnisse ihrer Länge und verbindet die entsprechenden Teilpunkte der

Gegenseiten, so zerfällt es in Rhomben. Bringt man nun an je zwei entsprechenden Gegenecken jedes dieser Rhomben gleiche Kräfte an, so besteht einerseits Gleichgewicht, und anderseits heben sich alle Kräfte im Innern auf, während sich die längs den Seiten des Parallelogrammes wirkenden Kräfte auf zwei Paare von Kräften reduzieren lassen, die an zwei Gegenecken wirken und im Verhältnisse der Seiten stehen: Da nun die Resultanten dieser Paare teils gleich sein, teils noch im Gleichgewichte stehen müssen, so wirken sie nach der Richtung der Diagonale, und diese fällt offenbar mit der Diagonale des von einem der Kräftepaare bestimmten Parallelogrammes zusammen, so dass auch diese letztere die Richtung der Resultante darstellt. Haben somit zwei Kräfte P und Q die Gegenresultante R, so muss letztere in die Richtung der von erstern bestimmten Diagonale ac fallen; aber zugleich muss auch P, da von drei im Gleichgewichte stehenden Kräften jede als Gegenresultante der beiden andern betrachtet werden kann, die Richtung der von Q und R bestimmten Diagonale ae besitzen, also $\alpha = \alpha$ sein. Da nun ohnehin nach Konstruktion $\beta = \beta$ und ef = ad = bc ist, so muss somit $\triangle$aef $\cong$ abc, also R = ac sein, w. z. b. w. — *b.* Während **Stevin** die Erfindung des Kräfteparallelogramms gutzuschreiben ist, da er in seinen „Beginselen der Weeghconst. Leyden 1586 in 4.“ den Satz aussprach, dass drei Kräfte, welche den Seiten eines Dreiecks proportional und gleich sind, im Gleichgewichte stehen, — und während **Varignon** den guten Takt hatte (vgl. 107), dasselbe an die Spitze der Statik zu stellen, so kömmt **Duchayla** das Verdienst zu, in der im Messidor XIII erschienenen Nro. IV der „Corresp. de l'école polyt.“ dafür einen Beweis gegeben zu haben, der wesentlich mit dem Obigen übereinstimmt und mir von allen, welche ich kenne, am besten zusagt. — Vgl. für die Geschichte dieses Satzes die durch eine Preisaufgabe der Göttinger-Akademie veranlassten Schriften „Joh. Heinrich **Westphal** (Schwerin 1794 — Termini in Sizilien 1831; meist auf Reisen), Demonstrationum compositionis virium expositio de iisque judicium. Gotting. 1817 in 4., — und: Friedrich Andreas **Jacobi** (Krahwinkel bei Gotha 1795 — Schulpforta 1855; Prof. math. et phys. Schulpforta), Præcipuarum a Newtono conatum compositionum virium demonstrandi recensio. Gotting. 1817 in 4.“, welchen sich später noch die Dissertation „August Heinrich Christian **Westphal** (Hamburg 1835 geb.), Über die Beweise für das Parallelogramm der Kräfte. Göttingen 1867 in 8.“ anschloss.



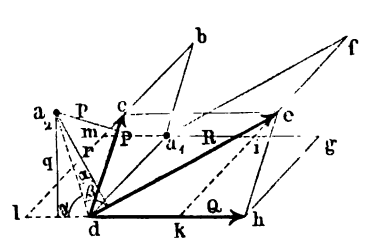
109. Der Mittelpunkt der parallelen Kräfte und die Kräftepaare. — Fällt man von irgend einem Punkte eine Senkrechte auf die Richtung einer Kraft, so nennt man das Produkt der Senkrechten und der Kraft **Moment der Kraft** in Beziehung auf diesen Punkt, und es besteht der Satz, dass für jeden in der Ebene zweier Kräfte liegenden Punkt die Summe oder Differenz der Momente derselben gleich dem Momente ihrer Resultante ist, je nachdem der Punkt ausserhalb oder innerhalb des Winkels der beiden Kräfte liegt *a*. — Aus diesem Satze folgt, dass die Momente zweier Kräfte in Beziehung auf einen Punkt ihrer Resultante gleich sind

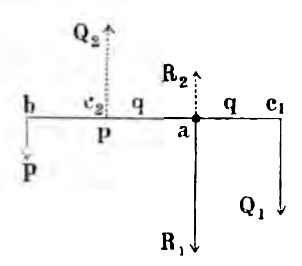
und dass umgekehrt, wenn die Momente in Beziehung auf einen Punkt gleich sind, die Resultante durch diesen Punkt gehen muss, — folglich die Kräfte im Gleichgewichte stehen, wenn dieser Punkt fest ist oder mit einer der Resultierenden gleichen Kraft

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q \cdot \mathrm{Co}\,(P, Q)} \qquad \mathbf{1}$$

gehalten wird, und die Angriffspunkte der Kräfte mit ihm fest verbunden sind. — Die Resultante wird nach 1 gleich der Summe oder Differenz der Komponenten, wenn (P, Q) = 0 oder (P, Q) = 180° wird, d. h. für parallele Kräfte von gleicher oder entgegengesetzter Lage, — und dabei teilt der Angriffspunkt der Resultante die Verbindungslinie der Angriffspunkte der Komponenten im ersten Falle von Innen, im zweiten Falle von Aussen, im umgekehrten Verhältnisse der Kräfte: Er heisst **Mittelpunkt der parallelen Kräfte,** und in dem Specialfalle, wo alle auf ein System von Punkten wirkenden Kräfte gleich gross und gleich gerichtet sind, wohl auch **Schwerpunkt**[b]. — Hat man zwei gleiche und parallele Kräfte von entgegengesetzter Richtung, so wird ihre Resultierende Null und wirkt in der Distanz unendlich: Es kann somit ein solches **Kräftepaar** (Gegenpaar, couple) nicht durch eine einzelne Kraft ersetzt werden, sondern bildet ein elementares, offenbar eine Drehung in bestimmtem Sinne anstrebendes Kräftesystem, — wobei der Abstand der beiden Kräfte **Breite**, das Produkt aus Breite und einer der beiden Kräfte aber **Moment** des Paares genannt wird. Haben zwei Kräftepaare einer Ebene bei entgegengesetztem Sinne gleiche Momente, so stehen sie im Gleichgewichte[c], und hieraus folgt, dass jedes Kräftepaar einer Ebene durch jedes Kräftepaar derselben Ebene, welches mit ihm in Beziehung auf Sinn und Moment übereinstimmt, ersetzt werden kann. Es können somit alle Kräftepaare einer Ebene auf gleiche Breite gebracht und dann durch algebraische Summierung der Kräfte auf Ein Paar reduziert werden, — und ebenso lassen sich auch zwei Paare in verschiedenen Ebenen auf gleiche Breite bringen, dann an die Kante versetzen und nun mit Hilfe des Kräfteparallelogrammes zu Einem Paare vereinigen.

Zu 109: *a.* Der Momentensatz wurde schon durch **Varignon** ausgesprochen und lässt sich sowohl mit Hilfe der Flächensätze als der trigonometrischen Beziehungen leicht erweisen: Die Figur giebt für Punkt a_1 den Flächenbeweis, d. h. den Nachweis, dass a b c d + a d e f = a d h g, — für den Punkt a_2 dagegen den trigonometrischen Beweis, oder den Nachweis, dass $P \cdot p + Q \cdot q = R \cdot r$. — *b.* Die weitern Folgerungen

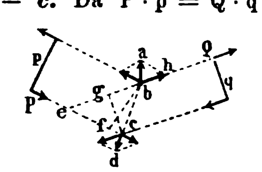




bedürfen wohl höchstens des Hinweises auf die beistehende Figur. Dagegen füge ich bei, dass, wenn mehrere parallele Kräfte P_1, P_2,... in den Abständen z_1, z_2,... von einem beliebigen Anfangspunkte, thätig sind,

$$z = \frac{z_1 P_1 + z_2 P_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots} = \frac{\Sigma z \cdot P}{\Sigma P} \qquad 2$$

den Abstand ihres Mittelpunktes von demselben giebt. — Für den Schwerpunkt vgl. 72 und 96. — *c.* Da $P \cdot p = Q \cdot q$, so hat man $ah : bh = P : Q = q : p = eg : bf = ec : bc$, und da überdies $\angle h = \angle e$, so muss auch $\angle abh = \angle cbe$ sein, womit offenbar der Beweis geleistet ist, dass ab in die Verlängerung von bc fällt. — *d.* Das Verdienst, die Kräftepaare eingeführt und die Drehungsverhältnisse mit ihrer Hilfe klar dargelegt zu haben, kömmt unbestritten **Poinsot** und seiner Schrift von 1804 zu.



110. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen. — Wirken auf eine Reihe von Punkten der Coordinaten A, B, C ebensoviele Kräfte P, welche mit den Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystemes die Winkel α, β, γ bilden, so lassen sich letztere durch die drei nach den Axen wirkenden Kräfte

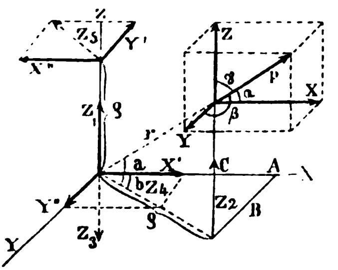
$$\Sigma P \cdot \text{Co}\,\alpha \qquad \Sigma P \cdot \text{Co}\,\beta \qquad \Sigma P \cdot \text{Co}\,\gamma \qquad 1$$

und, unter der Annahme, dass ein Drehen von x um y nach z, von y um z nach x, und von z um x nach y als positiv betrachtet werde, durch die drei in den Ebenen XY, YZ und ZX liegenden Kräftepaare

$$\Sigma P(B \cdot \text{Co}\alpha - A \cdot \text{Co}\beta),\ \Sigma P(C \cdot \text{Co}\beta - B \cdot \text{Co}\gamma),\ \Sigma P(A \cdot \text{Co}\gamma - C \cdot \text{Co}\alpha) \quad 2$$

ersetzen [a]. Für den Fall des Gleichgewichts müssen sämtliche 6 Ausdrücke 1 und 2 Null sein, — die drei ersten, wenn keine fortschreitende, die drei letzten, wenn keine drehende Bewegung statthaben soll [b].

Zu 110: *a.* Um die 1 und 2 zu erhalten, zerlege man (108) jede der Kräfte P nach den drei Axen in



$$X = P \cdot \text{Co}\,\alpha \quad Y = P \cdot \text{Co}\,\beta \quad Z = P \cdot \text{Co}\,\gamma \quad 3$$

ersetze Z durch Z_1, Z_2 und Z_3, — drehe das Paar $Z_2 Z_3$ um 90° nach $Z_4 Z_5$, — zerlege letzteres Paar (109) in die Paare X' X'' und Y' Y'', — bedenke, dass

$$\begin{aligned} \varrho X' &= \varrho Z_4 \,\text{Co}\, b = A \cdot Z = A \cdot P \cdot \text{Co}\,\gamma \\ \varrho Y' &= \varrho Z_4 \,\text{Si}\, b = B \cdot Z = B \cdot P \cdot \text{Co}\,\gamma \end{aligned} \qquad 4$$

und verfahre ebenso mit den X und Y. — *b.* Um zu untersuchen, ob die Kräfte P, wenn sie nicht im Gleichgewichte stehen, eine Resultante haben, d. h. sich durch eine einzelne, an einem Punkte 𝔄, 𝔅, ℭ wirkende

Kraft R, welche mit den Axen die Winkel a, b, c bildet, ersetzen lassen, füge man in Gedanken den Kräften P die Gegenresultante bei und setze die sich dabei entsprechend 1 und 2 ergebenden 6 Ausdrücke wirklich gleich Null. Es folgen sodann aus den drei ersten durch Quadrieren und Addieren

$$R^2 = [\Sigma P \cdot \mathrm{Co}\,\alpha]^2 + [\Sigma P \cdot \mathrm{Co}\,\beta]^2 + [\Sigma P \cdot \mathrm{Co}\,\gamma]^2$$

$$\mathrm{Co}\,a = \frac{1}{R} \cdot \Sigma P \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \qquad \mathrm{Co}\,b = \frac{1}{R} \cdot \Sigma P \cdot \mathrm{Co}\,\beta \qquad \mathrm{Co}\,c = \frac{1}{R} \cdot \Sigma P \cdot \mathrm{Co}\,\gamma \tag{5}$$

aus den drei letzten aber, wenn man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eliminiert, die Bedingungsgleichung

$$\Sigma P \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \Sigma P (C \cdot \mathrm{Co}\,\beta - B \cdot \mathrm{Co}\,\gamma) + \Sigma P \cdot \mathrm{Co}\,\beta \cdot \Sigma P (A \cdot \mathrm{Co}\,\gamma - C \cdot \mathrm{Co}\,\alpha) + \\ + \Sigma P \cdot \mathrm{Co}\,\gamma \cdot \Sigma P \cdot (B\,\mathrm{Co}\,\alpha - A \cdot \mathrm{Co}\,\beta) = 0 \tag{6}$$

von deren Erfüllung somit die Möglichkeit der Resultante abhängt.

111. Die gleichförmige, die gleichförmig beschleunigte und die Centralbewegung. — Den Ort eines sich bewegenden Punktes nennt man seine **Bahn**, und die Länge derselben vom Anfangspunkte der Bewegung bis zu der nach einer Zeit t dem Punkte zukommenden Lage den dieser Zeit entsprechenden **Weg** s. Den Weg, welchen ein Punkt infolge seines Bewegungszustandes zur Zeit t in einer Zeiteinheit zurücklegt oder zurücklegen würde, bezeichnet man als seine **Geschwindigkeit** c zu dieser Zeit, — die Geschwindigkeitszunahme g endlich, welche eine Kraft, bei gleichmässigem Fortwirken wie zur Zeit t, in einer Zeiteinheit verursacht oder verursachen würde, die dieser Zeit entsprechende **Beschleunigung**. — Ist bei einer Bewegung die Beschleunigung $g = 0$, so heisst sie **gleichförmig**, und es ist für eine solche offenbar

$$s = c \cdot t \qquad c = s : t \qquad t = s : c \tag{1}$$

Bewegt sich ein Punkt gleichförmig in einem Kreise des Radius r, so nennt man $v = c : r$ **Winkelgeschwindigkeit** desselben. Teilt man entsprechend 1 auch bei einer ungleichförmigen Bewegung den Weg durch die Zeit, so nennt man den Quotienten **mittlere Geschwindigkeit**. — Ist bei einer Bewegung die Beschleunigung konstant, so heisst erstere **gleichförmig beschleunigt**, und wenn für $t = 0$ auch $c = 0$ ist, so stellt offenbar $\frac{1}{2} c = \frac{1}{2} g \cdot t$ die mittlere Geschwindigkeit vor. Es ist daher

$$s = \frac{c \cdot t}{2} = \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{c^2}{2g} \qquad c = g \cdot t = \frac{2s}{t} = \sqrt{2gs} \qquad t = \frac{c}{g} = \frac{2s}{c} = \sqrt{\frac{2s}{g}} \tag{2}$$

Auch bei jeder andern ungleichförmigen Bewegung, welche einem bestimmten Gesetze unterliegt, wird der Weg als eine Funktion der Zeit zu betrachten sein. — Wirken auf einen Punkt zwei von einander unabhängige Kräfte, so wird er zur Zeit t dieselbe Stellung einnehmen, welche er erhalten würde, wenn die beiden Kräfte successive, jede während der Zeit t, thätig wären, — d. h. er wird

in jedem Momente an der Gegenecke des Parallelogrammes stehen, dessen Nebenseiten die den einzelnen Kräften entsprechenden Wege $s_1 = F_1(t)$ und $s_2 = F_2(t)$ darstellen [a]. Schliessen die beiden Nebenseiten den Winkel α ein, so sind die Polarcoordinaten des Punktes zur Zeit t offenbar durch

$$r = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2 \cdot \mathrm{Co}\,\alpha} \qquad \mathrm{Tg}\,v = \frac{s_1 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}{s_2 + s_1\,\mathrm{Co}\,\alpha} \qquad 3$$

gegeben. Soll somit der Punkt einen geraden Weg beschreiben, oder v von t unabhängig sein, was nur für $s_2 = A \cdot s_1$ eintreten kann, so müssen zwei gleichartige Bewegungen in Aussicht genommen werden; in jedem andern Falle wird sich eine krummlinige Bahn ergeben [b]. — Wenn ein sich bewegender Punkt in den Bereich einer Kraft kömmt, welche von einem Centrum aus wirkt, so nimmt er eine Bewegung um dieses Centrum an, und zwar so, dass die von seinem Radius vector überstrichenen Flächen in gleichen Zeiten gleich gross werden [c]. Die Centralbewegung im Kreise ist somit notwendig eine gleichförmige Bewegung und erfordert, da ein, einen Kreis des Radius r in der Zeit t durchlaufender Punkt infolge des Beharrungsvermögens, wenn er in irgend einer Lage sich selbst überlassen würde, nach der Tangente abgehen müsste, also ein Bestreben

$$f = 4\pi^2 \cdot r : t^2 \qquad 4$$

hat, sich vom Centrum zu entfernen, eine dieser sog. **Centrifugalkraft** gleiche Anziehung nach dem Centrum [d]. — Dreht sich ein Körper der Masse m um eine Axe Z, so entspricht jedem seiner Elemente eine gewisse Centrifugalkraft, und es lassen sich alle diese Kräfte zu einer Resultante und einem Kräftepaare vereinigen, wobei das letztere die Richtung der Axe zu affizieren sucht; kann diese letztere so gewählt werden, dass das Kräftepaar verschwindet, so nennt man sie eine **freie** Axe [e].

Zu 111: *a.* Dieser als **Parallelogramm der Bewegungen** bezeichnete Satz war, wenn auch noch in etwas beschränkterer Form, bereits **Galilei** bekannt. — *b.* Ist z. B. $s_1 = a \cdot t$ und $s_2 = \frac{1}{2} g t^2$, so erhält man nach 3, wenn α durch $90^\circ + \alpha$ und v durch $90^\circ + v$ ersetzt wird, um sich auf eine zu s_2 senkrechte Axe beziehen zu können,

$$r = \tfrac{1}{2} t \sqrt{4a^2 - 4ag\,\mathrm{Si}\,\alpha \cdot t + g^2 t^2} \qquad \mathrm{Tg}\,v = \frac{2a \cdot \mathrm{Si}\,\alpha - gt}{2a \cdot \mathrm{Co}\,\alpha} \qquad 5$$

woraus

$$\mathrm{Si}\,v = \frac{2a\,\mathrm{Si}\,\alpha - gt}{2r} \cdot t \qquad \mathrm{Co}\,v = \frac{a \cdot \mathrm{Co}\,\alpha}{r} \cdot t$$

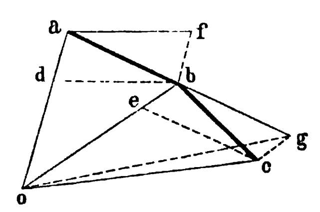
und somit

$$x = r \cdot \mathrm{Co}\,v = a \cdot t \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \qquad y = r \cdot \mathrm{Si}\,v = a \cdot t \cdot \mathrm{Si}\,\alpha - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad 6$$

folgt. Aus letztern Beziehungen erhält man aber durch Elimination von t

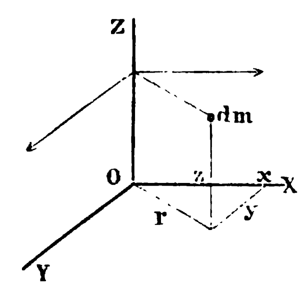
$$y = \frac{x(a^2\,\mathrm{Si}\,2\alpha - gx)}{2a^2 \cdot \mathrm{Co}^2\,\alpha} \quad \text{und sodann} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a^2\,\mathrm{Si}\,2\alpha - 2gx}{2a^2 \cdot \mathrm{Co}^2\,\alpha} \qquad 7$$

so dass y für $AC = a^2 \cdot Si\, 2\alpha : 2g$ seinen Maximalwert $CD = a^2\, Si^2\, \alpha : 2g$ annimmt. Die weitere Entwicklung ergiebt sodann, unter Benutzung von 73 und 76, ganz leicht, dass die Bahn eine Parabel des Scheitels D ist, deren Axe mit CD zusammenfällt, — dass diese Parabel, wenn $AE = a^2 : 2g$ ist, die von α unabhängige Leitlinie EF hat, — dass die den sämtlichen α entsprechende Schar von Parabeln den aus A mit AE beschriebenen Kreis als Ort der Brennpunkte, und die mit AE als kleiner und halber grosser Axe beschriebene Ellipse als Ort der Scheitel besitzt, — etc. Dabei stellt, wenn a eine Wurfgeschwindigkeit und g die Beschleunigung durch die Schwere bezeichnet, die Bahn offenbar die **Wurflinie** im leeren Raume vor, — CD die sog. **Wurfhöhe,** — AB die sog. **Wurfweite.** Letztere wird für $\alpha = 45^0$ im Maximum gleich $a^2 : g$, während die Wurfhöhe für $\alpha = 90^0$ den Maximalwert $a^2 : 2g$ erhält. — Während **Tartaglia** nur das Verdienst zukömmt, in seiner „Nova Scienza. Venet. 1537 in 4." im Gegensatze zur ältern Zeit behauptet zu haben, dass die Wurflinie durchweg krumm sei, wies **Galilei** aus den Fallgesetzen nach, dass dieselbe, abgesehen vom Luftwiderstande, mit einer Parabel übereinstimme, ermittelte auch die mitgeteilten Sätze über Wurfweite und Wurfhöhe, etc., und ein 1770 durch Andreas **Wirz** (Teufen bei Zürich 1703 — Zürich 1792; Zinngiesser und Inspektor der Konstabler) ausgedachtes ballistisches Instrumentchen (Verz. 78) zeigt, dass diese Eigenschaften auch der spätern Zeit bekannt blieben; dagegen glaube ich die oben angegebenen, auf Scharen von Wurflinien bezüglichen, merkwürdigen Eigenschaften in meiner Note „Beiträge zur Ballistik" (Bern. Mitth. 1846)" zuerst hervorgehoben zu haben. Seither haben auch andere diese Untersuchungen weiter geführt, wofür ich z. B. auf „Georg **Sidler** (Zug 1831 geb.; Prof. math. Bern), Über die Wurflinie im leeren Raume. Bern 1865 in 4." verweise. Auf die Bewegung im lufterfüllten Raume, die z. B. von **Poisson** in seinen „Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air. Paris 1839 in 4." von theoretischer, durch Hermann **Siegfried** (Zofingen 1819 — Bern 1879; Genie-Oberst) in seinem „Beitrag zur Schiesstheorie. Bern 1871 in 4." von praktischer Seite aus beleuchtet wurde, kann hier nicht eingetreten werden. — *c.* Erleidet ein Punkt a, der sich infolge einer Anfangsgeschwindigkeit in der Zeit t durch af bewegen würde, im Anfange dieser Zeit eine Anziehung gegen ein Centrum o hin, welche ihn in derselben Zeit nach d bringen müsste, so wird er in Wirklichkeit der Diagonale ab folgen; hat sodann, nachdem er in b angekommen ist, eine neue Anziehung be statt, und ist $bg = ab$, so wird er sich in dem folgenden Zeitintervalle t nach c bewegen, wobei $\triangle boc = aob$ ist; etc. Für ein unendlich abnehmendes t geht die Anziehung in eine kontinuierliche, die Bahn in eine Kurve über und es besteht das ausgesprochene Gesetz. — *d.* Bezeichnet a die Geschwindigkeit im Kreise, so ist $2r\pi = a \cdot t$, während $s = a \cdot \tau$ der mit seiner Sehne zu verwechselnde, in einem Zeitteilchen τ zurückgelegte Bogen ist. Zerlegen wir aber s nach Tangente und Radius, so muss nach 2 die letzterm entsprechende Komponente $p = \frac{1}{2} f \tau^2$ sein, während geometrisch $p : s = s : r$ ist, und man hat daher $f = 2p : \tau^2 = a^2 : r = 4r\pi^2 : t^2$, wie unter 4 ausgesprochen wurde. Analog ist für einen zweiten, in der Zeit T einen Kreis des Radius R durchlaufenden Punkt



$$F = 4\pi^2 \frac{R}{T^2} \qquad \text{so dass} \qquad f : F = \frac{r}{R} : \left(\frac{t}{T}\right)^2 \qquad 8$$

und somit, wenn überdies, wie z. B. (267) bei der planetarischen Bewegung, $t^2 : T^2 = r^3 : R^3$ ist, speciell $f : F = R^2 : r^2$. — Schon Giovanni Baptista **Benedetti** oder Benedictis (Venedig 1530 — Turin 1590; Mathematiker des Herzogs von Savoyen) scheint erkannt zu haben, dass im Kreise geschwungene Körper, sich selbst überlassen, nach der Tangente fortgehen, wie dies aus seinem „Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber. Taurini 1585 in fol." unzweideutig hervorgehen soll; aber die eigentlichen Gesetze der Centralbewegung im Kreise wurden erst durch **Huygens** etwa in den ersten Sechzigerjahren des 17. Jahrhunderts aufgefunden und Verschiedenen mitgeteilt, sodann 1673 in seinem „Horologium oscillatorium" publiziert. — *e.* Bezeichnet w die Winkelgeschwindigkeit des um die Axe Z rotierenden Körpers, d. h. ist



$$w = \frac{2\pi}{t} \quad \text{also nach 4} \quad f = r \cdot w^2 \qquad \mathbf{9}$$

so wird die durch ein Element dm des Körpers produzierte Centrifugalkraft gleich $r \cdot w^2 . dm$, und dieser entsprechen nach den Axen X und Y die Komponenten $r \cdot w^2 \cdot dm \cdot Co(r,x) = x \cdot w^2 \cdot dm$ und $y \cdot w^2 \cdot dm$. Es werden also die den beiden Axen parallelen Gesamtwirkungen des Körpers durch

$$f_x = w^2 \cdot \int x \cdot dm \quad \text{und} \quad f_y = w^2 \cdot \int y \cdot dm \qquad \mathbf{10}$$

ausgedrückt werden, und wenn z_x und z_y die Punkte der Axe Z bestimmen, in welchen diese Gesamtwirkungen ihren Angriffspunkt haben, so wird (109 : 2)

$$z_x = \frac{\int z \cdot x \cdot w^2 dm}{w^2 \cdot \int x \cdot dm} = \frac{\int x z \, dm}{\int x \cdot dm} \qquad z_y = \frac{\int z \cdot y \cdot w^2 \cdot dm}{w^2 \int y \, dm} = \frac{\int y z \, dm}{\int y \, dm} \qquad \mathbf{11}$$

sein. Man kann sodann (109) die beiden Kräfte f_x und f_y durch zwei ihnen gleiche, an O wirkende Kräfte, und zwei Kräftepaare der Momente $z_x \cdot f_x$ und $z_y \cdot f_y$ ersetzen, und nachher diese zu einer Resultante und einem resultierenden Paare vereinigen. Die sog. freie Axe wird $z_x = o = z_y$ entsprechen.

112. Die allgemeinen Beziehungen zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung. — Bezeichnen s, v und g Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Zeit t, — Δs, Δv und Δg aber ihre Zunahmen oder Abnahmen in dem Zeitelemente Δt, so hat man für zunehmende Geschwindigkeiten und Beschleunigungen immer

$$(v + \Delta v)\Delta t > \Delta s > v \cdot \Delta t \qquad (g + \Delta g)\Delta t > \Delta v > g \cdot \Delta t$$

für abnehmende dagegen

$$(v + \Delta v)\Delta t < \Delta s < v \cdot \Delta t \qquad (g + \Delta g)\Delta t < \Delta v < g \cdot \Delta t$$

so dass in beiden Fällen $\Delta s : \Delta t$ zwischen $v + \Delta v$ und v, und $\Delta v : \Delta t$ zwischen $g + \Delta g$ und g fällt. Es müssen also nach der Grenzmethode die Beziehungen

$$v = \text{Lim.} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \qquad \text{oder} \qquad s = \int v \cdot dt \qquad \mathbf{1}$$

$$g = \text{Lim.} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad v = \int g \cdot dt \qquad \mathbf{2}$$

bestehen [a]. — Hat ein Punkt der Masse m die veränderlichen Coordinaten x, y, z, so sind nach 1 zur Zeit t seine Bewegungsmengen nach den Axen

$$m \cdot \frac{dx}{dt} \qquad m \cdot \frac{dy}{dt} \qquad m \cdot \frac{dz}{dt} \tag{3}$$

während nach 2

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot dt \qquad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dt \qquad m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \cdot dt \tag{4}$$

die Vermehrungen bezeichnen, welche dieselben in dem der Zeit t folgenden Zeitelemente dt erhalten. Ist der Punkt **frei** und wirkt auf ihn eine beschleunigende Kraft der Komponenten X, Y, Z, so stimmen jene Vermehrungen mit

$$m \cdot X \cdot dt \qquad m \cdot Y \cdot dt \qquad m \cdot Z \cdot dt \tag{5}$$

überein. Ist er dagegen **nicht frei**, sondern mit andern Punkten zu einem Systeme verbunden, so wird die Einwirkung einer Kraft möglicher Weise durch diese Verbindungen modifiziert werden und es ergeben sich sodann Differenzen

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)dt \qquad m\left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)dt \qquad m\left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)dt \tag{6}$$

welche aber offenbar so beschaffen sein müssen, dass sich ihre Gesamtheit für das ganze System Gleichgewicht hält: Es bestehen also (110 : 1, 2) die Gleichungen

$$\Sigma m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma mX \qquad \Sigma m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma mY \qquad \Sigma m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma mZ \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \Sigma m \cdot \frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} &= \Sigma m\,(x \cdot Y - y \cdot X) \\ \Sigma m \cdot \frac{y\,d^2z - z\,d^2y}{dt^2} &= \Sigma m\,(y \cdot Z - z \cdot Y) \\ \Sigma m \cdot \frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{dt^2} &= \Sigma m\,(z \cdot X - x \cdot Z) \end{aligned} \tag{8}$$

welche als analytischer Ausdruck des sog. **Principes von d'Alembert** zu betrachten sind [b].

Zu 112: *a.* Die Beziehungen 1 und 2 wurden wohl unmittelbar nach Erfindung der Differentialrechnung aufgestellt und jedenfalls in obiger Form spätestens durch **Euler** in seiner „Mechanica" von 1736 gegeben. — *b.* Sein durch 7 und 8 ausgedrücktes Princip sprach **d'Alembert** in seinem „Traité de dynamique" von 1743 aus.

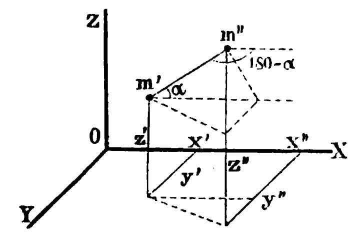
113. Die Principien der Erhaltung des Schwerpunktes und der Flächen und die unveränderliche Ebene. — Der Schwerpunkt eines Systemes bewegt sich genau so, wie wenn alle Massen in ihm vereinigt wären und alle Kräfte direkt an ihm wirken

würden [a]. — Wie ferner ein Punkt ohne Wirkung einer äussern Ursache in seiner Bewegung beharrt, so kann auch die Bewegung des Schwerpunktes eines Systemes durch blosse Einwirkung seiner Teile aufeinander nicht verändert werden, sondern es bewegt sich derselbe mit konstanter Geschwindigkeit in einer Geraden, — ein Gesetz, welches man als **Princip der Erhaltung des Schwerpunktes** bezeichnet [b]. — Wenn die Punkte eines Systemes nur ihrer gegenseitigen Wirkung oder Kräften unterworfen sind, welche nach dem Anfangspunkte der Coordinaten wirken und man die von den Radien vectoren der einzelnen Punkte in einem Zeitelemente beschriebenen Flächen auf eine der Coordinatenebenen projiziert, ferner jede dieser Projektionen mit der Masse des beschreibenden Punktes multipliziert, so ist die Summe dieser Produkte dem Zeitelemente proportional [c]. Es darf dieses Gesetz, welches **Princip der Erhaltung der Flächen** genannt wird, offenbar auf jede durch den Anfangspunkt gelegte Ebene ausgedehnt werden, da jede solche Ebene eine Coordinatenebene sein kann. — Wenn man eine Fläche oder ein System von Flächen auf die drei Coordinatenebenen projiziert und dann die erhaltenen Projektionen auf irgend eine andere Ebene überträgt, so ist die Summe der drei neuen Projektionen genau gleich der Projektion, welche man durch unmittelbares Projizieren auf diese Ebene erhalten hätte [d]. — Die Quadratsumme der Projektionen einer Fläche, oder eines Systemes von Flächen, auf drei zu einander senkrechte Ebenen, hat einen von der Lage dieser Ebenen unabhängigen Wert [e]. Dagegen nimmt die einzelne Projektion für eine bestimmte Ebene einen Maximumswert an, und zwar sind die Winkel dieser letztern Ebene mit den Coordinatenebenen für die dem Flächenprincipe zu Grunde liegenden Voraussetzungen von der Zeit unabhängig, so dass sie von **Laplace** mit Recht als eine **unveränderliche Ebene** in die Mechanik eingeführt wurde [f].

Zu 113: *a.* Bezeichnen x, y, z die Coordinaten des Schwerpunktes eines Systemes von Punkten der Coordinaten $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, etc. und der Massen m_1, m_2, etc., so hat man (109, 96)

$$x = \Sigma mx : \Sigma m \qquad y = \Sigma my : \Sigma m \qquad z = \Sigma mz : \Sigma m \qquad \mathbf{1}$$

woraus sich durch zweimalige Differentiation nach t und Benutzung von 112:7 die Gleichungen



$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\Sigma mX}{\Sigma m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\Sigma mY}{\Sigma m}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\Sigma mZ}{\Sigma m} \qquad \mathbf{2}$$

ergeben, welche der analytische Ausdruck des ausgesprochenen Gesetzes sind. — *b.* Fassen wir nur Wirkungen ins Auge, welche die einen Teile des Systemes auf die andern ausüben und bezeichnen durch P die Kraft, mit welcher ein Element von m'' ein Element

von m' anzieht, so sind die Komponenten der von der ganzen Masse m'' auf ein Element von m' ausgeübten Wirkung

$$X' = m'' \cdot P \cdot Co\,\alpha = m'' \cdot P \cdot \frac{x'' - x'}{r} \qquad Y' = m'' \cdot P \cdot \frac{y'' - y'}{r} \qquad Z' = m'' \cdot P \cdot \frac{z'' - z'}{r}$$

In diesem Falle wirkt aber auch nach dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung ein Element von m' mit derselben Kraft auf ein Element von m'', so dass die Wirkung der ganzen Masse m' die Komponenten

$$X'' = m' \cdot P \cdot Co\,(180^0 - \alpha) = -m' \cdot P \cdot \frac{x'' - x'}{r}$$

$$Y'' = -m' \cdot P \cdot \frac{y'' - y'}{r} \qquad Z'' = -m' \cdot P \cdot \frac{z'' - z'}{r}$$

hat. Hieraus ergiebt sich aber sofort

$$m' \cdot X' + m'' \cdot X'' = m' \cdot Y' + m'' \cdot Y'' = m' \cdot Z' + m'' \cdot Z'' = 0$$

und je ähnliche drei Gleichungen findet man für die gegenseitigen Wirkungen von m' und m''', m'' und m''', etc., so dass

$$\Sigma\, m X = \Sigma\, m Y = \Sigma\, m Z = 0 \quad \text{oder nach 2} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

Hieraus folgen aber durch Integration

$$dx : dt = a' \qquad dy : dt = a'' \qquad dz : dt = a''' \tag{3}$$

und durch nochmalige Integration

$$x = a' \cdot t + b' \qquad y = a'' \cdot t + b'' \qquad z = a''' \cdot t + b''' \tag{4}$$

oder durch paarweise Elimination von t

$$x = \frac{a'}{a'''} \cdot z + \frac{b' \cdot a''' - a' \cdot b'''}{a'''} \qquad y = \frac{a''}{a'''} z \cdot + \frac{b'' \cdot a''' - a'' \cdot b'''}{a'''} \tag{5}$$

welches (93) die Gleichungen einer Geraden im Raume sind. Es bewegt sich also wirklich unter der gemachten Voraussetzung der Schwerpunkt in einer Geraden, und zwar ist seine Geschwindigkeit nach 3

$$ds : dt = \sqrt{a'^2 + a''^2 + a'''^2} \tag{6}$$

d. h. konstant. — *c.* Multipliziert man die drei Gleichungen 112 : 8 mit dt und integriert nach t, so erhält man, wenn c', c'', c''' beliebige Konstanten sind,

$$\Sigma\, m \cdot \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{dt} = c' + \Sigma \int m\,(x \cdot Y - y \cdot X) \cdot dt$$

$$\Sigma\, m \cdot \frac{y \cdot dz - z \cdot dy}{dt} = c'' + \Sigma \int m\,(y \cdot Z - z \cdot Y) \cdot dt \tag{7}$$

$$\Sigma\, m \cdot \frac{z \cdot dx - x \cdot dz}{dt} = c''' + \Sigma \int m\,(z \cdot X - x \cdot Z) \cdot dt$$

Nun ergiebt sich einerseits für die zwischen m' und m'' thätige Kraft P mit Hilfe der oben gebrauchten Werte von X und Y

$$m'\,(x' \cdot Y' - y' \cdot X') + m''\,(x'' \cdot Y'' - y'' \cdot X'') = 0$$

und ähnliche Gleichungen lassen sich auch für die gegenseitigen Wirkungen von m' und m''', etc., aufstellen. Bezeichnet anderseits F' eine Kraft, welche m' nach dem um f' entfernten Anfangspunkte der Coordinaten zu führen strebt, so sind offenbar die Komponenten nach den Axen

$$X' = -F' \cdot \frac{x'}{f'} \qquad Y' = -F' \cdot \frac{y'}{f'} \qquad Z' = -F' \cdot \frac{z'}{f'}$$

also

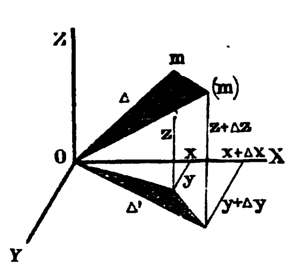
$$x' \cdot Y' - y' \cdot X' = y' \cdot Z' - z' \cdot Y' = z' \cdot X' - x' \cdot Z' = 0$$

und ähnliche Gleichungen lassen sich auch für die übrigen Punkte aufstellen. Man hat also für beide Arten von Wirkungen und Kräften

$$\Sigma\, m\,(xY - yX) = \Sigma\, m\,(yZ - zY) = \Sigma\, m\,(zX - xZ) = 0$$

und es gehen daher die 7 in diesem Falle in

$$\Sigma m(x \cdot dy - y \cdot dx) = c' \cdot dt \qquad \Sigma m(y \cdot dz - z \cdot dy) = c'' \cdot dt \qquad \Sigma m(z dx - x dz) = c''' . dt \tag{8}$$



über. Stellt aber (m) die Lage vor, welche m nach der Zeit t einnimmt, und bezeichnen Δ', Δ'', Δ''' die Projektionen der vom Radius vector während dieser Zeit beschriebenen Fläche Δ auf die Ebenen der XY, YZ und ZX, so ist $x \cdot dy - y \cdot dx = 2 \cdot \Delta'$, $y \cdot dz - z \cdot dy = 2\Delta''$ und $z \cdot dx - x \cdot dz = 2\Delta'''$, so dass die 8 in

$$\Sigma m \cdot \Delta' = \tfrac{1}{2} c' \cdot dt \qquad \Sigma m \cdot \Delta'' = \tfrac{1}{2} c'' \cdot dt \qquad \Sigma m \cdot \Delta''' = \tfrac{1}{2} c''' \cdot dt \tag{9}$$

übergehen, welche offenbar der analytische Ausdruck des ausgesprochenen Gesetzes sind. — *d.* Bildet eine ebene Figur der Fläche A mit den Coordinatenebenen XY, XZ, YZ und einer Ebene I der Reihe nach die Winkel a', b', c' und w, und bezeichnen α', β', γ' die Winkel von I mit denselben Coordinatenebenen, so ist (93)

$$\text{Co}\, w = \text{Co}\, a' \cdot \text{Co}\, \alpha' + \text{Co}\, b' \cdot \text{Co}\, \beta' + \text{Co}\, c' \cdot \text{Co}\, \gamma' \tag{10}$$

Bezeichnet ferner B' die Projektion von A auf I, während A', A'', A''' die Projektionen von A auf die Coordinatenebenen sind, so hat man (81)

$$B' = A \cdot \text{Co}\, w \qquad A' = A \cdot \text{Co}\, a' \qquad A'' = A \cdot \text{Co}\, b' \qquad A''' = A \cdot \text{Co}\, c'$$

und daher, wenn 10 mit A multipliziert wird,

$$B' = A' \cdot \text{Co}\, \alpha' + A'' \cdot \text{Co}\, \beta' + A''' \cdot \text{Co}\, \gamma' \tag{11}$$

w. z. b. w. — *e.* Hat man noch zwei Ebenen II und III, so erhält man für sie entsprechend 11

$$B'' = A' \cdot \text{Co}\, \alpha'' + A'' \text{Co}\, \beta'' + A''' \cdot \text{Co}\, \gamma'' \qquad B''' = A' \cdot \text{Co}\, \alpha''' + A'' \cdot \text{Co}\, \beta''' + A''' \cdot \text{Co}\, \gamma'''$$

Stehen aber die Ebenen I, II, III zu einander senkrecht, so bestehen zwischen den Cosinus der 9 Winkel α, β, γ die uns aus 93 bekannten Relationen, und mit ihrer Hilfe findet man

$$A' = B' \cdot \text{Co}\, \alpha' + B'' \cdot \text{Co}\, \alpha'' + B''' \cdot \text{Co}\, \alpha'''$$
$$A'' = B' \cdot \text{Co}\, \beta' + B'' \cdot \text{Co}\, \beta'' + B''' \cdot \text{Co}\, \beta''' \qquad A''' = B' \cdot \text{Co}\, \gamma' + B'' \cdot \text{Co}\, \gamma'' + B''' \cdot \text{Co}\, \gamma''' \tag{12}$$

und hieraus $\qquad A'^2 + A''^2 + A'''^2 = B'^2 + B''^2 + B'''^2 \qquad$ **13**

w. z. b. w. — *f.* Aus 13 folgt

$$B' = \sqrt{A'^2 + A''^2 + A'''^2 - B''^2 - B'''^2} \tag{14}$$

und es wird somit B' am grössten, wenn B'' und B''' gleich Null werden, d. h. nach 14 und 12, wenn

$$\text{Co}\, \alpha' = A' : B' \quad \text{Co}\, \beta' = A'' : B' \quad \text{Co}\, \gamma' = A''' : B' \quad \text{wo} \quad B' = \sqrt{A'^2 + A''^2 + A'''^2} \tag{15}$$

Diese Resultate kann man aber offenbar auch auf die durch 9 gegebenen Summen der Projektionen von 2 m-fachen Flächen anwenden, d. h. $A' = c' \cdot dt$, $A'' = c'' \cdot dt$ und $A''' = c''' \cdot dt$ setzen, und hiefür giebt 15

$$B' = C \cdot dt \quad \text{Co}\, \alpha = c' : C \quad \text{Co}\, \beta = c'' : C \quad \text{Co}\, \gamma = c''' : C \quad \text{wo} \quad C = \sqrt{c'^2 + c''^2 + c'''^2} \tag{16}$$

so dass in den Werten für die drei Cosinus die Grösse dt wegfällt oder das ausgesprochene Gesetz wirklich besteht. Da ferner aus 8 hervorgeht, dass, wenn man für irgend eine Zeit die Coordinaten x, y, z sämtlicher Punkte des Systemes und ihre Geschwindigkeiten dx : dt, dy : dt, dz : dt nach den drei Coordinatenaxen kennt, die Grössen c', c'', c''' berechnet werden können,

so kann man auch die entsprechende unveränderliche Ebene wirklich auffinden, und so hat **Laplace** (Méc. cél. III 162) dieselbe für unser Sonnensystem unter der Annahme bestimmt, dass dafür die gemachten Voraussetzungen bestehen, wobei er fand, dass für sie, in Beziehung auf Ekliptik und Frühlingspunkt des Jahres 1750, die Länge des aufsteigenden Knotens 102° 57′ 30″ und die Neigung 1° 35′ 31″ betrage.

114. Die Hauptaxen und die augenblickliche Rotationsaxe. — Versteht man unter **Trägheitsmoment** eines Körpers in Beziehung auf eine Axe die Summe der Produkte jedes Elementes desselben in das Quadrat seines Abstandes von dieser Axe, so giebt es für jeden Körper drei zu einander senkrecht stehende Axen, welche die merkwürdige Eigenschaft haben, dass einer von ihnen das grösste und einer der andern das kleinste Trägheitsmoment zugehört [a]. Man hat diese von **Segner** zuerst aufgefundenen und sodann von **Euler** einlässlich behandelten Axen **Hauptaxen** genannt [b] und speciell gezeigt, dass sie bei einem homogenen Ellipsoide mit dessen geometrischen Hauptaxen zusammenfallen [c]. — Alle in einem gegebenen Zeitmomente ruhenden Punkte eines rotierenden Körpers liegen in einer durch den Schnittpunkt der Hauptaxen gehenden Geraden, der sog. **augenblicklichen Rotationsaxe** (axe instantané de rotation) [d]. Wirken nun auf den Körper keine äussern Kräfte und dreht er sich zu einer gewissen Zeit sehr nahe um eine der beiden Hauptaxen, welchen das grösste und kleinste Trägheitsmoment entspricht, so macht die eigentliche Rotationsaxe im Laufe der Zeit nur kleine und periodisch wiederkehrende Schwankungen um die ursprüngliche Lage und die benachbarte Hauptaxe, — ja es bleibt letztere, wenn sie es Einmal war, beständig Rotationsaxe; entspricht dagegen der benachbarten Hauptaxe das mittlere Trägheitsmoment, so kann die geringste Störung die Rotationsverhältnisse total verändern: Es ist also im ersten Falle die Stabilität gesichert, während im zweiten Falle ein labiler Zustand vorliegt [e].

Zu 114: *a.* Setzt man

$$M' = \int (xY - yX) \cdot dm \qquad M'' = \int (y \cdot Z - z \cdot Y)\, dm \qquad M''' = \int (zX - xZ)\, dm \qquad 1$$

so gehen die Gleichungen 113:7, wenn man die Punkte m durch die Elemente dm eines Körpers m ersetzt, Σ in $\int$ übergehen lässt und das auf die Zeit bezügliche Integral durch einen Accent von dem auf den Körper bezüglichen unterscheidet, in

$$\int' M' \cdot dt = \int \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{dt} \cdot dm \qquad \int' M'' \cdot dt = \int \frac{y \cdot dz - z \cdot dy}{dt} \cdot dm$$
$$\int' M''' \cdot dt = \int \frac{z\,dx - x\,dz}{dt} \cdot dm \qquad 2$$

über. Führt man neue Axen X′ Y′ Z′ ein, welche mit dem Körper unveränderlich verbunden sind, so werden die Coordinaten x′ y′ z′ des Elementes dm von der Zeit unabhängig, dagegen die 9 Grössen a b c, durch welche jene (93)

mit x y z zusammenhängen, mit der Zeit veränderlich. Die (93 : 4) nach dieser Annahme für x, y, dx : dt, dy : dt folgenden Werte in 2 substituierend, erhält man

$$\int' M' \cdot dt = \int \left[\begin{array}{l} \frac{a_1 db_1 - b_1 da_1}{dt} x'^2 + \frac{a_1 db_2 - b_1 da_2 + a_2 db_1 - b_2 da_1}{dt} x' y' + \\ \frac{a_2 db_2 - b_2 da_2}{dt} y'^2 + \frac{a_2 db_3 - b_2 da_3 + a_3 db_2 - b_3 da_2}{dt} y' z' + \\ \frac{a_3 db_3 - b_3 da_3}{dt} z'^2 + \frac{a_1 db_3 - b_1 da_3 + a_3 db_1 - b_3 da_1}{dt} z' x' \end{array} \right] \cdot dm \qquad 3$$

Differenziert man die drei letzten 93 : 17 nach t, so erhält man

$$\begin{aligned} a_1 \frac{da_3}{dt} + b_1 \frac{db_3}{dt} + c_1 \frac{dc_3}{dt} &= - a_3 \frac{da_1}{dt} - b_3 \frac{db_1}{dt} - c_3 \frac{dc_1}{dt} = p \\ a_2 \frac{da_1}{dt} + b_2 \frac{db_1}{dt} + c_2 \frac{dc_1}{dt} &= - a_1 \frac{da_2}{dt} - b_1 \frac{db_2}{dt} - c_1 \frac{dc_2}{dt} = q \qquad 4 \\ a_3 \frac{da_2}{dt} + b_3 \frac{db_2}{dt} + c_3 \frac{dc_2}{dt} &= - a_2 \frac{da_3}{dt} - b_2 \frac{db_3}{dt} - c_2 \frac{dc_3}{dt} = r \end{aligned}$$

wo p, q, r durch die 4 definierte Hilfsgrössen sind. Ferner folgen durch Differentiation der drei letzten 93 : 16

$$a_1 \frac{da_1}{dt} + b_1 \frac{db_1}{dt} + c_1 \frac{dc_1}{dt} = a_2 \frac{da_2}{dt} + b_2 \frac{db_2}{dt} + c_2 \frac{dc_2}{dt} = a_3 \frac{da_3}{dt} + b_3 \frac{db_3}{dt} + c_3 \frac{dc_3}{dt} = 0 \qquad 5$$

also geht 3, wenn man nach 93 : 18 die Werte von $a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3$ und dann noch die Hilfsgrössen

$$\begin{array}{lll} A = \int (y'^2 + z'^2) \cdot dm & B = \int (z'^2 + x'^2) \cdot dm & C = \int (x'^2 + y'^2) \cdot dm \\ F = \int y' z' \cdot dm & G = \int z' x' \cdot dm & H = \int x' y' \cdot dm \qquad 6 \\ P = Ar - Gq - Hp & Q = Bp - Hr - Fq & R = Cq - Fp - Gr \end{array}$$

einführt, in $\int' M' \cdot dt = c_1 P + c_2 Q + c_3 R$

über, und analog erhält man 7

$$\int' M'' \cdot dt = a_1 P + a_2 Q + a_3 R \qquad \int' M''' \cdot dt = b_1 P + b_2 Q + b_3 R$$

Die Differentiation der drei 7 nach t ergiebt sodann

$$\begin{aligned} M' &= c_1 \frac{dP}{dt} + P \frac{dc_1}{dt} + c_2 \frac{dQ}{dt} + Q \frac{dc_2}{dt} + c_3 \frac{dR}{dt} + R \frac{dc_3}{dt} \\ M'' &= a_1 \frac{dP}{dt} + P \frac{da_1}{dt} + a_2 \frac{dQ}{dt} + Q \frac{da_2}{dt} + a_3 \frac{dR}{dt} + R \frac{da_3}{dt} \\ M''' &= b_1 \frac{dP}{dt} + P \frac{db_1}{dt} + b_2 \frac{dQ}{dt} + Q \frac{db_2}{dt} + b_3 \frac{dR}{dt} + R \frac{db_3}{dt} \end{aligned}$$

und hieraus folgen mit Hilfe von 4, 5 und 93 : 16, 17

$$\begin{aligned} M' \cdot c_1 + M'' \cdot a_1 + M''' \cdot b_1 &= \frac{dP}{dt} - q \cdot Q + p \cdot R \\ M' \cdot c_2 + M'' \cdot a_2 + M''' \cdot b_2 &= \frac{dQ}{dt} - r \cdot R + q \cdot P \qquad 8 \\ M' \cdot c_3 + M'' \cdot a_3 + M''' \cdot b_3 &= \frac{dR}{dt} - p \cdot P + r \cdot Q \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der bis jetzt willkürlichen drei Grössen φ, ψ, θ, von welchen die 9 Grössen a, b, c abhängen, können nun z. B. die drei Bedingungsgleichungen

$$F = 0 \qquad G = 0 \qquad H = 0 \qquad 9$$

festgesetzt werden, zumal dieselben, wenn man in die durch 6 gegebenen

Werte von F, G, H aus 93 substituiert und sodann φ und θ eliminiert, für Tg ψ auf eine Gleichung dritten Grades führen, also immer eine mögliche Lösung ergeben. Die den so bestimmten φ, ψ, θ entsprechenden Axen sind nun diejenigen, welche man **Hauptaxen** genannt hat, da sie nicht nur, wie die Vergleichung der 9 mit den 111:11 ohne weiteres ergiebt, freie Axen sind, sondern sich auch in Beziehung auf die, laut Definition offenbar durch A, B, C gegebenen Trägheitsmomente, auszeichnen: Bezeichnet man nämlich das Trägheitsmoment unsers Körpers in Beziehung auf irgend eine andere Axe, welche man sich immer mit der nicht näher bestimmten Axe der Z zusammenfallend denken kann, mit C', so erhält man mit Hilfe von 6 und 93:4, 5, 16, 17

$$C' = \int (x^2+y^2)\cdot dm = \int [(a_1 x' + a_2 y' + a_3 z')^2 + (b_1 x' + b_2 y' + b_3 z')^2]\, dm =$$
$$= A\cdot Si^2\theta\, Si^2\varphi + B\cdot Si^2\theta\, Co^2\varphi + C\cdot Co^2\theta +$$
$$+ F\cdot Co\varphi\, Si\, 2\theta - G\cdot Si\varphi\, Si\, 2\theta + H\cdot Si\, 2\varphi\, Si^2\theta \qquad \mathbf{10}$$

Sind aber die Axen X' Y' Z' Hauptaxen, so bestehen die 9 und man hat daher mit Hilfe von 93:5

$$C' = A\cdot Si^2\theta\, Si^2\varphi + B\cdot Si^2\theta\, Co^2\varphi + C\cdot Co^2\theta$$
$$= A\cdot Co^2(Z, X') + B\cdot Co^2(Z, Y') + C\cdot Co^2(Z, Z') \qquad \mathbf{11}$$

d. h. es besteht das merkwürdige Gesetz, dass, wenn man jedes der den Hauptaxen entsprechenden Trägheitsmomente mit dem Cosinusquadrate des Winkels multipliziert, welchen die betreffende Hauptaxe mit irgend einer andern Axe bildet, die Summe der Produkte das dieser letztern entsprechende Trägheitsmoment giebt. Ist sodann z. B. $A > B > C$, so folgt aus 11 offenbar

$$C' < A\,(Si^2\theta\, Si^2\varphi + Si^2\theta\, Co^2\varphi + Co^2\theta) = A$$
$$C' > C\,(Si^2\theta\, Si^2\varphi + Si^2\theta\, Co^2\varphi + Co^2\theta) = C$$

d. h. die oben ausgesprochene Haupteigenschaft der Hauptaxen. — *b.* Joh. Andreas **Segner** (Pressburg 1704 — Halle 1777; Prof. phys. et math. Göttingen und Halle) gab, als eine Art Nachtrag zu „Euler, Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre (Mém. Berl. 1749—50)“ und unter „Turbo“ einen sich um eine Axe drehenden Körper verstehend, in seinem „Specimen theoriæ turbinum“. Halæ 1755 in 4.“ eine erste Theorie der freien Axen und Hauptaxen, welche sodann **Euler** in seinen „Recherches sur la connaissance mécanique des corps (Mém. Berl. 1758)“ weiter ausführte und verallgemeinerte. — *c.* Für ein homogenes Ellipsoid, dessen Axen 2a, 2b, 2c mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, werden die drei Integrale F, G, H notwendig gleich Null, weil sich zu jedem der in ihnen begriffenen Elemente immer ein gleich grosses, entgegengesetzt liegendes findet. Es fallen also die geometrischen Axen mit den Hauptaxen zusammen und zugleich lassen sich in diesem Falle die Integrale A, B, C verhältnismässig leicht berechnen, wobei man

$$A = \frac{b^2+c^2}{5}\cdot M \qquad B = \frac{a^2+c^2}{5}\cdot M \qquad C = \frac{a^2+b^2}{5}\cdot M \qquad \mathbf{12}$$

findet, sofern M der Masse $\frac{4}{3} a\cdot b\cdot c\cdot \pi\cdot \varrho$ des Ellipsoides entspricht; wenn daher $a < b < c$, so ist $A > B > C$. Etc. — *d.* Die Geschwindigkeiten $dx:dt$, $dy:dt$, $dz:dt$ des Elementes dm zur Zeit t nach den Axen sind offenbar für alle Punkte des Körpers, welche während des Zeitelementes dt ruhen, gleich Null, und wenn wir daher (93:4)

$$x'\cdot da_1 + y'\cdot da_2 + z'\cdot da_3 = x'\cdot db_1 + y'\cdot db_2 + z'\cdot db_3 = x'\cdot dc_1 + y'\cdot dc_2 + z'\cdot dc_3 = 0 \qquad \mathbf{13}$$

setzen und aus diesen Gleichungen x', y', z' ausrechnen, so erhalten wir die Coordinaten dieser ruhenden Punkte. Multiplizieren wir aber die 13 der Reihe

nach entweder mit $a_3\, b_3\, c_3$ oder mit $a_2\, b_2\, c_2$, und addieren je die Produkte, so erhalten wir mit Hilfe von 4 und 5

$$y' = \frac{p}{r} \cdot x' \qquad z' = \frac{q}{r} \cdot x' \qquad \mathbf{14}$$

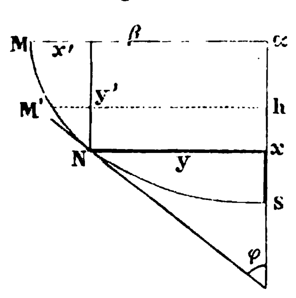
und können somit schliessen, dass diese ruhenden Punkte in einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, der sog. **augenblicklichen Rotationsaxe,** liegen, ja (93) nach

$$\text{Co}\,\alpha = \frac{r}{s} \qquad \text{Co}\,\beta = \frac{p}{s} \qquad \text{Co}\,\gamma = \frac{q}{s} \quad \text{wo} \quad s = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \qquad \mathbf{15}$$

die Winkel dieser Geraden mit den Axen X' Y' Z' berechnen. — *e.* Die schon von **Euler** eingeführten Hilfsgrössen p, q, r haben, ausser der in 15 liegenden Bedeutung, noch manche andere merkwürdige Eigenschaften und es könnte überhaupt diesem Abschnitte noch vieles beigefügt werden; ich muss mir jedoch hier versagen, weitere betreffende Entwicklungen vorzunehmen, und mich auf die bereits oben gegebenen Andeutungen beschränken.

115. Die Brachystochrone und Isochrone. — Als Beispiel für die Behandlung mechanischer Aufgaben mag das Aufsuchen der Linie des kürzesten Falles oder der sog. **Brachystochrone** folgen [a]. Dasselbe ergiebt, dass nicht etwa die Gerade, sondern ein gewisser Cykloidenbogen diese Eigenschaft besitzt [b], und zugleich zeigt sich, dass die vom Falle in Anspruch genommene Zeit keine Veränderung erleidet, wenn man den Fall in einem andern Punkte der Cykloide beginnen lässt, dass also letztere auch als **Isochrone** (Tautochrone) bezeichnet werden darf [c].

Zu 115: *a.* Die Aufgabe, die Brachystochrone zu bestimmen, wurde 1696 von Johannes **Bernoulli** den Geometern vorgelegt (vgl. Acta Erud. 1696 VI) und alsbald, ausser von ihm selbst, durch **Newton, Leibnitz,** l'**Hospital** und seinen Bruder Jakob **Bernoulli** gelöst (vgl. Acta Erud. 1697 V), sowie später unter anderm auch noch von Nic. **Fatio,** dessen betreffende Schrift „Lineæ brevissimi descensus investigatio geometrica duplex. Londini 1699 (24 p.) in 4." noch dadurch eine besondere Bedeutung gewonnen hat, dass sie den Keim des Streites zwischen Fatio und Leibnitz und damit den Anfang der bekannten Polemik (vgl. 41 : a) zwischen den Engländern und Deutschen enthält. — *b.* Bezeichnet v die Geschwindigkeit, welche ein von M aus längs einer Kurve MS fallender Punkt bei Ankunft in N erhalten hat, und φ den Winkel, welchen die Tangente in N mit der Abscissenaxe bildet, so dass $g \cdot \text{Co}\,\varphi$ die nunmehr auf den Punkt wirkende Beschleunigungskomponente ist, so hat man (112 : 1, 2), da das Bogenelement ds in Beziehung auf den Anfangspunkt S der Coordinaten negativ ist,



$$v \cdot dv = -\frac{ds}{dt} \cdot g\,\text{Co}\,\varphi \cdot dt = -g \cdot dx$$

folglich durch Integration $\quad v^2 = -2gx + \text{Const.}$

also auch, wenn der Punkt keine Anfangsgeschwindigkeit besass,

$$0 = -2g\alpha + \text{Const.} \qquad \text{und somit} \qquad v^2 = 2g(\alpha - x) \qquad \mathbf{1}$$

Es hat also der Punkt beim Fallen von M nach N genau dieselbe Geschwindigkeit erhalten, welche er (111 : 2) beim freien Falle durch dieselbe Höhe erreicht hätte, und überdies muss (112 : 1) die Gleichheit

$$\sqrt{2g(\alpha - x)} = -\frac{ds}{dt} \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{2g}\cdot dt = -\frac{ds}{\sqrt{\alpha - x}} \qquad 2$$

bestehen, welche man, wenn t die zum Falle von M nach S nötige Zeit bezeichnet, auch durch

$$t = \int_0^\alpha X\cdot u\cdot dx \quad \text{wo} \quad u = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \quad \text{und} \quad X = \frac{1}{\sqrt{2g(\alpha - x)}} \qquad 3$$

ist, ersetzen kann. Für die Brachystochrone muss nun t einen Minimumswert erhalten, so dass, falls t' und u' die Werte bezeichnen, welche t und u annehmen, wenn y für eine andere Verbindung von M und S in $y + i\cdot\delta y$ übergeht, beständig

$$t' - t = \int_0^\alpha X\cdot(u' - u)\cdot dx \qquad 4$$

einen positiven Wert erhält, wobei i als eine unendlich kleine konstante Grösse zu denken ist, δy aber als eine willkürliche Funktion von x, welche bloss der Bedingung genügen muss, sowohl für $x = 0$ als für $x = \alpha$ zu verschwinden. Denkt man sich nun $u' - u$ in eine nach den Potenzen von i fortschreitende Reihe entwickelt, und ist das erste Glied dieser Reihe gleich $i\cdot\delta u$, so ist das erste, das Vorzeichen bestimmende Glied in 4 offenbar $i\int X\cdot\delta u\cdot dx$, und es muss daher dieses Integral verschwinden, da sonst $t' - t$ mit i das Vorzeichen wechseln würde. Anderseits hat man, wenn

$$\frac{dy}{dx} = w \quad \text{also} \quad u = \sqrt{1 + w^2} = f(w) \quad \text{und} \quad \frac{du}{dw} = \frac{w}{u}$$

gesetzt wird, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$u' = f\left(w + i\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right) = u + i\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{du}{dw} + \cdots = u + i\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{u} + \cdots$$

also muss

$$\delta u = \frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{u} \quad \text{und} \quad 0 = \int_0^\alpha \frac{X}{u}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot dx$$

sein, folglich auch (45 : 4)

$$0 = \left[\frac{X}{u}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\delta y\right]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{d\left[\frac{X}{u}\cdot\frac{dy}{dx}\right]}{dx}\cdot\delta y\cdot dx$$

Nun ist das erste Glied Null, da δy an beiden Grenzen verschwindet, und das zweite kann, da δy eine willkürliche Funktion von x ist, nur Null werden, wenn

$$\frac{d\left[\frac{X}{u}\cdot\frac{dy}{dx}\right]}{dx} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{X}{u}\cdot\frac{dy}{dx} = C$$

ist, wo C eine Konstante bezeichnet, also muss

$$\frac{dy}{dx} = C\cdot\sqrt{2g(\alpha - x)}\cdot\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \qquad \text{oder} \qquad dy = \frac{C(\alpha - x)\sqrt{2g}\cdot dx}{\sqrt{(\alpha - x) - 2gC^2\cdot(\alpha - x)^2}}$$

sein. Führt man $y = \beta - x'$ und $x = \alpha - y'$ ein, d. h. verlegt man den Anfangspunkt nach M und bezieht sich auf eine horizontale Axe, so geht der letzte Ausdruck in

$$dx' - \frac{y'\cdot dy'}{\sqrt{2\gamma\cdot y' - y'^2}} \qquad \text{wo} \qquad \gamma = \frac{1}{4gC^2} \qquad 5$$

ist, über. Da nun dieser Ausdruck einerseits offenbar die Differentialgleichung

der Brachystochrone ist und anderseits aus den Beziehungen an der gemeinen Cykloide (80 : 7, 3)

$$dx = y \cdot dv = \frac{y \cdot dy}{a \cdot \text{Si}\, v} = \frac{y\, dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

folgt, so ist der Beweis geleistet, dass die Brachystochrone eine gemeine Cykloide ist, deren Anfangspunkt in M liegt und für welche γ den Radius des erzeugenden Kreises darstellt. — *c.* Wird der schwere Punkt z. B. in M' auf die Cykloidenbahn gelegt, so braucht er eine gewisse Zeit t, um durch den Bogen M' S = s oder durch die Höhe h zu fallen, und zwar erhält man einerseits nach 80: 6, 3 und anderseits nach unserer 2 successive die Beziehungen

$$s = MS - MM' = 4a - 8a\, \text{Si}^2 \frac{v}{4} = 4a\, \text{Co} \frac{v}{2}$$

$$s^2 = 8a^2 (1 + \text{Co}\, v) = 8a(2a - y') = 8ax \qquad s \cdot ds = 4a \cdot dx$$

$$ds = \frac{4a \cdot dx}{s} = \frac{dx}{\text{Co}\, {}^1\!/_2\, v} = dx \cdot \sqrt{\frac{2a}{x}}$$

$$\sqrt{2g} \cdot dt = -\frac{ds}{\sqrt{h - x}} = -\sqrt{2a} \cdot \frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}}$$

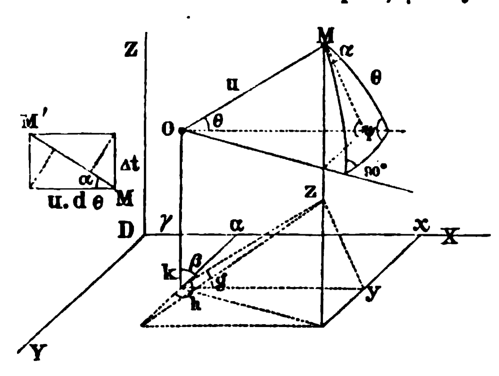
aus deren letzter nach 46 : 9

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\text{Asi} \frac{2x - h}{h} \right]_h^0 = \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\text{Asi}(-1) - \text{Asi}(+1) \right] = \pi \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} \qquad 6$$

folgt. Es ist also wirklich, wie schon **Huygens** fand, die Fallzeit von der Fallhöhe, oder also von der Wahl des Punktes M', unabhängig.

116. Die Anziehung des Ellipsoides. — Als ferneres Beispiel gebe ich die Bestimmung der Anziehung eines homogenen Ellipsoides auf einen Punkt, wobei die beiden Fälle, wo letzterer innerhalb oder ausserhalb des anziehenden Ellipsoides liegt, unterschieden werden müssen: Liegt der Punkt innerhalb, so ergiebt sich der wichtige Satz, dass nur diejenige Masse des Ellipsoides in Betracht fällt, welche innerhalb des durch den Punkt gelegten ähnlichen Ellipsoides liegt [a], — und mit Hilfe der bei seiner Ableitung erhaltenen Beziehungen lassen sich z. B. die für uns besonders wichtigen Wirkungen eines an den Polen abgeplatteten Rotationsellipsoides durch bequeme Formeln darstellen [b]. Durch weitere Rechnungen findet man sodann den merkwürdigen Hilfssatz, dass, wenn zwei homogene Ellipsoide denselben Mittelpunkt und dieselben Brennpunkte haben, die Anziehung, welche das eine längs irgend einer der Axen auf einen Punkt der Oberfläche des andern ausübt, sich zu der Anziehung des andern nach dieser Axe auf den korrespondierenden Punkt des ersten ebenso verhält, wie sich die Produkte der zwei übrigen Axen verhalten [c]. Dieser nach **Ivory** benannte Hilfssatz führt nun offenbar den Fall des äussern Punktes in einfachster Weise auf denjenigen des innern Punktes zurück [d] und es ist somit unser Problem vollständig erledigt [e].

Zu 116: *a.* Bezeichnet dm die Masse eines die Coordinaten x, y, z besitzenden Elementes M eines Körpers, μ diejenige eines in diesem Körper liegenden Punktes O der Coordinaten α, β, γ, f die Anziehung der Masse 1 in der Distanz 1, und F die dem Produkte der Massen direkt und dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportionale Anziehung von M auf O, so hat man



$$F = \frac{f \cdot \mu \cdot dm}{u^2}$$

und somit, wenn g, h, k die Winkel von u mit den Axen sind, also

$$\mathrm{Co}\,\theta = \mathrm{Co}\,g = \frac{x-\alpha}{u} \qquad \mathrm{Si}\,\theta \cdot \mathrm{Co}\,\psi = \mathrm{Co}\,h = \frac{y-\beta}{u} \qquad \mathrm{Si}\,\theta \cdot \mathrm{Si}\,\psi = \mathrm{Co}\,k = \frac{z-\gamma}{u} \qquad \mathbf{1}$$

ist, für die Komponenten der Anziehung des ganzen Körpers auf O

$$A = f\mu \iiint \frac{x-\alpha}{u^3} dm \qquad B = f\mu \iiint \frac{y-\beta}{u^3} dm \qquad C = f\mu \iiint \frac{z-\gamma}{u^3} dm \qquad \mathbf{2}$$

Das durch dm repräsentierte Körperelement können wir uns nun als ein rechtwinkliges Parallelepiped denken, dessen Höhe du ist und dessen dazu senkrechte Grundfläche die Seiten $u \cdot d\theta$ und Δt hat, wo nach 92 die letztern Grössen die Beziehung

$$u \cdot d\theta \cdot \mathrm{Co}\,\alpha + \Delta t \cdot \mathrm{Si}\,\alpha = MM' = \Delta(MN) = u\,(\mathrm{Co}\,\alpha \cdot d\theta + \mathrm{Si}\,\theta \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot d\psi)$$

eingehen müssen, so dass $\Delta t = u \cdot \mathrm{Si}\,\theta \cdot d\psi$ folgt. Bezeichnet daher ϱ die Dichte des als homogen angenommenen Körpers, so ist

$$dm = \varrho \cdot u\,d\theta \cdot u\,\mathrm{Si}\,\theta\,d\psi \cdot du = \varrho \cdot u^2 \cdot du \cdot dw \quad \text{wo} \quad dw = \mathrm{Si}\,\theta \cdot d\theta \cdot d\psi \qquad \mathbf{3}$$

das der Grundfläche des Parallelepipeds entsprechende Flächenelement einer aus O mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche bezeichnet. Mit Hilfe von 1 und 3 gehen aber die 2 in

$$A = f\mu\varrho \iiint \mathrm{Co}\,g \cdot du \cdot dw \qquad B = f\mu\varrho \iiint \mathrm{Co}\,h \cdot du \cdot dw \qquad C = f\mu\varrho \iiint \mathrm{Co}\,k \cdot du \cdot dw \qquad \mathbf{4}$$

über. Ist nun r der Wert, welchen u annimmt, wenn man OM bis an die Oberfläche des Körpers verlängert, so sind die auf u bezüglichen Integrale offenbar von $u = 0$ bis $u = r$ auszudehnen, und man erhält somit

$$A = f\mu\varrho \iint r \cdot \mathrm{Co}\,g \cdot dw \qquad B = f\mu\varrho \iint r \cdot \mathrm{Co}\,h \cdot dw \qquad C = f\mu\varrho \iint r \cdot \mathrm{Co}\,k \cdot dw \qquad \mathbf{5}$$

Anderseits hat man nach 1, wenn x, y, z jenem Punkte der Oberfläche zugehören sollen

$$x = \alpha + r \cdot \mathrm{Co}\,g \qquad y = \beta + r \cdot \mathrm{Co}\,h \qquad z = \gamma + r \cdot \mathrm{Co}\,k \qquad \mathbf{6}$$

und, wenn wir als Körper ein Ellipsoid wählen, dessen Mittelpunkt in D liegt und dessen Halbaxen a, b, c mit den Axen X Y Z zusammenfallen, so ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \mathbf{7}$$

Substituiert man aber aus 6 in 7 und setzt

$$p = \frac{\mathrm{Co}^2 g}{a^2} + \frac{\mathrm{Co}^2 h}{b^2} + \frac{\mathrm{Co}^2 k}{c^2} \qquad q = \frac{\alpha\,\mathrm{Co}\,g}{a^2} + \frac{\beta\,\mathrm{Co}\,h}{b^2} + \frac{\gamma\,\mathrm{Co}\,k}{c^2} \qquad l = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} \qquad \mathbf{8}$$

so erhält man

$$p r^2 + 2 q r = l \qquad \text{oder} \qquad r = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + l p}}{p} \qquad \mathbf{9}$$

wo jedoch, da p sicher positiv ist und r für einen im Innern des Körpers liegenden Punkt ebenfalls positiv werden muss, nur das obere Zeichen in Betracht kommen kann. Führt man den so reduzierten Wert unter Berücksichtigung von 8 in 5 ein, so erhält man

$$A = f\mu\varrho \left[\iint \frac{1}{p}\sqrt{q^2 + l p}\cdot Co\, g \cdot dw - \frac{\alpha}{a^2}\iint \frac{Co^2 g}{p}\cdot dw - \right. \\ \left. - \frac{\beta}{b^2}\iint \frac{Co\, g\cdot Co\, h}{p}\cdot dw - \frac{\gamma}{c^2}\iint \frac{Co\, g \cdot Co\, k}{p}\cdot dw \right]$$

wo jedoch von den 4 Doppelintegralen das erste verschwindet, weil sich zu jedem Elemente ein zweites findet, das ihm in Beziehung auf O diametral gegenübersteht und für welches daher die Grösse des Gliedes dieselbe bleibt, während der Faktor Co g das Zeichen wechselt, — und ebenso das dritte und vierte verschwinden, weil sich für dieselben Werte von h und k zwei Elemente finden, für welche g supplementäre Werte annimmt. Das entsprechende hat bei B und C statt, und man behält so schliesslich

$$A = -\frac{f\mu\varrho\alpha}{a^2}\iint \frac{Co^2 g}{p}\cdot dw \qquad B = -\frac{f\mu\varrho\beta}{b^2}\iint\frac{Co^2 h}{p}\cdot dw \\ C = -\frac{f\mu\varrho\gamma}{c^2}\iint\frac{Co^2 k}{p}\cdot dw \tag{10}$$

Führt man in 8' und 10' nach 1 und 3 die θ und ψ ein, so erhält man

$$a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot p = b^2\cdot c^2\cdot Co^2\theta + a^2(b^2\cdot Si^2\psi + c^2 Co^2\psi)\cdot Si^2\theta \tag{11}$$

$$A = -\frac{f\mu\varrho\alpha}{a^2}\iint\frac{Co^2\theta\cdot Si\,\theta\cdot d\theta\cdot d\psi}{p} \tag{12}$$

wo die beiden Integrationen eigentlich, um alle Radien OM zu berücksichtigen, von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$ und von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ auszudehnen sind; da jedoch sowohl $Co^2\theta\cdot Si\,\theta$ als p für θ und $\pi - \theta$, und ebenso p für ψ und $\pi \pm \psi$ dieselben Werthe annehmen, so wird es genügen, jede nur von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ vorzunehmen und sodann nachträglich das Ergebnis der erstern zu verdoppeln und dasjenige der zweiten zu vervierfachen. Setzt man nun

$$Tg\,\psi = \varphi \quad \text{also} \quad d\psi = \frac{d\varphi}{1+\varphi^2} \qquad Si^2\psi = \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} \qquad Co^2\psi = \frac{1}{1+\varphi^2}$$

und $\quad c\sqrt{b^2 Co^2\theta + a^2 Si^2\theta} = m \qquad b\sqrt{c^2 Co^2\theta + a^2 Si^2\theta} = n$

so erhält man mit Hilfe von 11 und 46 : 3''

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi}{p} = a^2\cdot b^2\cdot c^2\int_0^\infty\frac{d\varphi}{m^2+n^2\varphi^2} = a^2\cdot b^2\cdot c^2\left[\frac{1}{m\cdot n}\cdot Atg\frac{n}{m}\varphi\right]_0^\infty = \frac{a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot\pi}{2\,m\,n}$$

und somit, wenn dieser Wert mit Berücksichtigung des oben Gesagten in 12 eingeführt, sowie für B und C in entsprechender Weise operiert wird,

$$A = -4\pi f\mu\varrho\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b\cdot c\cdot Co^2\theta\cdot Si\,\theta\cdot d\theta}{\sqrt{(b^2 Co^2\theta + a^2 Si^2\theta)\,(c^2 Co^2\theta + a^2 Si^2\theta)}}$$

$$B = -4\pi f\mu\varrho\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cdot c\cdot Co^2\theta\cdot Si\,\theta\cdot d\theta}{\sqrt{(a^2 Co^2\theta + b^2 Si^2\theta)\,(c^2 Co^2\theta + b^2 Si^2\theta)}} \tag{13}$$

$$C = -4\pi f\mu\varrho\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cdot b\cdot Co^2\theta\cdot Si\,\theta\cdot d\theta}{\sqrt{(b^2 Co^2\theta + c^2 Si^2\theta)\,(a^2 Co^2\theta + c^2 Si^2\theta)}}$$

Das negative Zeichen zeigt, dass die Anziehungswirkung des Ellipsoides auf einen in seinem Innern liegenden Punkt in der Tendenz besteht, denselben

dem Mittelpunkte zu nähern. Wenn man ferner in den 13 die Grössen a, b, c in $a(1 \pm \delta)$, $b(1 \pm \delta)$, $c(1 \pm \delta)$ übergehen lässt, d. h. dem Ellipsoide ein ähnliches Ellipsoid substituiert, so bleiben die A, B, C unverändert, so lange nur die übrigen Bedingungen dieselben bleiben, namentlich O dadurch nicht ausserhalb zu liegen kömmt, womit offenbar der ausgesprochene wichtige Satz bewiesen ist. — ***b.*** Ist nämlich $b = a$ und $c = a\sqrt{1-e^2}$ und führen wir

$$\mathrm{Co}\,\theta = x \qquad \text{und} \qquad m = \tfrac{4}{3}a^3 \cdot \sqrt{1-e^2}\,\varrho\,\pi \qquad \textbf{14}$$

ein, wo (98:6) m die Masse des anziehenden Körpers bezeichnet, so erhalten wir aus 13 mit Hilfe von 46:12″, 11″

$$\frac{A}{\alpha} = -\frac{3m\mu f}{a^3}\int_0^1 \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{1-e^2x^2}} = -\frac{3m\mu f}{2a^3e^3}\left[\mathrm{Atg}\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} - e\sqrt{1-e^2}\right] = \frac{B}{\beta} \qquad \textbf{15}$$

$$\frac{C}{\gamma} = -\frac{3m\mu f}{a^3\sqrt{1-e^2}}\int_0^1 \frac{x^2 \cdot dx}{(1-e^2)+e^2x^2} = -\frac{3m\mu f}{a^3e^3}\left[\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} - \mathrm{Atg}\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right] \qquad \textbf{16}$$

oder für ein kleines e mit Hilfe von 40:17 und des binomischen Lehrsatzes

$$\frac{A}{\alpha} = -\frac{m\mu f}{a^3}\left[1 + \tfrac{3}{10}e^2\right] = \frac{B}{\beta} \qquad \frac{C}{\gamma} = -\frac{m\mu f}{a^3}\left[1 + \tfrac{9}{10}e^2\right] \qquad \textbf{17}$$

— ***c.*** Nach 2 ist

$$A = f\mu \iiint \frac{x-\alpha}{u^3} \cdot dm \qquad \text{wo} \qquad u^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 \qquad \textbf{18}$$

Setzt man hier $x = ax'$, $y = by'$, $z = cz'$, so dass nach 7

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \qquad \textbf{19}$$

und

$$dm = \varrho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = abc\varrho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz' \qquad \textbf{20}$$

so geht 18 in

$$A = f\mu\varrho bc \iiint \frac{a(ax'-\alpha)\,dx' \cdot dy' \cdot dz'}{[(ax'-\alpha)^2 + (by'-\beta)^2 + (cz'-\gamma)^2]^{3/2}} \qquad \textbf{21}$$

über. Nun ist aber

$$\frac{d[(ax'-\alpha)^2 + (by'-\beta)^2 + c(z'-\gamma)^2]^{-1/2}}{dx'} = -\frac{a(ax'-\alpha)}{[(ax'-\alpha)^2 + (by'-\beta)^2 + (cz'-\gamma)^2]^{3/2}}$$

und wenn man daher in 21 die Integration in Beziehung auf x′ zwischen den dafür aus 19 folgenden Grenzen $-x_1$ und $+x_1$ ausführt, so erhält man

$$A = -f\mu\varrho bc\left[\begin{array}{l}\displaystyle\iint \frac{dy' \cdot dz'}{\sqrt{(ax_1-\alpha)^2 + (by'-\beta)^2 + (cz'-\gamma)^2}} \\ \displaystyle -\iint \frac{dy' \cdot dz'}{\sqrt{(ax_1+\alpha)^2 + (by'-\beta)^2 + (cz'-\gamma)^2}}\end{array}\right] \qquad \textbf{22}$$

wo jedes der Doppelintegrale auf alle Elemente der durch 19 bestimmten Halbkugel des Radius 1 auszudehnen ist. Führt man nun wieder die frühern Polarcoordinaten θ und ψ ein, sowie das Flächenelement dw, von welch' letzterm $dy' \cdot dz'$ die Projektion auf YZ darstellen muss, so ist analog 1 und mit Hilfe von 3

$$x_1 = \mathrm{Co}\,\theta \quad y' = \mathrm{Si}\,\theta \cdot \mathrm{Co}\,\psi \quad z' = \mathrm{Si}\,\theta \cdot \mathrm{Si}\,\psi \quad dy' \cdot dz' = dw \cdot \mathrm{Co}\,\theta = \mathrm{Co}\,\theta \cdot \mathrm{Si}\,\theta \cdot d\theta \cdot d\psi \qquad \textbf{23}$$

während die Integrationsgrenzen $\theta = 0$ bis $\tfrac{1}{2}\pi$, $\psi = 0$ bis 2π anzuwenden sind. Bedenkt man überdies, dass, wenn man im 2. Doppelintegral θ durch $\pi - \theta'$, also die betreffenden Grenzen durch $\theta' = \pi$ bis $\tfrac{1}{2}\pi$ ersetzt, sein Nenner dem des ersten entsprechend wird, also das zweite sich mit dem ersten zusammenfassen lässt, indem man die obere Grenze für θ bis π ausdehnt, so erhält man schliesslich

$$A = -f\mu\varrho bc \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Co}\,\theta \cdot \mathrm{Si}\,\theta \cdot d\theta \cdot d\psi}{R} \qquad \textbf{24}$$

wo

$$R^2 = (a \cdot \mathrm{Co}\,\theta - \alpha)^2 + (b\,\mathrm{Si}\,\theta \cdot \mathrm{Co}\,\psi - \beta)^2 + (c \cdot \mathrm{Si}\,\theta \cdot \mathrm{Si}\,\psi - \gamma)^2$$

ist. Entsprechend erhält man offenbar für die Anziehung eines zweiten Ellipsoides derselben Dichte ϱ, aber der Axen $a_1\, b_1\, c_1$ auf einen Punkt O' derselben Masse μ, aber der Coordinaten $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$

$$A_1 = -f\mu\varrho\, b_1\, c_1 \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Co}\,\theta \cdot \mathrm{Si}\,\theta \cdot d\theta \cdot d\psi}{R_1} \qquad \mathbf{25}$$

wo

$$R_1{}^2 = (a_1\, \mathrm{Co}\,\theta - \alpha_1)^2 + (b_1\, \mathrm{Si}\,\theta\, \mathrm{Co}\,\psi - \beta_1)^2 + (c_1\, \mathrm{Si}\,\theta \cdot \mathrm{Si}\,\psi - \gamma_1)^2$$

ist. Nimmt man nun an, die beiden Ellipsoide seien homofokal, der Punkt O liege auf dem zweiten, der Punkt O' aber entsprechend auf dem ersten derselben, so hat man nach 98

$$\frac{\alpha_1{}^2}{a^2} + \frac{\beta_1{}^2}{b^2} + \frac{\gamma_1{}^2}{c^2} = 1 \qquad \frac{\alpha^2}{a_1{}^2} + \frac{\beta^2}{b_1{}^2} + \frac{\gamma^2}{c_1{}^2} = 1$$

$$a^2 - a_1{}^2 = b^2 - b_1{}^2 = c^2 - c_1{}^2 \qquad \alpha : \alpha_1 = a_1 : a \qquad \beta : \beta_1 = b_1 : b \qquad \gamma : \gamma_1 = c_1 : c$$

und den ersten beiden dieser Gleichungen, sowie den drei Proportionen, genügen offenbar, wenn p und q ganz beliebige Winkel sind, die Werte

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = a \cdot \mathrm{Co}\,p & \beta_1 = b \cdot \mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Co}\,q & \gamma_1 = c \cdot \mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Si}\,q \\ \alpha = a_1 \cdot \mathrm{Co}\,p & \beta = b_1 \cdot \mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Co}\,q & \gamma = c_1 \cdot \mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Si}\,q \end{array} \qquad \mathbf{26}$$

während aus der dritten Gleichung folgt, dass

$$a^2 = b^2 + h = c^2 + k \quad \text{auch} \quad a_1{}^2 = b_1{}^2 + h = c_1{}^2 + k \qquad \mathbf{27}$$

bedingt. Substituiert man aber aus 26 und 27 für $\alpha\, \beta\, \gamma\, b\, c$ und $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1\, b_1\, c_1$ in 24 und 25, so erhält man $R = R_1$, und somit

$$\frac{A}{A_1} = \frac{b \cdot c}{b_1 \cdot c_1} \quad \text{und analog} \quad \frac{B}{B_1} = \frac{a \cdot c}{a_1 \cdot c_1} \quad \text{sowie} \quad \frac{C}{C_1} = \frac{a \cdot b}{a_1 \cdot b_1} \qquad \mathbf{28}$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist. — *d.* Um die Anziehung auf einen äussern Punkt O zu bestimmen, legt man durch ihn ein zu dem gegebenen Ellipsoide (auf welchem O' dem gegebenen O entsprechen mag) homofokales Ellipsoid, — berechnet nach dem frühern die Anziehung dieses letztern auf O', — und wendet schliesslich die Proportion 28 an. — *e.* Als historische Notiz füge ich bei, dass schon **Maclaurin** in seiner 1740 von der Pariser Akademie gekrönten Abhandlung „De causa physica fluxus et refluxus maris (Pièces de prix IV)" unser Problem in meisterhafter Weise zu behandeln begann, wenn auch sich auf das Rotationsellipsoid und einen innern Punkt beschränkend, — dass sodann 1773 **d'Alembert** (Opusc. math. VI) und **Lagrange** (Mém. Berl.) die Untersuchung auf das Ellipsoid mit drei ungleichen Axen ausdehnten, — dann wieder etwas später **Legendre** (Sav. étrang. X von 1785 und Mém. Par. 1788) und **Laplace** (Mém. Par. 1782 und Méc. cél. II von 1799) auch den schwierigern Fall des äussern Punktes in Angriff nahmen, — und dass endlich **Ivory** in seinem „Memoir on the attractions of homogeneous ellipsoids (Ph. Tr. 1809)" und verschiedenen spätern Abhandlungen mit grossem Scharfsinne betreffende Untersuchungen anstellte und namentlich den nach ihm benannten wunderschönen Satz ableitete, der das Ganze auf Einen Schlag zu einem gewissen Abschlusse brachte. Die oben durchgeführte Behandlung entspricht wesentlich dem Gange, welchen **Poisson** 1833 in seinem „Traité de mécanique" einschlug, wenn ich mir auch im einzelnen einige Abweichungen erlaubte.

VI. Einige Vorkenntnisse aus der Physik.

> **Wir dringen nur bis zu der Wahrheit Pforte, — Verhüllt bleibt, das dahinter brennt, das Licht, — „Ursach und Wirkung" sind nur Täuschungsworte, — Die Wirkung kennen wir, den Urgrund nicht.** *(Bodenstedt.)*

---

117. Einleitendes. — Die Aufgabe, die Naturerscheinungen zu erforschen und, wie man gewöhnlich sagt, zu „erklären" oder, wie man eigentlich sagen sollte, „auf eine möglichst kleine Zahl unerklärbarer Principien oder Grundeigenschaften zurückzuführen", fällt der sog. **Physik** zu, welche dafür auf Beobachtung, Versuch, Messung und Rechnung angewiesen ist und sich aller nicht auf diese Hilfsmittel basierenden Spekulation möglichst enthalten soll[a]. — In den ältesten Zeiten existierte eine Physik nur insofern, als bereits einzelne Erfahrungen, sowie einige Hilfsvorrichtungen für das tägliche Leben vorhanden waren, indem z. B. die Chinesen die Eigenschaften des Magneteisens kannten, die Egypter Wagen, Rollen und dergleichen besassen; dagegen zeigte sich schon bei den Griechen das entschiedene Bestreben, sich teils durch die, namentlich von **Aristoteles** empfohlene Befragung der Natur, auch auf diesem Gebiete allmälig zu orientieren, teils auch die gesammelten Erfahrungen mathematischer Behandlung zu unterwerfen: Nicht nur erfahren wir z. B. von **Pappus**, dass sie bereits die sämtlichen fünf einfachen Maschinen „Hebel, Wellrad, Keil, Schraube und Rolle" kannten, sondern wir wissen auch aus ihren auf uns gekommenen Schriften, dass **Archimedes** die Grundprincipien der Hydrostatik aufstellte, dass **Euklid** und **Ptolemäus** diejenigen der Katoptrik entwickelten, — ja bei letztgenanntem auch Anfänge der Dioptrik vorkamen, und sogar (135), was von besonderm Interesse ist, eine betreffende eigentliche Versuchsreihe. Diese Kenntnisse gelangten sodann teils direkt, teils durch Vermittlung der Araber, bei denen,

namentlich durch **Geber**, auch die Chemie gepflegt wurde [b], allmälig auch nach dem Abendlande, wo sie sich alsbald bedeutend vermehrten: So wurde, um nur einige Beispiele zu geben, im 13. Jahrhundert durch Roger **Baco** die sphärische Abweichung bei Hohlspiegeln entdeckt und durch **Salvino** degli Armati die Fabrikation der Brillen eingeführt, — im 14. Jahrhundert durch den Predigermönch **Theodorich** eine Theorie der Regenbogen gegeben und durch Heinrich v. **Wick** eine erste Gewichtuhr erstellt, — im 15. Jahrhundert durch **Leonardo** da Vinci die Kapillarität nachgewiesen und durch Christoph **Columbus** die örtliche Verschiedenheit der magnetischen Deklination erkannt [c], — im 16. Jahrhundert durch Peter **Henlein** die erste Federuhr konstruiert, durch Georg **Hartmann** das Erzeugen künstlicher Magnete durch Streichen gelehrt und durch Theophrastus **Paracelsus** die Chemie auf einen fruchtbarern Boden übergeleitet [d], — etc. etc. Mit dem Übergange aus dem 16. in das 17. Jahrhundert begann sodann die Reihe der grossen Entdeckungen, welche jetzt schon während bald dreihundert Jahren eine Überraschung der andern folgen liess und die Physik zu einem so umfangreichen und wichtigen Lehrgebäude erhob: **Galilei** fand die Gesetze des freien Falles, den Isochronismus des Pendels und erstellte ein erstes Thermoskop, — während in Holland durch einen glücklichen Fund die ersten „Kyker" entstanden, welchen dann bald das aus **Keplers** optischen Studien hervorgegangene eigentliche Fernrohr, die Entdeckung des Brechungsgesetzes durch **Snellius** und die auf diesem basierende weitere Entwicklung der Dioptrik durch **Descartes** folgte, sowie die Entdeckung der Beugung durch **Grimaldi** und diejenige der doppelten Brechung durch **Bartholinus** [e]. Um die Mitte des 17. Jahrhunderts konstruierte **Toricelli** das Barometer, Otto v. **Guerike** [f] die ersten Luftpumpen und Elektrisiermaschinen, während **Borelli** die Lehre vom Stosse begründete, **Huygens** die Gesetze der Centralbewegung auffand und das Pendel definitiv in die Uhren einführte, **Boyle** und **Mariotte** das nach letzterm benannte Gesetz entdeckten [g], die **Becher** und **Stahl** aber durch Aufstellung der sog. phlogistischen Theorie die Chemie wesentlich förderten [h]. Seit **Newton** vor zweihundert Jahren durch seine klassischen Principien der Naturphilosophie die mathematische Behandlung physikalischer Fragen einführte, welche sodann durch die Daniel **Bernoulli, Euler,** etc., in fruchtbarster Weise gehandhabt wurde, hat die Naturlehre nicht nur durch richtige Verbindung von Theorie und Erfahrung auf allen ihren Gebieten grosse Fortschritte erzielt, sondern auch immer mehr den Charakter einer exakten und ein Ganzes bildenden Wissenschaft erhalten, wie er uns schon im Anfange des 18. Jahrhunderts in den Lehrbüchern

entgegentritt, mit welchen **s'Gravesande** und **Musschenbroek** diesen jetzt so umfangreich gewordenen Zweig der Litteratur inaugurierten[i]. Von speciellen Erfolgen mag beispielsweise aus der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts die Aufstellung der hypsometrischen Grundbeziehung durch **Halley** erwähnt werden, — die Konstruktion eines ersten wirklichen Thermometers durch **Fahrenheit**[k], — die Begründung der Hydrodynamik durch Dan. **Bernoulli**, — die Aufstellung der Grundgesetze der Photometrie durch **Bouguer** und **Lambert**, — die Unterscheidung von Konduktoren und Isolatoren durch **Gray**, — der Nachweis der Bedeutung des Nordlichtes durch **Mairan**, — etc. In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gelang es **Harrison** brauchbare Schiffschronometer, **Dollond** farbenfreie Fernröhren zu konstruieren, — **Lavoisier** schuf die neuere Chemie, während die Gebrüder **Montgolfier** und J. A. **Charles** die Luftschiffahrt einführten[l], — **Deluc** begründete die Meteorologie, indes **Franklin** die atmosphärische Elektricität studierte und die Blitzableiter erfand[m], — **Black** und **Lambert** bereinigten die bisdahin noch ziemlich im Argen liegende Wärmelehre, die durch **Watt** mit schönstem Erfolge Verwendung zur Konstruktion von Dampfmaschinen erhielt[n], — **Galvani** und **Volta** gaben der Elektricitätslehre durch die nach ihnen benannten Entdeckungen eine ungeahnte Bedeutung[o], — etc. Auch das 19. Jahrhundert hat, entsprechend der auf allen Gebieten des menschlichen Wissens fast fieberhaften Thätigkeit, bereits grosse Erfolge aufzuweisen: Die Optik erhielt in den Lehren von der Interferenz und Polarisation durch die **Young**, **Fresnel** und **Malus** neue Gebiete, welche der sog. Undulationstheorie des Lichtes zum Siege über die frühere Emanationstheorie verhalfen[p], — die **Wollaston, Fraunhofer, Kirchhoff**, etc. bildeten die bereits so äusserst wichtig gewordene Spektroskopie aus, — die **Nièpce, Daguerre** und **Talbot** erfanden die Erstellung der Lichtbilder, — die Wärmelehre erfuhr durch die **Lesage**, Rob. **Mayer, Joule**[q], etc., eine gänzliche Umgestaltung von grossen theoretischen und praktischen Folgen, — **Gauss** entwickelte die Theorie des Erdmagnetismus und erstellte die zu seiner sicheren Beobachtung notwendigen Instrumente, — **Ohm, Oersted, Faraday**[r], **Steinheil**, etc., entdeckten die Gesetze der elektrischen Ströme, deren Einwirkung auf die Magnetnadel, das Entstehen von Induktionsströmen, die Leitungsfähigkeit der Erde und überhaupt alle die merkwürdigen Eigenschaften, auf welchen die Telegraphie und Telephonie, die elektrischen Uhren und Registrierapparate, die Erzeugung des elektrischen Lichtes, etc. beruhen, — etc. Dies in kurzem die Geschichte der Physik, mit deren Detail uns die folgenden Nummern noch weiter bekannt machen werden, — immerhin

so, dass nur einzelne, die Astronomie näher berührende Gebiete etwas eingehend behandelt werden können, während für anderes auf die ausgedehnte Speciallitteratur verwiesen werden muss *.

Zu 117: *a.* Physik ist eine Abkürzung der θεωρία φυσική = Naturlehre der Griechen, welche ursprünglich alle Naturwissenschaften umfasste, während sich später die naturhistorischen Fächer, und in der neuern Zeit auch Astronomie, Chemie und Meteorologie, von ihr ablösten. — *b.* Für **Geber** vgl. 87 : a. — Der Ursprung der schon bei den Griechen vorkommenden Bezeichnung χημεία für einige frühe Erfahrungen über Zersetzung und Verwandlung der Körper ist unsicher; doch ist es nach **Humboldt** nicht unwahrscheinlich, dass sie mit dem Namen zusammenhängt, welchen die Egypter ihrem Lande um seiner schwarzen Erde willen beilegten. Wenn sich ferner diese älteste Chemie, die sog. **Alchymie** der Araber, zunächst mit der müssigen Aufgabe befasste, den sog. Stein der Weisen oder ein Mittel zu finden, um unedle Metalle in Gold zu verwandeln, so ist nicht zu vergessen, dass sie beiläufig auch die Processe der Destillation und Sublimation auffand, — Pottasche, Schwefelsäure, Königswasser, Weingeist, etc. herstellte, — und so überhaupt manche wertvolle Thatsache ermittelte. — *c.* Christoforo Colombo oder **Columbus** (Genua 1456 — Valladolid 1506), der berühmte Entdecker von Amerika, erwarb sich überhaupt auch manche Verdienste um die Wissenschaften. — *d.* Georg **Hartmann** (Eckoltsheim bei Bamberg 1489 — Nürnberg 1564) lebte als Mechaniker, später als Vikar an der Sebaldus-Kirche, in Nürnberg. Vgl. seinen Briefwechsel mit Herzog Albrecht von Preussen (Doves Repert. II). — Theophrastus **Paracelsus** (Einsiedeln 1493 — Salzburg 1541) war ein ganz ausgezeichneter Arzt und Naturforscher, dem aber gerade um seines hochberühmten Namens willen aller mögliche Schund unterschoben wurde. Erst die Kritik der neuern Zeit, und voraus die Schrift „**Marx**, Würdigung des Theophrastus von Hohenheim. Göttingen 1842 in 4.“, sind ihm gerecht geworden, anerkennen ihn als Reformator der Arzneikunde und Chemie, und verdanken ihm mit mancher abergläubischen Tradition aufgeräumt zu haben. Vgl. Biogr. III. — *e.* Francesco Maria **Grimaldi** (Bologna 1618 — ebenda 1663) war Jesuit und Prof. math. im Ordenshause zu Bologna. — Erasmus **Bartholinus** (Roeskilde 1625 — Kopenhagen 1698) war Prof. math. et med. Kopenhagen. — *f.* Otto v. Gericke oder **Guerike** (Magdeburg 1602 — Hamburg 1686) war Mathematiker und Jurist, stand als Ingenieur in schwedischen Diensten und war von 1646—81 Bürgermeister von Magdeburg. Vgl. „F. W. **Hoffmann**, Lebensbild. Magdeburg 1874 in 8.“ — *g.* Robert **Boyle** (Lismore in Irland 1627 — London 1691) war ein reicher Gutsbesitzer, der meistens in London residierte und laborierte. Vgl. „Opera. London 1744, 5 Vol. in fol., — Opera varia. Genevæ 1680, 2 Vol. in 4., — und: Th. **Birch**, Life. London 1741 in 8.“ — Edme **Mariotte** (Dijon 1620? — Paris 1684) war erst Prior in der Nähe von Dijon, dann Akad. Paris. Vgl. „Oeuvres. Leyde 1727, 2 Vol. in 4.“ — *h.* Joh. Joachim **Becher** (Speyer 1635 — London 1682) war Prof. med. Mainz. — Georg Ernst **Stahl** (Anspach 1680 — Berlin 1734) war Prof. med. Halle. — Sie wollten die Verschiedenheit der Körper wesentlich durch ihren Gehalt an einem besondern Stoffe, dem **Phlogiston**, erklären; so z. B. sollte das Verkalken der Metalle durch einen Verlust von Phlogiston bewirkt werden, was dann allerdings später durch die Wage widerlegt wurde. — *i.* Die beiden erwähnten Werke sind „Willem Jacob **s'Gravesande** (Herzogenbusch 1688 — Leyden 1742;

Prof. math. et phys. Leyden), Physices elementa mathematica, experimentis confirmata. Lugd. Bat. 1720—21, 2 Vol. in 4. (3. ed. 1742; franz. durch Joncourt 1746 Leyde, — und: Pieter van **Musschenbroek** (Leyden 1692 — ebenda 1761; Prof. math. et phys. Duisburg, Utrecht, Leyden), Elementa physices. Lugd. Bat. 1729 in 4. (viele spätere Auflagen; franz. durch Massuet 1739 Leyde; deutsch durch Gottsched 1747 Leipzig)". Noch früher erschien allerdings „Jacques **Rohault** (Amiens 1620 — Paris 1675; Prof. math. Paris), Traité de physique. Paris 1671, 2 Vol. in 4. (viele Auflagen und Übersetzungen)"; aber dies noch ganz im Sinne von Descartes geschriebene Werk kann den erwähnten nicht an die Seite gesetzt werden. — *k.* Gabriel Daniel **Fahrenheit** (Danzig 1686 — Holland 1736) lebte als Glasbläser meist in England und Holland. Vgl. 151. — *l.* Antoine-Laurent **Lavoisier** (Paris 1743 — ebenda 1794) war Akad. Paris und fiel als Opfer der Schreckensregierung. Vgl. für ihn seine „Oeuvres. Paris 1862—68, 4 Vol. in 4., und: E. **Grimaux,** Paris 1888 in 8." Die durch ihn und seine Zeitgenossen Joseph **Priestley** (Fieldhead in Yorkshire 1733 — Northumberland in Pennsylvanien 1804; Lehrer und Prediger; vgl. Cuvier in Mém. de l'Inst. I 6), Karl Wilhelm **Scheele** (Stralsund 1742 — Köping 1784; Apotheker Köping; vgl. Eisenach, Gotha 1850 in 4.), etc., gemachten Entdeckungen über die Zusammensetzung der Luft und des Wassers, die chemische Verwandtschaft, etc., begründeten die neuere Chemie. — Joseph-Michel **Montgolfier** (Annonay 1740 — Balaruc 1810) war erst, wie sein von ihm unzertrennlicher Bruder Jacques-Etienne (1745—99), Papierfabrikant zu Annonay, dann Administrator des Conservatoire und Akad. Paris. Vgl. **Delambre** in Mém. de l'Inst. I 11. — Jacques-Alexandre-César **Charles** (Beaugency 1746 — Paris 1823) war Prof. phys. und Akad. Paris. — *m.* Benjamin **Franklin** (Governors-Island bei Boston 1706 — Philadelphia 1790) war successive Buchdrucker, General-Postmeister, Gesandter in Paris und Präsident des Kongresses von Pennsylvanien. Vgl. seine „Memoirs. London 1817—18, 3 Vol. in 4., und: Works. Boston 1840, 10 Vol. in 8." — *n.* James **Watt** (Greenock in Schottland 1736 — Heathfield bei Birmingham 1819) war erst Instrumentenmacher in Glasgow, dann Civil-Ingenieur zu Soho bei Birmingham. Vgl. „**Muirhead,** London 1858 in 8." — *o.* Luigi **Galvani** (Bologna 1737 — ebenda 1798) war Prof. med. Bologna. Vgl. „Opere. Bologna 1841 in 4., und: **Alibert,** Bologna 1802 in 8." — Alessandro **Volta** (Como 1745 — ebenda 1827) war Prof. phys. Como und Pavia. Vgl. „Opere. Firenze 1816, 3 Vol. in 8., und: **Zuccala,** Bergamo 1827 in 8." — *p.* Thomas **Young** (Milverton 1773 — London 1829) war Arzt und Prof. phys. London. Vgl. **Arago** in Mém. de l'Inst. II 13. — Augustin-Jean **Fresnel** (Broglie im Dép. de l'Eure 1788 — Ville d'Avray bei Paris 1827) war Ingénieur-en-chef des ponts-et-chaussées. Vgl. „Oeuvres. Paris 1866—70, 3 Vol. in 4." und **Arago** Oeuvres I. — Etienne-Louis **Malus** (Paris 1775 — ebenda 1812) war Akad. Paris. Vgl. **Arago** Oeuvres III. — *q.* George-Louis **Lesage** (Genf 1724 — ebenda 1803) lebte als Privatgelehrter in Genf. Vgl. Biogr. IV. — Julius Robert **Mayer** (Heilbronn 1814 — ebenda 1878) war Stadtarzt in Heilbronn. Vgl. „**Dühring,** Chemnitz 1880 in 8. — James Prescott **Joule** (Manchester 1818 geb.) lebt als Brauer in Salford bei Manchester. — *r.* Christian **Oersted** (Rudkjöbing auf Langeland 1777 — Kopenhagen 1851) war Pharmaceut, dann Prof. phys. Kopenhagen. Vgl. El. de **Beaumont** in Mém. de l'Inst. II 34. — Michael **Faraday** (Newington bei London 1791 — London 1867) schwang sich vom Buchbinderlehrling zum Prof. chem. London auf. Vgl. „**Bence-Jones,** London 1870, 2 Vol. in 8." — *s.* Aus der reichen Litteratur füge ich noch bei: „Joh. Friedrich **Gmelin** (Tübingen 1748 — Göttingen 1804;

Prof. med. et chem. Tübingen und Göttingen; Enkel, Sohn, Neffe und Vater verdienter Chemiker), Geschichte der Chemie. Göttingen 1797—99, 3 Bde. in 8., — Joh. Karl **Fischer** (Altstädt 1760 — Greifswalde 1833; Prof. phys. et math. Dortmund und Greifswalde), Geschichte der Physik. Göttingen 1801—8, 8 Bde. in 8., — Claude-Mathias **Pouillet** (Cusance 1790 — Paris 1868; Prof. phys. und Akad. Paris), Eléments de physique expérimentale et de météorologie. Paris 1827, 2 Vol. in 8. (7. éd. 1856; deutsch von Joh. Müller, Braunschweig 1847 und später), — Gustav Theodor **Fechner** (Gross-Särchen in der Lausitz 1801 — Leipzig 1887; Prof. phys. Leipzig), Repertorium der Physik. Leipzig 1832, 3 Vol. in 8., — Heinrich Wilhelm **Dove** (Liegnitz 1803 — Berlin 1879; Prof. phys. Berlin), Repertorium der Physik. Berlin 1837—46, 7 Bde. in 8., — Hermann **Kopp** (Hanau 1817 geb.; Prof. phys. et chem. Giessen und Heidelberg), Geschichte der Chemie. Braunschweig 1843—47, 4 Bde. in 8. (seither noch weitere Beiträge), — **Mossotti**, Lezioni di fisica matematica. Firenze 1843—45, 2 Vol. in 8., — Albert **Mousson** (Solothurn 1805 geb.; Prof. phys. Zürich), Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. Zürich 1858—63, 3 Bde. in 8. (3. A. 1879 bis 1883), — Adolf **Wüllner** (Düsseldorf 1835 geb.; Prof. phys. Aachen), Lehrbuch der Experimentalphysik. Leipzig 1862, 2 Bde. in 8. (4. A. 1882—86, 4 Bde.), — W. **Thomson** and P. G. **Tait**, Natural Philosophy. Oxford 1867 in 8. (2. ed. 1873, 3. ed. in 2 Bdn., Cambridge 1883—86; deutsch durch Helmholtz und Wertheim. Braunschweig 1871), — Gustav **Kirchhoff**, Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik. Leipzig 1876 in 8. (3. A. 1883), — **Poggendorf**, Vorlesungen über die Geschichte der Physik. Leipzig 1879 in 8., — E. **Budde**, Lehrbuch der Physik. Berlin 1879 in 8., — Aug. **Heller**, Geschichte der Physik. Stuttgart 1882—84, 2 Bde. in 8., — Ferd. **Rosenberger**, Geschichte der Physik. Braunschweig 1882—87, 3 Bde. in 8., — **Résal**, Physique mathématique. Paris 1884 in 4., — B. **Weinstein**, Handbuch der physikalischen Massbestimmungen. Berlin 1886—88, 2 Bde. in 8., — E. v. **Meyer**, Geschichte der Chemie. Leipzig 1889 in 8., — etc."

118. Die Eigenschaften der Materie. — Jedes Materielle muss zu jeder Zeit einen bestimmten Raum einnehmen, d. h. ausgedehnt und undurchdringlich sein; ausserdem scheinen Beweglichkeit, Teilbarkeit, Trägheit oder Beharrungsvermögen [a], wechselseitige Anziehung, Porosität und Ausdehnbarkeit allgemeine Eigenschaften der Materie zu sein. Wirkung und Gegenwirkung sind gleich. Die Mitteilung der Bewegung erfordert Zeit. — Jeder Körper lässt sich auf verschiedene Weise (durch mechanische oder chemische Mittel, Auflösen, etc.) in kleinere Teile zerlegen; jedoch nimmt man an, die Teilbarkeit gehe nicht bis ins Unendliche, und nennt die kleinsten Teile **Atome.** Jeder Körper zeigt ferner einen Widerstand gegen das Zerreissen, woraus man schliesst, dass die Atome sich gegenseitig anziehen. Aber auch beim Zusammenpressen tritt ein Widerstand auf; daher nimmt man Gruppen von Atomen, sog. **Molecüle**, an, welche in eine Hülle von Äther eingeschlossen sind, und denkt sich, die Ätherhüllen stossen sich gegenseitig ab, während zwischen ihnen und der zugehörigen Atomgruppe Anziehung

statt habe. Die Summe aller Moleküle eines Körpers stellt seine **Masse** dar. — Die Ausdehnbarkeit zeigt sich zunächst bei Zunahme der Wärme oder Abnahme des Druckes und wird später näher ins Auge gefasst werden. Die wechselseitige Anziehung ist der Masse direkt, dem Quadrate des Abstandes verkehrt proportional. Die Anziehung der Erde heisst **Schwere**, ihre Richtung **vertikal**, die dazu senkrechte Richtung **horizontal**. Die Resultante der auf einen Körper wirkenden Schwerkräfte nennt man **absolutes Gewicht**, das absolute Gewicht der Volumeneinheit **specifisches Gewicht** (Eigengewicht), das Verhältnis des specifischen Gewichtes eines Körpers zu demjenigen des reinen Wassers **Dichte** des erstern. Als Gewichtseinheit dient das Gewicht eines Kubikcentimeters reinen Wassers, das sog. Gramm, so dass das Gewicht der Volumeneinheit (des Kubikmeters) eine Million Gramme oder 10 Doppelcentner, eine sog. **Last**, beträgt. — Man nennt einen Körper **fest**, **liquid** (tropfbar flüssig) oder **expansibel** (elastisch flüssig), je nachdem für ihn Grösse und Form, oder nur Grösse, oder keines von beiden, bestimmt ist. Bei Zunahme der Wärme oder Abnahme des Druckes kann ein Körper aus dem festen Aggregationszustande bis in den expansibeln übergeführt werden. Die festen Körper teilen sich, nach dem Widerstande gegen eine Gestaltänderung, in **harte** (Diamant) und **weiche** (Talk), **dehnbare** (Zinn, Platin) und **spröde** (Glastropfen), — nach dem Bestreben, die frühere Gestalt wieder anzunehmen, in **elastische** (Stahl, Elfenbein) und **unelastische** (feuchter Thon), — nach der Neigung, ihre kleinsten Teile zu einem symmetrischen Ganzen zu ordnen, in **krystallinische** (Kandiszucker) und **amorphe** (Gerstenzucker). Die Kraft, welche die Teilchen eines Körpers in ihrer gegenseitigen Lage erhält, heisst **Cohäsion**, — die zwischen den Teilchen zweier sich berührenden Körper zu Tage tretende Anziehung dagegen **Adhäsion**. — Viele Körper sind durch die Thätigkeit der sog. **chemischen Affinität** (Verwandtschaft) aus der Verbindung einfacher (unzerlegbarer) Körper, sog. **Elemente**, zu einem gleichartigen Ganzen hervorgegangen. Dabei erfolgen diese Verbindungen nach bestimmten Gewichtsverhältnissen, den sog. **Atomgewichten**, oder ihren Vielfachen, und zwar giebt die Summe der Atomgewichte der Bestandteile das **Molekulargewicht** der Verbindung. Zu den wichtigsten Verbindungen der Elemente gehören die **Hydrate**, die man nach ihren Eigenschaften in **Säuren** und **Basen** einteilt: Von den in Wasser löslichen derselben schmecken erstere sauer und röten blaue Pflanzenfarben (z. B. Lacmus), — letztere schmecken laugenhaft und bräunen gelbe Pflanzenfarben (z. B. Curcuma). Durch Zusammentreten von Säuren und Basen entstehen die **Salze** [b].

Zu 118: *a.* Das fundamentale Gesetz der Trägheit (inertia) in Ruhe und Bewegung wurde schon von Einigen der Alten, dann namentlich aber von **Cusanus**, **Leonardo** da Vinci und **Benedetti** geahnt, — von **Kepler** nach seinem ersten Teile wirklich ausgesprochen, — von **Galilei** nach und nach in seiner Allgemeinheit erkannt, aber erst durch seinen Schüler Giovanni Battista **Baliani** (Genua 1582? — ebenda 1660?; genuesischer Staatsmann) als eigentliches Grundprincip formuliert, — und endlich durch **Descartes** zum allgemeinen Bewusstsein gebracht. Vgl. „Emil **Wohlwill** (Hamburg 1835 geb.; Chemiker in Hamburg), Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes. Weimar 1884 in 8." — *b.* Der in 117 gegebenen allgemeinen Litteratur mögen noch die Specialschriften „Gabriel **Lamé** (Tours 1795 — Paris 1870; Prof. phys. und Akad. Paris), Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris 1852 in 8., — Arthur-Jules **Morin** (Paris 1795 — ebenda 1880; Prof. mech. Metz, dann General, Dir. Konservat. und Akad. Paris), Résistance des matériaux. Paris 1853 in 8. (2 éd. 1857), — Alfred **Clebsch** (Königsberg 1833 — Göttingen 1872; Prof. math. Karlsruhe, Giessen und Göttingen), Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862 in 8., — August **Beer** (Trier 1825 — Bonn 1863; Prof. math. Bonn), Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität. Leipzig 1869 in 8., — etc.", beigefügt werden.

119. Einige Begriffe aus der Geodynamik. — Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers nennt man **Menge der Bewegung**, — dasjenige aus Masse und halbem Quadrat der Geschwindigkeit **lebendige Kraft**, — dasjenige aus Kraft und Weg **mechanische Arbeit** [a]. Für letztere ist das sog. **Kilogrammeter** als Einheit eingeführt worden, nämlich die nötige Kraft um ein Kilogramm ein Meter hoch zu heben; 75 solcher Einheiten bilden eine sog. **Pferdekraft**. — Wegen der Grösse der Erde dürfen die auf die verschiedenen Punkte eines Körpers wirkenden Schwerkräfte als parallel und gleich angesehen werden. Die Beschleunigung der Schwere nimmt (429) vom Aequator nach den Polen etwas zu, jedoch kann sie für die ganze Erde nahezu gleich $9{,}8^m = 30' \, 2''$ P. gesetzt werden [b]. — Für den **freien Fall** gelten, abgesehen vom Luftwiderstande, die (111) gefundenen Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung [c], und ebenso für den Fall über eine **schiefe Ebene**, nur dass für letztere, wenn α ihre Neigung bezeichnet, der Beschleunigung g beim freien Falle deren zur Ebene parallele Komponente $g \cdot \text{Si}\, \alpha$ zu substituieren ist [d]. Entsprechend kann ein Körper des Gewichtes P auf der schiefen Ebene mit einer zu ihr parallelen Kraft $P \cdot \text{Si}\, \alpha$, oder, wie es bei der durch Aufwinden einer schiefen Ebene auf einen Cylinder entstehenden **Schraube** in Betracht kömmt, mit einer zu ihrer Basis parallelen Kraft $P \cdot \text{Tg}\, \alpha$ gehalten werden. Ferner wird (115) beim Falle über die schiefe Ebene dieselbe Geschwindigkeit wie beim freien Falle durch gleiche Höhe erhalten. — Wirken zwei Kräfte P und Q auf zwei Punkte, welche mit einem in ihrer Ebene liegenden **Stützpunkte** starr verbunden sind,

so heisst das System **Hebel** und steht (109) im Gleichgewichte, wenn sich die Kräfte umgekehrt wie die vom Stützpunkte auf sie gezogenen Senkrechten p und q, die sog. **Hebelarme**, verhalten [e]. Wirkt auf einen der Endpunkte des Hebels statt einer Kraft ein zweiter Hebel, etc., so erhält man den **zusammengesetzten Hebel**, der offenbar im Gleichgewichte steht, wenn sich die beiden Endkräfte, oder **Kraft** und **Last**, umgekehrt wie die Produkte der ihnen zugewandten Arme verhalten. Ist der Hebel materiell, so ist natürlich das Moment seines im Schwerpunkte wirkenden Gewichtes dem Momente der im gleichen Sinne wirkenden Kraft beizufügen. — Auf Grund dieser Gesetze würden sich nun auch leicht die gemeine oder physikalische **Wage** und die **Schnellwage**, das **Wellrad** und die daraus hervorgehenden **Räderwerke**, die **Rolle** und der **Flaschenzug**, etc. [f], behandeln lassen; ich muss mir jedoch versagen, teils hierauf, teils auf die Lehren vom Stosse, von der Reibung, etc., näher einzutreten, um Raum für etwas eingehendere Besprechung der Pendel und Uhren zu gewinnen.

Zu 119: *a.* Bezeichnen m Masse, $P = m \cdot g$ Kraft, t Zeit, s Weg, v Geschwindigkeit, b Bewegungsmenge und k lebendige Kraft, so ist nach Definition und 111, wenn h die v entsprechende Fallhöhe ist

$$b = m \cdot v \qquad k = {}^1/_2\, m \cdot v^2 \qquad v = g \cdot t \qquad s = \frac{g t^2}{2} = \frac{v^2}{2g} = h. \qquad 1$$

und somit die **Arbeit**, welche auch „lebendige Potenz“, oder „Wucht“, oder „kinetische Energie“ genannt wird,

$$a = P \cdot s = P \cdot h = \frac{1}{2} b \cdot v = k \qquad 2$$

— *b.* Unter **Galilei'scher Zahl** soll man früher den Fallraum in der ersten Sekunde verstanden und **diesen** mit g bezeichnet haben, und so sind wohl die $^1/_2\, g = 7'\, 3''\, 3''',2 \cdot P$ zu verstehen, welche (vgl. Kästner, Mech. p. 57) **Galilei** durch Versuche gefunden haben soll, so dass er nach der jetzigen Bedeutung von g (gravitas) den ganz ordentlichen Wert $g = 29'\, 1''$ P. erhalten hätte. Immerhin scheint man eine erste zuverlässige, aus gemessenen Pendellängen abgeleitete Bestimmung, nämlich $g = 30'\, 1''$ P., **Huygens** zu verdanken. — *c.* Aus „**Alhazen**, Livre de la balance de sagesse. Tradu. par Khanikoff“ soll (Ann. Brux. 1877) hervorgehen, dass dieser gelehrte Araber schon um 1090 die Fallgesetze wenigstens teilweise kannte, — und ebenso soll die durch **Aristoteles** und seine Schüler verbreitete Meinung, dass ein Körper um so schneller falle, je grösser sein Gewicht sei, schon in dem Buche „Gio. Batt. **Bellaso**, Il vero modo di scrivere in cifra. Venezia 1533 in 4.“ durch die Lehre, dass die Fallzeit vom Gewichte des Körpers unabhängig sei, ersetzt worden sein; aber immerhin bleibt **Galilei** zum mindesten das Verdienst, letztere Lehre durch Versuche demonstriert und namentlich der frühern Ansicht, dass die Fallgeschwindigkeit dem bereits durchlaufenen Wege proportional sei, die Hypothese substituiert zu haben, dass sie im Verhältnisse zu der Fallzeit zunehme: Aus dieser Hypothese leitete er die übrigen Fallgesetze ab, — erwies ihre Richtigkeit durch Versuche mit einer Messingkugel, welche er in einer mit Pergament belegten, 12 Ellen langen, geneigten Rinne fallen liess, —

trug sie teilweise bereits in Pisa, sodann vollständig in Padua öffentlich vor, — handelte von ihnen beiläufig schon 1632 in seinen Dialogen, — und publizierte endlich 1638 in den „Discorsi" seine ganze Theorie. — *d.* Die Gesetze von der schiefen Ebene wurden (vgl. 107—8) schon 1586 durch **Stevin** aufgestellt. — *e.* Der Stützpunkt des Hebels hat (108) den Druck

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\,\text{Co}\,\alpha} = \frac{P}{q}\sqrt{p^2 + q^2 - 2pq\cdot\text{Co}\,\alpha} \qquad \mathbf{3}$$

auszuhalten, welcher sich für $\alpha = 180^\circ$, wo der Hebel **doppelarmig** heisst, auf $P\cdot(p+q):q = P+Q$ reduciert. Für $\alpha = 0$ heisst der Hebel **einarmig**, sonst **Winkelhebel**. — Das Gesetz des Hebels wurde bekanntlich schon von **Archimedes** in seinem Buche „De l'équilibre des plans (Ed. Peyrard p. 275—317)" aufgestellt. — *f.* Aus einem im British Museum aufbewahrten Papyrus soll hervorgehen, dass die Egypter schon um 1350 v. Chr. eine der unsrigen ganz ähnliche Schnellwage mit Laufgewicht besassen. — Wann und wo die Zahnräder und Getriebe zuerst auftreten, habe ich bis jetzt nicht ermitteln können. Bei **Pappus** ist eine in ein Zahnrad eingreifende Schraube ohne Ende abgebildet. — Die bewegliche Rolle soll **Archytas** von Tarent etwa 400 v. Chr. erfunden haben, und den Flaschenzug soll schon im Anfange unserer Zeitrechnung **Vitruv** in seiner „Architectura" als etwas allgemein Bekanntes erwähnen.

120. Das sog. mathematische Pendel. — Giebt man einer starren Geraden l, welche am einen Ende befestigt ist, am andern aber einen schweren Punkt trägt, eine kleine Elongation α aus der Ruhelage, so wird sie durch die Schwere unter fortwährend gesteigerter Geschwindigkeit in dieselbe zurückgeführt, — geht sodann unter Gegenwirkung der Schwere über sie hinaus, bis sie, wieder zu derselben Elongation α gelangt, ihre Geschwindigkeit wieder vollständig eingebüsst hat, — beginnt nun eine Rückschwingung, — etc. Um die zu einer einfachen Schwingung eines solchen **mathematischen Pendels** nötige Zeit t zu bestimmen, kann man die Reihe

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\text{Si}^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\cdot\text{Si}^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\cdot\text{Si}^6\frac{\alpha}{2} + \cdots\right] \qquad \mathbf{1}$$

benützen [a], aus welcher für ganz kleine Elongationen die Näherungsformeln

$$t = \pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{oder} \quad l = \frac{g\cdot t^2}{\pi^2} \quad \text{und} \quad dt = \frac{\pi^2}{2gt}\cdot dl \qquad \mathbf{2}$$

folgen, — sowie speciell für $t = 1^s$ oder das sog. Sekundenpendel

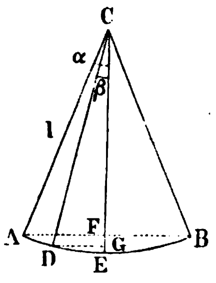
$$L = \frac{g}{\pi^2} = \frac{l}{t^2} \qquad l = L\cdot t^2 \qquad dt = \frac{\pi^2}{2g}\cdot dL \qquad \mathbf{3}$$

deren erste zeigt, dass man von den Grössen L und g die eine leicht durch Rechnung bestimmen kann, wenn die andere durch Beobachtung ermittelt wird [b]. Berücksichtigt man für etwas grössere Elongationen noch das zweite Glied der Reihe 1 und drückt α in Bogen aus, so erhält man

$$t = \pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) \quad \text{und} \quad \frac{dt}{d\alpha} = \pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\alpha}{8} \qquad \mathbf{4}$$

so dass für eine bestimmte Variation $d\alpha$ der Elongation die Variation der Schwungzeit proportional zu der Elongation ist. Es muss also die Elongation ganz klein sein, damit eine etwelche Veränderung derselben keinen merklichen Einfluss hat, oder das Pendel, wie man sagt, **isochron** ist °.

Zu 120: *a.* Um die Schwungzeit t des Pendels zu bestimmen, hat man die nach 115:2 bestehende Gleichung



$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{h - \xi}}$$

für irgend einen Zwischenpunkt D aufzuschreiben, d. h.

$$h = FE = l(1 - Co\,\alpha) = 2al \quad \text{wo} \quad a = Si^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\xi = GE = l(1 - Co\,\beta) = 2xl \qquad x = Si^2 \frac{\beta}{2} \qquad \mathbf{5}$$

$$ds = l \cdot d\beta = \frac{2 \cdot dx}{Si\,\beta} \cdot l = \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \cdot l$$

zu setzen, wodurch sie in

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{l \cdot dx}{\sqrt{x(1-x)} \cdot \sqrt{2al - 2xl}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{ax - x^2}} \qquad \mathbf{6}$$

übergeht. Nach dem binomischen Lehrsatze ist aber

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^3 + \cdots$$

also erhält man durch Integration, wenn man bedenkt, dass t doppelt so gross als die Zeit ist, in welcher das Pendel von der Elongation $\beta = \alpha$ zur Elongation $\beta = 0$ zurückkehrt, und dass nach 5 letztern Grössen die Grenzwerte $x = a$ und $x = 0$ entsprechen, eine Reihe der Form

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[A_0 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot A_2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} A_3 + \cdots\right]$$

Nun hat man mit Hilfe von 45:4', wenn $u = -\frac{x^{n-1/2}}{n(a-x)^{n-1/2}}$ und $v = (a-x)^n$ gesetzt wird, die Rekursion

$$A_n = \int_0^a \frac{x^n \cdot dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \int_0^a \frac{x^{n-1/2} \cdot dx}{\sqrt{a-x}} = \left[-\frac{x^{n-1/2} \cdot \sqrt{a-x}}{n}\right]_0^a + \frac{a(2n-1)}{2n} \int_0^a \frac{x^{n-3/2} \cdot dx}{\sqrt{a-x}}$$

$$= \frac{a(2n-1)}{2n} \cdot \int_0^a \frac{x^{n-3/2} \cdot dx}{\sqrt{a-x}} = \frac{a(2n-1)}{2n} \cdot A_{n-1} \qquad \mathbf{7}$$

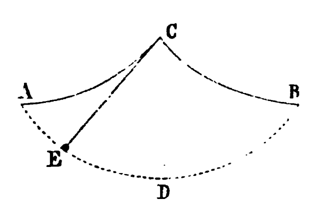
folglich mit Hilfe von 46:9

$$A_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot a^n \cdot \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot a^n \left[Asi \frac{2x - a}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot a^n \cdot \pi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot Si^{2n} \frac{\alpha}{2} \cdot \pi \qquad \mathbf{8}$$

Hieraus ergiebt sich aber die Reihe 1 ohne Schwierigkeit. — *b.* **Borda** erhielt (121,429) unter $\varphi = 45^0$ die Länge des Sekundenpendels $L = 0^m{,}99351$ und hieraus nach 3: $g = 9^m{,}80557$. Bezeichnet $dT = 86400 \cdot dt$ die sich in einem

vollen Tage anhäufende Differenz der Schwingungszeit, und wird dL in Millimetern ausgedrückt, so ergiebt sich mit diesem Werte nach 3: $dT = 43^s{,}482 \cdot dL$. Es hat somit eine Veränderung der Pendellänge von nur $0{,}01^{mm}$ noch einen ganz erheblichen Einfluss. — *c.* Der Isochronismus kleiner Pendelschwingungen scheint schon von den Arabern gekannt oder wenigstens geahnt worden zu sein, da es Thatsache ist, dass sie Pendelschwingungen zur Abschätzung kleiner Zeitintervalle benutzten. Anderseits soll **Galilei** etwa 1583 an einer Hängelampe im Dome zu Pisa den Isochronismus erkannt haben; sicher ist, dass er wenigstens die Grundzüge der Lehre von den Pendelschwingungen feststellte, — so z. B. den Satz aussprach, dass sich die Quadrate der Schwingungszeiten zweier Pendel, abgesehen von einem allfälligen Einflusse verschiedener Elongation, wie ihre Längen verhalten, — dass dagegen die Näherungsformel 2 erst durch **Huygens**, und die Reihe 1 erst nach Erfindung der Infinitesimalrechnung, jedoch spätestens 1736 durch **Euler** (Mech. II 69—75) aufgestellt wurde. — Bei grössern Elongationen kann man das Pendel (115) isochron machen, wenn man dasselbe nach dem Vorschlage von **Huygens** zwingt, mit seinem Endpunkte E eine Cykloide zu beschreiben, indem man es (80) zwischen zwei Halbcykloiden A C und C B aufhängt. Leider ist jedoch diese, spätestens 1659 entstandene Idee, mehr theoretisch schön als praktisch verwertbar; dagegen hängt mutmasslich die bewährte Vorzüglichkeit der „suspension à ressort“ zum Teil damit zusammen, dass ein mit derselben versehenes Pendel sich einem Cykloidalpendel nähert.



121. Das physische Pendel. — Ein Pendel, bei dem starre Linie und schwerer Punkt durch einen, allfällig noch eine Linse oder ein Gefäss mit Quecksilber tragenden Stab ersetzt sind, nennt man **physisches Pendel.** Dasselbe stellt offenbar eine Verbindung von unzählig vielen mathematischen Pendeln dar, von welchen die meisten **gezwungen,** und nur wenige **frei** eine mittlere Schwungzeit innehalten: Die frei schwingenden Punkte nennt man **Schwingungspunkte** [a]. — Vertauscht man den Aufhängepunkt mit demjenigen Schwingungspunkte, der mit ihm und dem Schwerpunkte in einer Geraden liegt, so wird dadurch, wie schon **Huygens** zeigte, die Schwungzeit des Pendels nicht verändert, und man kann daher durch Versuch die Länge des einem physischen Pendel entsprechenden mathematischen Pendels bestimmen, indem man zwei vertauschbare Aufhängepunkte aufsucht und deren Distanz misst [b].

Zu 121: *a.* Bezeichnet w die gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit aller Teile eines, um die durch O gehende Axe Z schwingenden Körpers zur Zeit t, und r den Abstand des Elementes dm von dieser Axe, so stellt $r \cdot w$ die wirkliche Geschwindigkeit des Elementes zu dieser Zeit dar, und

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot w \cdot \frac{y}{r} = y \cdot w \qquad \frac{dy}{dt} = -r \cdot w \cdot \frac{x}{r} = -x \cdot w$$

sind ihre Komponenten nach den Axen der X und Y, so dass

$$y \cdot \frac{dx}{dt} - x \cdot \frac{dy}{dt} = r^2 \cdot w \quad \text{und} \quad y \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - x \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = r^2 \cdot \frac{dw}{dt}$$

wird. Man hat daher, da $dw : dt$ für alle Elemente des Körpers gleich gross ist, nach 112 : 2, 8 für die Drehung um die Axe der Z

$$\frac{dw}{dt} \cdot \int r^2 \cdot dm = \int (y \cdot X - x \cdot Y) \cdot dm \qquad 1$$

Werden nun Masse und Schwerpunkt des Körpers mit M bezeichnet, während a und y' die Distanzen des Schwerpunktes von der Axe der Z und der Ebene XZ messen, θ aber den Winkel der Ebenen MZ und XZ giebt, — und ist der Körper nur der Schwere unterworfen, so dass $X = g$, $Y = 0$ und (entsprechend 72 : 1) $\int y \cdot dm = M \cdot y'$ wird, so geht 1 in

$$\frac{dw}{dt} \cdot \int r^2 \, dm = g \cdot M \cdot y' = g \cdot M \cdot a \cdot \mathrm{Si}\,\theta \qquad 2$$

über. Bezeichnet ferner ϱ die Distanz des Elementes dm von einer durch M parallel zur Z gelegten Axe, so ist (entsprechend 72 : 2)

$$\int r^2 \cdot dm = \int \varrho^2 \cdot dm + a^2 \cdot M = (a^2 + k^2) M \qquad 3$$

wo die für ein und allemal bestimmbare Grösse $\int \varrho^2 \cdot dm$, welche nach 114 dem Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf eine durch M gelegte Axe gleich ist, der Symmetrie wegen durch $k^2 \cdot M$ ersetzt wurde. Da überdies offenbar $w = -d\theta : dt$ ist, so geht somit 2 in

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2}(a^2 + k^2) \cdot M = g \cdot M \cdot a \cdot \mathrm{Si}\,\theta \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{a \cdot g \cdot \mathrm{Si}\,\theta}{a^2 + k^2}$$

über, so dass, wenn noch mit $2 \cdot d\theta$ multipliziert und dann integriert wird,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2ag \cdot \mathrm{Co}\,\theta}{a^2 + k^2} + \text{Const.}$$

folgt, also für den Anfang der Bewegung, wo die Geschwindigkeit Null ist und der Schwerpunkt eine Elongation α hat,

$$0 = \frac{2ag \cdot \mathrm{Co}\,\alpha}{a^2 + k^2} + \text{Const.} \quad \text{so dass} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2ag(\mathrm{Co}\,\theta - \mathrm{Co}\,\alpha)}{a^2 + k^2} \qquad 4$$

Nach 120 erhält man aber, wenn β mit θ vertauscht wird, für das mathematische Pendel der Länge l

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{l \cdot d\theta}{\sqrt{l(1 - \mathrm{Co}\,\alpha) - l(1 - \mathrm{Co}\,\theta)}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\mathrm{Co}\,\theta - \mathrm{Co}\,\alpha) \qquad 5$$

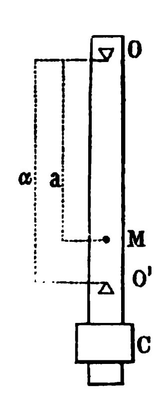
und es wird daher letzteres mit dem physischen Pendel gleich schwingen, wenn

$$\frac{a}{a^2 + k^2} = \frac{1}{l} \quad \text{oder} \quad l = a + \frac{k^2}{a} \qquad 6$$

ist. Alle Punkte des Körpers, welche in der Ebene MZ in der zu Z im Abstande l gezogenen Parallelen Z', der sog. **Schwingungsaxe**, liegen, werden somit **frei** schwingen, — so unter andern der in der Verlängerung von a liegende Punkt O', der speciell **Schwingungspunkt** genannt wird. — ***b.*** Lässt man den Körper um Z' statt um Z schwingen, so wird ihm wieder ein mathematisches Pendel von einer gewissen Länge l' entsprechen, und zwar muss nach 6

$$l' = (l - a) + \frac{k^2}{l - a} = l - a + k^2 \cdot \frac{a}{k^2} = l$$

sein. Es sind somit die beiden Axen Z' und Z reciprok, oder es besteht der Huygens'sche Satz, welcher gewissermassen in dem **Reversionspendel** verkörpert



ist, d. h. in einem Metallstabe, der bei O und O' zwei Schneiden, und bei C ein verschiebbares Gewicht trägt, mit dessen Hilfe die allfällig etwas von einander differierenden Schwungzeiten ausgeglichen werden können. Dieser Apparat wurde schon durch François-Marie Riche de **Prony** (Chamlet im Dép. du Rhône 1755 — Asnières bei Paris 1839; Ingenieur, Prof. mech. und Akad. Paris) in einer 1800 der Pariser Akademie vorgelegten Abhandlung „Méthode pour déterminer la longueur du pendule simple qui bat la seconde, d'après les expériences faites sur un corps solide de forme quelconque" ins Auge gefasst, — dann, wohl ohne etwas hievon zu wissen, durch **Bohnenberger** 1811 in seiner „Astronomie" neuerdings vorgeschlagen, — und endlich unabhängig von beiden durch **Kater** nicht nur in seinen „Experiments for determining the length of the pendulum vibrating seconds in latitude of London (Ph. Tr. 1818)" ebenfalls beschrieben, sondern von ihm auch vielfach in Anwendung gebracht. — Die neuere Zeit hat gezeigt, dass das sich praktisch nicht sonderlich bewährende Hilfsgewicht C weggelassen und dafür die, bei einer kleinen Differenz der Schwungzeiten gemessene Schneidendistanz α durch Rechnung verbessert werden könne. Und in der That, wenn T und T' die den beiden Schneiden zukommenden Schwungzeiten bezeichnen, während l und l' die entsprechenden Längen des mathematischen Pendels sind, so hat man nach 6 und 120 : 2

$$l' = \alpha - a + \frac{k^2}{\alpha - a} \qquad \text{und} \qquad l' : l = T'^2 : T^2 \qquad 7$$

Setzt man daher

$$\frac{T - T'}{T} = \tau \qquad \text{oder} \qquad \frac{l'}{l} = \frac{T'^2}{T^2} = (1 - \tau)^2 \qquad 8$$

wo τ eine kleine Grösse ist, so ergiebt sich nach 7

$$k^2 = l'(\alpha - a) - (\alpha - a)^2 \risingdotseq l(1 - 2\tau)(\alpha - a) - (\alpha - a)^2 \qquad 9$$

und substituiert man diesen Wert in 6", so erhält man

$$l = a + \frac{l(1 - 2\tau)(\alpha - a) - (\alpha - a)^2}{a} \qquad \text{oder} \qquad l \risingdotseq \alpha - 2\alpha \cdot \frac{\alpha - a}{2a - \alpha} \cdot \tau \qquad 10$$

eine Formel, welche offenbar das Verlangte leistet, sobald a, d. h. die Lage des Schwerpunktes, durch Messung bestimmt wird. Unter Berücksichtigung dieser Möglichkeit gab sodann **Bessel**, obschon er zu seinen eigenen Bestimmungen in Königsberg und Berlin ein Fadenpendel benutzte, in seinen klassischen „Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels. Berlin 1828 in 4." Anleitung zur Konstruktion und Behandlung eines verbesserten Reversionspendels, welches sodann später durch **Repsold** in mustergiltiger Weise, unter Beifügung eines sinnreichen Apparates um a zu messen, ausgeführt, — durch Emile **Plantamour** (Genf 1815 — ebenda 1882; Prof. astr. Genf; vgl. meinen Nekrolog in Astr. Viert. 18 von 1883) in seinen „Expériences faites à Genève avec le pendule à réversion. Genève 1866 in 4." beschrieben und in die Praxis eingeführt, — und seither fast ausschliesslich verwendet wurde. — Verkürzt man ein physisches Pendel der Schwungzeit t successive um b_1 b_2 b_3 und sind t_1 t_2 t_3 die betreffenden neuen Schwungzeiten, so erhält man nach 6" und 120 : 3, wenn L die Länge des Sekundenpendels bezeichnet,

$$L \cdot t_1^2 = a - b_1 + \frac{k^2}{a - b_1} \qquad L \cdot t_2^2 = a - b_2 + \frac{k^2}{a - b_2} \qquad L \cdot t_3^2 = a - b_3 + \frac{k^2}{a - b_3}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen unter Berücksichtigung, dass auch $L \cdot t^2 = a + (k^2 : a)$ ist, die Grössen k^2 und a, und setzt

$$A_1 = b_2 b_3 (t^2 - t_1^2) \qquad A_2 = b_3 b_1 (t^2 - t_2^2) \qquad A_3 = b_1 b_2 (t^2 - t_3^2) \qquad \mathbf{11}$$

so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$L = \frac{A_1 (b_2 - b_3) + A_2 (b_3 - b_1) + A_3 (b_1 - b_2)}{A_1 (t_3^2 - t_2^2) + A_2 (t_1^2 - t_3^2) + A_3 (t_2^2 - t_1^2)} \qquad \mathbf{12}$$

und kann daher nach dieser, von Gilberto **Govi** (Mantua 1835 — Rom 1889; Prof. phys. Florenz) neuerlich (Compt. rend. 1880) in Vorschlag gebrachten hübschen Methode, L berechnen, ohne a und k^2 bestimmen zu müssen. — Für weitern Detail und die betreffende Litteratur vgl. teils 429, teils den von **Oppolzer** 1883 der geodätischen Konferenz erstatteten Bericht, und ganz besonders auch „Gius. **Lorenzoni**, Relazione sulle esperienze istitute nel Osservatorio di Padova 1885/6 per determinari la lunghezza del pendolo semplice a secondi, premessa la esposizione dei principi del metodo e la descrizione dello strumento di Repsold. Roma 1888 in 4."

122. Die ersten Uhren. — Die ersten Vorrichtungen, um die Zeit abzuteilen oder zu messen, scheinen, allfällig abgesehen von den später (195) zu behandelnden Sonnenuhren, sog. **Wasseruhren** gewesen zu sein, welche auf dem Principe beruhten, dass eine gegebene Menge Wasser, allerdings strenge genommen nur unter Voraussetzung konstanten Niveaus, immer dieselbe Zeit braucht, um aus einem obern Gefässe durch eine und dieselbe Öffnung in ein unteres abzufliessen [a]. Etwas später wurden als eine Art Surrogat sog. **Sanduhren** gebraucht, bei welchen das Wasser durch feinen Sand ersetzt war und die Gefässe vertauscht werden konnten [b]. — Diese noch ziemlich rohen Mittel für Zeitmessung wurden sodann vom 14. Jahrhundert hinweg durch sog. **Gewichtuhren** verdrängt, bei welchen alsbald, ausser dem an einer Walze wirkenden Gewichte und den die Drehung auf ein Zeigerwerk übertragenden Rädern, auch der die Bewegung mit Hilfe eines sog. **Echappements** wenigstens einigermassen regulierende, hin und her schwingende **Balancier** [c], und ein das Aufziehen des Gewichtes ohne Störung erlaubendes **Sperr-Rad** [d] vorkamen, also bereits alle wesentlichen Bestandteile unserer gegenwärtigen Uhren vertreten waren [e]. Und wieder etwa zwei Jahrhunderte später traten hiezu noch als tragbare Surrogate sog. **Federuhren**, bei welchen das Gewicht durch eine gespannte Feder mit Schnecke, der Balancier anfänglich durch eine Schweinsborste, später durch die sog. **Unruhe**, ersetzt wurde [f].

Zu 122: *a.* Die **Wasseruhren** sollen spätestens um 600 v. Chr. bei den Assyrern und dann bald auch bei den Griechen und Römern in Gebrauch gewesen sein. Während sie ursprünglich ganz einfach waren und direkt das Quantum des abgeflossenen Wassers in Betracht gezogen wurde, versah man später, vielleicht nach Vorgang des um 270 v. Chr. zu Alexandrien lebenden Mechanikers **Ktesibios**, das Auffangsgefäss mit einem Schwimmer, welcher

durch eine Schnur mit einem Zeigerwerke in Verbindung stand, — ja fügte auch Datumszeiger, Schlagwerke, etc. hinzu, — und gefiel sich, zur Konstruktion edle Metalle, Edelsteine etc., zu verwenden: So soll Pompejus 62 v. Chr. im Pontus eine täglich nur Ein Mal zu füllende Wasseruhr erbeutet haben, bei welcher Gefäss und Zifferblatt aus Gold bestanden, die Zeiger mit Rubinen besetzt und die Zahlen in Saphir eingeschnitten waren. — Eine andere Art Wasseruhr, welche die alten Indier benutzten, bestand aus einer hohlen, kupfernen Halbkugel, welche unten eine feine Öffnung besass: Sie wurde auf Wasser gesetzt, wobei sie sich langsam füllte, und durch den Moment, in dem sie untersinken wollte, einen bestimmten Zeitabschnitt abschloss (vgl. die Notiz von Schlagintweit in Münchn. Sitzungsb. 1871). — *b.* Die **Sanduhren**, welche schon bei den Chaldäern gebräuchlich gewesen sein sollen, waren im Abendlande sehr verbreitet, ja wurden bis in die neuere Zeit beim Kirchen- und Wachtdienst als „Stundengläser" vielfach gebraucht. Vgl. meine betreffenden Versuche in Mitth. 36 von 1874. — *c.* Der meist horizontal schwingende **Balancier** (die sog. Bilanz) trug an seiner Axe (Spindel) zwei, um den Durchmesser eines sog. Kronrades von einander abstehende, somit abwechselnd oben und unten in dasselbe eingreifende Lappen (palettes), und seine Wirkung konnte durch Veränderung der Distanz zweier angehängten Gewichte variiert werden. — *d.* In das Sperr-Rad, welches die Verbindung der Walze mit einem Rade vermittelt, greift nämlich ein Haken so ein, dass die Verbindung beim Aufziehen gelöst, beim Sinken des Gewichtes durch eine Feder wieder hergestellt wird. — *e.* Die **Räderuhren**, welche die Araber benutzt haben sollen, waren mutmasslich nur Wasseruhren mit Räderwerken, denn sonst würden sie unzweifelhaft in den „Libros del Saber (vgl. 6 : e)" neben diesen ebenfalls erwähnt worden sein; dagegen ist sicher, dass im 14. Jahrhundert, wenn auch noch in roher Ausführung, einzelne vollständige **Gewichtuhren** erstellt wurden: Als Beispiele führe ich die noch jetzt im Kensington-Museum aufbewahrte, früher auf dem Schlosse in Dover stehende, die Jahrzahl 1348 zeigende und wahrscheinlich durch den englischen Mönch **Richard** von Wallingford (Wallingford in Berkshire geb.; Abt des Benediktiner-Klosters St. Alban in Frankreich, der nach „P. Dubois, Histoire de l'horlogerie. Paris 1849 in 4., p. 67" schon 1324 für sein Kloster eine Uhr verfertigte) konstruierte Uhr an, — ferner die 1737 (vgl. die damals durch Julien Le Roy besorgte neue Ausgabe von „Henry Sully, Règle artificielle du temps. Paris 1717 in 8.") noch in natura vorhandene, sowie in detaillierten Zeichnungen (z. B. in Band 1 von Berthouds „Histoire de la mesure du temps") auf uns gekommene Uhr, welche der Lothringer **Heinrich** von Vic in den Jahren 1364—70 für Karl V. von Frankreich verfertigte, dafür neben freier Wohnung den damals nicht unbeträchtlichen Taglohn von 6 Sous beziehend. — Diese ersten Uhren eigneten sich allerdings ausschliesslich für Thurmuhren, wie eine solche z. B. 1368 bei St. Peter in Zürich aufgestellt wurde; denn sie waren nur in grossem Masstabe ausführbar und erforderten enorme Gewichte, um im Gang erhalten werden zu können, — soll ja dasjenige der Uhr Heinrichs volle 500 ℔ betragen haben. Aber bald verfeinerte sich auch der Bau, so dass die Erstellung von Zimmeruhren und automatischen Werken gelang, ja Giovanni **Dondi** (Chioggia 1318 — Genua 1389; Prof. astron. et med. Padua) um hervorragender Leistungen willen den Beinamen „dall' orologio" erhielt, und bereits im 15. und 16. Jahrhundert eigentliche Kunstwerke entstanden, wie unter anderm (vgl. Biogr. III) die 1571—74 zu Strassburg durch Konrad **Dasypodius** mit Hilfe von Isaak und

Josias **Habrecht** erbaute astronomische Uhr. — *f.* Die erste **Federuhr** erstellte (vgl. „Cochlæus, Cosmographia Pomponii Melæ. Noribergæ 1511 in 4.") der früher fälschlich als „Hele" aufgeführte Schlossermeister Peter **Henlein** in den ersten Jahren des 16. Jahrhunderts; dann aber bildeten diese als „kleine Uehrlein" und erst später als „Nürnberger-Eier" bezeichneten Taschenuhren, die „im Busen oder in der Geldbörse" getragen wurden, bald einen ansehnlichen Handelsartikel, obschon sie anfänglich noch ziemlich unvollkommen waren und so mit Recht auch bloss Stundenzeiger besassen.

123. Die Regulatoren und Chronometer. — Das Hauptverdienst an dem Übergange der Uhren in wirkliche Mess-Instrumente, d. h. an der Umwandlung der Gewichtuhren in sog. **Regulatoren** (Pendulum Clock) und wohl auch derjenigen der Federuhren in **Chronometer** (Time-Keeper), hat sich unbedingt Christian **Huygens** erworben: Nicht nur hat Er, und kein anderer, das Pendel nicht bloss vorübergehend, sondern für alle Zeiten an Stelle des Balancier in die Gewichtuhr, und wahrscheinlich auch die Spiralfeder als Surrogat desselben in die Federuhr eingeführt, sondern er hat auch die theoretischen Grundlagen gegeben, ohne welche diese Neuerungen wohl kaum lebens- und entwicklungsfähig geworden wären [a]. Allerdings brauchte es während den seither verflossenen zwei Jahrhunderten noch viele Arbeit, um die Uhren beider Art auf ihren gegenwärtigen Stand zu bringen, — namentlich auch um das regulierende Princip gegen die Temperaturschwankungen zu kompensieren, seine Verbindung mit dem eigentlichen Gangwerke zu vervollkommnen und das letztere während dem Aufziehen in unveränderter Thätigkeit zu erhalten [b]; aber es würde hier zu weit führen, auf diese Einzelnheiten näher einzugehen und es muss hiefür auf die betreffenden Specialwerke verwiesen werden [c].

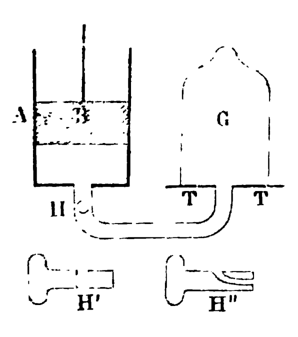
Zu 123: *a.* Dass Landgraf **Wilhelm** von Hessen in dem letzten Viertel des 16. Jahrhunderts die Zeit mit Erfolg als Beobachtungselement einführte, ist (374) eine unbestreitbare Thatsache, und dass hiefür die frühern Uhren nicht hingereicht hätten, ist ebenfalls sicher. Es müssen also durch Wilhelms Hofuhrenmacher Joost **Bürgi** wesentlich bessere Uhren erstellt worden sein, und dass dieser ausgezeichnete Mann solchen Fortschritt nicht nur dadurch erreichte, dass er, wie seine in Kassel und Wien noch gegenwärtig bewunderten Arbeiten belegen, die frühern Konstruktionen sorgfältiger ausführte, sondern wesentlich auch dadurch, dass er das regulierende Princip verbesserte, steht ausser Frage, da Bürgis Kollege **Rothmann** in seiner etwa 1586 geschriebenen Einleitung zum Hessischen Sternverzeichnisse ausdrücklich sagt, es sei in Kassel eine Sekundenuhr benutzt worden, bei welcher das Libramentum, d. h. also die Hemmung, „nicht auf gewöhnliche, sondern **auf ganz besondere und neu erfundene Weise** so getrieben werde, dass jede der Bewegungen einer einzelnen Secunde entspreche". Leider versäumte jedoch Rothmann Näheres über diese Verbesserung mitzuteilen und man ist somit auf blosse Vermutungen beschränkt, welche mich (vgl. Gesch. p. 369—72; Mitth. 33 von 1873 und 69

von 1887), unter Berücksichtigung verschiedener anderer Verumständungen, zu der Annahme veranlassten, es möchten die sagenhaften Erzählungen, **nach welchen schon Bürgi das Pendel in die Uhren einführte**, wirklich Grund haben; aber wenn dem auch so sein sollte, und obschon man (vgl. „W. C. L. van Schaïk, Über die Pendeluhr Galilei's, — und: E. Gerland, Die Erfindung der Pendeluhr" in Zeitschr. f. Instr. 1887 und 1888) zugeben muss, dass ein durch **Galilei** 1641 ausgedachter und sodann 1649 von seinem Sohne Vincenzo wirklich erstellter Apparat nicht, wie man früher glaubte, ein blosses Zählwerk für Pendelschwingungen, sondern ebenfalls eine Pendeluhr mit richtiger Hemmung war, so bleibt dennoch **Huygens**, zumal er von jenen Vorarbeiten vor 1660, wo ihm **Boulliau** eine Zeichnung des Galilei'schen Modelles zusandte, absolut nichts wusste, aus schon oben angegebenen Gründen das Hauptverdienst an der Thatsache, dass wir gegenwärtig in den sog. **Regulatoren** Uhren besitzen, welche unsern übrigen Messinstrumenten ebenbürtig sind: Es bleibt noch beizufügen, dass **Huygens** schon im Dezember 1656 ein erstes Modell einer Pendeluhr besass, am 16. Juni 1657 dafür patentiert wurde, noch im gleichen Jahre seinen „Kort Onderwijs aengaende het ghebruyck der Horologien tot het vinden der Lengden van Oost en West" schrieb, welchem alsbald die kleine Schrift „Horologium. Hagæ 1658 in 4." und sodann endlich, nachdem er seine Erfindung theoretisch und praktisch weiter entwickelt hatte, sein klassisches Werk „Horologium oscillatorium. Parisiis 1673 in fol." folgte, aus welchem schon früher Verschiedenes mitgeteilt worden ist. — Was die Erfindung der Spiralfeder anbelangt, so wird häufig berichtet, es sei hierin **Hooke** unserm Huygens zuvorgekommen und es habe 1671 Thomas **Tompion** nach dessen Angaben eine erste Taschenuhr mit Spiralfeder ausgeführt; es ist jedoch nicht zu vergessen, dass sich der talentvolle, aber nicht gerade scrupuleuse Robert **Hooke** (Freshwater auf Insel Wight 1635 — London 1703; Prof. math. London und „Curator of Experiments to the Royal Society") fast jede ihm zu Ohren kommende Erfindung aneignete, — dass ihn **Marie** (Hist. V 113) mit den Worten „**Hooke** embrassait tout, touchait à tout, et n'achevait rien; il lançait au hazard des idées mal digérées sur tous les sujets imaginables, et venait réclamer sa part lorsque la question était résolue" ganz gut schilderte, — und somit jene Erzählung zum mindesten mit Vorsicht aufzunehmen ist. — ***b.*** Auf die Kompensationen werden wir später (171) zurückkommen, und so mögen hier nur noch den bereits (11, 13) erwähnten und später noch wiederholt zu citierenden berühmten Uhrmachern **Graham**, **Harrison** und **Berthoud** die Thomas **Mudge** (Exeter 1715 — Newington 1794; Uhrmacher in London), Josias **Emery** (Chardonne bei Vevey 1730? — London 1794; Uhrmacher in London), Abraham-Louis **Breguet** (Neuenburg 1747 — Paris 1823; Gründer der noch von Sohn und Enkel fortgeführten, berühmten Pariser-Werkstätte), etc., angereiht werden. — ***c.*** Den bereits erwähnten Schriften füge ich noch bei: „Urban **Jürgensen** (Kopenhagen 1776 — ebenda 1830; Uhrmacher und Akad. Kopenhagen), Regler for Tidens nöiagtige Afmaaling ved Uhre. Kiöbh. 1804 in 4. (neue A. 1839; franz. Kopenh. 1805 und Paris 1838; deutsch Leipzig 1840), und: Die höhere Uhrmacherkunst. Kopenhagen 1842 in 4. (herausgeg. vom Sohne Louis Urban 1806—67), — Fr. W. **Barfuss** (Apolda 1809 geb.; Prof. math. Weimar), Geschichte der Uhrmacherkunst. Weimar 1837 in 8. (4. A. durch E. Geleich 1887), — M. L. **Moinet**, Traité d'horlogerie théorique et pratique. Paris 1848, 2 Vol. in 8., — Gustav **Herz**, Geschichte der Uhren. Berlin 1851 in 8., — etc."

124. Einige Begriffe aus der Hydraulik und Pneumatik. — In jeder Flüssigkeit pflanzt sich die Wirkung einer Kraft nach allen Seiten fort, und die Drucke auf verschiedene Teile der Wandung eines vollständig gefüllten und begrenzten Gefässes verhalten sich wie ihre Flächen. — Die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit ist infolge der Schwere und der leichten Verschiebbarkeit der Teilchen horizontal. Der Druck auf ein Teilchen im Innern der Flüssigkeit (folglich auch der Gegendruck nach oben), und ebenso derjenige auf den Boden eines Gefässes, ist gleich dem Gewichte des auf ihm ruhenden Flüssigkeitscylinders und hängt nicht von Form und Inhalt des Gefässes ab [a]. Der Druck auf eine Stelle der Seitenwand ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche dieselbe zur Grundfläche, und die Distanz ihres Schwerpunktes vom Niveau der Flüssigkeit zur Höhe hat. — In kommunizierenden Gefässen, so z. B. in den beiden Schenkeln der sog. **Kanalwage** (321) steht dieselbe Flüssigkeit gleich hoch, während sich die Höhen verschiedener Flüssigkeiten wie ihre Dichten verhalten; doch können durch die Molekular-Anziehungen, namentlich in engen oder sog. **Capillarröhren**, merkliche Modifikationen hervorgebracht werden, so dass z. B. Wasser in Glas sich mit konkaver Oberfläche über das Niveau erhebt, Quecksilber in Glas dagegen mit konvexer Oberfläche unter dasselbe sinkt [b]. — Das Gewicht der von einem Körper verdrängten Flüssigkeit ist gleich seinem Gewichtsverluste in derselben, und man erhält somit die Dichte eines Körpers, wenn man sein absolutes Gewicht durch seinen Gewichtsverlust in reinem Wasser teilt [c]. Ist das Gewicht eines Körpers kleiner als dasjenige der von ihm verdrängten Flüssigkeit, so schwimmt er in derselben, und es sinkt derselbe Körper in einer Flüssigkeit um so weniger tief ein, je dichter letztere ist, so dass er als Dichtigkeitsmesser oder **Aräometer** dienen kann [d]. — Die Ausflussgeschwindigkeit ist bei engen Öffnungen gleich der beim freien Falle durch die Druckhöhe erhaltenen Geschwindigkeit zu setzen, so dass, wenn q die Fläche der Öffnung und h die Druckhöhe bezeichnet, die Ausflussmenge pro Sekunde gleich $q \cdot \sqrt{2gh}$ ist [e]. — Der Stoss einer bewegten Wassermasse ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis die Druckfläche und deren Höhe $a^2 : 2g$ ist, wo a die Geschwindigkeit des Wassers bezeichnet. — Giebt man einer Luftmenge A der Dichte d noch einen Raum B ein, so erhält sie die Dichte $d_1 = d \cdot A : (A + B)$; wird dann je der Raum B wieder abgesperrt, geleert, und neuerdings eingegeben, so hat die Luftrestanz nach n Wiederholungen dieser Operation nur noch die Dichte $d_n = d\,[A : (A + B)]^n$. Ein hiezu geeigneter Apparat

heisst **Luftpumpe** [f] und dient zum Nachweise, dass die Luft einen Druck ausübt, — dass sie ausdehnsam, sowie zum Atmen, Brennen und als Schallmittel erforderlich ist, — dass sie gegen das Fallen, Verdampfen, Entweichen von Gasen aus Flüssigkeiten, etc., einen Widerstand ausübt, — dass die Körper in ihr einen Gewichtsverlust erleiden, — etc. — Die genauern Gesetze des Luftdruckes und ihre Anwendungen auf die Hypsometrie werden unter den folgenden Nummern einlässlich erörtert werden; dagegen ist hier noch zu erinnern, dass, wenn in dem einen von zwei kommunizierenden Gefässen, die zum Teil mit Flüssigkeit gefüllt sind, die Luft verdünnt oder verdichtet wird, die Flüssigkeit in demselben steigt oder sinkt, bis der durch die entstehende Niveaudifferenz erzeugte Druck der Ab- oder Zunahme der Ausdehnsamkeit Gleichgewicht hält: Es beruhen hierauf die Druckmesser oder sog. **Manometer** [g], die Heber, Pumpen, etc. — Hat endlich ein ausgepumpter Glasballon das Gewicht a, mit einem Gase oder mit Wasser gefüllt aber das Gewicht b oder c, so ergiebt (b — a) : (c — a) die Dichte des Gases [h].

Zu 124: *a.* Dieses scheinbare Paradoxon war schon **Stevin** bekannt. — *b.* Als erster Entdecker der Kapillarität wird Niccolo **Aggiunti** oder Adjunctus (Borgo di San Sepolcro in Toskana 1600 — Pisa 1635; Prof. math. Pisa) angesehen, — von der Depression des Quecksilbers soll jedoch erst in „Isaac **Vossius** (Leyden 1618 — Windsor 1689; Sohn von Gerhard in 10 : p; Reisender und zuletzt Canonicus in Windsor), De Nili et aliorum fluminum origine. Hagæ Com. 1666 in 4.“ die Rede sein. Für die Theorie verweise ich auf „**Laplace,** Théorie de l'action capillaire. Paris 1806 in 4. (Suppl. 1807), — und: **Poisson,** Théorie nouvelle de l'action capillaire. Paris 1831 in 4.“ — *c.* Dieser Satz wurde bekanntlich schon von **Archimedes** aufgefunden und benutzt. — *d.* Bei den sog. **Scalenaräometern,** deren erstes schon **Synesius** um das Jahr 400 beschrieben haben soll, schliesst man direkt aus der Tiefe des Einsinkens auf die Dichte, — bei den sog. **Gewichtsaräometern** dagegen, deren erstes **Roberval** schon vor 1664 erfand, aus der nötigen Belastung, um ein Einsinken bis zu einer angebrachten Marke zu veranlassen. — *e.* Das Fundamentalgesetz für den Ausfluss scheint zuerst **Torricelli** in seiner Schrift „De motu gravium naturaliter descendentium (Opera geometrica. Firenze 1644 in 4.)“ ausgesprochen zu haben. — *f.* Führt man von einem Teller TT, auf welchem eine Glocke G genau aufsitzt oder auch ein anderer Apparat aufgeschraubt werden kann, eine bei H mit einem Hahne versehene Röhre zu einem Stiefel A, in dem sich ein Kolben B bewegt, so verteilt sich die in G befindliche Luft, wenn beim Aufwärtsgehen des Kolbens der Hahn die Stellung H' hat, in den Raum A + G; giebt man sodann dem Hahn die Stellung H'', so geht die in A enthaltene Luft beim Niedergehen des Kolbens ins Freie, — etc., — kurz es ist die oben als **Luftpumpe** verlangte



Einrichtung vorhanden. Giebt man dagegen beim Aufwärtsgehen des Kolbens dem Hahne die Stellung H'', beim Abwärtsgehen die Stellung H', so geht die Luftpumpe in eine **Kompressionspumpe** über. — Der erste, welcher etwa 1650 eine Luftpumpe konstruierte, war Otto v. **Guerike**; er experimentierte 1654 mit derselben vor dem Reichstage in Regensburg und beschrieb sie in seinem klassischen Werke „Experimenta nova de vacuo spatio. Amstelodami 1672 in fol.“ Bald darauf wurde sie durch Denis **Papin** (Blois 1647 — Marburg 1714?; Gehilfe von Huygens und Boyle, dann Prof. math. et phys. Marburg; vgl. Bannistre, Blois 1847 in 8.) wesentlich verbessert, und der Neuzeit ist es gelungen, das Operieren noch viel sicherer und bequemer zu machen. — *g.* Ein erstes, auf diesem Principe beruhendes **Manometer** wurde durch **Varignon** (vgl. Mém. Par. 1705) konstruiert; das sog. Manometer von Guerike war eine balancierte Hohlkugel, welche unter die Glocke der Luftpumpe gebracht wurde. — *h.* Auf die in 117 erwähnte Aëronautik kann ich hier nicht wohl näher eintreten.

125. Das Barometer. — Die Lehre von **Aristoteles**, dass auch die Luft schwer sei, wurde schon von **Galilei** durch Wägungen erwiesen [a]; aber über das Wesen des Luftdruckes und die darin liegende Erklärung des Faktums, dass in einer Pumpe das Wasser nur bis auf 32 Fuss steigt, wurde man sich erst klar, als **Torricelli** [b], in Ahnung des Sachverhaltes, 1643 mit Hilfe einer, am einen Ende geschlossenen, mit Quecksilber gefüllten und dann umgestürzt in ebensolches getauchten Röhre, zeigte, dass Quecksilber schon bei einer Höhe von etwa 28 Zoll stehen bleibt, und die beiden Höhen sich umgekehrt wie die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten verhalten [c]. Zugleich konnte, wie **Torricelli** sofort einsah, durch Wiederholung dieses Versuches jederzeit der Luftdruck gemessen und dessen Veränderlichkeit beobachtet werden, so dass die Physik ein neues Instrument, das **Barometer** [d], erhalten hatte und es so **Pascal** möglich wurde, die Abnahme des Luftdruckes bei zunehmender Höhe der Beobachtungsstelle zu konstatieren [e], wodurch überdies eine Grundlage für die sog. **Hypsometrie** erhalten war, mit der wir uns unter den folgenden Nummern beschäftigen werden [f].

Zu 125: *a.* Das Verfahren von **Galilei** stimmte wesentlich mit dem bereits beschriebenen (124) überein, nur dass er, in Ermanglung einer Luftpumpe, die Luft aus seinem Ballon durch Erhitzen bestmöglich austrieb. Er fand, dass die Dichte der Luft in Vergleich zu Wasser etwa $^1/_{400}$ sei. — *b.* Evangelista **Torricelli** (Piancaldoli 1608 — Florenz 1647) war Schüler von Castelli in Rom, wurde von diesem 1641 dem erblindeten Galilei als Sekretär empfohlen und erhielt nach dem Tode dieses letztern dessen Nachfolge. — *c.* Der von **Aristoteles** zur Erklärung der Erscheinungen an Pumpen, etc., angenommene **Horror vacui** hielt bis auf **Galilei** vor, — nur dass letzterer, als er erfuhr, dass das Wasser in den Pumpen nicht über 32 Fuss steige, zu der Annahme gelangte, es gehe jener Abscheu nur bis zu einer gewissen Grenze, und hiedurch zunächst **Torricelli** veranlasste, sich etwas später die Frage zu stellen, ob wohl diese Grenze für die verschiedenen Flüssigkeiten dieselbe sei. Wie er

diese Frage an die Hand nahm und löste, ist oben bereits mitgeteilt worden; dagegen ist beizufügen, dass ihm sein Freund **Viviani** bei seinen Versuchen behilflich war, und auch nicht zu übersehen, dass schon vor ihm der französische Arzt Jean **Rey** (Bugues in Dordogne 1590? — 1645) in seinen „Essays sur la recherche de la cause par laquelle l'estain et le plomb augmentent de poids quand on les calcine. Bazas 1630 in 8." sehr gesunde, aber allerdings von seinen Zeitgenossen wenig beachtete Ansichten über die Schwere der Luft bekannt gab und sich namentlich entschieden gegen die der Natur angedichtete „qualitas occulta" aussprach, welche den „horror vacui" bedingen sollte. — *d.* Der Ausdruck „Barometer" ist von βάρος = schwer abgeleitet. — *e.* Als **Pascal** durch Mersenne Kenntnis von den Versuchen Torricellis erhielt, wiederholte er dieselben 1646 zu Rouen, gemeinsam mit Descartes vertrautem Freunde **Petit**, mit schönstem Erfolge, wie die beiden Schriften „**Pascal**, Nouvelles expériences touchant le vuide. Paris 1647 in 8., — und: **Petit**, Observations touchant le vuide, faites pour la première fois en France. Paris 1647 in 4." erweisen; aber er blieb hiebei nicht stehen, sondern veranlasste, um auch die letzten Gegner der neuen Lehre von deren Richtigkeit zu überzeugen, seinen Schwager **Périer** 1648 IX 19, einen Barometer von Clermont aus auf den sich circa 500^t darüber erhebenden Puy-de-Dôme zu tragen: Es ergab sich hiebei, wie **Pascal** bald nachher in seinem „Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs" mitteilte, ein successives Fallen des Barometers um volle $3'' \, 1\frac{1}{2}'''$ d. d., das bei der Thalfahrt in ein entsprechendes Steigen überging, — und es war also nicht nur die Lehre von Torricelli in schönster Weise bestätigt, sondern es konnte der die Hypsometrie begründende Schluss gezogen werden, dass eine Luftschichte von circa 13^t Höhe denselben Druck wie $1'''$ Quecksilber ausübe. — *f.* Ein leider an Hooke (vgl. 123:4) erinnernder Versuch des sonst hochverdienten **Descartes**, sich als intellektuellen Urheber der Versuche am Puy-de-Dôme auszugeben, wurde von **Pascal** mit den Worten „Cette expérience est de mon invention, et partant je puis dire que la nouvelle connaissance, qu'elle nous a découverte, est entièrement de moi" energisch zurückgewiesen und verlief total im Sand. Noch grundloser war die Behauptung, es gehe aus „Claud. **Beriguardi**, Circulus Pisanus de veteri et peripatetica philosophia. Utini 1643 in 4." hervor, dass man in Italien schon **vor** Pascals Versuchen den Gebrauch des Barometers zum Höhenmessen gekannt habe; denn **Libri** hat nachgewiesen, dass die als Beweis angerufene Stelle sich erst in der spätern Ausgabe von 1661 findet.

126. Die ersten Höhenmessungen mit dem Barometer. — Sehr folgereich war es, als Rich. **Townley** aus Versuchen seines Lehrers Rob. **Boyle** den richtigen Schluss zog, dass das Volumen einer Luftmenge bei unveränderter Temperatur der drückenden Kraft umgekehrt proportional ist [a]. Namentlich gab dieses Gesetz **Mariotte**, nach dem es fälschlich benannt wird, die Möglichkeit, die successive Höhe der Luftschichten zu berechnen, welche einer gleichen Druckdifferenz entsprechen, und so eine, wenn auch noch höchst unvollkommene Grundlage für barometrische Höhenbestimmungen zu gewinnen [b]. Eine wirklich brauchbare hypsometrische Formel aufzustellen gelang dagegen allerdings erst **Halley**, indem

er aus demselben Gesetze in sehr geschickter Weise nachwies, dass die Höhendifferenz zweier Stationen

$$H = A \cdot (\mathrm{Lg}\,B - \mathrm{Lg}\,b) \qquad 1$$

gesetzt werden darf, wo A eine Konstante ist, während B und b die an den beiden Stationen beobachteten Barometerstände bezeichnen [c], — ja sogar auf Grund von plausibeln Annahmen für die Konstante A den gar nicht übeln Wert 62170′ E. = 9722^t = 18949^m ausmittelte [d].

Zu 126: *a.* Der Jesuit Franciscus **Linus** (London 1595 — Lüttich 1675; Prof. math. Lüttich) erwarb sich durch die sonderbaren Ideen, welche er etwas nach der Mitte des 17. Jahrhunderts zu London in einer Flugschrift „De experimenti argenti vivi tubo vitreo inclusi" veröffentlichte, das Verdienst, Rob. **Boyle** zu folgendem Versuche mit einer gebogenen Röhre, deren kürzerer Schenkel oben zugeschmolzen war, zu veranlassen: Nachdem er seine Röhre vertikal aufgestellt hatte, goss er in den offenen Schenkel so viel Quecksilber, dass es die Biegung füllte und so im kurzen Schenkel eine bestimmte Luftmenge absperrte, welche eine Höhe von 12″ besass; hierauf goss er in den längern Schenkel so lange Quecksilber, bis die Luft im kurzen auf 6″ reduziert war, was bei einer Niveaudifferenz von 29″ eintrat, also gerade bei Verdopplung des Druckes; eine Reduktion auf 4″ erforderte eine Quecksilbersäule von 2 × 29″ oder dreifachen Druck, — eine solche auf 3″ aber 3 × 29″ oder vierfachen Druck, — etc. Es war also wirklich durch diese Versuche, welche **Boyle** 1661 in seiner „Defensio de elatere aeris adversus objectiones Fr. Lini" mitteilte, das von **Townley** ausgesprochene Gesetz bewiesen. — *b.* Ob **Mariotte** etwas von Boyles Versuchen und Townleys Schlussfolgerungen wusste, ist unbekannt; dagegen weiss man, dass er einige Jahre später ebensolche Versuche machte, ihnen dasselbe Gesetz entnahm und das Ganze in seinem „Essai sur la nature de l'air. Paris 1679 in 12." niederlegte, — aber die Priorität kömmt entschieden, wie schon **Deluc** (vgl. Journ. d. Sav. 1792) betonte, den erstgenannten zu. — Das Hauptverdienst von **Mariotte** bestand unzweifelhaft darin, dass er das besprochene Gesetz zuerst für die barometrische Höhenmessung fruchtbar zu machen wusste: Er ging dafür nach Messungen, welche er auf der Pariser Sternwarte und in deren tiefen Kellern machte, von der Annahme aus, dass die Barometerhöhe an der Erdoberfläche 28″ = 336‴ = 4032 Zwölftelslinien betrage und bei Erhebung um 5′ sich um einen solchen Zwölftel vermindere, — teilte nun in Gedanken die Atmosphäre so in Schichten, dass jeder folgenden Schichte je wieder eine solche barometrische Differenz von ein Zwölftel entsprach, — schloss dann ganz richtig, dass sich die Ausdehnung der Schichte, in welcher der Barometerstand bereits um h Zwölftel abgenommen habe, zu 5′ wie 4032 : (4032 — h) verhalten, also

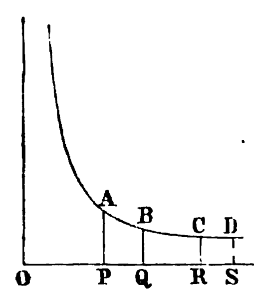
$$H = 4032\left[\frac{1}{4032} + \frac{1}{4031} + \cdots + \frac{1}{4032 - h}\right] \cdot 5' \qquad 2$$

nahe deren Höhe über der Erdoberfläche geben müsse, — und fehlte nur darin, dass er glaubte, die Berechnung der Klammer dadurch erleichtern zu dürfen, dass er ihr das Produkt aus der Anzahl der Glieder in die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes substituiere, was dann doch eine zu rohe Annäherung war. — In etwas anderer Weise ging später **Maraldi** vor, indem er in seinen „Expériences du baromètre faites sur diverses montagnes

de la France (Mém. Par. 1703)" sagt, dass bei der Gradmessung, welche er mit Cassini, Chazelles und Couplet 1701 und folgende Jahre gemacht habe, wiederholt trigonometrisch gemessene Höhen mit den entsprechenden Barometerdifferenzen verglichen worden seien, und dass ihn nun die Empirie darauf geführt habe, nahe übereinstimmend mit Mariotte anzunehmen, dass am Meere 1''' Quecksilber einer Schichte von 61' entspreche, und sodann jeder folgenden, immer wieder 1''' Quecksilber repräsentierenden Schichte je 1' Höhe mehr zu geben. Er erhielt so die bequeme und sich bis auf Höhen von $^1/_2$ Wegstunde bewährende Formel

$$H = (60+1) + (60+2) + \cdots + (60+h) = {}^1/_2\, h\,(121+h) \qquad 3$$

die in der That sogar noch für $h = 336$ das wenigstens nicht unsinnige Resultat ergiebt, dass die Höhe der Atmosphäre 76776' ≕ $6^1/_2$ französische Wegstunden (lieues) betragen möchte. — Ähnliche Formeln wie Maraldi benutzten auch noch später die **Feuillée** (vgl. Vol. I p. 456—59 seines „Journal des observations faites sur les côtes orientales de l'Amérique méridionale et dans les Indes occidentales. Paris 1724—25, 2 Vol. in 4."), **Cassini** (vgl. seine „Réflexions sur la hauteur du baromètre observée sur divers montagnes" in Mém. Par. 1733), etc., und es ist merkwürdig, dass die französischen Gelehrten ein halbes Jahrhundert lang die Fortschritte übersahen oder ignorierten, welche die Hypsometrie bald nach den grundlegenden Arbeiten der Boyle und Mariotte in England machte. — *c.* Im Jahre 1686 legte nämlich **Halley** der Roy. Society seine Abhandlung „A Discourse of the Rule of the decrease of the height of the mercury in the Barometer, according as places are elevated above the Surface of the Earth (Ph. Tr. 1686)" vor, die wesentlich folgende Entwicklung enthält: Entsprechen die Volumina v und v' einer gewissen Luftmenge den Drucken p und p', so verhält sich nach dem sog. Mariotte'schen Gesetze



$v : v' = p' : p$. Gerade so verhalten sich aber auch die Asymptoten-Coordinaten einer gleichseitigen Hyperbel, indem (77) bei dieser $OP : OQ = BQ : AP$ ist. Wenn also OP, OQ, etc., die Drucke oder Barometerstände vorstellen, so sind AP, BQ, etc., die entsprechenden Volumina derselben Luftmasse oder, was hier das nämliche ist, derselben Luftschichte. Die Gesamthöhe aller Luftschichten zwischen zwei Stationen, welchen die Barometerstände OS und OR zukommen, ist also offenbar der Summe aller Ordinaten zwischen SD und RC, oder dem Flächenraume RCDS proportional. Allein bei der gleichseitigen Hyperbel verhalten sich zwei Flächen $RCDS : PABQ = Ln\,(OS : OR) : Ln\,(OQ : OP) = Lg\,(OS : OR) : Lg\,(OQ : OP)$. Ist daher, die Höhe des Barometerstandes am Meere zu 30" E angenommen, $RCDS = a$ die Höhe der Luftsäule, in welcher der Barometer von $30^1/_2$ auf $29^1/_2$" sinkt, und $PABQ = H$ die Höhe der Luftsäule, in welcher dasselbe von B auf b heruntergeht, so hat man

$$a : H = Lg\frac{30{,}5}{29{,}5} : Lg\frac{B}{b} \quad \text{oder} \quad H = A\cdot Lg\frac{B}{b} \quad \text{wo} \quad A = a : Lg\frac{30{,}5}{29{,}5} \qquad 4$$

d. h. es besteht die als 1 gegebene einfache Formel. — *d.* Zur Bestimmung von a nahm **Halley** an, das specifische Gewicht der Luft am Meere verhalte sich zu dem des Wassers wie 1 : 800, und dasjenige des Wassers zu dem des Quecksilbers wie $1 : 13^1/_2$, so dass eine Quecksilbersäule von 1" einer Luftsäule von $800 \times 13^1/_2 = 10800" = 900'$ Gleichgewicht halten werde. Er konnte

also $a = 900'$ setzen, wodurch er für A nach 4 den bereits angegebenen Wert erhielt, und so schon auf den ersten Wurf und ohne sich auf hypsometrische Versuche zu stützen, der Wahrheit sehr nahe kam. — Einer der ersten, welcher die Halley'sche Formel praktisch verwertete, war Joh. Jakob **Scheuchzer** (Zürich 1672 — ebenda 1733; Prof. math. und Stadtarzt Zürich; vgl. Biogr. I und Gesch. d. Verm.), und er erwarb sich dadurch, dass er bei den Naturforschern den Gebrauch einführte, sich mit einem Reisebarometer (bei ihm ein, jeweilen an Ort und Stelle gefülltes Gefässbarometer in Form eines Spazierstockes) zu bewaffnen, ein entschiedenes Verdienst, wenn auch sein Wert $A = 8338{,}2^t = 16252^m$, welchen er 1709 aus Vergleichung der durch Senkeln zu 119^t bestimmten Höhe der Pfäfferser-Felswand mit den unten und oben beobachteten Barometerständen ableitete, weit gegen dem Halley'schen zurückstand. In letzterer Hinsicht erzielte **Bouguer** (vgl. pag. 39 der Einleitung zu seiner Schrift „La figure de la terre. Paris 1749 in 4.") entschieden in jener ältern Zeit das beste Resultat, als er in Peru am Pichincha, wo er über eine trigonometrisch zu 1209^t bestimmte Höhendifferenz verfügte, entsprechende Barometerbeobachtungen machte, welche ihm $A = 9667^t = 18841^m$ ergaben.

127. Die neuere Hypsometrie. — Die neuere Hypsometrie begründete Jean-André **Deluc** [a], indem er in seinen klassischen „Recherches sur les modifications de l'atmosphère. Genève 1772, 2 Vol. in 4." für die Höhenberechnung eine, den an beiden Stationen beobachteten Lufttemperaturen T und t Rechnung tragende Formel aufstellte, welche nach Reduktion auf unsere gegenwärtigen Masse mit

$$H = 17970^m \cdot (\mathrm{Lg}\, B - \mathrm{Lg}\, b)\,[1 + 0{,}002\,(T + t)] \qquad \mathbf{1}$$

übereinstimmt, — auch, abgesehen von etwelcher Abänderung des Zahlfaktors, noch jetzt die meistbenutzte ist und somit als **Deluc'sche Formel** citiert werden sollte [b]. — Etwas später zeigte **Laplace**, dass strenge genommen auch die mittlere Breite φ der beiden Beobachtungsstellen, sowie das Verhältnis der Distanzen r und a der untern Station von der obern und vom Erdmittelpunkte berücksichtigt werden sollte und gab nun die, nach ihm zu benennende, verbesserte Formel

$$H = 18336^m \cdot (1 + 0{,}002845 \cdot \mathrm{Co}\, 2\,\varphi)\,[1 + 0{,}002\,(T + t)] \cdot F$$

wo

$$F = \left(1 + \frac{r}{a}\right)\left(\mathrm{Lg}\, B - \mathrm{Lg}\, b\right) + 0{,}868\,589 \cdot \frac{r}{a} \qquad \mathbf{2}$$

welche im übrigen, d. h. wenn man r gegen a, und den kleinen Betrag des von der Breite abhängigen Gliedes vernachlässigt, abgesehen vom ersten Zahlfaktor, ganz mit unserer 1 übereinkömmt [c]. — Seither hat man noch gefunden, dass auch der Feuchtigkeitszustand der Luft einen merklichen Einfluss ausübt, und es hat so z. B. Richard **Rühlmann** die Formel

$$H = 18429^m{,}1\,(1 + 0{,}002\,623 \cdot \mathrm{Co}\, 2\,\varphi)\,[1 + 0{,}00183\,(T + t)] \cdot F$$

wo

$$F = \left(1 + \frac{2\,h + H}{6\,378\,150}\right)\left(\mathrm{Lg}\, B - \mathrm{Lg}\, b\right)\left[1 + 0{,}189\left(\frac{E}{B} + \frac{e}{b}\right)\right] \qquad \mathbf{3}$$

aufgestellt, unter h die Meereshöhe der untern Beobachtungsstelle, unter E und e aber die Dunstspannungen an den beiden Stationen verstehend [d]. — Umgekehrt sind auch Versuche gemacht worden, für Überschlagsrechnungen handliche Näherungsformeln zu geben, und so verdankt man z. B. **Leslie** die von Logarithmentafeln dispensierende Formel

$$H = A \cdot \frac{B - b}{B + b} \quad \text{wo} \quad A = 50000' \cdot P = 16242^m \qquad 4$$

welche für Temperaturen, die sich nicht gar zu sehr von 4° R. = 5° C. unterscheiden, ganz ordentliche Resultate ergiebt [e]. — Für weitern Detail muss auf die Speciallitteratur verwiesen werden [f].

Zu 127: *a.* Jean-André **Deluc** (Genf 1727 — Windsor 1817) war Prof. honor. Göttingen und Vorleser der Königin von England. Vgl. Biogr. IV. — *b.* Als **Deluc** die von ihm 1754 auf einer Alpenreise gesammelten Barometerangaben hypsometrisch verwerten wollte, gaben ihm die verschiedenen Rechnungsvorschriften so unvereinbare Resultate, dass er sich entschloss „de fermer les livres et de consulter la nature seule, en la suivant pas à pas aussi loin qu'elle voudrait le conduire". Er bestimmte hiefür, teils trigonometrisch, teils durch eigentliche Nivellements, die Höhenunterschiede von 15 am Salève bei Genf gewählten Versuchsstationen, und ruhte nun nicht bis er die sowohl an ihnen, als auch auf einigen grössern Alpenreisen erhaltenen Barometerangaben zu deuten und darzustellen wusste, wobei er namentlich den schon von Scheuchzer vermuteten Einfluss der Lufttemperatur konstatierte und in Rechnung zu bringen suchte. So entstand, wenn auch auf Halley fussend, doch zunächst auf empirischem Wege seine Formel

$$H = 10000^t \cdot (\mathrm{Lg}\, B - \mathrm{Lg}\, b) \cdot [1 + 0{,}001\, (T' + t')] \qquad 5$$

wo T' und t' die Lufttemperaturen bezeichneten, welche er an einem Quecksilberthermometer ablas, dessen Scale beim Thaupunkte — 39 und beim Siedepunkte + 147 zeigte. Setzt man aber in 5, um Meter und Centigrade zu erhalten, $1^t = 1^m{,}94904$ und $T' = 1{,}86 \cdot T - 39$, $t' = 1{,}86 \cdot t - 39$, so geht sie nach leichter Reduktion in 1 über. — Schon die auf Wunsch von La Condamine 1762 durch **Deluc** der Pariser Akademie vorgelegte Abhandlung „Recherches sur la loi des condensations de l'atmosphère et sur la manière de mesurer par le Baromètre la hauteur des lieux accessibles" wurde ungemein günstig aufgenommen, und als er, nach Fortsetzung seiner Reisen und Studien, 1772 seine bereits erwähnte grössere Schrift herausgab, auf deren übrige Teile wir später zurückzukommen haben werden, schuf er sich damit für alle Zeiten das schönste Denkmal. — *c.* Während **Laplace** noch 1799 (vgl. die éd. 2 seiner Exposition) die fast mit Deluc übereinstimmende Konstante 17972^m benutzte, erhöhte er sie 1805 (vgl. Méc. cél. IV 289—93) auf 18336^m, sich dabei auf die Messungen von Louis-François **Ramond** (Strassburg 1753 — Paris 1827; Staatsrat und Akad. Paris; vgl. Cuvier in Mém. de l'Inst. II 9) stützend, und liess dieselbe überdiess (vgl. unsere 2), von der Annahme ausgehend, dass sie zur Schwere reciprok sei, mit Breite und Höhe etwas variieren. Letzterer glaubte dagegen, dass man, unter einer kleinen Erhöhung der Konstante, praktisch in der Regel von diesen Variationen abstrahieren, nämlich die Formel

$$H = 18393^m \cdot (\mathrm{Lg}\, B - \mathrm{Lg}\, b) \cdot [1 + 0{,}002\, (T + t)] \qquad 6$$

benutzen dürfe, und aus dieser folgt, bei Vernachlässigung des Temperaturfaktors, durch Differentiation

$$\frac{dH}{db} = -\frac{18393}{b \cdot Ln\,10} = -\frac{7988}{b} \qquad 7$$

woraus z. B. für $db = 1^{mm}$ und $b = 720^{mm}$ nahe $dH = 11^{m}$ folgt, so dass in unsern Gegenden einem Erheben um 11^{m} ein Sinken des Barometers von 1^{mm} entspricht. — *d.* Schon **Bessel** machte in seinen „Bemerkungen über barometrisches Höhenmessen (A. N. 356 von 1838)" auf den Einfluss des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft aufmerksam; die ihn berücksichtigende 3 wurde durch **Rühlmann** in seiner Schrift „Die barometrischen Höhenmessungen. Leipzig 1870 in 8." aufgestellt. — *e.* Die nach einer handschriftlichen Notiz von Horner durch John **Leslie** (Largo in Schottland 1766 — ebenda 1832; Prof. math. et phys. Edinburgh) aufgestellte 4 ergiebt sich ohne weiteres, wenn man in 39 : 4 die x durch (B — b) : (B + b) ersetzt und sich mit dem ersten Gliede begnügt. — *f.* Für die sog. Hypsothermometrie auf 151 verweisend, füge ich den bereits erwähnten Schriften noch folgende bei: „George **Shuckburgh** (1751 — Shuckburgh-Park in Warwichshire 1804; meist auf Reisen befindlich), Observations made in Savoy in order to ascertain the height of mountains by means of the barometer (Ph. Tr. 1777), — Jean **Trembley** (Genf 1749 — Mas d'Agenois in Lot-et-Garonne 1811; erst Advokat, dann Akad. Berlin), Analyse de quelques expériences faites pour la détermination des hauteurs par le moyen du baromètre (Saussure, Voyages II von 1786), — **Biot**, Tables barométriques portatives. Paris 1801 in 8., — Bernhard v. **Lindenau** (Altenburg 1780 — ebenda 1854; Dir. Sternw. Seeberg, später sächs. Staatsminister), Tables barométriques. Gotha 1809 in 8., — Jabbo **Oltmanns** (Wittmund in Ostfriesland 1783 — Berlin 1833; erst Privatgel. und Mitarbeiter von Humboldt, dann Akad. Berlin), Tables hypsométriques d'après la formule de M. Laplace. Paris 1809 in 8. (deutsch: Stuttgart 1830), — **Ramond**, Mémoires sur la formule barométrique de la mécanique céleste. Clermont-Ferrand 1811 in 4., — J. J. **Littrow**, Über Höhenmessungen durch das Barometer. Wien 1823 in 4., — **Horner**, Tables hypsométriques. Zürich 1827 in 8., und: Über den Einfluss der Tageszeit auf die barometrischen Höhenbestimmungen (Schweiz. Denkschr. 1830), — Karl v. **Fischer** (Bern 1809 — ebenda 1875; Privatgel. Bern), Beschreibung einer einfachen Methode der Berechnung bei Höhenmessungen mittelst des Barometers. Bern 1843 in 8., — Aug. **Bravais**, Sur l'influence qu'exerce l'heure de la journée relativement à la mesure barométrique des hauteurs (Compt. rend. 1850, und: Ann. mét. 1851), — **Plantamour**, Tables hypsométriques calculées d'après la formule de Bessel (Mém. Genève 1854), — C. **Prediger**, Über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen. Clausthal 1860 in 8., — Max. **Bauernfeind** (Anzberg in Oberfranken 1818 geb.; Prof. Ingenieurwissensch. München), Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen. München 1862 in 8., — R. S. **Williamson**, On the use of the Barometer. New-York 1868 in 4., — M. Fr. **Kunze**, Beiträge zu einem Litteraturverzeichnis über das Höhenmessen (Z. f. Verm. 1879), — etc."

128. Die Baroskope. — Als eigentliches **Normalbarometer** ist noch immer das ursprüngliche Torricelli'sche **Gefässbarometer** zu betrachten, nur dass jetzt gewisse Anforderungen gestellt werden, welche in der frühern Zeit nur nach und nach teils zur Geltung kamen, teils erfüllt werden konnten [a]. Immerhin konkurriert mit

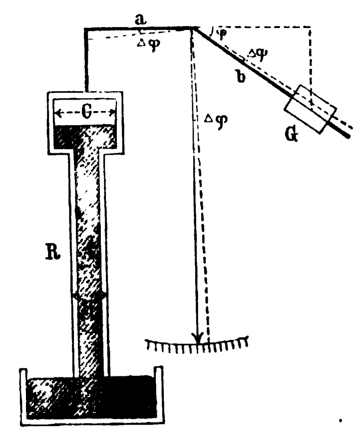
ihm, namentlich als **Reisebarometer**, das sog. **Heberbarometer**, bei welchem das Gefäss durch einen zweiten, kürzern und am zweckmässigsten nur mit einer kleinen seitlichen Öffnung versehenen Schenkel ersetzt ist, und der Nullpunkt der Scale meistens zwischen den beiden Niveaus liegt, so dass die Summe der diesen beiden letztern entsprechenden Ablesungen den Luftdruck misst[b]. Ferner erwähne ich noch als Baroskope von grösserer Bedeutung in erster Linie das für Registrierbeobachtungen verwendete **Wagbarometer**, bei welchem das Gefäss feststeht, während die früher oben gewöhnlich zu einer „Kammer" erweiterte Röhre am kurzen Arme eines Hebels hängt, dessen längerer Arm ein Gegengewicht, der Stützpunkt aber einen Zeiger mit Schreibapparat trägt[c], — dann das sich, um seines leichten Transportes willen, unter gehöriger Kontrole zu manchen Operationen empfehlende **Aneroidbarometer**[d], — und endlich den, aus einer netten Kombination von Thermometer und Manometer hervorgegangenen **Baromètre absolu**, welcher sich allerdings nur als **Zimmerbarometer** benutzen lässt[e].

Zu 128: *a.* Die Hauptanforderungen sind folgende: 1) soll das Quecksilber nicht nur chemisch rein, sondern auch luftfrei eingefüllt sein; es wird zu diesem Zwecke mit verdünnter Salpetersäure geschüttelt, — hierauf gut gewaschen und mit Fliesspapier getrocknet, — dann etwas erwärmt und durch einen tief in das Rohr eingreifenden Trichter eingefüllt, — und partienweise, um die trotz aller Sorgfalt mit eindringenden Luftbläschen zu beseitigen, noch sorgfältig ausgekocht. 2) soll die Röhre mindestens 12, das Gefäss 120^{mm} weit sein, — ersteres, um die Capillar-Depression auf ein Minimum zu reduzieren, — letzteres, um den in das Niveau des Quecksilbers im Gefässe fallenden Nullpunkt nicht bei jedem Steigen oder Fallen korrigieren zu müssen. 3) muss die Bestimmung der Höhe der Quecksilberkuppe über jenem Niveau eine sichere sein, — sei es, dass der Nullpunkt der Scale durch sog. **Spitzeneinstellung** in das Niveau gebracht, und dann ein Vernier abgelesen wird, dessen Index mit dem untern Rande eines an der Röhre gleitenden, auf die Kuppe eingestellten Ringes korrespondiert, — sei es, dass ein mit zwei beweglichen Ablesemikroskopen versehener vertikaler Masstab, ein sog. **Kathetometer**, zur Verfügung steht. 4) endlich muss der gemessene Abstand a nach der Formel

$$b = a : [1 + 0{,}000\,18018 \cdot \tau - 0{,}0000\,1878\,(\tau - \alpha)] \doteq a - \beta \cdot \tau \qquad 1$$

reduziert werden, wo τ die in Centesimalgraden ausgedrückte Temperatur des Quecksilbers und der Messingscale, α die Normaltemperatur des letzterer zu Grunde liegenden Etalons (beim altfranzösischen Masse 13° R.) bezeichnet, und $\beta = 0{,}00016 \cdot a$ ist. — Ein erstes Kathetometer wurde schon 1698 durch Stephan **Gray** in den Ph. Tr. beschrieben, und ungefähr zu derselben Zeit betonte **Amontons** die Notwendigkeit der Temperaturkorrektion, während diejenige des allerdings schon früher zuweilen vorgenommenen Auskochens erst durch **Deluc** in seinen „Recherches" nachgewiesen wurde. Für die spätere Gestaltung des Kathetometers vgl. den Artikel von **Löwenherz** und **Czapski** in Z. f. Instr. 6 von 1886. — *b.* Schon **Torricelli** und **Pascal** stellten dem Gefässbarometer (Bar. à cuvette) das Heberbarometer (Bar. à siphon) gegenüber,

und letzteres, das bei gleicher Weite der Schenkel die Capillar-Depression fast ganz eliminiert, wurde dann namentlich auch von **Deluc** als Präcisionsinstrument empfohlen. — *c.* Beim **Wagbarometer** schwimmt gewissermassen das Rohr im Gefässe, zum Teil durch das Gegengewicht, zum Teil durch das verdrängte Quecksilber gehalten, so dass, wenn R das Gewicht des Rohrs, G das Gegengewicht, A und B aber Querschnitte bezeichnen, für horizontalen Stand von a die Gleichheit



$$a[R - (B - A)\,h \cdot q] = G \cdot b \cdot Co\,\varphi \qquad 2$$

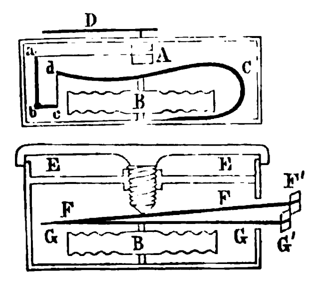
besteht, wo q das specifische Gewicht des Quecksilbers und h die Länge des eintauchenden Rohrteiles ist. Steigt der Luftdruck um m^{mm}, so sinkt das Quecksilber im Gefässe um $\Delta h = m \cdot C : D$, wo C dem Querschnitt der Kammer und D demjenigen des Gefässes gleich ist, während der Wagebalken einen an der Scale ablesbaren Ausschlag $\Delta\varphi$ erhält, so dass 2 nunmehr in

$$a[R - (B - A)(h - \Delta h + a \cdot Si\,\Delta\varphi)\,q]\,Co\,\Delta\varphi = G \cdot b \cdot Co\,(\varphi - \Delta\varphi)$$

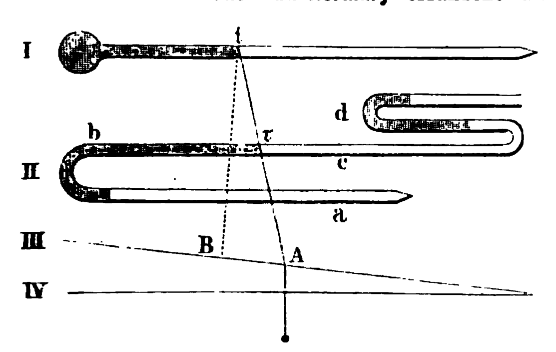
übergeht, und somit, da $\Delta\varphi$ als klein zu betrachten ist,

$$\Delta\varphi = \frac{a\,(B - A) \cdot m \cdot C \cdot q}{D\,[G \cdot b \cdot Si\,\varphi + a^2\,(B - A)\,q]\,Si\,1''} \qquad 3$$

wird. Es gehen hieraus die Hauptverhältnisse an diesem, durch **Secchi** zur Selbstregistrierung angewandten, durch Heinrich **Wild** (Uster bei Zürich 1833 geb.; Prof. phys. Bern, dann Dir. phys. Obs. und Akad. Petersburg) und Gustav **Hasler** (Aarau 1830 geb.; Dir. Telegraphenwerkstätte Bern) weiter ausgebildeten, aber seither allerdings durch den „Wagbarograph von Sprung-Fuess" überflügelten Apparate hervor, während für die genauere, auch die Temperatureinflüsse berücksichtigende Theorie auf die Specialabhandlungen von **Jullien** (Ann. Tortol. 1861), **Wild** („Die selbstregistrierenden Instrumente in Bern. München 1866 in 8." und Repert.), **Radau** (Compt. rend. 1867), etc., verwiesen werden muss. Für $\varphi = 0$ und $C = A$ geht übrigens das Wagbarometer in das schon von Sir Samuel **Morland** (Sulhamstead in Berkshire 1625 — Hammersmith bei London 1695; Master of Mechanics) erfundene und bereits von Hyazintho de **Magelhaens** (Lissabon 1722 — Islington bei London 1790; Urenkel des Weltumseglers; erst Mönch in Lissabon; dann emigriert und konvertiert) als Barograph verwendete, sog. **statische** Barometer über, für welches des letztern „Mémoire sur le baromètre nouveau (Journ. de phys. 1782)" zu vergleichen ist. — *d.* Bei der ursprünglichen Konstruktion durch **Bourdon** stand eine luftleere, gerippte Metallbüchse B mit einer dem Luftdrucke entgegenwirkenden Feder C in Verbindung, deren eines Ende d an dem Winkelhebel abc, und durch die Kette aA auf den Zeiger D wirkte, — während seither Jakob **Goldschmid** (Winterthur 1815 — Zürich 1876; Mechaniker in Zürich) noch wesentlich bessere Erfolge erzielte, als er die mit GG zusammengelötete



Feder FF mittelst dem Schraubendeckel EE so stellte, dass die beiden Striche auf F' und G' in eine Horizontale fielen, und nun den Stand der Schraube ablas. Vgl. „Karl **Koppe** (Soest in Westphalen 1844 geb.; Ingenieur, jetzt Prof. Geod. Braunschweig), Die Aneroidbarometer von Goldschmid. Zürich 1877 in 8.", und für die Anwendung der Aneroide zu Registrierapparaten durch **Hipp** die Notiz von **Hirsch** in Bull. Neuch. 1865. — *e.* Der durch zwei französische Artillerieoffiziere **Hans** und **Hermary** erfundene und 1878 in Paris prämierte **Baromètre absolu** besteht aus einem Quecksilberthermometer I, — einem dazu parallel liegenden, sowohl von Temperatur als Luftdruck abhängigen Luftthermometer II, welches bei a Luft, bei b als Sperrflüssigkeit Schwefelsäure, bei c nochmals Luft, und bei d ein Öl enthält, welches die äussere Luft von der hygroskopischen Säure abtrennen soll, — und beruht darauf, dass bei jedem gegebenen Barometerstande die Verbindungslinien entsprechender Stände t und τ sämtlich durch denselben Punkt A gehen, und der Ort dieses Punktes A eine Gerade III ist, auf welcher er eine der Zunahme des Barometerstandes proportionale Strecke AB durchläuft, so dass auf III, oder auch auf einer andern Geraden IV, auf welche man die A mit einem Lote überträgt, eine Barometerscale angebracht werden kann.



129. Die sog. Wellenlehre. — Hebt man, z. B. durch Aufsaugen, an irgend einer Stelle einer Flüssigkeit eine Säule über das Niveau empor und überlässt sie dann wieder sich selbst, so sinkt sie nicht nur zurück, sondern geht sogar, da die Flüssigkeit, auf welche sie fällt, nach der Seite ausweichen kann, infolge der erhaltenen Geschwindigkeit unter das Niveau, — es bildet sich ein **Thal,** während die umgebende Flüssigkeit zu einem **Berge** aufsteigt, jedoch ebenfalls sofort durch die Schwere wieder niedergezogen wird, dabei nach aussen einen neuen Berg erzeugt, etc. Es entsteht so eine eigene Art schwingender Bewegung, eine sog. **Wellenbewegung,** und wenn sich verschiedene solche Bewegungen kreuzen, so bilden sich beim Zusammentreffen eines Thales der einen mit einem Berge der andern sog. **Interferenzen** [a]. — In ähnlicher Weise entstehen auch in der Luft Wellen, welche aus abwechselnd dichtern und dünnern Schichten bestehen, — und ebenso können Saiten, Stäbe, Platten, etc. zum Schwingen gebracht werden. Wenn sodann eine solche schwingende Bewegung hinreichend rasch vor sich geht und sich durch ein geeignetes Medium bis zu unserm Gehörorgane fortpflanzen kann, so wird sie als **Schall** (Geräusch, Klang, Ton) wahrgenommen [b].

Zu 129: *a.* Die Wellenlehre basiert wesentlich auf dem durch Ernst Heinrich **Weber** (Wittenberg 1795 — Leipzig 1878; Prof. phys. Leipzig) und dessen Bruder Wilhelm Eduard **Weber** (Wittenberg 1804 geb.; Prof. phys. Göttingen) herausgegebenen Werke: „Die Wellenlehre auf Experimente gegründet. Leipzig 1825 in 8.“ — *b.* Auf die Lehre vom Schalle, die sog. **Akustik**, kann ich hier nicht näher eintreten, sondern verweise hiefür auf die Schriften: „**Descartes**, Compendium musicæ. Ultraj. 1650, posth. in 4., — **Euler**, Tentamen novæ theoriæ musicæ. Petropoli 1729 in 4., — **d'Alembert**, Elémens de musique. Paris 1779 in 8., — **Chladni**, Entdeckungen über die Theorie des Klanges. Leipzig 1782 in 4., und: Die Akustik. Leipzig 1802 in 4. (Nachtrag 1817; franz. Paris 1809), — Hermann v. **Helmholtz** (Potsdam 1821 geb.; Prof. physiol. Königsberg und Heidelberg, jetzt Prof. phys. Berlin), Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863 in 8. (4. A. 1877), — John **Tyndall** (London 1820 geb.; Prof. phys. London): Sound. London 1867 in 8. (franz. durch Moigno, Paris 1869; deutsch durch Helmholtz und Wiedemann, Braunschweig 1867), — Strutt **Rayleigh**, Theory of Sound (deutsch durch Neesen, Braunschweig 1880, 2 Vol. in 8.), — etc.“ Ich will einzig erwähnen, dass die von Marin **Mersenne** (Soultière in Le Maine 1588 — Paris 1648; Minorit und Lehrer in den Ordensschulen) zuerst experimentell zu 1380' bestimmte Geschwindigkeit des Schalles in der Luft, jetzt gewöhnlich nach der Formel

$$U = 332^m,25 \cdot \sqrt{760\,(1 + 0,003\,665 \cdot t) : (b - 0,3779 \cdot e)}$$

berechnet wird, wo t die Lufttemperatur, b den Barometerstand und e den Druck des vorhandenen Wasserdampfes in Millimetern bezeichnet.

130. Einige Begriffe aus der Lehre vom Lichte. — Sei es, dass man das von einem Körper ausstrahlende Licht als eine eigentliche **Emission** betrachte, wie dies z. B. noch bei **Newton** der Fall war, — sei es, dass man mit **Huygens** annehme, der leuchtende Körper bewirke in einem äusserst feinen und elastischen, den ganzen Raum erfüllenden Medium, dem sog. **Ether**, eine Art Wellenbewegung oder **Undulation**, — so kömmt man immer zu den Grundgesetzen, dass sich das Licht in einem und demselben Mittel geradlinig und (467) mit grosser Geschwindigkeit fortpflanze, — dass es beim Treffen auf ein neues Mittel zum Teil durch sog. **Reflexion** so in das alte zurückkehre, dass die Normale den Winkel zwischen dem einfallenden und reflektierten Strahle halbiere, — zum Teil durch sog. **Brechung** so in das neue Mittel übergehe, dass die Sinuszahlen der Winkel, welche die Normale mit der ursprünglichen und der neuen Richtung des Strahles bildet, in einem von den beiden Mitteln abhängigen, bestimmten Verhältnisse stehen (136), — endlich zum Teil auch nach allen Richtungen **zerstreut** werde oder verloren gehe. Auf dem Reflexionsgesetze beruhen aber die Eigenschaften der sog. **Spiegel** (131—32), — auf dem Brechungsgesetze die Wirkungen der sog. **Prismen** und **Linsen** (136—41), — somit auch die Leistungen der aus diesen Elementen komponierten Sehwerkzeuge (133—47), — und es konnten daher die sich mit diesen Gegenständen befassenden

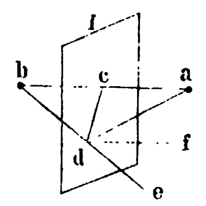
Teile der Lehre vom Lichte, die sog. **Katoptrik** und **Dioptrik** [a], zu einer gedeihlichen Entwicklung gelangen, ehe man sich über die Natur des Lichtes eine feste Vorstellung gebildet hatte. Eine Reihe von andern, erst in der Neuzeit ernstlicher in Betracht gezogenen Lichterscheinungen (148), welche sich durch das Zusammentreffen, Stauen, Modifizieren, etc. von Lichtwellen verhältnismässig leicht erklären lassen, bieten dagegen bei Annahme von Emissionen fast unüberwindliche Schwierigkeiten, und haben so schliesslich der Undulationstheorie zum Siege verholfen. — Es werden in dem folgenden, wie durch die beigesetzten Nummern bereits angedeutet wurde, die für uns wichtigsten Teile der Optik in eingehendere, namentlich auch die historische Entwicklung berücksichtigende Betrachtung gezogen werden, — für weitern Detail und die uns weniger berührenden Theorien muss ich dagegen auf Specialwerke verweisen [b].

Zu 130: *a.* Die Benennungen **Katoptrik** und **Dioptrik** sind aus: κάτοπτρις = Spiegel, und: δίοπτρον = Werkzeug zum Durchsehen, entstanden. — *b.* Ausser schon erwähnten und später zu citierenden Schriften nenne ich: „**Huygens**, Traité de la lumière. Leyde 1690 in 4., und: Dioptrica (Opusc. posth. Lugd. Bat. 1703 in 4.), — **Newton**, Optics. London 1704 in 4. (lat. durch Clarke, London 1706; franz. durch Coste, Amsterdam 1729; etc.), — Robert **Smith** (1689 — Cambridge 1768; Prof. math. Cambridge), A complet system of Optics. Cambridge 1738, 2 Vol. in 4. (deutsch durch Kästner, Altenburg 1755; franz. durch Pezenas, Avignon 1767), — **Lacaille**, Leçons élémentaires d'optique. Paris 1750 in 8. (Auch später, noch 1810; lat. durch Boscovich, Viennæ 1757), — **Euler**, Dioptrica. Petrop. 1769—71, 3 Vol. in 4., — **Priestley**, History and present state of discoveries relating to vision, light and colours. London 1772, 2 Vol. in 4. (deutsch durch Klügel, Leipzig 1775), — **Klügel**, Analytische Dioptrik. Leipzig 1778 in 4., — Joh. Wolfgang v. **Göthe** (Frankfurt 1749 — Weimar 1832; der gefeierte Dichter), Beiträge zur Optik. Weimar 1791—92, 2 Stücke in 8., und: Zur Farbenlehre. Tübingen 1810, 2 Bde. in 8., — Giovanni Battista **Venturi** (Bibiano bei Reggio 1746 — Reggio 1822; Prof. philos. Modena, dann phys. Pavia, Geschäftsträger in Bern, etc.), Commentari sopra la storia e le teorie dell' Ottica. Bologna 1814 in 4., — John **Herschel**, On the theory of light. London 1828 in 4. (franz. durch Verhulst und Quetelet, Brux. 1829; deutsch durch E. Schmidt, Stuttgart 1831), — Joh. Joseph **Prechtl** (Bischofsheim in Franken 1778 — Wien 1854; Dir. Polyt. Wien), Praktische Dioptrik. Wien 1828 in 8., — **Santini**, Teorica degli stromenti ottici. Padova 1828, 2 Vol. in 8., — **Littrow**, Dioptrik. Wien 1830 in 8., — David **Brewster** (Sedburgh in Schottland 1781 — Allerly 1868; erst Pharmaceut, dann Prof. phys. St. Andrews), A treatise on optics. London 1831 in 8., — Ed. **Schmidt**, Lehrbuch der analytischen Optik. Herausgeg. durch Goldschmidt. Göttingen 1834 in 8., — August **Kunzek** (Königsberg in östr. Schlesien 1795 — Wien 1865; Prof. phys. Lemberg und Wien), Die Lehre vom Lichte. Lemberg 1836 in 8. (2. A. Wien 1853), — Heinrich Emil **Wilde** (Finkenstein bei Marienwerder 1793 — Berlin 1859; Prof. math. Berlin), Geschichte der Optik. Berlin 1838—43, 2 Bde. in 8., — Gustav **Radicke** (Berlin 1810 geb.; Prof. phys. Bonn), Handbuch der Optik. Berlin

1839, 2 Bde. in 8., — A. **Beer**, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig 1853 in 8. (2. A. durch V. v. Lang 1882), — F. **Billet**, Traité d'optique physique. Paris 1858—59, 2 Vol. in 8., — Ch. **Briot**, Essai sur la théorie mathématique de la lumière. Paris 1864 in 8., — Alexandre-Edmond **Becquerel** (Paris 1820 geb.; Prof. phys. Paris), La lumière, ses causes et ses effets. Paris 1867 bis 1868, 2 Vol. in 8., — **Tyndall**, Six lectures on light. London 1873 in 8. (deutsch durch Wiedemann, Braunschweig 1876), — Franz Ernst **Neumann** (Ukermark 1798 geb.; Prof. phys. et miner. Königsberg), Vorlesungen über theoretische Optik. Herausgeg. durch E. Dorn. Leipzig 1885 in 8., — etc."

131. Die ebenen Spiegel. — Jeder von einem Punkte auf einen ebenen Spiegel fallende Lichtstrahl wird nach dem Reflexionsgesetze so zurückgeworfen, wie wenn er von dem symmetrischen Punkte kommen würde [a], und es heisst daher dieser letztere **Bild** des erstern. Jedoch ist dieses Bild nur ein **fingiertes**, da die Strahlen nicht wirklich durch dasselbe gehen, so dass es auch nicht aufgefangen werden kann; ferner entspricht das Bild eines Gegenstandes nur einem Abklatsche des letztern. — Dreht sich ein Spiegel, während der einfallende Strahl derselbe bleibt, so dreht sich der reflektierte Strahl um den doppelten Betrag, und umgekehrt muss sich, wenn letzterer dieselbe Lage behalten soll, der erstere um das Doppelte drehen [b].

Zu 131: *a.* Ist $ab \perp I$ und $ac = bc$, so sind die Punkte a und b in Beziehung auf die Ebene I symmetrisch. Verbindet man sie mit irgend einem Punkte d der Ebene, so bilden ad und de notwendig mit dem sog. **Einfallslote** $df \perp I$ gleiche Winkel: Es wird also nach dem Reflexionsgesetze jeder von a ausgehende Lichtstrahl ad so nach de zurückgeworfen, wie wenn er von b kommen würde, w. z. b. w. — *b.* Hierauf gründet sich der sog. Spiegelsextant (352). Für andere Anwendungen des ebenen Spiegels vgl. 144. — Metallspiegel und unbelegte Glasspiegel kommen schon im hohen Altertum vor; auch kannte schon die Schule von **Plato** das Reflexionsgesetz, und in der mutmasslich mit Unrecht **Euklid** zugeschriebenen „Ὀπτικὰ καὶ Κατοπτρικά (durch J. Pena: Parisiis 1557 in 4.; durch C. Dasypodius: Argent. 1557 in 4.; auch später)" sind die Gesetze des ebenen Spiegels schon ziemlich vollständig entwickelt. — Mit Blei belegte Glasspiegel werden zuerst um 1240 durch Vincenz v. **Beauvais** erwähnt, — mit Zinn-Amalgam belegte Spiegel scheinen dagegen nicht vor dem 14. Jahrhundert vorzukommen.



132. Die sphärischen Spiegel. — Fallen von einem leuchtenden Punkte, der von einem sphärischen **Hohlspiegel** des Radius 2p den Abstand $a > p$ hat, Strahlen auf diesen Spiegel, so wird nur derjenige, welcher durch den Mittelpunkt führt, der sog. **Hauptstrahl**, in sich selbst zurückgeworfen, während alle andern Strahlen nach erfolgter Reflexion denselben nahezu in einem Punkte schneiden, dessen Abstand α vom Spiegel die Relation

$$\frac{\alpha}{2p - \alpha} = \frac{a}{a - 2p} \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{a \cdot p}{a - p} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} \qquad \mathbf{1}$$

eingeht, so dass dieser Punkt ein **reelles Bild** des leuchtenden Punktes darstellt und letzterm in Beziehung auf Mittelpunkt und Mitte des Spiegels harmonisch zugeordnet ist [a]. — Ist a sehr gross, wie z. B. für die Sonne, so wird somit $\alpha = p$, und es heisst daher p **Brennweite**, die Mitte zwischen Centrum und Spiegel aber **Brennpunkt**. Für $a < p$ wird α negativ, oder es entsteht ein hinter dem Spiegel liegendes fingiertes Bild. — Gegenstand und Bild haben, wie die Hauptstrahlen der äussersten Punkte des Gegenstandes zeigen, gleiche oder entgegengesetzte Lage, je nachdem sie auf gleicher oder entgegengesetzter Seite des Mittelpunktes liegen, — ihr Grössenverhältnis aber stimmt mit dem Verhältnisse ihrer Abstände vom Mittelpunkte überein [b]. — Wird der Radius eines sphärischen Hohlspiegels negativ, so geht er in den sphärischen **Konvexspiegel** (Malerspiegel) über, so dass für diesen nach 1

$$\alpha = -\frac{a \cdot p}{a + p} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{p} \qquad \mathbf{2}$$

wird, und das Bild immer hinter dem Spiegel, aufrecht und verkleinert erscheint. — Für weitern Detail muss wieder auf die Specialschriften verwiesen werden [c].

Zu 132: *a.* Der von einem leuchtenden Punkte D auf den Spiegel einfallende Strahl DM wird so nach MB zurückgeworfen, dass

$$BC = 2p \cdot \frac{\mathrm{Si}(v - w)}{\mathrm{Si}(2v - w)}, \quad \mathrm{Tg}\, w = \frac{2p \cdot \mathrm{Si}\, v}{CD + 2p \cdot \mathrm{Co}\, v}$$

woraus durch Elimination von w

$$BC = \frac{p \cdot CD}{p + CD \cdot \mathrm{Co}\, v}$$

$$\text{oder} \quad \frac{\alpha}{2p - \alpha} = \frac{4p - a + 2(a - 2p)\,\mathrm{Co}\, v}{a - 2p} \qquad \mathbf{3}$$

folgt. Es geht hieraus hervor, dass BC mit v grösser wird, also die von D ausgehenden Strahlen nach der Reflexion im Allgemeinen nicht in demselben Punkte B einschneiden oder bei B ein scharfes Bild ergeben, — sondern dass dies nur näherungsweise in dem Falle statt hat, wo die sog. **Apertur** $q = 2p \cdot \mathrm{Si}\, v'$ des Spiegels so klein ist, dass $\mathrm{Co}\, v \doteq 1$ gesetzt werden darf, wofür sodann 3 in die 1 übergeht. — Bezeichnen x und y die Abstände des Bildes und Gegenstandes vom Brennpunkte, so ist $\alpha = x + p$ und $a = y + p$, wofür 1 in $x \cdot y = p^2$ übergeht. — *b.* Aus 3 folgt, dass das Bild eines Punktes auf der Axe AD eine Länge

$$l = \frac{p \cdot CD}{p + CD \cdot \mathrm{Co}\, v'} - \frac{p \cdot CD}{p + CD} = \frac{p \cdot CD^2 (1 - \mathrm{Co}\, v')}{(p + CD)(p + CD \cdot \mathrm{Co}\, v')}$$

einnimmt, so dass für nahe parallele Strahlen, wo p gegen CD vernachlässigt werden kann, die schon von Roger **Baco** in Betracht gezogene **sphärische Ab-**

weichung in Länge

$$l = p \cdot \frac{1 - \operatorname{Co} v'}{\operatorname{Co} v'} = p \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - (q:2p)^2}}{\sqrt{1 - (q:2p)^2}} \fallingdotseq \frac{a^2}{8p} \qquad 4$$

ist, also mit dem Quadrate der Apertur zunimmt. Mit dieser Abweichung hängt zusammen, dass jede zwei benachbarte Strahlen sich nach ihrer Reflexion schneiden, also eine Folge von Durchschnittspunkten entsteht, welche die sog. **Brennlinie** (Katakaustica) bilden. Letztere wurde schon von **Barrow** (vgl. seine Lectiones), **Huygens** (vgl. seinen Traité), den beiden ältern **Bernoulli** (vgl. deren Opera), etc., zu bestimmen versucht, — und noch Auguste **De la Rive** (Genf 1801 — ebenda 1873; Prof. phys. Genf; vgl. Dumas in Mém. de l'Inst. II 40) debütierte mit einer „Dissertation sur la partie de l'optique qui traite des courbes dites caustiques. Genève 1823 in 4." Vgl. auch „Ferd. **Bösser**, Die Theorie der caustischen Linien und Flächen in ihrer geschichtlichen Entwicklung. Eutin 1869 in 4." — *c.* Anhangsweise mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass cylindrische und konische Spiegel offenbar in der Richtung der Kanten als ebene, senkrecht zur Axe aber als sphärische Spiegel wirken und somit Zerrbilder geben, — dass bei jedem nach einer Linie zweiten Grades geschliffenen Hohlspiegel alle aus dem einen Brennpunkte einfallenden Strahlen in den andern Brennpunkt zurückgeworfen werden, — dass speciell bei einem parabolischen Spiegel alle parallel zur Axe einfallenden Strahlen sich genau im Brennpunkte kreuzen, — etc.

133. Die Linsen und Brillen. — Die Alten waren wesentlich auf das allerdings köstlichste aller Sehwerkzeuge, **das unbewaffnete Auge**, beschränkt, und während die Katoptrik bei ihnen bereits eine gewisse Ausbildung erlangte, machte die Dioptrik nur ganz geringe Fortschritte. Dem entsprechend ist denn auch das zuweilen die Stelle einer Dioptra (330) versehende, das diffuse Licht abhaltende Sehrohr, oder der sog. **Tubus**, das einzige optische Hilfsmittel, dessen Gebrauch in früher Zeit wirklich konstatiert ist [a]. — Auch zugegeben, dass im Alterthume einzelne geschliffene Steine vorhanden gewesen und sogar zum Durchsehen benutzt worden sein mögen [b], so ist damit noch kein wirklicher Beweis für damalige bewusste Erstellung von eigentlichen Linsen oder Loupen geleistet, während durch das Schweigen aller Schriftsteller die Nicht-Existenz ziemlich sicher konstatiert ist [c]. — Dass der universelle Roger **Baco** um die Mitte des 13. Jahrhunderts an Linsen und Brillen dachte, sich mit ihrer mutmasslichen Wirkung befasste und die Möglichkeit der Erstellung von Mikroskopen und Teleskopen ahnte, geht allerdings aus mehreren Stellen seiner Werke deutlich hervor; dagegen findet sich auch da noch keine sichere Spur, dass er irgend welche dieser Sehwerkzeuge wirklich besass, und erst gegen Ende des Jahrhunderts geschah in ganz andern Kreisen, zunächst in Italien, der Brillen Erwähnung, dann aber sofort mehrfach [d]. Es darf daher mit Sicherheit angenommen werden, dass erst gegen Ende des 13. Jahrhunderts das bewusste und gewerbsmässige Schleifen von

Linsen und deren Verwendung zu **Brillen** begann, — zunächst in Italien und wahrscheinlich zuerst durch einen Florentiner **Salvino** degli Armati [e], — dann bald auch in andern Ländern, namentlich in Frankreich und Holland [f].

Zu 133: *a.* Schon **Aristoteles** erwähnt in seiner Schrift „De generatione animalium (VI)", bei Anlass des Sehens der Sterne aus tiefen Schachten (274), den Gebrauch des leeren Rohres, — sodann erzählt **Walafried** Strabo (vgl. Jahresb. Einsiedeln 1856/7), dass er 825 in Reichenau durch **Tatto** mit dem Gebrauche des Tubus bekannt geworden sei, — und nach Sédillot (Matériaux I 362) hatte z. B. der durch **Nassir-Eddin** in Meragah zu Sonnenbeobachtungen gebrauchte grosse Sextant statt Absehen ein solches Rohr, durch welches die Sonnenstrahlen zur Teilung geleitet wurden. Aber zwischen diesem Tubus der Alten und dem jetzigen Tubus besteht mindestens ein ebenso grosser Unterschied als zwischen einer leeren Tasche und einer vollen Börse, — und auch die andern Gründe, welche „Louis **Dutens** (Tours 1730 — London·1812; Historiograph von England), Recherches sur l'origine des découvertes attribuées aux modernes. Paris 1766 in 8. (Suppl. 1776 und 1812)" und analoge Schriften, für das Vorkommen des Fernrohrs im Altertum vorbrachten, sind durch „Hubert-Pascal **Ameilhon** (Paris 1730 — ebenda 1811; Bibliothekar Paris), Mémoire dans lequel on examine s'il est prouvé que les Ancients aient connu les télescopes et les lunettes d'approche comme quelques modernes le prétendent (Acad. d. inscrip. 1786), — und: Th. H. **Martin** (vgl. 14: w), Sur les instruments d'optique faussement attribués aux ancients par quelques savants modernes (Boncomp. IV von 1871)" längst in ähnlicher Weise entkräftet worden. — *b.* Der von dem schwachsichtigen **Nero** gebrauchte Smaragd war mutmasslich nur plan geschliffen und wirkte durch seine Farbe wohlthätig. — Auffallend ist dagegen allerdings eine in den Ruinen des 605 v. Chr. zerstörten Niniveh aufgefundene Bergkrystall-Linse, welche (vgl. „Discoveries in the ruins of Niniveh and Babylon. London 1833") durch **Brewster** als eine richtige plan-konvexe Linse von 1",6 Durchmesser und 4",5 Brennweite taxiert wurde, die man kaum als Zierat, sondern wohl als Loupe anzusehen habe; aber sogar, wenn letzterer Schluss unanfechtbar sein sollte, so würde auch da eine einzelne Schwalbe noch keinen Sommer machen. — *c.* Das Hauptargument **gegen** das Vorkommen unserer dioptrischen Instrumente im Altertum bleibt natürlich immer, dass die Astronomen, Optiker, Ärzte, etc., des ganzen Altertums, inklusive derjenigen der Araber und des Abendlandes bis gegen die Mitte des 13. Jahrhunderts, weder bei Anlass der optischen Theorien und Beschreibungen der Instrumente, noch bei andern passenden Anlässen, auch nur ein einziges unverfängliches Wort über die Existenz von Loupen, Brillen, etc., geschweige über das Vorhandensein von Teleskopen und Mikroskopen verlauten lassen. Wie nahe hätte es z. B. dem belesenen **Plinius** gelegen, bei der in seinen „Quæstiones (lib. I, cap. 6)" vorkommenden Stelle: „Wie klein und undeutlich eine Schrift immer sein mag, durch eine mit Wasser gefüllte Glaskugel erscheint sie grösser und deutlicher", auch von Vergrösserungsgläsern zu sprechen, wenn solche bereits vorhanden gewesen wären. — *d.* So liest man in einem von 1299 datierenden italienischen Manuskripte, dass „**vor kurzem** zum Vortheile der armen Alten, deren Gesicht blöde wird", Augengläser (occhiali = Brille) erfunden worden seien, — so machte der 1305 in Montpellier verstorbene Arzt Bernhard **Gordon** in seinem „Lilium medicinæ" für eine von ihm erfundene Augensalbe mit den

Worten „sie wirkt so trefflich, dass sie es einem Greise möglich macht, die feinsten Buchstaben ohne Brille zu lesen“ Reklame, — so erwähnte um 1305 Jordan di **Rivalto** in einer zu Pisa gehaltenen Predigt die „kaum 20 Jahre alte“ Erfindung der Brillen, — etc. — *e.* Eine von 1317 datierende Grabschrift in der Kirche Maria Magdalena zu Florenz besagt: „Qui giace **Salvino** degli Armati di Firence, inventore degli occhiali. Dio gli perdoni le peccate.“ — *f.* Die ersten Brillengläser wurden aus Krystallen geschliffen, womit ihr (später auch auf Glas-Linsen, die schon etwa 1300 von Venedig aus auf den Markt gelangten, übergetragener) Name zusammenzuhängen scheint, da man damals jeden durchsichtigen Krystall als „Beryll“ zu bezeichnen gewohnt war; sie wurden paarweise an Lederstücken an einer Mütze aufgehangen und erst etwa im 15. Jahrhundert in einer Fassung auf die Nase gelegt; ferner bestanden sie fast ausschliesslich aus Sammelgläsern, — ja es bezieht sich, wie **Kästner** (Gesch. II 244) nachgewiesen hat, die erste etwas sichere Notiz über den Gebrauch von Zerstreuungsgläsern auf den kurzsichtigen Papst Leo X. (1475 bis 1521).

134. Die holländischen Kykers und das Perspicillum Galileis. — Die ältesten sich auf Erstellung von Fernröhren beziehenden und sicher konstatierten Thatsachen sind, dass 1608 X 2 der Brillenmacher Johannes **Lippershey** aus Middelburg den niederländischen Generalstaaten einen von ihm aus zwei Linsen von Bergkrystall (einer konvexen und einer konkaven) zusammengesetzten **Kijker** (Kijkglas, Verrekijker) vorlegte und sich dafür entweder ein Patent auf 30 Jahre oder einen Jahresgehalt ausbat, — dass die Behörde ihm X 6 ihren Beifall, aber zugleich den Wunsch aussprach, er möchte das Instrument in der Art vervollkommnen, dass man mit beiden Augen hindurchsehen könne, — dass ein von ihm infolge davon konstruiertes Doppelfernrohr (binocle) XII 13 ebenfalls gutgeheissen, aber dennoch nicht patentiert wurde, „da schon viele andere Kenntnis von der Erfindung erhalten hätten“, — und dass sich die Behörde darauf beschränkte, ihm um 900 fl. drei solcher Doppelfernröhren abzukaufen [a]. Sodann ist sicher, dass diese neuen Instrumente rasch in den Handel übergingen, so z. B. schon im April 1609 zu Paris durch einen Brillenhändler öffentlich ausgeboten wurden, — und dass sie, wenigstens die damals in Paris käuflichen Exemplare, aus etwa ein Fuss langen Röhren bestanden, die an beiden Enden „verschieden geformte“ Gläser trugen, durch welche „ferne und nur dunkel sichtbare Gegenstände“ sehr gut wahrgenommen wurden [b]. Ferner weiss man von **Galilei** selbst, dass er etwa im Mai 1609 von Paris aus eine ähnliche Beschreibung wie die eben gegebene erhielt, und dass es ihm nun sofort gelang, solche und noch grössere **Perspicillen** (perspicere = durchsehen) zu erstellen; ja es wird noch jetzt in Florenz eines dieser letztern aufbewahrt, nämlich ein vierfüssiges Kartonrohr von zwei Zoll

Durchmesser und die Aufschrift zeigt: „Tubum opticum vides, Galilei inventum, et opus quo Solis maculas et extimos Lunæ montes, et Jovis satellites, et novam quasi rerum universitatem primum dispexit A. D. 1609“ [c]. — Es gehört dieses Instrument, so primitiv es noch war und so unrichtig es ist, seinen Verfertiger auch als Erfinder zu bezeichnen, sowie alle Entdeckungen jener Zeit ihm allein gutzuschreiben, entschieden zu den ehrwürdigsten Überbleibseln einer grossen Zeit.

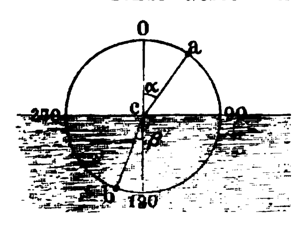
Zu 134: *a.* Die Geschichte des Fernrohr-Fundes in Holland ist trotz der bezüglichen Arbeit von Pierre **Borel** (Castres in Languedoc 1620? — Paris 1689; k. Leibarzt und Akad. Paris) „De vero telescopii inventore. Hagæ 1655 in 4.“, und der auf archivalischen Forschungen van Swindens basierenden Schrift „Gerhard **Moll** (Amsterdam 1785 — ebenda 1838; Prof. math. et phys. Utrecht), Geschiedkundig Onderzoek naar de eerste Uitfinders der Vernkykers. Amsterdam 1831 in 4.“ nichts weniger als vollständig aufgeklärt; denn, wenn auch nach Obigem feststeht, dass Joh. **Lippershey** (Wesel 1560? — Middelburg 1619) vor Ende 1608 nicht nur einzelne Kijkers, sondern auch Doppelfernröhren erstellt hatte, also letztere nicht erst später durch die Chorez, Rheita, Chérubin, etc., erfunden zu werden brauchten, so ist damit noch keineswegs erwiesen, dass er wirklich der erste war, der jenen Fund machte: Und in der That deutet die, auch von dem Zeitgenossen **Scheiner** (vgl. Zürch. Viert. 1876) erwähnte Sage, es sei der Fund dadurch veranlasst worden, dass mit Linsen spielende (kleine oder grosse?) Kinder den Wetterhahn des benachbarten Thurmes nicht nur vergrössert, sondern auch „hed onderste boven gekeerd“ sahen, eher auf die ebenfalls in Middelburg angesessenen Brillenmacher **Jans** Zachariassen und seinen Sohn **Zacharias** Janssen hin, welche schon um 1590 ein zusammengesetztes Mikroskop erfunden haben sollen und somit am besten dazu angethan waren, das Ergebnis einer solchen Spielerei auszunutzen. Man hätte dann etwa anzunehmen, es sei dadurch Zacharias auf das spätere eigentliche oder astronomische Fernrohr (135) gekommen, habe jedoch dasselbe wegen des verkehrten Bildes als unbrauchbar verworfen, und es sei sodann erst etwas später, sei es durch ihn oder durch Lippershey, das konvexe Augenglas mit einem konkaven vertauscht, und so das einzig und allein in letzterer Form auftretende **holländische Fernrohr** erstellt worden, welches als **langer Kijker** bezeichnet wurde, während man unter **korte Kijker** die Mikroskope verstand. — Im Vorübergehen noch erwähnend, dass die von Jakob **Metius** (vgl. 60:c), der 1608 X 17 ebenfalls ein Patent verlangte, erhobenen Prioritätsansprüche nie wesentlich in Betracht gezogen wurden, füge ich zum Schlusse bei, dass nach Libri schon in einer von Jean **Gazeau** in Lyon 1608 XI 22 ausgegebenen Flugschrift erzählt wird, es sei zu „Mildebourg“ durch jemand, der leider nicht genannt, sondern nur als „pauvre homme religieux et craignant Dieu“ bezeichnet wird, ein Fernrohr konstruiert und ihm mit 300 „écus“ bezahlt, ja „à la charge de n'apprendre le dit mestier à personne du monde“ ihm noch ein höherer Preis in Aussicht gestellt worden. — *b.* Dass die Generalstaaten beschlossen, zwei der von Lippershey bezogenen Kijker an Henry IV. und dessen Minister Sully zu verschenken, spricht dafür, dass Ende 1608 solche Instrumente noch selten waren; aber immerhin hatte schon im Herbst jenes Jahres der spanische Gesandte Spinola im Haag ein solches kaufen können, ja

gleichzeitig waren andere Exemplare in Frankfurt durch einen Belgier ausgeboten worden. Im folgenden Frühjahr hatten sich sodann Fabrikation und Handel bereits ziemlich ausgedehnt und infolge davon waren auch die anfänglich sehr hohen Preise bedeutend zurückgegangen: Abgesehen von dem schon oben nach dem Tagebuche des Pierre **d'Estoile** beschriebenen Handel in Paris, fand z. B. Houzeau ein 1609 V 5 aus Brüssel datiertes Schreiben von Erzherzog Albrecht auf, in welchem für den Goldschmied Robert Staes 90 Gulden „pour deux tuyaux artificiels pour veoir de loing" angewiesen wurden; ferner weiss man, dass zu jener Zeit sich auch die Kepler, Marius, Fabricius, etc., mit Fernröhren versehen konnten, und dass spätestens 1610 in London ein förmliches Atelier für ihre Verfertigung entstand. — *c.* Dass **Galilei**, nachdem er aus Paris durch Jacques Badovere die erwähnte Beschreibung erhalten hatte, die Konstruktion des neuen Instrumentes rasch (wie er im Saggiatore erzählt, sogar „im Laufe der Nacht") erriet, darf uns nicht sehr verwundern, und er hatte hiefür höchstens nötig, von den, damals überdies noch sehr im Argen liegenden, Gesetzen der Dioptrik insoweit geleitet zu werden, als es sich darum handelte, für die ihm zu Gebote stehenden Linsen die zweckmässige Rohrlänge zu bestimmen. Bemerkenswerter ist es, dass es ihm auch bald gelang, grössere Perspicillen zu erstellen, bei welchen die anfänglich nur 3 betragende lineare Vergrösserung sich nach und nach bis auf 30 erhöhte, und dieselben, wie Lorenzo Pignoria schon 1609 VIII 31 bezeugte, den besten flandrischen Röhren ebenbürtig zu machen: Dass der venetianische Senat ihn für diese Leistung mit einer Gehaltszulage von 1000 Gulden bedachte, zeigt, dass man damals in Italien solche Friedensthaten besser als anderswo zu würdigen wusste. — Auch zusammengesetzte Mikroskope wurden durch **Galilei** von 1610 hinweg erstellt und benutzt; doch kann man ihn (vgl. a) kaum als ersten Erfinder bezeichnen. — *d.* Dass schon die ersten Ersteller der Kijkers dieselben mit Erfolg zur Betrachtung des Mondes und der übrigen Gestirne benutzten, bezeugt uns Borel, — ja schon die erwähnte Flugschrift von 1608 XI 22 rühmt: „Mesmes les estoiles qui ordinairement ne paroissent à notre veue et à nos yeux par leur petitesse se peuvent voir par le moyen de cet instrument", — und ebenso darf man der zum Teil vorgalileischen Wahrnehmungen der Fabricius, Marius, Harriot, etc., nicht vergessen; aber allerdings überragten schon die ersten Entdeckungen **Galileis**, Dank seinem geistigen Auge, alle diese Leistungen, und Arago's Bemerkung (Oeuvres III 246): „Quelques heures auraient pû suffire à toutes les observations que fit Galilée en 1610/1", ist mehr als sonderbar.

135. Die optischen Studien Keplers und seine Erfindung des Fernrohrs. — Dass **Kepler**, der schon früher höchst bemerkenswerte optische Studien gemacht hatte [a], sich nicht nur im allgemeinen für den Fund der Holländer interessierte, sondern denselben in wissenschaftliche Betrachtung zog, ist begreiflich, — aber ebensosehr, dass es selbst diesem genialen Manne nicht gelang, auf Einen Wurf die bisdahin noch ziemlich im Argen liegende Dioptrik völlig zu bemeistern. Wohl fühlte er, dass er dafür das schon von Ptolemäus gesuchte Brechungsgesetz kennen sollte, jedoch hatten seine betreffenden Untersuchungen nicht den gewünschten Erfolg [b]; aber was ohne vollständige Kenntnis dieses Gesetzes zu

erreichen war, das brachte er auch wirklich zu stande, und namentlich gelang es ihm, wie uns seine Schrift „Dioptrice. Aug. Vind. 1611 in 4." zeigt, sich von der Wirkung der verschiedenen Linsen und ihrer Kombinationen ein hinreichendes Bild zu verschaffen [c], um zeigen zu können, dass ein Fernrohr nicht nur entsprechend dem holländischen, sondern noch auf verschiedene andere Arten, namentlich viel naturgemässer durch Kombination zweier Sammellinsen erhalten werden könne. Hiedurch war also die Möglichkeit des sog. **astronomischen** Fernrohrs, bei welchem ein reelles Bild erzeugt und mit einer Loupe betrachtet wird, erwiesen, und wenn dasselbe auch durch **Kepler** selbst noch nicht, sondern erst einige Jahre später durch **Scheiner**, und wohl bald darauf durch **Fontana**, ausgeführt wurde [d], so gebührt immerhin ersterem der Ruhm, den **Fund** der Holländer erklärt und ihm die **Erfindung** unsers jetzigen Fernrohrs beigefügt zu haben.

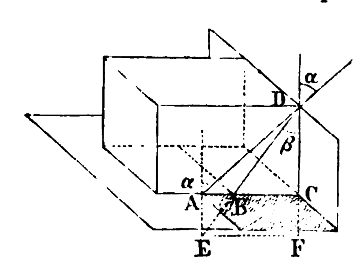
Zu 135: *a.* Vgl. seine Schrift „Ad Vittellionem Paralipomena. Francofurti 1604 in 4.", auf welche wir noch später (454) zurückkommen werden. — *b.* Schon **Kleomedes** hatte in seiner bereits (4 : n) erwähnten Schrift ausgesprochen, dass ein Lichtstrahl, wenn er schief aus einem Mittel in ein dichteres übergehe, dem Einfallslote zugelenkt werde, und ein Jahrhundert später hatte sogar **Ptolemäus** (wie das 5. Buch seiner früher vielfach citierten, dann wie verschwundenen oder wenigstens nur in Bruchstücken bekannten, und erst „Torino 1885 in 8." durch Govi nach einem Mailänder Manuskripte publizierten „Optica" zeigt), wenigstens bis zu einem gewissen Grade, die Aufgabe gelöst, das betreffende Gesetz für Luft und Wasser empirisch festzustellen: Seine bezügliche, schon als eine der ältesten, ehrwürdige Versuchsreihe bestand darin, dass er einen geteilten, mit zwei beweglichen Indices a und b versehenen Kreis, vertikal und bis zum Mittelpunkte in Wasser tauchte, — a nach und nach verschiedene, durch α bestimmte Lagen gab, — dann jeweilen b verschob, bis es mit a und c in einer Geraden zu liegen schien, — und endlich je das der Endlage entsprechende β ablas; er erhielt so für α und β die korrespondierenden Werte



α	10°	20	30	40	50	60	70	80°
β	8	15½	22½	28	35	40½	45	50
$\alpha:\beta$	1,25	1,29	1,33	1,43	1,43	1,48	1,56	1,60
β'	7½°	14½	22	28½	35	40½	44½	47½°

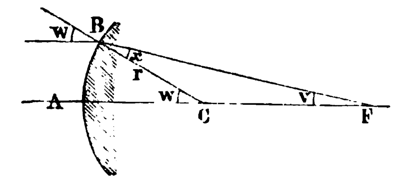
welchen ich noch ihr Verhältnis $\alpha:\beta$, sowie zur Vergleichung als β' die mit dem Brechungsexponent 1,34 des Wassers nach unsern jetzigen Regeln aus α berechneten Werte von β beigefügt habe. Da der Wert von $\alpha:\beta$ zwischen relativ engen Grenzen schwankt, so lag es für **Ptolemäus** nahe, aus seinen Versuchen zu schliessen, dass, wenigstens bei denselben Mitteln, Einfalls- und Brechungswinkel in einem konstanten Verhältnisse stehen, und dass letzteres

für Luft und Wasser etwa $^3/_2$ betrage, ein Wert, der auch dem Mittel 1,42 der obigen $\alpha:\beta$ ziemlich nahe kömmt. Immerhin war durch diese Versuche, welchen **Alhazen** (Bassora 950? — Kairo 1038) und der (nach Curtze in Boncomp. 4 von 1871) am Ende des 13. Jahrhunderts als Mönch in Italien lebende, wahrscheinlich aus Thüringen stammende Witelo oder **Vitello** [vgl. „Alhazen, Opticus thesaurus libri VII; ejusdem liber de crepusculis; item Vitellonis libri X. Omnes instaurati a. Fr. Risnero. Basileæ 1572 in fol., — und für letztere Schrift, an welche sich noch die von Snellius (vgl. Mitth. 72 von 1888) hochgestellten, mit Unterstützung von Landgraf Moritz von Hessen aus dem Nachlasse von Friedrich **Risner** (Hersfeld 1530? — ebenda 1580; Schüler und Freund von Ramus) herausgegebenen, aber sonst kaum citierten „Opticæ libri quatuor. Cassellis 1606 in 4." anschlossen, auch die von Günther aufgefundene, von G. Tanstetter und P. Apian besorgte Ausgabe „Vitellionis perspectiva. Norimb. 1535 in fol."] nichts wesentliches beizufügen wussten, das Fundamentalgesetz der Dioptrik noch nicht festgelegt, und so lag es **Kepler** nahe, vor allem neuerdings danach zu suchen. In der That ist nun aus Problema IV seiner Schrift von 1611 zu entnehmen, dass er zu diesem Zwecke bei verschiedenen Sonnenhöhen den Schatten A C einer vertikalen Wand und dessen Verkürzung auf B C durch einen vorgesetzten Glaswürfel mit einander verglich. Da er aber das Verhältnis



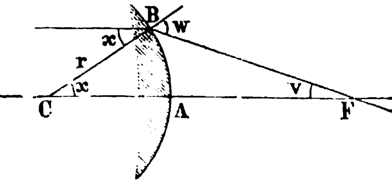
$$AC:BC = \text{Tg}\,\alpha:\text{Tg}\,\beta \quad \text{anstatt} \quad DE:DA = \text{Si}\,\alpha:\text{Si}\,\beta \qquad 1$$

ermittelte, so entging ihm das gesuchte Gesetz und er musste sich begnügen, festgestellt zu haben, dass auch beim Übergange aus Luft in Glas der Einfallswinkel (wenn er nicht über 15° betrage) sich zum Brechungswinkel nahe wie 3 : 2 verhalte. — *c.* Zunächst suchte **Kepler** den Punkt F zu bestimmen, in welchem sich die durch eine konvexe Fläche des Mittelpunktes C und Radius r aus Luft in Glas eintretenden Parallelstrahlen nach der Brechung kreuzen, wofür ihm seine Regel $w = {}^3/_2\,x$ gab, so dass $v = w - x = {}^1/_2\,x$ war, und somit nahe



$$CF:r = x:v = 2:1 \quad \text{oder} \quad CF = 2r \quad \text{und} \quad AF = 3r \qquad 2$$

Es lag also der Kreuzungspunkt um etwa drei Radien von der brechenden Fläche ab. Sodann suchte **Kepler** in entsprechender Weise den Kreuzungspunkt F der aus Glas in Luft an einer analogen konkaven Fläche übergehenden Strahlen zu ermitteln, wofür ihm seine Regel $w = {}^3/_2\,x$ und $v = w - x = {}^1/_2\,x$ ergab, und somit nahe



$$CF:r = w:v = 3:1 \quad \text{oder} \quad CF = 3r \quad \text{und} \quad AF = 2r \qquad 3$$

so dass in diesem Falle der Kreuzungspunkt nur um etwa zwei Radien von der brechenden Fläche abstand. Hierauf nahm **Kepler** eine gleichseitige bikonvexe Linse des Radius r vor, und konnte sich mit Hilfe von 2 und 3

wenigstens noch überzeugen, dass, wenn a und α Gegenstandsweite und Bildweite bezeichnen, die Werte

$a = \infty$	$a > 2r$	$a = 2r$	$a < 2r$	$a = r$	$a < r$
$\alpha = r$	$\alpha < 2r$	$\alpha = 2r$	$\alpha > 2r$	$\alpha = \infty$	$\alpha = -$

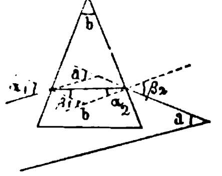
korrespondieren, wie es wirklich nach der für $n = {}^3/_2$ bestehenden Näherungsformel $\alpha = a \cdot r : (a - r)$ der Fall ist. Viel weiter kam er dann allerdings nicht mehr; aber er hatte schon hiedurch die Dioptrik wesentlich gefördert und sich selbst die Erfindung des Fernrohrs ermöglicht. — *d.* **Scheiner** erstellte etwa 1613 ein erstes astronomisches Fernrohr, da er in seiner „Rosa ursina (vgl. 273)", deren Druck 1626 begann, erzählt, er habe vor 13 Jahren dem Erzherzog Maximilian von Oesterreich die Sonnenflecken durch einen Tubus mit zwei konvexen Gläsern auf einer weissen Wand gezeigt. Bald darauf scheint auch **Fontana**, der sogar (aber erst 1646) behaupten wollte, die Erfindung schon 1608 gemacht zu haben, die Erstellung eines solchen Instrumentes gelungen zu sein, da Zupus 1614 ein solches bei ihm sah. Sodann scheint man **Schirläus**, dem man auch die Einführung der Namen **Objektiv** und **Okular** verdanken soll, das sog. **terrestrische** Fernrohr, d. h. den Gedanken gutschreiben zu müssen, das durch die Objektivlinse erzeugte umgekehrte Bild durch eine zweite Sammellinse nochmals umzukehren, und erst dieses zweite, wieder aufrechte Bild durch die Loupe zu betrachten. Endlich ist zu erwähnen, dass die gegenwärtig an die Stelle der Kijker, Occhiali, Perspicillen, Perspektive, etc., getretenen Benennungen **Teleskop** und **Mikroskop** durch den Griechen **Demiscianus** (Mitglied der Accademia dei Lincei in Rom) in Vorschlag gebracht worden sein sollen.

136. Das Brechungsgesetz und das Prisma. — Was Kepler nicht zu stande gebracht hatte, das gelang nicht sehr lange nachher dem ebenfalls ausgezeichneten Willebrord **Snellius**, indem dieser, aber allerdings „multo labore multisque experimentis", das Brechungsgesetz wirklich auffand, d. h. nach unserer Ausdrucksweise zeigte, dass, wenn α und β die Winkel sind, welche ein aus dem leeren Raume kommender Strahl vor und nach dem Eintritte in ein Mittel der Dichte d mit der Normale im Eintrittspunkte bildet, die Proportion

$$\mathrm{Si}\,\alpha : \mathrm{Si}\,\beta = n : 1 \qquad \mathbf{1}$$

besteht, wo $n > 1$ eine für dieses Mittel konstante Grösse bezeichnet [a]. — Man ist jetzt gewohnt, α **Einfallswinkel,** β **Brechungswinkel,** n **Brechungsexponent,** $n^2 - 1$ **brechende Kraft,** und $(n - 1) : d$ **specifisches Brechungsvermögen** zu nennen. Ferner geht aus 1 hervor, dass für $\mathrm{Si}\,\beta > 1 : n$ notwendig $\mathrm{Si}\,\alpha > 1$ wird, d. h. ein Austritt aus dem Mittel nicht mehr stattfinden kann, sondern die sog. **totale Reflexion** eintritt [b]. — Mit Hilfe des Brechungsgesetzes kann man nunmehr mit Leichtigkeit den Weg ausmitteln, welchen ein Lichtstrahl beim Durchgange durch verschiedene Mittel nimmt, so z. B. den Winkel bestimmen, um welchen derselbe beim Durchgange durch ein sog. **Prisma** von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird [c].

Zu 136: *a.* Da **Huygens** in seiner „Dioptrica (130: b)" nicht nur erzählt, dass **Snellius** sein mit 135: 1'' übereinstimmendes Brechungsgesetz in seinen Vorlesungen öffentlich mitgeteilt habe, auch nur durch seinen vorzeitigen Tod verhindert worden sei, ein seine Versuche und Schlussfolgerungen enthaltendes Werk zu veröffentlichen, — sondern sogar ausdrücklich sagt, dass er selbst von diesem (leider seither verloren gegangenen) Werke Einsicht genommen habe, so wird niemand wagen, die Priorität von Snellius in Zweifel zu ziehen. Weniger sicher ist die von **Vossius** und **Huygens** gegebene, von P. **Kramer** (Z. f. M. u. Ph. 1882) stark angezweifelte und auch durch Peter van **Geer** (Leiden 1841 geb.; Prof. math. Leiden) in seiner Schrift über Snellius (9: h) wenigstens als unerweisbar betrachtete Erzählung, es habe **Descartes** während seinem langjährigen Aufenthalte in Holland von dem erwähnten Manuskripte Einsicht gehabt, demselben das Gesetz entnommen und sich angeeignet: Unmöglich ist dies nach andern Vorgängen (vgl. 125: f) gerade nicht, aber sicher ist nur, dass er das Gesetz, unter Beigabe eines nicht sehr gelungenen Versuches einer theoretischen Begründung, 1637 in seinem mehrerwähnten „Discours" in der jetzt üblichen Form publizierte, dabei nach Gewohnheit unterlassend, eine Quelle anzugeben. — *b.* Die **totale Reflexion**, auf welche schon **Kepler** aufmerksam wurde, verdient ihren Namen, da nach den Versuchen von **Arago** und **Laugier** bei Benutzung eines Reflexionsprismas viel weniger Licht als bei einem gewöhnlichen Spiegel verloren geht. — *c.* Die Ablenkung a eines Lichtstrahles infolge seines Durchganges durch ein Prisma des brechenden Winkels b und des Brechungsexponenten n wird durch die Beziehungen



$$\mathrm{Si}\,\alpha_1 = \mathrm{n}\cdot\mathrm{Si}\,\beta_1 \qquad \mathrm{b} = \beta_1 + \alpha_2$$
$$\mathrm{Si}\,\beta_2 = \mathrm{n}\cdot\mathrm{Si}\,\alpha_2 \qquad \mathrm{a} = \alpha_1 + \beta_2 - \mathrm{b} \qquad \mathbf{2}$$

vollständig bestimmt. — Da aus ihnen

$$\mathrm{Co}(\alpha_1 - \alpha_2) - \mathrm{Co}(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathrm{Co}(\beta_2 - \beta_1) - \mathrm{Co}(\beta_2 + \beta_1) \qquad \mathbf{3}$$

$$\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{d}\beta_1} = \frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}\beta_1} + \frac{\mathrm{d}\beta_2}{\mathrm{d}\beta_1} = \mathrm{n}\cdot\frac{\mathrm{Co}(\beta_2-\beta_1) - \mathrm{Co}(\alpha_1-\alpha_2)}{\mathrm{Co}\,\alpha_1\cdot\mathrm{Co}\,\beta_2} \qquad \mathbf{4}$$

folgen, so ergiebt sich, dass a ein Minimum annimmt, wenn

$$\beta_2 - \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{also nach 3} \quad \beta_2 + \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{oder} \quad \beta_2 = \alpha_1 \quad \beta_1 = \alpha_2 \qquad \mathbf{5}$$

wird. Wenn man daher das Prisma so lange dreht, bis der Winkel des direkten und des doppelt gebrochenen Strahles am Auge ein Minimum a_0 annimmt und dieses misst, so hat man

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{a}_0 + \mathrm{b}}{2} \qquad \beta_1 = \frac{\mathrm{b}}{2} \qquad \mathrm{n} = \mathrm{Si}\,\frac{\mathrm{a}_0+\mathrm{b}}{2} : \mathrm{Si}\,\frac{\mathrm{b}}{2} \qquad \mathbf{6}$$

und kann daher, wie dies schon **Newton** andeutete und sodann namentlich **Fraunhofer** von 1814 hinweg vielfach ausführte, für das benutzte Prisma n berechnen.

137. Die erste Theorie der Linsen. — Nachdem das Brechungsgesetz gefunden war, lag es nahe, auch die von Kepler versuchte Theorie der Linsen in wirklich genügender Weise zu bearbeiten, und es waren namentlich die **Barrow** [a], **Halley** und **Euler**, welche successive die Lösung dieser Aufgabe mit Geschick an die Hand nahmen [b]. Die Hauptresultate ihrer Untersuchungen waren, dass bei einer bikonvexen Linse der Dicke d, der Krümmungs-

radien f und g, und des Brechungsexponenten n, der Gegenstandsweite a die Bildweite

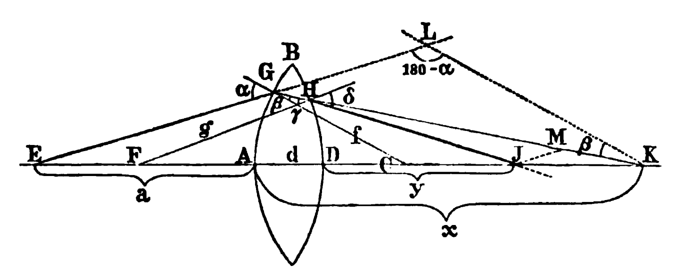
$$y = g \cdot \frac{afnN - ad + dfN}{afn - (n-1)ad + df + agn - fgnN} \quad \text{wo} \quad N = \frac{1}{n-1} \qquad \mathbf{1}$$

entspreche [c], — dass diese Formel sich auch auf die übrigen Linsen übertragen lasse, sobald man nur für plane oder konkave Flächen den betreffenden Radius unendlich gross oder negativ setze, — und dass endlich, wenn α den (bei Vernachlässigung der Dicke) $d = 0$ entsprechenden Wert von y bezeichne, die einfache Beziehung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} \quad \text{wo} \quad \frac{1}{p} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right) \qquad \mathbf{2}$$

bestehe, wo p die Bildweite für Parallelstrahlen oder die sog. **Brennweite** sei [d]. — Da p für dieselbe Linse sich gleich bleibt, so muss nach 2 einer Abnahme von a eine Zunahme von α, und damit einerseits bei gleich bleibendem Gegenstande eine Vergrösserung, anderseits aber allerdings auch eine gewisse Deformation des Bildes entsprechen [e].

Zu 137: *a.* Isaac **Barrow** (London 1630 — ebenda 1677) war Dr. Theol. und Prof. math. London und Cambridge. Er legte letztere Stelle 1669 zu Gunsten von Newton nieder und diente nun Karl II. als Kaplan. Vgl. Whewells Sammelschrift „The mathematical works of Is. Barrow. Cambridge 1860 in 8.“ — *b.* Vgl. „**Barrow**, Lectiones opticæ. Londini 1669 in 4., — **Halley**, An instance of the excellence of the modern Algebra, in the resolution of the Problem of finding the Foci of optick glasses universally (Ph. Tr. 1693), — und: **Euler**, Précis d'une théorie générale de la dioptrique (Mém. Par. 1765)“, — sowie des letztern bereits erwähnte „Dioptrica“. — *c.* **Barrow** ging noch mehr nach geometrischer, als nach analytischer Methode vor, jedoch kömmt sein Gang wesentlich mit folgendem überein: Um die Vereinigungsweiten $AK = x$ und $AJ = y$ der von E auf die beschriebene Linse fallenden Strahlen nach der ersten und zweiten Brechung zu bestimmen, zieht man $KL \parallel CG$



und $JM \parallel FH$, und hat sodann nach dem Brechungsgesetze sofort die Beziehungen

$$n = \frac{\text{Si}\,\alpha}{\text{Si}\,\beta} = \frac{GK}{GL} = \frac{GK}{EG} \cdot \frac{EG}{GL} = \frac{GK}{EG} \cdot \frac{EC}{CK}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{\text{Si}\,\gamma}{\text{Si}\,\delta} = \frac{HJ}{HM} = \frac{HJ}{HK} \cdot \frac{HK}{HM} = \frac{HJ}{HK} \cdot \frac{FK}{FJ} \qquad \mathbf{3}$$

Führt man in diese beiden Formeln (was allerdings Barrow noch nicht, sondern

erst Halley unternahm) $EC = a + f$, $CK = x - f$, $FK = x + g - d$ und $FJ = g + y$, sowie $GK \doteq AK = x$, $EG \doteq AE = a$, $HJ \doteq DJ = y$ und $HK \doteq DK = x - d$ ein, so gehen sie in

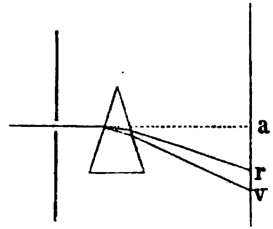
$$n = \frac{x\,(a+f)}{a\,(x-f)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n} = \frac{y\,(x+g-d)}{(x-d)\,(g+y)} \qquad 4$$

über, und aus diesen erhält man durch Elimination von x sofort die schon durch **Halley** gegebene Grundformel 1. — *d.* Die 2 habe ich zuerst bei **Euler,** der schon in seiner Abhandlung von 1765 die 4' auf die verwandte Form $(n-1) : f = (1 : a) + (n : x)$ brachte, in seiner „Dioptrica" gefunden. — Setzt man $n = {}^3/_2$, so ergiebt sich aus 2 die Proportion $(f + g) : f = 2g : p$, welche schon **Cavalieri** auf pag. 462 seiner „Exercitationes" aufstellte, und, entsprechend wie Halley die 1, auf alle Linsenarten auszudehnen wusste. — *e.* Auf diese Deformationen, sowie auf die auch bei den Linsen, entsprechend wie bei den Hohlspiegeln (132), auftretende **sphärische Abweichung**, kann ich unter der folgenden Nummer nur kurz eintreten und muss dafür auf die schon gegebene und noch in 141 u. f. zu vervollständigende Speciallitteratur verweisen.

138. Das Spektrum und die chromatische Abweichung. — Bei weiterer Verfolgung der vorstehenden Untersuchungen ergab sich leider bald auch das, die Möglichkeit grösserer Vervollkommnung der Fernröhren in Frage stellende Resultat, dass bei sphärischen Linsen die von einem Punkte ausgehenden Strahlen sich nach dem Durchgange nicht wieder genau in demselben Punkte kreuzen, d. h. dass das Bild eines Punktes nicht wieder ein Punkt ist: Man fand nämlich nicht nur, dass die Bildweite für die Randstrahlen, entsprechend wie beim Hohlspiegel, kleiner als für die Centralstrahlen ausfällt, und dass diese sog. **sphärische Abweichung** bei kleinerer Brennweite und grösserer Öffnung oder Apertur der Linse zunimmt [a], — sondern dass hiezu noch eine beim Spiegel nicht vorhandene, sich in ähnlicher Weise verhaltende und ebenfalls sehr störende, sog. **chromatische Abweichung** hinzutritt: Lässt man nämlich durch eine enge Spalte Sonnenlicht auf ein Prisma fallen, dessen brechende Kante parallel zur Spalte steht, und fängt dasselbe nach seinem Durchgange mit einem weissen Schirme auf, so zeigt sich, dass nicht nur das Bild der Spalte verlegt, sondern durch einen farbigen Streifen, das sog. **Spektrum**, ersetzt ist, in welchem sich von oben nach unten die Farben: „Rot, orange, gelb, grün, blau (hellblau), indigo (dunkelblau), violett" folgen [b]. — Wird der Schirm an der Stelle des Spektrums so durchbrochen, dass nur ein bestimmter der farbigen Strahlen durchgehen und mit einem zweiten Prisma aufgefangen werden kann, so löst sich dieser nicht weiter auf: Es ist also der Beweis geleistet, dass das Sonnenlicht zusammengesetzt (heterogen) ist und aus einer Anzahl von einfachen (homogenen) farbigen Strahlen von verschiedener Brechbarkeit besteht [c]. — Dass diese Strahlen beim Durchgange durch eine Linse,

wegen der für rot bis violett fortwährend abnehmenden Brennweite, farbige Bilder erzeugen, die sich nicht vollkommen decken und so die erwähnte Farbenabweichung verursachen, welche namentlich gegen den Rand des Gesichtsfeldes einen störenden farbigen Saum zur Folge hat, liegt auf der Hand. Überdies mag anhangsweise erwähnt werden, dass die neuere Zeit noch innerhalb rot **Wärmestrahlen** und ausserhalb violett **chemisch wirksame Strahlen** nachgewiesen hat [d].

Zu 138: *a.* Die sphärische Abweichung bei Linsen lässt sich ganz in entsprechender Weise wie diejenige bei Hohlspiegeln (vgl. 132 : b) behandeln; ich muss jedoch hier (wie schon 137 : e angedeutet wurde) des beschränkten Raumes wegen davon Umgang nehmen. — *b.* Die beistehende Figur, in welcher a der Lage des Spaltbildes ohne Prisma entspricht, r und v aber die durch die roten und violetten Strahlen entstehenden Bilder bezeichnen, dient zur Veranschaulichung des oben gesagten. — *c.* Die Farbenzerstreuung durch Brechung oder die sog. **Dispersion** des Lichtes, wie sie z. B. in den Regenbogen und Höfen zu Tage tritt (vgl. 229), war als Thatsache gewiss schon in den ältesten Zeiten bekannt; aber eine solche Analyse des Lichtes mit Hilfe des Prismas, wie man sie durch obigen Doppelversuch erhalten kann, wurde erst von 1666 an durch **Newton** in genügender Weise ausgeführt: Zwar hatte schon **Kepler**, wie aus seiner „Dioptrice (p. 6)" hervorgeht, den Gang eines Lichtstrahls durch ein Prisma ins Auge gefasst und die dabei auftretenden Regenbogenfarben bemerkt, und ähnliches wird auch von **Hodierna** berichtet; ferner kannte Joh. Marcus **Marci** de Kronland (Landskron in Böhmen 1595 — Prag 1667; Prof. med. Prag), wie nach Poggendorf seine „Thaumantia. Pragæ 1648 in 4." beweist, das Spektrum, welches er „Iris trigonia" nannte, — lehrte dasselbe in einem verfinsterten Zimmer zu beobachten, — und sprach neben Konfusem und Irrigem die wichtigen Sätze aus, „dass das farbige Licht beim Austritte aus dem Prisma mehr divergire", und „dass das einmal farbig gewordene Licht nach allen folgenden Brechungen wieder dieselbe Farbe zeige", — und dass auch **Grimaldi** die Farbenzerstreuung bemerkt und studiert hatte, geht aus seinem posthumen Werke „Physico-Mathesis de Lumine, Coloribus et Iride. Bononiæ 1665 in 4." unzweifelhaft hervor; aber nichts desto weniger datiert die genauere Kenntnis des Spektrums erst von 1666, wo sich **Newton** eigenhändig ein Prisma schliff und die Versuche begann, welche ihn schliesslich zu dem für die Farbenlehre fundamentalen Werke von 1704 (vgl. 130 : b) befähigten. — *d.* Für weiteres wird auf 147 verwiesen.



139. Das Luftfernrohr und die Spiegelteleskope. — Während die neuere Zeit die sphärische und chromatische Abweichung durch Kombination verschiedener Linsen- und Glasarten wenigstens grossenteils zu korrigieren weiss, so besassen dagegen die ältern Optiker nur das Auskunftsmittel, durch Abhalten der Randstrahlen, d. h. durch Anbringen von sog. **Blendungen** (Diaphragmen), etwas zu helfen, und auch da blieb der Fehler noch

immer so stark, dass die vom Objektive erzeugten Bilder zu unscharf ausfielen, um die Anwendung etwas kräftiger Okulare zu erlauben. Sollte also die, nach der von **Huygens** aufgestellten Näherungsregel dem Verhältnisse der Brennweiten von Objektiv und Okular gleiche **Vergrösserung** [a] gesteigert werden, so schien kaum ein anderes Mittel vorhanden, als Objektive von grosser Brennweite zu verwenden, da für diese die Abweichung geringer und, ohne Verstärkung der Okulare, die Vergrösserung beträchtlicher wurde. Es ergriffen denn auch **Auzout** und **Huygens** wirklich dieses Auskunftsmittel, und zwar in der Weise, dass sie, um ein allzu grosses Gewicht zu vermeiden, sog. **Luftfernröhren** (Nachtfernröhren) erstellten, bei welchen Objektiv und Okular einzeln gefasst und das Verbindungsrohr weggelassen war [b]. — Anderseits bemühte sich auch **Newton**, das Fernrohr zu verbessern, und dachte namentlich daran, durch Kombination von Linsen die chromatische Abweichung des Objektives zu heben. Als er jedoch durch einige Versuche zu dem irrigen Glauben gekommen war, es sei die Farbenzerstreuung bei jedem Körper seinem Brechungsvermögen proportional, gab er natürlich diesen Gedanken auf und wandte sich dem Versuche zu, die Objektivlinse durch einen Objektivspiegel zu ersetzen, d. h. ein sog. **Spiegelteleskop** zu konstruieren und sich auf diese Weise direkt vor der Farbenabweichung zu schützen. Dieser letztere Versuch war vom schönsten Erfolge begleitet, wie ein noch jetzt von der Roy. Society in London mit der Aufschrift „Invented by Sir Jsaac Newton and made with his own hands in the year 1671" als Reliquie aufbewahrtes Instrument dieser Art beweist [c].

Zu 139: *a.* Versteht man unter **Vergrösserung** das Verhältnis der Winkel φ und ψ, unter welchen das Objektivbild von den Mitten des Okulares und Objektives aus gesehen wird, so ist dieselbe $m = \varphi : \psi$. Wird anderseits das Fernrohr auf einen sehr fernen Gegenstand eingestellt, und bezeichnen p und P die Brennweiten von Okular und Objektiv, so kann man $Tg\,\varphi : Tg\,\psi = P : p$ setzen, also ist in der That $m = P : p$. — *b.* **Huygens** schrieb schon 1663 XI 18 aus Paris an Sir Rob. Moray, er habe ein 35-füssiges Luftfernrohr konstruiert „qui réussit admirablement bien", und fügte bei: „La façon de dresser le verre objectiv est de M. **Auzout**, et consiste en ce que dans un petit ais (Bohle) de deux pieds environ, où ce verre est enchassé, on ajuste un petit tuyau étroit (eine Art Sucher), justement à angles droits; lorsque celui, qui est auprès, voit l'étoile qu'on veut regarder, par ce tuyau, l'on est assuré que le verre objectiv est situé comme il faut, et l'on trouve aisément après cela le lieu pour mettre l'oculaire, qui est soutenu par un pied". Sonst war auch wohl das Objektivrohr oben auf einem hohen Maste in einer Art Nuss (genou) befestigt und von unten mit einem Schnurwerk lenkbar, — ja es hatte nach Bigourdan (Annales de Toulouse II von 1886) schon damals **Boffat** in Toulouse die gute Idee, man könnte die langen Fernröhren dadurch brauchbarer machen, dass man sie in die Weltaxe festlege und ihnen das Licht der Gestirne (analog

wie beim Heliostaten in 144) durch bewegliche ebene Spiegel zuführe, welche jedoch wegen der Unvollkommenheit dieser letztern keinen praktischen Erfolg haben konnte. — **Huygens** ging später bis auf 200' Brennweite und bald konkurrierten auch andere, wie namentlich Giuseppe **Campani** (um 1660 Mechanikus und Optikus in Rom), mit ihm in Konstruktion solcher Rieseninstrumente, welche trotz ihrer mühsamen Handhabung den **Huygens**, **Cassini**, etc. manche schöne Entdeckung ermöglichten. — Zugleich gelang es **Huygens**, wenigstens einen Teil der sphärischen Aberration zu heben und überdies das Gesichtsfeld zu vergrössern, indem er das Okular aus zwei plankonvexen Linsen zusammensetzte, welche beide ihre konvexe Seite dem Objektive zuwandten, und von welchen die innere, das sog. **Kollektivglas**, etwas innerhalb der Brennweite des Objektives stand. Es war dies das sog. **negative** Okular, welches sodann circa ein Jahrhundert später **Ramsden** dadurch zu einem **positiven** machte, dass er das Kollektivglas umdrehte und zugleich etwas ausser den Brennpunkt versetzte, wodurch für Messungszwecke viel gewonnen war. — *c.* Der Gedanke, die Objektivlinse durch einen Spiegel zu ersetzen, war von Niccola **Zucchi** (Parma 1586 — Rom 1670; Jesuit; Prof. math. am Collegio romano) schon 1616 und dann wieder in seiner „Optica philosophica. Lugduni 1652—56, 2 Vol. in 4." ausgesprochen und wenigstens insofern ausgeführt worden, als er mit einer konkaven Linse das von einem Hohlspiegel entworfene Bild betrachtete; ferner hatte um 1639 **Mersenne** (vgl. dessen „Cogitata physico-mathematica. Paris 1644 in 4.") den bemerkenswerten Vorschlag gemacht, das von einem parabolischen Spiegel entworfene Bild mittelst einem ihm vorgesetzten parabolischen Spiegelchen durch eine Öffnung des erstern ins Auge zu werfen, war aber durch Zweifel seines Freundes Descartes und durch die Schwierigkeit, solche Spiegel zu erstellen, an der Ausführung gehindert worden, — und ähnlich war es dem ebenfalls an der Brauchbarkeit sphärischer Spiegel zweifelnden James **Gregory** ergangen, als er (vgl. seine „Optica promota. Londini 1663 in 4.") um 1661 eine ähnliche Idee gefasst und verfolgt, aber schliesslich auch nur wieder bewiesen hatte, dass sehr oft das Bessere zum Feinde des Guten wird. Dieses Gute wurde dagegen schon 1668 durch **Newton** wirklich erreicht, indem er einem selbstverfertigten sphärischen Metallspiegel von circa 1" Öffnung und 6" Brennweite etwas innerhalb letzterer ein zur Axe um 45° geneigtes Planspiegelchen gegenüberstellte, und das so seitlich geworfene Bild mit einer plankonvexen Linse betrachtete, so dass er 1671 den Mut besass, das oben erwähnte, etwas grössere Instrument zu erstellen und zu Anfang folgenden Jahres der Roy. Society vorzuweisen. Als sodann auf diese Weise die Brauchbarkeit sphärischer Spiegel praktisch erwiesen war, gelang es 1674 **Hooke** auch unter Anwendung der Mersenne-Gregory'schen Anordnung ein brauchbares Spiegelteleskop zu erstellen, und da dasselbe grössere Bequemlichkeit darbot, sowie später namentlich durch James **Short** (Edinburgh 1710 — Newington Butts bei London 1768; erst Theologe, dann Mathematiker und Mechaniker in London) sehr gut ausgeführt wurde, so vergass man bald über diesem sog. Gregory'schen Teleskope die eigentlich vorzüglichere Anordnung Newtons, und auch der von dem Franzosen **Cassegrain** 1672 im Journ. d. Sav. gemachte ganz gute Vorschlag, den kleinen sphärischen Hohlspiegel durch einen Konvexspiegel zu ersetzen, wodurch das Teleskop abgekürzt und zugleich von einem grossen Teil der sphärischen Abweichung befreit werden konnte, kam verhältnismässig nur sehr wenig zur Ausführung.

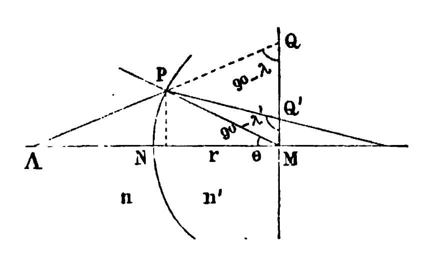
140. Der Achromatismus. — Trotz dem Verdikte von **Newton** und lange bevor es **Klingenstjerna** gelungen war, durch Versuche die Unrichtigkeit von dessen Grundlage nachzuweisen [a], wurde die schon durch Dav. **Gregory** aus dem Baue des Auges abstrahierte Möglichkeit, durch Kombination verschiedener brechender Mittel ein farbenfreies Bild zu erzeugen [b], von **Euler** neuerdings betont und der Rechnung unterworfen [c], — ja man weiss jetzt sogar, dass, noch ehe die Untersuchungen dieses letztern ihren Anfang genommen hatten, ein sonst wenig bekannter englischer Privatgelehrter, Chester Moor **Hall** [d], das von jenem in Angriff genommene Problem bereits mit bestem Erfolge praktisch löste: Wahrscheinlich ebenfalls von Gregorys Idee ausgehend, begann nämlich dieser gelehrte Sonderling schon 1729 eine Reihe betreffender Versuche, that im Verlaufe derselben den glücklichen Griff, das Flintglas (Feuersteinglas oder Bleiglas) mit einzubeziehen [e], und hatte 1733 die Genugthuung, durch Beigabe einer daraus erstellten Konkavlinse die aus Crownglas (Kronglas oder bleifreies Glas) verfertigte Konvexlinse für die Farbenzerstreuung zu korrigieren, somit ein **erstes achromatisches Objektiv** zu erhalten, von dessen Existenz jedoch nur wenige seiner Zeitgenossen Kenntnis erhalten zu haben scheinen. Ob auch John **Dollond** zu diesen wenigen gehörte [f] oder ob er durch eigene, zum Teil durch die Untersuchungen Eulers angeregte Versuche das Problem selbständig in entsprechender Weise löste, lässt sich kaum mehr genau ermitteln; dagegen ist sicher, dass er 1758 ein Patent auf diese Erfindung nahm [g] und sodann dieselbe mit so grossem Geschick und Erfolge ausbeutete, dass sogar sein Name vielfach als Bezeichnung für Achromaten gebraucht wurde [h].

Zu 140: *a.* Vgl. „Samuel **Klingenstjerna** (Tollefors 1698 — Stockholm 1765; Prof. math. Upsala; vgl. „Vita“ in Nova Acta Upsal. III). Tentamen de definiendis et corrigendis aberrationibus radiorum luminis in lentibus sphæricis refracti et de perficiendo telescopio dioptrico. Petropoli 1762 in 4.“ — *b.* In seinem Werke „Catoptricæ et dioptricæ sphæricæ elementa. Oxford. 1695 in 8.“ sagt er nämlich: „Es würde vielleicht nützlich sein, das Objektiv eines Fernrohrs aus verschiedenen Medien zusammenzusetzen, wie wir es bei dem Auge von der Natur gethan sehen, die niemals eine Sache umsonst unternimmt“. — *c.* Vgl. seine Abhandlungen „Sur la perfection des verres objectifs des lunettes (Mém. Berl. 1747), — und: Constructio lentium objectivarum in duplici vitro. Petropoli 1762 in 4.“ — *d.* Chester Moor **Hall** (Leigh in Essex 1703 — Sutton in Essex 1771) war ein wohlhabender Mann und scheint meistens auf einem Gute bei Sutton gelebt zu haben, das schon seinem Vater John Hall durch Erbschaft aus der Familie Moor zugefallen war. Vgl. die von Ranyard in „Astron. Register“ veröffentlichte Notiz. — *e.* Das schon von den Egyptern zur Erzeugung künstlicher Edelsteine benutzte und dann auch in England, um seiner Reinheit und seiner Farbenspiele willen, vielfach für Glasgeräte verwendete Flintglas hat die Eigenschaft, dass es bei nahe gleicher Brechung

viel stärker zerstreut als das Crownglas: Fügt man z. B. einem Crownglasprisma von 25° ein verkehrt liegendes Flintglasprisma von 12° bei, so wird die Farbenzerstreuung, nicht aber die Brechung gehoben. — *f.* Alex. **Rochon** erzählt, gestützt auf 1790 in London erhobene Informationen, in seinem „Mémoire sur les verres accromatiques adaptés à la mesure des angles (Journ. de phys. Fructidor IX)“, dass der etwas misstrauische **Hall** die ihm nötigen zwei Linsensorten zu London bei zwei verschiedenen Optikern bestellt habe, welche aber zufällig denselben Glasschleifer gebrauchten, — dass diesem die Doppelbestellung so frappierte, dass er die Gläser vor Ablieferung dem ihm bekannten **Dollond** zeigte, welcher nun damit Versuche machte und die Bedeutung erriet. — Warum aber Dollond dann erst ein Vierteljahrhundert später seine Konstruktionen begann, wird nicht erklärt und damit der Erzählung viel von ihrer Wahrscheinlichkeit genommen. — *g.* Nach den 1875 unter dem Titel „Abridgements“ erschienenen Patentauszügen lautet das 1758 IV 19 **Dollond** erteilte Patent auf „A new method of making the object glasses of refracting telescopes by compounding mediums of different refractive qualities, whereby the errors arising from the different refrangibility of light, as well as those which are produced by the spherical surfaces of the glasses, are perfectly corrected“. Es wurde zuerst mit Rücksicht auf **Hall** angefochten, dann aber infolge hoher Protektion dennoch erteilt. — *h.* Für die spätere Geschichte der Achromaten wird auf 142 verwiesen, dagegen zur Ergänzung der Litteratur noch „**Boscovich**, Dissertationes quinque ad Dioptricam pertinentes. Vindobonæ 1767 in 4.“ erwähnt, an welche Schrift sich dann überdies noch die in Vol. 1—2 der „Opera“ desselben Verfassers enthaltenen betreffenden Abhandlungen anschliessen.

141. Die neuern Linsentheorien. — Die gegenwärtige Ausbildung der auf Kombination von Linsen beruhenden optischen Instrumente beruht wesentlich auf der bessern Einsicht in die Theorie solcher Systeme, und diese ist ganz besonders durch die von **Gauss** veröffentlichte Abhandlung „Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1841 in 4.“ gefördert worden. Es ist nämlich diesem grossen Geometer gelungen, in derselben zu zeigen, dass man durch Einführung gewisser Kardinalpunkte, seiner **Hauptpunkte** und **Brennpunkte**, welchen sodann später **Listing** [a] noch **Knotenpunkte** beifügte, für eine Linse, ja selbst für ein ganzes System von brechenden Flächen, ebenso einfache Beziehungen erhalten kann, wie sie früher (137) sogar für die einzelne Linse nur bei Vernachlässigung ihrer Dicke gefunden worden waren. Es scheint angegeben, beifolgend [b] wenigstens einen Begriff dieser neuen Theorie zu geben, und diesem [c] einige historisch-litterarische Angaben folgen zu lassen.

Zu 141: *a.* Joh. Benedikt **Listing** (Frankfurt 1808 geb.) ist Prof. phys. Göttingen. Vgl. seinen „Beitrag zur physiologischen Optik. Göttingen 1845 in 8.“ und seine betreffenden Entwicklungen in dem 1853 erschienenen 4. Bande von Wagners Handwörterbuch der Physiologie. — *b.* Nehmen wir an, es falle auf eine brechende Kugelfläche des Radius r und Mittelpunktes M ein die Axe M N in A schneidender Strahl ein, so können wir denselben durch



eine Gleichung $y = Ax + B$, also z. B. durch

$$y = \frac{\beta}{n}(x - N) + b \qquad 1$$

darstellen, wo $\beta : n = A$ und $b - (\beta : n) N = B$ ist, und dabei genügt es offenbar, β und b dem Strahle zu accomodieren, während die Werte von n und N willkürlich gewählt werden dürfen, also z. B. n den Brechungsexponenten des Mittels bezeichnen kann, aus welchem der Strahl kömmt, und N den Abstand des Punktes N von einem in der Axe liegenden Anfangspunkte. Entsprechend wird der gebrochene Strahl durch eine Gleichung

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - N) + b' \qquad 2$$

gegeben werden können, wo n' dem neuen brechenden Mittel zukömmt. Nun ist aber für den Punkt P offenbar $x - N = r(1 - \mathrm{Co}\,\theta)$, also hat man für ihn nach 1 und 2

$$\frac{\beta}{n} \cdot r(1 - \mathrm{Co}\,\theta) + b = y = \frac{\beta'}{n'} \cdot r(1 - \mathrm{Co}\,\theta) + b'$$

Wenn man sich somit auf Centralstrahlen beschränkt, so dass θ, β, β' kleine Grössen erster Ordnung sind und ihre dritten Potenzen vernachlässigt werden dürfen, folglich $\beta(1 - \mathrm{Co}\theta) = {}^1/_2\, \beta \cdot \theta^2 = 0$ und ebenso $\beta'(1 - \mathrm{Co}\,\theta) = 0$ zu setzen ist, so erhält man $b = b'$. Man hat somit einerseits, da für Q die 1 und für Q' die 2 besteht, wenn M ebenfalls die Distanz des Punktes M von jenem Anfangspunkte bezeichnet, also $M - N = r$ ist,

$$MQ = \frac{\beta}{n} \cdot r + b \qquad MQ' = \frac{\beta'}{n'} \cdot r + b \qquad \frac{MQ'}{MQ} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\beta' r + n' b}{\beta r + n b}$$

und anderseits nach Fig. und Brechungsgesetz

$$\frac{MQ'}{MQ} = \frac{\mathrm{Si}\,MPQ' : \mathrm{Co}\,\lambda'}{\mathrm{Si}\,MPQ : \mathrm{Co}\,\lambda} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\mathrm{Co}\,\lambda}{\mathrm{Co}\,\lambda'}$$

also, da auch λ und λ' kleine Grössen sein werden,

$$\frac{\beta' \cdot r + n' \cdot b}{\beta \cdot r + n \cdot b} = \frac{\mathrm{Co}\,\lambda}{\mathrm{Co}\,\lambda'} = 1 - \frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{2} = 1 \quad \text{oder} \quad \beta' = \beta - \frac{n' - n}{r} \cdot b \qquad 3$$

Sind mehrere, z. B. vier, brechende Flächen vorhanden, und bezeichnen N^0, N', N'', N^* ihre Durchschnittspunkte mit der Axe, M^0, M', M'', M^* ihre Mittelpunkte, — n^0, n', n'', n''', n^* aber die Brechungsexponenten, so hat man nach 1 und 2

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - N^0) + b^0 \qquad y = \frac{\beta'}{n'}(x - N^0) + b^0 = \frac{\beta'}{n'}(x - N') + b'$$

$$y = \frac{\beta''}{n''}(x - N') + b' = \frac{\beta''}{n''}(x - N'') + b'' \qquad 4$$

$$y = \frac{\beta'''}{n'''}(x - N'') + b'' = \frac{\beta'''}{n'''}(x - N^*) + b^* \qquad y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - N^*) + b^*$$

so dass, wenn zur Abkürzung

$$\frac{N' - N^0}{n'} = t' \qquad \frac{N'' - N'}{n''} = t'' \qquad \frac{N^* - N''}{n'''} = t^*$$

$$\frac{n' - n^0}{N^0 - M^0} = u^0 \qquad \frac{n'' - n'}{N' - M'} = u' \qquad \frac{n''' - n''}{N'' - M''} = u'' \qquad \frac{n^* - n'''}{N^* - M^*} = u^* \qquad 5$$

gesetzt werden,

$$b' = b^0 + \beta' \cdot t' \qquad b'' = b' + \beta'' \cdot t'' \qquad b^* = b'' + \beta''' \cdot t^*$$

folgen, während nach 3 die Beziehungen

$$\beta' = \beta^0 + u^0 \cdot b^0 \quad \beta'' = \beta' + u' \cdot b' \quad \beta''' = \beta'' + u'' \cdot b'' \quad \beta^* = \beta''' + u^* \cdot b^*$$

statt haben. Aus diesen beiden Systemen erhält man aber durch successive Elimination

$$b^* = g \cdot b^0 + h \cdot \beta^0 \qquad \beta^* = k \cdot b^0 + l \cdot \beta^0 \tag{6}$$

wo die Hilfsgrössen

$$\begin{aligned} g &= 1 + u^0 (t' + t'' + t^*) + u' (t'' + t^*) + u'' \cdot t^* + u^0 \cdot u' (t' t'' + t' t^*) + \\ &\quad + u^0 u'' (t' t^* + t'' t^*) + u' u'' t'' t^* + u^0 u' u'' t' t'' t^* \\ h &= t' + t'' + t^* + u' t' (t'' + t^*) + u'' t^* (t' + t'') + u' u'' t' t'' t^* \\ k &= u^0 + u' + u'' + u^* + u^0 u' t' + u^0 u'' (t' + t'') + u^0 u^* (t' + t'' + t^*) + \\ &\quad + u' u'' t'' + u' u^* (t'' + t^*) + u'' u^* t^* + u^0 u' u'' t' t'' + u^0 u' u^* t' (t'' + t^*) + \\ &\quad + u^0 u'' u^* t'' (t' + t^*) + u' u'' u^* t'' t^* + u^0 u' u'' u^* t' t'' t^* \\ l &= 1 + u' t' + u'' (t' + t'') + u^* (t' + t'' + t^*) + u' u'' t' t'' + \\ &\quad + u' u^* t' (t'' + t^*) + u'' u^* t^* (t' + t'') + u' u'' u^* t' t'' t^* \end{aligned} \tag{7}$$

sind, und die Beziehung

$$g \cdot l - k \cdot h = 1 \tag{8}$$

eingehen, so dass, wenn man $6' \cdot l - 6'' \cdot h$ und $6'' \cdot g - 6' \cdot k$ bildet, auch

$$b^0 = l \cdot b^* - h \cdot \beta^* \qquad \beta^0 = g \cdot \beta^* - k \cdot b^* \tag{9}$$

folgen, — wobei zu bemerken ist, dass die 6 und 9 nicht nur für vier, sondern auch für jede beliebige Anzahl von Flächen bestehen. — Sind ξ und η die Coordinaten irgend eines gegebenen Punktes P im einfallenden Strahle, so hat man nach 4' und 9

$$\eta = \frac{g \cdot \beta^* - k \cdot b^*}{n^0} (\xi - N^0) + l \cdot b^* - h \cdot \beta^* \quad \text{oder} \quad b^* = \frac{n^0 \eta + [n^0 \cdot h - g(\xi - N^0)] \beta^*}{n^0 \cdot l - k(\xi - N^0)}$$

wofür, wenn

$$N^* - \frac{n^0 \cdot h - g(\xi - N^0)}{n^0 \cdot l - k(\xi - N^0)} \cdot n^* = \xi^* \qquad \frac{n^0 \cdot \eta}{n^0 \cdot l - k(\xi - N^0)} = \eta^* \tag{10}$$

die letzte 4 in

$$\eta = \frac{\beta^*}{n^*} (x - \xi^*) + \eta^* \tag{11}$$

übergeht. Hiedurch ist aber bewiesen, dass ein Punkt P* der Coordinaten ξ^* und η^* in dem letztaustretenden Lichtstrahle liegt. Da nun diese Coordinaten nur von ξ und η, nicht aber von β^0, abhängig sind, so bleiben sie für alle durch P einfallenden Strahlen dieselben, und man hat daher P* als **Bild** von P zu betrachten. — Ersetzt man die erste und letzte 4 durch

$$y = \frac{\beta^0}{n^0} (x - Q) + B \qquad \text{und} \qquad y = \frac{\beta^*}{n^*} (x - Q^*) + B^* \tag{12}$$

so ist

$$b^0 = B + \theta \cdot \beta^0 \qquad B^* = b^* + \theta^* \cdot \beta^* \qquad \text{wo} \qquad \theta = \frac{N^0 - Q}{n^0} \qquad \theta^* = \frac{Q^* - N^*}{n^*}$$

also mit Hilfe von 6

$$\begin{aligned} &B^* = G \cdot B + H \cdot \beta^0 \qquad \beta^* = K \cdot B + L \cdot \beta^0 \\ \text{wo} \quad &G = g + k \cdot \theta^* \quad H = h + g \cdot \theta + (k \cdot \theta + l) \theta^* \quad K = k \quad L = l + k \cdot \theta \end{aligned} \tag{13}$$

Nimmt man nun z. B. statt Q und Q* zwei Punkte E und E* so an, dass

$$\theta = \frac{1 - l}{k} \quad \theta^* = \frac{1 - g}{k} \quad \text{oder} \quad E = N^0 - \frac{n^0 (1 - l)}{k} \quad E^* = N^* + \frac{n^* (1 - g)}{k} \tag{14}$$

also nach 13 mit Hilfe von 8: $G = 1$, $H = 0$, $K = k$ und $L = 1$, so entsprechen sich nach 12

$$y = \frac{\beta_0}{n^0} (x - E) + B \qquad \text{und} \qquad y = \frac{k \cdot B + \beta^0}{n^*} (x - E^*) + B \tag{15}$$

Nimmt man dagegen statt Q und Q* zwei Punkte F und F* so an, dass

$$\theta = -\frac{l}{k} \quad \text{oder} \quad F = N^0 + \frac{l \cdot n^0}{k} = E + \frac{n_0}{k}$$
$$\theta^* = -\frac{g}{k} \quad \text{oder} \quad F^* = N^* - \frac{g \cdot n^*}{k} = E^* - \frac{n^*}{k} \qquad \mathbf{16}$$

also nach 13 mit Hilfe von 8: $G = 0$, $H = -1:k$, $K = k$ und $L = 0$, so entsprechen sich nach 12

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - F) + B' \quad \text{und} \quad y = \frac{k \cdot B'}{n^*}(x - F^*) - \frac{\beta^0}{k} \qquad \mathbf{17}$$

Legt man durch E eine brechende Fläche des Halbmessers $(n^0 - n^*):k$ und denkt sich die n^0 und n^* entsprechenden Mittel direkt an sie grenzend, so entsprechen sich nach 1—3 als einfallender und gebrochener Strahl

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - E) + B \quad \text{und} \quad y = \frac{k \cdot B + \beta^0}{n^*}(x - E) + B \qquad \mathbf{18}$$

Die Vergleichung von 15 und 18 ergiebt aber den merkwürdigen Satz, dass der letzte Weg eines durch verschiedene brechende Flächen und Medien gehenden Strahles in Beziehung auf E* dieselbe Lage hat, wie ihn ein Strahl in Beziehung auf E hätte, wenn er direkt aus dem ersten Mittel durch die Eine brechende Fläche in E in das letzte Mittel übergegangen wäre. — In dem speciellen, aber besonders wichtigen Falle, wo $n^0 = n^*$ und daher Vorstehendes unzulässig ist, wollen wir in E eine unendlich dünne Linse der Brennweite $(-n^0):k$ annehmen. Sollen sich an derselben

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x - E) + B \quad \text{und} \quad y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - E) + B' \qquad \mathbf{19}$$

als einfallender und ausfallender Strahl entsprechen, so muss einerseits $B = B'$ sein, da die für $x = E$ aus den beiden Gleichungen hervorgehenden Werte sich gleich werden müssen; anderseits geben die beiden Gleichungen, wenn a und α wie früher Gegenstandsweite und Bildweite bezeichnen, für $y = 0$

$$a = E - x = B \cdot n^0 : \beta^0 \qquad \alpha = x - E = -B' \cdot n^* : \beta^* = -B \cdot n^0 : \beta^*$$

so dass (137 : 2)

$$\frac{\beta^0}{B \cdot n^0} - \frac{\beta^*}{B \cdot n^0} = -\frac{k}{n^0} \quad \text{oder} \quad \beta^* = k \cdot B + \beta^0 \qquad \mathbf{20}$$

Substituiert man diesen Wert in 19″ und vergleicht mit 15″, so ergiebt sich, dass der nach einer gewissen Anzahl von Brechungen in das erste Mittel zurückkehrende Strahl gegen E* genau so liegt, wie ein nur durch die angegebene Linse gegangener Strahl gegen E. Diese beiden merkwürdigen Punkte E und E* hat Gauss **Hauptpunkte** genannt, und da für $\xi = E$ aus 10 mit Hilfe von 8 und 14 sich $\xi^* = E^*$ und $\eta^* = \eta$ ergiebt, so ist einerseits der zweite Hauptpunkt das Bild des ersten, und anderseits hat, wenn man durch E und E* senkrecht zur Axe Ebenen legt, jeder Punkt der ersten Ebene sein Bild in dem entsprechenden Punkte der zweiten. — Für alle aus dem Punkte F einfallenden Strahlen müssen sich $x = F$ und $y = 0$ entsprechen; folglich ist für sie nach 17 immer $B' = 0$, während die austretenden Strahlen die Gleichung $y = -\beta^0 : k$ haben, also parallel zur Axe sind. Umgekehrt ist für alle parallel einfallenden Strahlen $\beta^0 = 0$, für die austretenden Strahlen die Gleichung $y = k \cdot B'(x - F^*) : n^*$ giltig, so dass letztere durch F* gehen. Man kann daher mit Gauss F und F* passend **Brennpunkte** des Systemes heissen. Ferner haben die in diesen Punkten senkrecht zur Axe stehenden Ebenen nach 17 die Eigenschaft, dass alle von irgend einem Punkte der Ersten ausgehenden

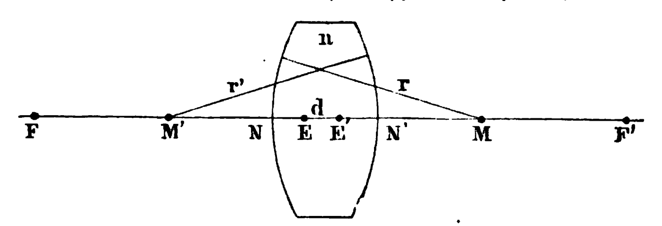
Strahlen parallel unter sich (aber nur für F parallel mit der Axe) austreten und alle parallel unter sich einfallenden Strahlen sich nach der Brechung in einem bestimmten Punkte der Zweiten vereinigen. — Ist $n^0 = n^*$ und setzt man mit Hilfe von 16, 10, 14 und 8

$$p = E - F = F^* - E^* = -n^0 : k \qquad a = E - \xi \qquad \alpha = \xi^* - E^* = a \cdot p : (a - p) \qquad \mathbf{21}$$

so ergiebt sich die 137 : 2 analoge Beziehung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} \qquad \mathbf{22}$$

d. h. auch bei einem Systeme von Linsen und ohne Vernachlässigung der Dicke besteht, wie schon oben angedeutet wurde, noch immer die einfache Beziehung, dass **die Summe der Reciproken von Gegenstandsweite und Bildweite gleich der Reciproken der Brennweite** ist, sobald man nur diese drei Grössen von den Hauptpunkten aus rechnet. — Hat man eine einzelne, allseitig von Luft umgebene Glaslinse der Radien $r = f(n-1)$, $r' = f'(n-1)$ und der Dicke



$d = e \cdot n$, wo n das Brechungsverhältnis beim Übergange aus Luft in Glas bezeichnet, so ist $n^0 = 1 = n''$, $n' = n$, $M^0 - N^0 = f(n-1)$, $N' - M' = f'(n-1)$ und $N' - N^0 = e \cdot n$. Man hat somit successive nach 5 und 7: $t' = e$, $t'' = t''' = \cdots = 0$, $u_0 = -1 : f$, $u' = -1 : f'$, $u'' = u''' = \cdots = 0$, $1 - g = e : f$, $h = e$, $1 - l = e : f'$, $k = -(f + f' - e) : f \cdot f'$. Führt man daher die nach 16 in diesem Falle gleich werdenden Distanzen $E - F$ und $F' - E'$ als **Brennweite** ein, so ist dieselbe

$$\varphi = -\frac{1}{k} = \frac{f \cdot f'}{f + f' - e} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{r \cdot r'}{n(r + r') - d(n-1)} \qquad \mathbf{23}$$

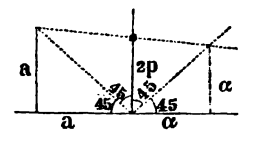
und man hat nunmehr nach 14 zur Bestimmung der Hauptpunkte

$$E - N = \frac{e \cdot \varphi}{f'} = \frac{r \cdot d}{n(r + r') - d(n-1)} \qquad N' - E' = \frac{e \cdot \varphi}{f} = \frac{r' \cdot d}{n(r + r') - d(n-1)} \qquad \mathbf{24}$$

woraus sich sodann die Brennpunkte mit Hilfe der Brennweite von selbst ergeben. Ist z. B. $d = 1$, $r = 3$, $r' = 4$ und nimmt man, wie es durchschnittlich für Crownglas der Fall ist, $n = 1{,}5$ an, so erhält man $\varphi = 3{,}6$, $E - N = 0{,}3$, $N' - E' = 0{,}4$ und somit $E' - E = 0{,}3$. — Zur Ergänzung füge ich noch bei, dass man zuweilen in dem Falle, wo n^0 und n^* ungleich sind, nach dem Vorschlage von J. B. **Listing** auch zwei sog. **Knotenpunkte**

$$K = E + (n^0 - n^*) : k \qquad K^* = E^* + (n^0 - n^*) : k \qquad \mathbf{25}$$

benutzt, — ferner dass in „**Ln** (Leman?), Construction der Linsenformel (Zeitschr. f. Instr. 1886)“ unter anderm die durch beistehende Figur wohl hinlänglich erläuterte, nette Konstruktion gegeben wird, um aus Gegenstandsweite a und Brennweite p die Bildweite α zu finden, — welche in der That wegen $(a - 2p) : (2p - \alpha) = a : \alpha$ oder $a \cdot \alpha = p \cdot a + p \cdot \alpha$



ganz mit unserer 22 übereinstimmt. — *c.* Die Geschichte unserer Kardinal-

punkte besteht wesentlich in folgendem: Wie Hugo Schröder erst neuerlich (A. N. 2652 und 2679 von 1885) nachgewiesen hat, finden sich schon in „William **Molyneux** (Dublin 1656 — ebenda 1698; Privatgel. und Vater von Samuel M. in 264), Dioptrica nova. London 1692 in 4. (2. ed. 1709)“ die Hauptpunkte für den speciellen Fall einer plankonvexen Linse angegeben, und in „Joseph **Harris** (1690? — London 1764; Münzwardein; wahrscheinlich Sohn des astron. Schriftstellers John H.), A treatise of Optics. London 1775 in 4.“ ist sogar für den Fall, wo das erste und letzte Medium übereinstimmen, die Lehre von den Hauptpunkten, unter Beigabe von Formeln und Diagrammen für alle gebräuchlichen Linsenarten, ziemlich vollständig entwickelt; aber auch die letztere dieser Arbeiten wurde, obschon noch Lalande in seiner Bibliographie speciell auf ihr Interesse hinwies, total vergessen, so dass das Ganze neu zu schaffen war, was sodann durch **Gauss** in seiner erwähnten Abhandlung von 1841, unter Benutzung einiger durch **Euler** (Comm. Nov. Petrop. 9) aufgestellter Relationen, mit gewohnter Meisterschaft ausgeführt wurde. Für weitern Detail auf diese Hauptschrift verweisend, füge ich noch folgende, die neuere Linsentheorie betreffende Schriften an: „Albert **Steiner** (Zürich 1839 — ebenda 1865; Gymnasiallehrer Zürich), Zur Theorie der Linsen. Zürich 1865 in 4., — W. **Graffweg,** Über die Linsen, welche von einem homogenes Licht ausstrahlenden Punkte ein mathematisch genaues Bild geben (Z. f. M. Ph. 15 von 1870), — **Hansen,** Untersuchung des Weges eines Lichtstrahles durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. Leipzig 1871 in 8., — Leopold **Geisenheimer,** Zur Theorie der sphärischen Aberration (Z. f. M. Ph. 17 von 1872), — Alexander **Beck** (Schaffhausen 1847 geb.; Prof. math. Riga), Die Fundamentaleigenschaften der Linsensysteme in geometrischer Darstellung (Zürch. Viert. 1872), — Galileo **Ferraris,** Le proprietà cardinali degli istrumenti diottrici. Torino 1877 in 8. (deutsch von F. Lippich. Leipzig 1879), — Ludwig **Matthiessen,** Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Leipzig 1877 in 8., — Karl **Moser,** Die Grundformeln der Dioptrik für den praktischen Gebrauch entwickelt. Prag 1881 in 8., — Lorenzo **Billotti,** Teoria degli stromenti ottici. Milano 1883 in 4. (Pubbl. Mil. 25), — Aug. **Kramer,** Allgemeine Theorie der zwei- und drei-teiligen astronomischen Fernrohr-Objective. Berlin 1886 in 8., — etc.“

142. Die neuern Refraktoren und Reflektoren. — Nachdem sich der Konstruktion grösserer achromatischer Refraktoren mehrere Decennien hindurch infolge der Unmöglichkeit, entsprechende homogene Flintglasmassen zu erhalten, scheinbar unüberwindliche Schwierigkeiten entgegengestellt hatten [a], erwarben sich **Guinand** [b] und sein talentvoller Schüler **Fraunhofer** [c] das Verdienst, auch auf diesem Gebiete bedeutende Fortschritte zu erzielen, und während sodann einige Zeit die Nachfolger des letztern den ersten Rang einnahmen, so sind sie später durch diejenigen des erstern wieder überflügelt worden [d]. — Mit der Erstellung der Glasmassen vervollkommnete sich auch deren Bearbeitung und überhaupt das ganze Konstruktionsverfahren fortwährend: Nachdem man einen 1814 in München für Neapel erstellten 7-Zöller bewundert hatte [e], gelang es **Fraunhofer** 1824, für Dorpat einen 9-Zöller zu vollenden, der sowohl um seiner

optischen Vorzüge willen, als wegen seiner musterhaften Aufstellung und Ausrüstung, als eine kaum mehr zu übertreffende Leistung galt [f], — und jetzt wird bei Aufzählung der grossen Refraktoren der Gegenwart dieses einst so berühmte Instrument höchstens noch als letztes genannt, während der von Alvan **Clark** [g] für das Lick-Observatorium in Kalifornien gelieferte 36-Zöller den ersten Rang einnimmt [h]. — In entsprechender Weise bildete sich die Konstruktion von Spiegelteleskopen aus: Nachdem es schon **Hadley** in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts gelungen war, die anfänglichen kleinen Dimensionen zu überwinden [i], legte sich in der zweiten Hälfte der unvergleichliche **Herschel** mit solchem Erfolge auf die Konstruktion von Reflektoren, dass er, und zwar abgesehen von seinem mehr bewunderten als benutzten Riesenteleskope von 4′ Öffnung, die damaligen Refraktoren weit überflügelte [k], — und auch die Neuzeit hat, teils unter Vervollkommnung der Metallspiegel, teils unter Ersatz derselben durch versilberte Glasspiegel, eine grosse Anzahl solcher Instrumente von vorzüglicher Wirkung zu stande gebracht, welche bis jetzt in dem sog. „Leviathan“ des Earl of **Rosse** gipfeln und für Durchmusterung des Himmels mit den besten Refraktoren konkurrieren, während sie sich allerdings weniger zur Einführung in eigentliche Messinstrumente eignen [l].

Zu 142: *a.* Noch für 1791 schrieb die Pariser Akademie (vgl. Journ. des Sav. 1789) vergeblich einen Preis von 12000 Livres für ein Verfahren aus, gutes Flintglas in beliebigen Quantitäten zu verfertigen. — *b.* Pierre-Louis **Guinand** (Corbatière bei Chaux-de-fonds 1748 — Brenets 1824) war erst Uhr-Schreiner und Uhrglocken-Giesser, — legte sich sodann auf Glasfabrikation und wurde 1804 durch den Oberberghauptmann Joh. Samuel **Gruner** (Bern 1766 — München 1824), dem man auch wesentlich das damalige Entstehen des mechanisch-optischen Institutes verdankt, an **Utzschneider** empfohlen. Er blieb bis 1814 in dem Institute, kehrte dann in die Heimat zurück und richtete sich dort mit schönstem Erfolg neuerdings für Fabrikation von Flintglas ein, so dass er z. B. an Robert-Aglace **Cauchoix** (Cormeilles 1776 — Montmorency 1845; Optiker in Paris) den schönen Discus liefern konnte, mit welchem dieser den auf der Pariser Ausstellung von 1823 bewunderten 12½-Zöller erstellte. Vgl. Biogr. II. — *c.* In einem 1807 zwischen Guinand und Utzschneider abgeschlossenen neuen Vertrage kam der Artikel vor: „Mr **Guinand** instruira dans la fabrication du flint- et du crown-glass la personne qui lui sera désignée par Mr Utzschneider et ne l'apprendra à personne d'autre“, und da diese Person der kurz zuvor angestellte junge **Fraunhofer** war, so kann man begreifen, dass das Zusammenwirken des alten Praktikers mit dieser genialen Kraft die schönen Resultate hervorbrachte, welche es **Reichenbach** (vgl. Brief Horner an Repsold von 1811 IX 21 in Notiz 179) schon 1811 möglich machten, ein Passageninstrument mit einem 6-Füsser von 5½″ Öffnung zu versehen und das Institut befähigten 1814 den bereits erwähnten 7-Zöller zu liefern. Dass das Institut **Guinand** bei seinem bald darauf erfolgten Abgange auf so lange, als er sich optischer Arbeiten enthalten werde, eine jährliche Pension von

800 fl. zusicherte, beweist wohl hinlänglich, wie sehr es dessen Konkurrenz fürchtete und wie kleinlich es später von Utzschneider war, dessen Verdienste herabzusetzen. — *d.* Nach dem Tode von **Guinand** führte sein Sohn Henri das Geschäft fort, verlegte dasselbe 1832 nach Paris und erhielt sodann in seinem Zöglinge und nachmaligen Schwiegersohne Charles **Feil** (Paris 1887 gest.) einen so vorzüglichen Nachfolger, dass für die meisten Riesenrefraktoren der Gegenwart, und so auch für den 36-Zöller, die Glasmassen von ihm bezogen wurden. Immerhin sind auch die spätern Leistungen von Georg **Merz**, die 1849 in einem 14-Zöller für Pulkowa gipfelten, — und diejenigen von Théodore **Daguet** (Vuippens 1795 — Fribourg 1870; erst Apotheker, dann Glasfabrikant in Solothurn), dessen Flintglasmassen z. B. 1851 in London einen ersten Preis erhielten, nicht zu übersehen. — *e.* Er hatte 9' Brennweite und erlaubte 600-fache Vergrösserung. Vgl. Brief Repsold an Horner von 1814 VII 20 in Notiz 179. — *f.* Vgl. „W. **Struve**, Beschreibung des auf der Sternwarte in Dorpat befindlichen grossen Refraktors von Fraunhofer. Dorpat 1825 in fol." — *g.* Alvan **Clark** (Ashfield in Massachusetts 1804 — New York 1887) schwang sich vom gewöhnlichen Arbeiter zum Formstecher und Maler, dann zu einem zweiten Fraunhofer auf. Seine grössten Arbeiten sind ein 30" auf 45' haltendes Objektiv für Pulkowa und das schon erwähnte von 36" auf 56½' für das Lick-Observatorium, wobei das mit letzterm erhaltene Bild unter günstigen Umständen die Vergrösserung 4000 erlauben soll. — Auch der etwas früher von Thomas **Grubb** (Dublin 1800 — ebenda 1878; früher Maschinenbauer) und seinem Sohne Howard G. für Wien gelieferte 27-Zöller ist eine vorzügliche Leistung, — ebenso der von den Gebrüdern **Henry** für Nizza konstruierte 30-Zöller, etc. — *h.* Dass für den Wert eines Fernrohrs nicht allein seine Grösse in Betracht gezogen werden darf, sondern ebensosehr eine zweckmässige Wahl aller Verhältnisse wichtig ist, damit namentlich das Objektiv **aplanatisch** (von ἀπλανής = ohne Abirrung) wird, das Gesichtsfeld möglichst gross, die Länge des Fernrohrs dagegen möglichst klein ausfällt, etc., ist zum Teil selbstverständlich, zum Teil noch unter der folgenden Nummer näher auszuführen; jedoch erlaubt der beschränkte Raum nicht, alle die Versuche zu erwähnen, welche in dieser Richtung im Laufe der Zeit gemacht wurden und ich will mich darauf beschränken, beispielsweise noch an die auf Vorschlag von **Littrow** etwa von 1827 hinweg durch Simon **Plössl** (Wien 1794 — ebenda 1868; Mechaniker und Optiker in Wien) meisterhaft ausgeführten **Dialyten** (von διαλύειν = trennen) zu erinnern, bei welchen die korrigierende Flintglaslinse etwa um ⅓ der Brennweite der Hauptlinse gegen das Okular gerückt, somit erheblich verkleinert und überdies bei geringerer Länge ein, namentlich für Kometensucher erwünschtes, grösseres Gesichtsfeld erzielt wurde; ferner an die, in weiterer Ausführung der schon von **Euler** gegebenen Andeutungen, durch Robert **Blair** (1750? — 1828; Prof. astr. Edinburgh) gemachten und in seinen „Experiments and observations on the unequal refrangibility of light (Edinb. Trans. 1791)" beschriebenen Versuche, mit Terpentinöl, Naphta, etc. gefüllte Linsen zur Konstruktion aplanatischer Objektive beizuziehen, welche später neuerdings durch Peter **Barlow** (Norwich 1776 — Woolwich 1862; Prof. math. Woolwich) und andern mit mehr oder weniger Erfolg aufgenommen wurden, — etc. — Endlich will ich noch anhangsweise hervorheben, dass Hand in Hand mit den Fernröhren auch die **Mikroskope** fortwährend vervollkommnet wurden, für den Detail auf die früher erwähnten Schriften verweisend, welchen noch etwa „Pieter **Harting** (Rotterdam 1812 geb.; Prof. chem. et bot. Franeker und Utrecht), Het Mikroskop. Utrecht

1848—50, 3 Th. in 8. (deutsch durch Theile, Braunschweig 1859), — Simon **Schwendener** (Buchs im Rheinthal 1829 geb.; Prof. bot. Basel und Berlin), Das Mikroskop. Leipzig 1867 in 8.), — etc.", beizufügen wären. — *i.* **Hadley** wies 1723 (vgl. Ph. Tr.) der Roy. Society ein nach dem Newton'schen Principe gebautes, 6-füssiges Teleskop vor, das ungefähr ebensoviel als ein 123-füssiges von Huygens leistete; später wandte er meistens das Gregory'sche Verfahren an. — *k.* **Herschel**, der 1774 ein erstes 7-füssiges Teleskop fertig brachte, wandte bei seinen kleinern Instrumenten das Newton'sche Verfahren an, während er bei grössern und namentlich bei dem von 1785—89 gebauten Riesenteleskope von 4 auf 39', unter Weglassung des Hilfsspiegels, der Spiegelaxe eine kleine Neigung zur Tubusaxe gab und das Bild direkt betrachtete, d. h. zu der sog. „Front-view" überging. Er soll mit Hilfe seines Bruders Alexander von 1766—82 über 400 Spiegel von 7—20' geschliffen und zum eigenen Gebrauche meist 20-füssige angewandt haben. — *l.* William Parsons, erst Lord Oxmantown, dann Earl of **Rosse** (Parsonstown in Irland 1800 — ebenda 1867) baute sich, nach langjährigen Versuchen über Spiegelmasse, Schleifmittel etc., sein Spiegelteleskop von 6 auf 55' mit einem Kostenaufwande von circa 300000 Fr., und stellte es 1845 in seinem Schlosse Birr-Castle auf; dasselbe erlaubt, die Vergrösserung bis auf 6000 zu steigern, ist dagegen natürlich bei einem Gewichte von mehr als 100 Doppelcentnern etwas ungefügig, so dass seine Bewegung auf etwa $1\frac{1}{2}^h$ zu beiden Seiten des Meridianes beschränkt werden musste. Vgl. seine Abhandlungen „Account of experiments on the reflecting telescopes (Ph. Tr. 1840), und: On the construction of specula of 6 feet aperture (Ph. Tr. 1861)". Mit ihm konkurrierte namentlich William **Lassell**, der etwa 1860 ein Teleskop von 4 auf 37' baute, auch eine eigene Maschine zum Polieren der Spiegel erfand (vgl. A. N. Bd. 63, Mem. Astr. Soc. 16 und Ph. Tr. 1874). — Der von **Foucault** (Compt. rend. 1857) und **Steinheil** (Monthly Not. 1858) fast gleichzeitig gemachte Vorschlag, die schweren, kostbaren und leicht erblindenden Metallspiegel durch versilberte und relativ leicht wieder neu zu versilbernde Glasspiegel zu ersetzen, ist schon vielfach mit Erfolg ausgeführt worden.

143. Die praktische Bestimmung von Brennweite, Vergrösserung, Gesichtsfeld und Leistung. — Um für ein Linsensystem die Lage der Kardinalpunkte und die Grösse der **Brennweite** zu bestimmen, kann man sich der früher (141) entwickelten Beziehungen bedienen [a], — findet letztere aber für eine einzelne Linse auch nahe, indem man die ihr, oder ihrer Verbindung mit einer schon bekannten Linse, entsprechende Bildweite der Sonne misst [b]. — Die **Vergrösserung** kann man mit genügender Genauigkeit erhalten, indem man das Fernrohr auf einen fernen Gegenstand ajüstiert, dann diffuses Himmelslicht durchgehen lässt und nun den Durchmesser des hinter dem Okulare entstehenden Lichtscheibchens in denjenigen des Objektives dividiert [c], — sodann aus dieser und den Brennweiten die Lage des sog. **Augpunktes**, die Grösse des **Gesichtsfeldes** und die **Helligkeit** ableiten [d]. — Zur Prüfung der **Leistungen** eines Fernrohrs endlich eignet sich vorzüglich die Betrachtung der Fixsterne mit demselben: Ihr Bild muss hell, rein,

scharf begrenzt und ohne farbigen Rand erscheinen, ob man dasselbe in die Mitte des Gesichtsfeldes oder in äussere Teile desselben bringt, — und je näher aneinander liegende Doppelsterne ein Fernrohr bei gleichem Luftzustande zu trennen vermag, desto besser ist dasselbe [a].

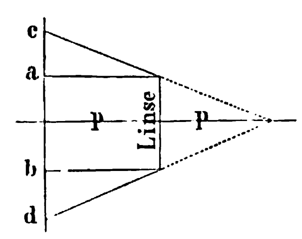
Zu 143: *a.* Um die Lage der Brennpunkte F und F*, die Grösse φ der Brennweite, und damit die Lage der Hauptpunkte E und E* bei einem Linsensysteme für $n^0 = n^*$ praktisch zu bestimmen, schlug nämlich **Gauss** folgendes hübsche Verfahren vor: Nach 141:21 hat man

$$(F - \xi) \cdot (\xi^* - F^*) = (a - \varphi) \cdot (\alpha - \varphi) = (a - \varphi) \cdot \left(\frac{a \cdot \varphi}{a - \varphi} - \varphi\right) = \varphi^2 \qquad 1$$

Ist somit D ein beliebiger, mit der Linse fest verbundener Punkt, und setzt man $D - F = p$, $F^* - D = q$, $D - \xi = m$, $\xi^* - D = n$, so hat man

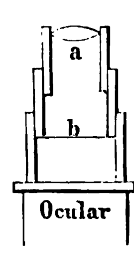
$$(m - p) \cdot (n - q) = \varphi^2 \qquad 2$$

und kann daher, wenn man drei Wertenpaare von m und n bestimmt, die drei das Gesuchte gebenden Unbekannten p, q und φ berechnen. — *b.* Ist die Brennweite P einer Linse zu gross, um sie direkt messen zu können, oder handelt es sich um eine Zerstreuungslinse, so verbindet man die zu bestimmende Linse mit einer Sammellinse von kleiner Brennweite p und misst die Brennweite π der Verbindung: Da nämlich in diesem Falle für die Hilfslinse (— P) Gegenstandsweite wird, so hat man (137 : 2)



$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{P} + \frac{1}{p} \qquad \text{also} \qquad P = \frac{p \cdot \pi}{p - \pi} \qquad 3$$

Eine Zerstreuungslinse kann man übrigens auch durch Versuch so zwischen ein Blatt Papier und die Sonne bringen, dass der Durchmesser a b ihres Schattens genau die Hälfte des Durchmessers des ihn umgebenden hellen Kreises ist, und hat sodann nur den Abstand der Linse von dem Blatte zu messen, um unmittelbar ihre Brennweite p zu erhalten. — *c.* Um den Durchmesser d des Lichtscheibchens etwas genauer messen zu können, hat, vgl. „**Magellan**, De l'auzomètre inventé par Mr. Adams (Journ. Rozier 1783)", George **Adams** (1750 — London 1795; Mechaniker in London) ein aus drei Röhrchen bestehendes Hilfsinstrumentchen, den **Auzometer**, ausgedacht: Das innerste birgt eine Loupe a und wird so gestellt, dass die vom zweiten getragene, mit einer Längenscale versehene Hornscheibe b deutlich gesehen wird, — das äusserste aber so, dass, wenn man dasselbe auf das Okular des Fernrohrs aufsetzt, das Lichtscheibchen gerade auf b fällt, also d an der Scale abgelesen werden kann. Bezeichnet sodann D den Durchmesser des Objektives, so ist nach der Huygens'schen Regel (139 : a) D : d = P : p die gesuchte Vergrösserung. Auch **Ramsden** soll unter dem Namen **Dynamometer** ein ähnliches Apparätchen verfertigt haben. — Ein wesentlich anderes, von **Arago** vorgeschlagenes Verfahren zur Bestimmung der Vergrösserung soll in 148 besprochen werden; dagegen ist hier noch zu erwähnen, dass die bei einem Fernrohr statthafte Vergrösserung teils von der Öffnung (Lichtstärke), teils von der Länge (Brennweite) abhängt und nach Erfahrung sich etwa



Öffnung	24‴	37‴	52‴	6″	14″
Länge	24″	48″	6′	8′	21′
Vergrösserung	40	64—216	64—324	84—456	140—1200

zu entsprechen haben. — *d.* Versteht man nach früherer Übung unter **optischem Mittelpunkte** einer Linse die Mitte des in sie fallenden Axenstückes, — unter **Hauptstrahlen** die durch ihn gehenden Strahlen, — und setzt näherungsweise die Distanz von Objektiv und Okular gleich der Summe ihrer Brennweiten P und p, so vereinigen sich alle vom Objektive kommenden Hauptstrahlen nach ihrem Durchgange durch das Okular in einer Distanz x hinter letzterm, so dass (137 : 2)

$$\frac{1}{P+p}+\frac{1}{x}=\frac{1}{p} \quad \text{oder} \quad x=p+\frac{p^2}{P} \qquad 4$$

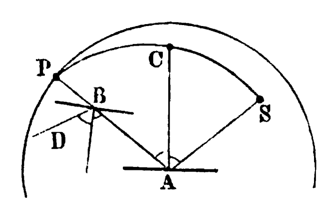
Man nennt den durch x bestimmten Punkt **Augpunkt**, weil man offenbar von ihm aus das Gesichtsfeld am besten übersieht, und pflegt dem Deckel des Okulars die Distanz $^1/_2\,x$ von letzterm zu geben, weil sodann das an den Deckel gelegte Auge annähernd den Augpunkt einnimmt. — Der Winkel $2\,\varphi$ der äussersten Hauptstrahlen, welche auf das Okular fallen, wird als Mass des **Gesichtsfeldes** angesehen, und wenn daher 2 w das Verhältnis des Okulardurchmessers zur Brennweite, und m die Vergrösserung bezeichnet, also

$$\operatorname{Tg}\varphi=\frac{p\cdot w}{P+p}=\frac{w}{1+m} \qquad 5$$

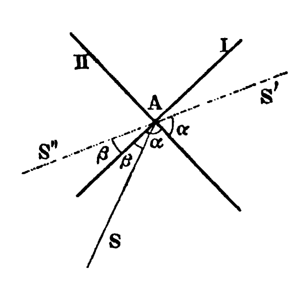
ist, so ersieht man, dass das Gesichtsfeld von der Öffnung des Objektives unabhängig ist, dagegen bei Zunahme der Vergrösserung rasch abnimmt. — Die **Helligkeit** muss der Anzahl der zur Entstehung des Objektivbildes mitwirkenden Strahlen, oder dem Quadrate der Objektivöffnung direkt, — dagegen der Fläche, über welche jene durch das Okular ausgebreitet werden, oder dem Quadrate der Vergrösserung umgekehrt proportional sein. — *e.* Nach den Versuchen von **Fresnel**, etc., giebt ein achromatisches Objektiv etwa $^3/_4$ des auffallenden Lichtes, — ein Spiegel nur etwas mehr als $^1/_2$, oder also ein Cassegrain'sches Teleskop nicht viel mehr als $^1/_4$ desselben. Hat somit ein Refraktor die Öffnung 1, so wird ein Reflektor der Öffnung $\sqrt{3} \risingdotseq {}^7/_4$ etwa gleich lichtstark mit ihm sein, — ja man erwartet sogar, dass der 36-Zöller des Lick-Observatoriums nahezu ebensoviel als der Leviathan leisten werde, vielleicht bei den günstigen atmosphärischen Verhältnissen des Mount Hamilton noch eher etwas mehr.

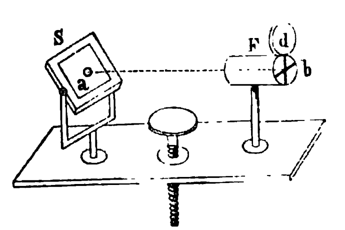
144. Heliostat und Heliotrop. — Als Anwendungen der katoptrischen Grundgesetze mögen noch die sog. **Heliostaten** erwähnt werden, d. h. Instrumente, welche die Sonnenstrahlen fortwährend nach einer bestimmten Richtung reflektieren [a], — ferner die damit verwandten und für die Geodäsie wichtig gewordenen **Heliotropen**, d. h. Vorrichtungen, welche einen Punkt an einem entlegenen Orte dadurch sichtbar machen, dass man letzterm von ersterm aus Sonnenlicht zuwirft [b].

Zu 144: *a.* Die einfachste Vorrichtung dieser Art besteht aus einem Spiegel A, der zur Weltaxe PA unter einem bestimmten Winkel festgestellt und dann durch Einsetzen eines Uhrwerks, entsprechend wie ein parallaktisch montiertes Fernrohr (173), um dieselbe gedreht werden kann: Erhält nämlich



A anfänglich eine solche Stellung, dass seine Normale nach der Mitte C des die Sonne S mit dem Pole P verbindenden Hauptkreises gerichtet ist, so wird offenbar der auffallende Strahl, so lange sich die Deklination der Sonne nicht merklich ändert und die Uhr den Spiegel zwingt, der täglichen Bewegung zu folgen, beständig nach der Richtung der Weltaxe reflektiert, — auch kann er leicht, wenn diese Richtung nicht passt, mit Hilfe eines zweiten, zur Weltaxe festen Spiegels B, in eine beliebige andere Richtung B D übergeleitet werden. — In Anwendung dieser Idee erstellte **Borelli**, wie Poggendorf aus den „Saggi di esperienze fatte nell' Accademia del Cimento. Firenze 1691 in fol. (Neue A. 1841 in 4.)" nachgewiesen hat, schon bald nach der Mitte des 17. Jahrhunderts einen ersten **Heliostaten**; es kann somit fortan **Fahrenheit**, dem diese Ehre bislang zugeteilt wurde, wenn auch vielleicht als unabhängiger, doch nicht als **erster** Erfinder, und vollends **s'Gravesande**, welchem Voltaire mit den Worten „depuis Josné personne avant vous n'avait arrêté le Soleil" schmeichelte, nur als Vervollkommner des Heliostaten genannt werden. Für den weitern Detail und die, seither nach verschiedenen Principien konstruierten neuern Apparate, verweise ich auf „Rudolf **Radau** (Angerburg in Preussen 1835 geb.; in Frankreich naturalisiert und als Privatgelehrter in Paris lebend), Sur la théorie des héliostats (Bull. astr. 1884)", wo auch die wünschbaren bibliographischen Nachweise gegeben werden. — ***b.*** Auf die erste Erstellung eines **Heliotropen** wurde **Gauss** durch den Gedanken geführt, das beiläufig bemerkte Glitzern der Fenster eines fernen Kirchturmes für Triangulationszwecke nutzbar zu machen: Er ging hiefür von dem Satze aus, dass, wenn ein Strahl S A auf die Kante zweier zu einander senkrechter Spiegel I und II einfalle, die beiden reflektierten Strahlen A S' und A S" eine Gerade bilden müssen. Statt des hierauf von ihm (vgl. Gött. Anz. 1821, Brief an Schumacher von 1821 VII 31, etc.) gegründeten Instrumentchens wird jedoch jetzt meistens folgende von Ingenieur **Bertram** ausgedachte, von **Repsold** wirklich ausgeführte und von **Baeyer** empfohlene, weit einfachere Disposition angewandt: Ein über dem Visierpunkte aufgestelltes Brett trägt einen um zwei Axen drehbaren, in der Mitte bei a durchbrochenen Spiegel S, und ein durch einen Deckel d verschliessbares Röhrchen F mit Fadenkreuz b. Man stellt nun zuerst a b auf den Stationspunkt ein; dann wird d geschlossen und S gedreht, bis das Sonnenlicht das Fadenkreuz erhellt, der von a herrührende dunkle Fleck aber durch dasselbe gleichmässig geteilt wird. So lange man sodann diese Coincidenz festhält, geht das Sonnenlicht nach dem Stationspunkte. — Für einen verwandten Heliotropen von **Steinheil** vgl. Schumachers astr. Jahrb. auf 1844, — für die Art, den Spiegelsextanten zur Not als Heliotrop zu gebrauchen, unsere 353.





145. Camera obscura und Photographie. — Entwirft man in einem dunkeln Raume mit Hilfe einer Sammellinse ein Bild von einem äussern Gegenstande und fängt dieses mit einer Tafel auf, so hat man eine sog. **Camera obscura** konstruiert [a]. — Besteht die Tafel aus einer mit Joddämpfen beschlagenen Silberplatte, so modifiziert das Licht in kurzer Zeit die Jodschichte so, dass die von ihm getroffenen Stellen Quecksilberdämpfe um so reichlicher kondensieren, je stärker es war, wodurch sich ein Bild, ein sog. **Daguerreotyp**, erzeugt, das durch Abwaschen des Jods mit einer Lösung von unterschwefligsaurem Natron Dauer erhält oder fixiert wird [b], — besteht sie dagegen aus einer vorerst mit Jodkalium überzogenen, dann in eine Lösung von salpetersaurem Silberoxyd gebadeten Glastafel, so wird diese durch das Licht so beeinflusst, dass beim Begiessen mit einer Lösung von Eisenvitriol jede Stelle um so dunkler wird, je kräftigeres Licht auf sie eingewirkt hat, oder ein sog. **Negativ** entsteht, das in ähnlicher Weise fixiert wird und nun, wenn das Tageslicht durch dasselbe auf mit Chlorsilber imprägniertes Papier fällt, auf letzterm mit Hilfe einiger untergeordneter Manipulationen eine sog. **Photographie** erzeugt [c]. — Die Verfahren, um Bilder dieser letztern Art hervorzubringen, haben sich in dem halben Jahrhundert, das seit Erfindung derselben verflossen ist, ungemein verbessert, und überdies ist es mit bestem Erfolge gelungen, diese Kunst auch der Astronomie dienstbar zu machen, wie später näher auseinander gesetzt werden soll [d].

Zu 145: *a.* Die der **Camera obscura** zu Grunde liegende Idee scheint schon gegen Ende des 15. Jahrhunderts **Leonardo** da Vinci gehabt zu haben; aber den ersten, durch Einsetzen einer Sammellinse wirksamen Apparat dieser Art erstellte erst etwa ein Jahrhundert später **Porta**, — ja eine grössere Bedeutung erreichte die Camera kaum vor den sofort zu besprechenden Versuchen, welche zu Anfang des laufenden Jahrhunderts Joseph-Nicéphore **Nièpce** (Châlons-sur-Saône 1765 — Gras bei Châlons 1833; Kavallerie-Offizier) machte, um die Auffangsplatte so zu präparieren, dass sich das Bild gewissermassen derselben einverleiben könne. — *b.* Schon um 1566 war es Georg **Fabricius** bekannt, dass Hornsilber (Höllenstein, Chlorsilber) bei Einwirkung des Lichtes geschwärzt wird; aber es wurde nicht weiter beachtet. Auch als 1727 Joh. Heinrich **Schulze** (Colbitz bei Magdeburg 1687 — Halle 1747; Prof. med. Altorf und Halle) bemerkte, dass sich ein silberhaltiger Kreideniederschlag am Lichte dunkel färbe, — hierauf Papierschablonen, in welche Worte eingeschnitten waren, auf Glas klebte, — durch dieselben Sonnenlicht auf seinen silberhaltigen Bodensatz fallen liess, — und nun sah, dass sich die Worte dunkel abbildeten, — versäumte man, diese Sache weiter zu verfolgen. Ebenso ging es, als später **Wedgewood** etc. ähnliche vereinzelte Versuche unternahmen, und erst als **Nièpce** von 1814 hinweg die Aufgabe, Lichtbilder zu erzeugen, an die Hand nahm, wurde eine erste, wenn auch noch unvollkommene Lösung erhalten: Er fand nämlich, dass Asphalt die Eigenschaft besitze, durch Beleuchtung un-

löslich zu werden, — überzog nun eine silberplattierte Kupfertafel mit einer Lösung von Asphalt in Lavendelöl und erwärmte sie, bis nur noch ein dünner weisser Überzug übrig blieb, — führte sodann, was nicht zu übersehen ist, **als der Erste** diese Tafel in eine Camera obscura ein, — tauchte sie nach längerer Aussetzung in ein Gemisch von Lavendelöl und Steinöl, wobei sich die vom Lichte nicht influierten Stellen vollständig lösten, die übrigen aber um so weniger, je kräftiger das Licht auf sie eingewirkt hatte, — und erhielt so, nach Abspülung mit Wasser, ein Bild, in welchem die nur unvollständig gelösten Stellen graulich nüanciert, die wieder blank gewordenen aber bei richtig auffallendem Lichte dunkel erschienen. — Allerdings liess nun diese erste Methode, welche trotz mehrstündiger Expositionszeit nur unscharfe Bilder ergab, noch viel zu wünschen übrig, und erst als sich **Nièpce** etwa 1826 vorläufig und 1829 sodann durch gerichtlichen Akt definitiv mit Louis-Jacques-Mandé **Daguerre** (Cormeille in Seine-et-Oise 1787 — Bry-sur-Marne 1851; Dekorationsmaler in Paris) verband, der sich auch schon einige Zeit mit ähnlichen Versuchen befasst hatte, ging sie nach und nach in das oben beschriebene bessere Verfahren über; aber dennoch ist zu beklagen, dass es ersterem nicht vergönnt war, den 19. August 1839 zu erleben, wo Arago der Pariser Akademie in glänzendem Vortrage die neue Erfindung bekannt gab, somit Ruhm und Nationalbelohnung dem zweiten allein zufielen, — der Geschichte anheimgebend, für das Andenken an den ersten Erfinder zu sorgen. — *c.* Lange bevor die erwähnte, gewöhnlich als **Daguerreotypie** bezeichnete Kunst publik geworden war, hatte sich auch William Henry Fox **Talbot** (Lacock Abbey in Wiltshire 1800 geb.; reicher Privatmann) vielfach mit derselben Aufgabe beschäftigt und war etwa 1834 auf einem wesentlich andern, ebenfalls schon oben angedeuteten Wege zu demselben Ziele gelangt. Er gab aber erst in der Schrift „Some account of the art of photogenic drawing. London 1839 in 4.“ Nachricht von seiner Erfindung, d. h. in demselben Jahre, wo auch **Daguerre** seine Schrift „Historique et description des procédés du Daguerreotyp et du Diorama. Paris 1839 in 8.“ erscheinen liess. — Nachdem sodann mehrere Jahre diese **Talbotypie** mit der Daguerreotypie konkurriert hatte, gewann erstere den Vorsprung, — namentlich als bei ihr das Negativ, nach dem Vorschlage von **Legray**, auf einer mit jodkalihaltigem Collodium überzogenen Glastafel erzeugt und dadurch viel schärfer wurde, so dass es sogar Vergrösserung erlaubte, — ja gegenwärtig ist sie als **Photographie** Alleinherrscherin geworden und hat sich dabei so ausgebildet, dass sozusagen Augenblicksbilder aufgenommen werden können. — *d.* Letzterer Umstand hatte die Folge, dass man nunmehr die Photographie auch auf Himmelskörper mit Erfolg anzuwenden hoffen konnte, — sei es, um diese wirklich abzubilden, sei es, um gewisse Lagenverhältnisse festzustellen, — und in der That gelang es in ersterer Richtung schon 1845 IV 2 **Fizeau** und **Foucault**, in $^1/_{60}{}^s$ ein ganz nettes Bild der Sonnenoberfläche zu erhalten, sowie in zweiter Richtung 1857 IV 27 G. P. **Bond**, in 8^s den Doppelstern ζ Ursæ majoris so scharf darzustellen, dass man Distanz und Position des Begleiters sicher erheben konnte. Seither hat sich die Photographie, wie uns die spätern Abschnitte vielfach zeigen werden, immer mehr in der Astronomie eingebürgert, ja ist bereits zu einem ihrer wichtigsten Hilfsmittel geworden. — Für den Detail der successiven Verbesserungen in den Apparaten und Manipulationen mag zum Schlusse auf die Specialschriften „Adam Georg **Martin** (Wien 1812 geb.; Bibliothekar Wien), Repertorium (später Handbuch) der Photographie. Wien 1846 in 8. (6. A. 1865),

— D. van **Monckhoven** (1834? — Gent 1882), Traité général de photographie. Paris 1856 in 8. (5 éd. 1865), — Hermann Wilhelm **Vogel** (Dobrilugk in der Niederlausitz 1834 geb.; Lehrer Phot. Berlin), Lehrbuch der Photographie. Berlin 1867—68 in 8., — A. **Davanne**, La Photographie. Paris 1886—88, 2 Vol. in 8., — etc." verwiesen werden, — und ebenso für das dazu in Beziehung stehende, gewissermassen das körperlich-Sehen vermittelnde, um 1838 durch **Wheatstone** erfundene **Stereoskop** auf „**Brewster**, On the Stereoscope, its history, theory and construction. London 1856 in 8., — A. **Steinhauser**, Über die geometrische Construction der Stereoscopbilder. Graz 1870 in 8., — etc."

146. Die Photometrie. — Die Lichtstärkemessung geht zunächst von den zwei Grundsätzen aus, dass 1) dem Auge nur darüber ein entscheidendes Urteil zusteht, ob zwei Helligkeiten übereinstimmen, und somit auf den Grad ihrer Verschiedenheit nur aus der Grösse der Veränderung geschlossen werden kann, welche die eine erleiden muss, um der andern gleich zu werden, — und dass 2) die Stärke der Erleuchtung dem Quadrate der Entfernung von der Lichtquelle indirekt, der Intensität der letztern und dem Cosinus des Einfallswinkels direkt proportional ist, allerdings aber auch von der Reflexionsfähigkeit der beleuchteten Fläche, ihrer sog. **Albedo**, abhängt [a]. — Es beruhen hierauf die sog. **Photometer**, deren einfachste darin bestehen, dass man die Schatten eines Stabes, oder die Beleuchtung zweier je zu dem einfallenden Lichte gleichgeneigter Flächen, durch Verschieben der einen Lichtquelle ausgleicht und sodann die Distanzen der Lichtquellen abmisst [b].

Zu 146: *a.* Schon **Kepler** sprach in seinen „Paralipomena" aus, „dass das Licht im umgekehrten Verhältnisse der auffangenden Flächen abnehme", und auch die **Huygens**, **Mairan**, etc. beschäftigten sich mit einzelnen in die Photometrie einschlagenden Fragen; aber als eigentliche Begründer dieses Abschnittes der Physik werden doch allgemein **Bouguer** und **Lambert** angesehen, und so mag auch hier auf die „Comparaison de la force de la lumière du soleil, de la lune et de plusieurs chandelles (Mém. Paris 1726) und den: Essai d'optique sur la gradation de la lumière. Paris 1729 in 8. (2 éd. 1760 durch Lacaille)" des erstern, und die davon ganz unabhängige „Photometria. Aug. Vind. 1760 in 8." des zweiten, sowie auf das eingehende Referat von Wilde (Gesch. II 294—384), für weitern Detail verwiesen werden. Noch „Carl **Michalke**, Untersuchungen über die Extinction des Sonnenlichtes in der Atmosphäre (A. N. 2691 von 1885)" geht von der Lambert'schen Formel $S = A \cdot p^{\mathrm{Cs}\,\varphi}$ aus, in welcher S die scheinbare Sonnenhelligkeit bei der Sonnenhöhe φ bezeichnet, A die Sonnenhelligkeit ausserhalb der Atmosphäre, und p (bei Lambert 0,5889, — bei Bouguer 0,8123, — bei Wolff in Bonn 0,8061, — bei Müller in Potsdam 0,8250, — etc.) der sog. Absorptionskoeffizient ist. — *b.* Für einige neuere, speciell zu astronomischen Zwecken konstruierte Photometer auf 595 verweisend, mag zum Schlusse noch hervorgehoben werden, dass der schon von **Bouguer** gemachte Vorschlag, von zwei nicht direkte vergleichbaren Lichtquellen jede mit einer Kerze zu vergleichen, bis in die neuere Zeit vielfach verfolgt worden ist, dabei einen Gasbrenner (Bec Carcel) mit 7,8 Normalkerzen

identifizierend, — dass jedoch 1884 auf einem internationalen Kongresse in Paris der Beschluss gefasst wurde, als Einheit diejenige Lichtmenge einzuführen, welche eine Platinplatte von 1^{qcm} Oberfläche im Momente des Schmelzens aussendet, — eine Einheit, welche mit 2,8 Bec Carcel oder 15,83 deutschen Vereinskerzen gleichwertig sein soll.

147. Die Spektroskopie. — Es war gegenüber den ersten Untersuchungen über das Spektrum ein Fortschritt von anfänglich ungeahnter Tragweite, als **Wollaston**, und etwas später unabhängig von ihm auch **Fraunhofer**, bemerkte, dass dasjenige der Sonne von einer Menge dunkler Linien oder vielmehr Querstreifen durchzogen wird, deren Lage eine unveränderliche ist, — als ferner ersterer auffand, dass gegenteils die durch Metalldämpfe hervorgebrachten Spektren aus hellen, für jedes Metall charakteristischen Linien bestehen, — letzterer dagegen nachweisen konnte, dass eine nachmals mit D bezeichnete Doppellinie des Sonnenspektrums genau mit einer hellen Doppellinie im Spektrum einer gewöhnlichen Flamme übereinstimme, — und **Stokes** hierauf erkannte, dass diese helle Doppellinie an das Vorhandensein von Natrium (Sodium) gebunden sei [a]. An diese höchst merkwürdigen Thatsachen reihten sich nach und nach noch einige andere und riefen einer systematischen Untersuchung, welche namentlich **Kirchhoff** und **Bunsen** durchführten [b], dabei zu folgenden Hauptresultaten gelangend: Wenn man in einer Flamme auch nur ganz kleine Mengen gewisser Salze (z. B. in einer Weingeistflamme etwas Kochsalz) verbrennt, so besteht das entsprechende Spektrum aus einzelnen farbigen Linien (z. B. bei Kochsalz aus einer gelben Linie), — und wenn man hinter diese Flamme eine Lichtquelle von höherer Temperatur und Intensität bringt, welche für sich ein vollständiges Spektrum giebt (z. B. ein durch ein Knallgasgebläse bis zur Weissglut erhitztes Stückchen gebrannten Kalkes), so wird das Spektrum der Flamme dadurch umgekehrt, d. h. die hellen Linien erscheinen in dunkle verwandelt. Man muss somit **einerseits** schliessen, dass auch die dunkeln Linien im Sonnenspektrum durch Umkehrung des Spektrums der Sonnenatmosphäre entstehen, und dass letztere z. B. Kalium, Natrium und Hydrogen enthalte, weil genau an der Stelle der diesen Stoffen entsprechenden hellen Linien dunkle Querstreifen gesehen werden, dagegen z. B. kein Barium, weil dessen Linien keine Repräsentanten haben, — und **anderseits** muss man annehmen, dass drei Arten von Spektren zu unterscheiden sind: Das von undurchsichtigen festen oder flüssigen Körpern gelieferte vollständige oder **kontinuierliche**, das von gasförmigen Körpern erzeugte **diskontinuierliche** und das sog. **Absorptions-Spektrum**, welches dadurch entsteht, dass das

Licht vor seinem Eintritte ins Prisma durch Dämpfe einzelner Strahlen beraubt wird *c*.

Zu 147: *a.* Die ersten Entdeckungen sind in „**Wollaston**, A method of examining refraction and dispersiv powers by prismatic reflection (Ph. Tr. 1802), — und: **Fraunhofer**, Bestimmung des Brechungs- und des Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten (Münchn. Denkschr. 1814—15; franz. in Schumacher Astr. Abh. II)" beschrieben. Von den an 600 Linien, welche letzterer nach ihrer Lage bestimmte, zeigt die beistehende Figur die mit

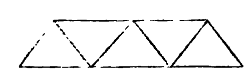
roth	A	Ka
	B	
	C	Li
orange	D	Na
gelb		
grün	E	Ba
blau	F	H
indigo		Cs
violet	G	
		Rb
	H	Ka

A B C D E F G H

bezeichneten acht hauptsächlichsten, welchen nach **Cornu** die Wellenlängen

760,40 686,71 656,21 589,21 526,91 486,07 430,73 396,81

entsprechen, wobei ein Millionstels-Millimeter als Einheit gewählt ist. Schon **Fraunhofer** hatte diese Wellenlängen annähernd so bestimmt, — während dagegen **Kirchhoff** zur Festlegung der sog. „Fraunhofer'schen Linien" eine arbiträre Scale benutzte, welche ihm für A: 404,0, und für G: 2854,3 ergab. Die Neuern sind meistens zu Fraunhofers Verfahren zurückgekehrt. — *b.* Gustav Adolf **Kirchhoff** (Königsberg 1824 — Berlin 1887) war folgeweise Prof. phys. Breslau, Heidelberg und Berlin. — Robert Wilhelm **Bunsen** (Göttingen 1811 geb.) ist Prof. chem. Heidelberg. — Für die Ansprüche von Julius **Plücker** vgl. Dronke in 69 : f. — *c.* Schon **Brewster** und Karl **Kuhn** (Cunreuth in Oberfranken 1816 geb.; Prof. math. et phys. München) sahen noch viel mehr Linien als Fraunhofer, und **Thollon** zählte nur von A bis etwas über E hinaus volle 3200 derselben auf, wies jedoch zugleich durch Vergleichung von Spektren, welche er bei hoher und tiefer Sonne aufnahm, mit ziemlicher Sicherheit den terrestrischen Ursprung von mehr als 900 dieser Linien nach. Dagegen sind allerdings andere ebenso sicher nicht durch die Erdatmosphäre bedingt, denn sonst hätte z. B. nicht schon aus den Beobachtungen von **Fraunhofer** hervorgehen können, dass die im Sonnenspektrum sich auszeichnende D in den Spektren von Sirius und Castor nicht zu sehen ist. — **Wollaston** hatte 1808 den folgewichtigen Gedanken, die früher zur Erzeugung des Spektrums angewandte runde Öffnung durch eine zur brechenden Kante des Prismas parallele, enge Spalte zu ersetzen. Auch **Fraunhofer** benutzte eine solche Spalte, auf welche er ein Fernrohr ajüstierte und sodann ein Prisma vor dessen Objektiv setzte. Seither wendet man eigens konstruierte **Spektroskope** an, von welchen z. B. das beliebte Taschenspektroskop von **Hofmann** in Paris folgende Einrichtung hat: Das Prisma ist nach dem Vorgange von Giovanni Battista **Amici** (Modena 1786 — Florenz 1863; Prof. math. Modena und Florenz; vgl. Boncompagni 1870), dessen Namen es auch trägt, entsprechend beistehender Figur, aus fünf Prismen zusammengesetzt, von denen das 2. und 4. aus Flintglas, die übrigen aus Crownglas bestehen und deren Winkel so gewählt sind, dass die austretenden farbigen



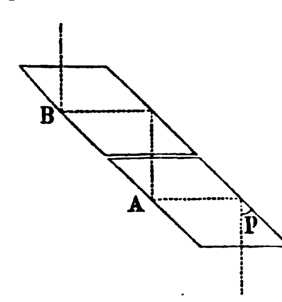
die Richtung der einfallenden Strahlen haben; es sitzt mitten in einem Rohr, — hat vor sich eine Sammellinse und, um die Brennweite letzterer weiter entfernt, die Spalte, so dass die divergierend einfallenden Strahlen parallel werden,

— hinter sich ein gewöhnliches kleines, auf unendlich gestelltes Fernrohr. — Für weitern Detail verweise ich auf 532 und 597—98, sowie auf die Specialschriften: „**Kirchhoff**, Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. Berlin 1862—63 in 4., — Anders Jöns **Angström** (Medelpad 1814 — Upsala 1874; Prof. phys. Upsala), Recherches sur le spectre solaire. Berlin 1869 in 4., — Henry Enfield **Roscoe** (London 1833 geb.; Prof. chem. Manchester), Spectrum Analysis. London 1869 in 8. (4. ed. 1886; deutsch von C. Schorlemmer, Braunschweig 1870 u. sp.), — Heinrich **Schellen** (Kevelaer bei Düsseldorf 1818 — Köln 1884; Schuldirektor in Köln), Die Spectralanalyse in ihrer Anwendung auf die Stoffe der Erde und die Natur der Himmelskörper. Braunschweig 1870 in 8. (3. A. in 2 Bdn. 1883; engl. durch Jane and Caroline Lassell, London 1885), — Heinrich **Kayser**, Lehrbuch der Spektral-Analyse. Berlin 1883 in 8., — etc."

148. Die Interferenz, Doppeltbrechung und Polarisation. — Gewisse farbige Erscheinungen, die beim Zusammentreffen nahezu paralleler, durch stumpfwinklige Prismen, dünne Ölschichten, etc., erhaltener Lichtstrahlen, oder beim Vorübergehen an Gitterwerken, an den Rändern undurchsichtiger Körper, etc., entstehen, sind unter dem Namen von **Interferenz-** oder **Beugungs-Phänomenen** bekannt und lassen sich unter der Annahme, dass den verschiedenen Farben Lichtwellen von verschiedener Länge entsprechen, nach den Gesetzen der Wellenlehre (129) theoretisch rekonstruieren [a]. — Ferner lassen manche krystallinische Körper das Licht nach zwei Richtungen durch oder **brechen doppelt**; so z. B. sieht man durch einen rhomboedrischen Doppelspath einen Punkt doppelt, und wenn man den Krystall dreht, so dreht sich das eine Bild um das andere in einem Kreise, dessen Halbmesser einem Winkel von $6^0\ 12' = 372'$ entspricht [b]. — Wenn endlich ein Lichtstrahl unter einem Winkel von $54^1/_2{}^0 = \text{Atg}\ n$ auf einen geschwärzten Spiegel einfällt, dessen Glas den Brechungsexponent n besitzt, so erhält er durch die Reflexion gewisse Eigenschaften, die ihm den Namen eines **polarisierten** Strahles verschafft haben: Fällt er z. B. unter gleicher Neigung auf einen zweiten Spiegel ein, so wird er, je nachdem die neue Einfallsebene zu der ersten parallel oder senkrecht steht, **noch** oder **nicht mehr** reflektiert und erleidet beim Überführen aus der ersten in die zweite Lage eine successive Schwächung [c].

Zu 148: *a.* Die Länge der Lichtwellen beträgt für rot etwa 0,62, orange 0,58, gelb 0,55, grün 0,51, blau 0,48, indigo 0,45 und violett 0,42 Mikron. — *b.* **Arago** hat diese Eigenschaft zur Bestimmung der Vergrösserung eines Fernrohrs benutzt: Bringt man nämlich vor das Okular eines solchen einen Doppelspath, — sieht nach einer in bekannter Distanz befindlichen Tafel, auf der Kreise von verschiedener Grösse verzeichnet sind, — und sucht denjenigen Kreis aus, dessen zwei Bilder sich tangieren, für welchen also sein scheinbarer Durchmesser $2\,\varphi$ durch das Fernrohr auf $372'$ gebracht ist, — so

gibt offenbar 372 : 2φ die angewandte Vergrösserung. — *c.* Auf die Interferenz- und Beugungs-Erscheinungen wurde zuerst **Grimaldi** (vgl. seine Schrift in 138) aufmerksam und hob bestimmt hervor, dass **Licht zu Licht hinzugefügt unter Umständen Dunkelheit** hervorbringen könne. Ungefähr gleichzeitig beschäftigten sich **Boyle** in seinen „Expeiiments and considerations upon colours (Oxford 1663 in 8.?)" und **Hooke** in seiner „Micrographia. London 1665 in fol." speciell mit den Farben dünner Blättchen, deren Gesetze dann allerdings erst etwas später durch **Newton** in seiner Optik (130) festgestellt wurden, — während **Barthelinus** in seinen „Experimenta crystalli Islandici. Hafniæ 1670 in 4." auf die Doppeltbrechung aufmerksam machte, welche sodann **Huygens** in seinem Traité (130) einlässlich behandelte, dabei zugleich die Polarisation des Lichtes ahnend. — Einen neuen und überdies der Undulationstheorie zum Durchbruche helfenden Aufschwung nahmen sodann diese Untersuchungen im gegenwärtigen Jahrhundert durch die klassischen Arbeiten: „**Young**, On the Theory of Light and Colours (Ph. Tr. 1802), — **Malus**, Théorie de la double réfraction. Paris 1810 in 4., — Dominique-François-Jean **Arago** (Estagel bei Perpignan 1786 — Paris 1853; Prof. Astr. und Sekretär Akad. Paris; vgl.: Oeuvres. Paris 1854 bis 1862, 17 Vol. in 8., deutsch von Hankel, Leipzig 1854—60, und: Jos. Bertrand, Paris 1865 in 8.), Sur une modification remarquable qu'éprouvent les rayons lumineux dans leurs passages à travers certains corps diaphanes (Mém. Par. 1811), — **Fresnel**, Mémoire sur la diffraction de la lumière (Mém. Par. 1826; aber schon 1815 vorgelegt und 1819 gekrönt), — **Brewster**, Laws which regulate the polarization of light by reflection (Ph. Tr. 1815; hier Nachweis, dass Atg n = Polarisationswinkel, und somit reflektierter Strahl senkrecht zu gebrochenem Strahl), — **Biot**, Sur les rotations que certaines substances impriment aux axes de polarisation des rayons lumineux (Mém. Par. 1819), — J. **Herschel**, On the action of crystallized bodies on homogeneous light (Ph. Tr. 1820), — Friedrich Magnus **Schwerd** (Osthofen in Rheinbayern 1792 — Speyer 1871; Prof. math. Speyer; vgl. Heel: Speyer 1872 in 4.), Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt. Mannheim 1836 in 4., — **Cauchy**, Mémoire sur la dispersion de la lumière. Prague 1836 in 4., — Friedrich **Weber** (Magdala in Sachsen-Weimar 1842 geb.; Prof. phys. Zürich), Die wahre Theorie der Fresnel'schen Interferenzerscheinungen (Zürch. Viert. 1879), — etc." — Als Anwendung füge ich noch das von **Merz** konstruierte sog. **helioskopische Okular** an, welches aus zwei auf einander verdrehbaren Büchsen A und B besteht, deren jede zwei gegen die optische Axe des Fernrohrs um p = 90° — Atg n geneigte Parallelspiegel enthält: A wird an den Okularauszug angeschraubt, während B das Okular trägt; bei A ‖ B geht das Licht fast ungeschwächt, bei A ⊥ B gar nicht, in Zwischenlagen beliebig moderiert durch.



149. Einige Begriffe aus der Wärmelehre. — Die sog. Wärme ist mit dem Lichte verwandt und häufig verbunden, — strahlt wie dasselbe, — wird nach denselben Gesetzen reflektiert und gebrochen, — ja in neuerer Zeit ebenfalls nicht mehr als Stoff, sondern als eine Bewegungsform betrachtet [a]. — Dagegen weicht

das Verhalten der Körper gegen das Durchlassen der Wärmestrahlen und Lichtstrahlen wesentlich von einander ab, und so ist z. B. Steinsalz ein sehr **diathermaner** Körper, während der fast ebenso durchsichtige Alaun schon bei geringer Dicke alle Wärme absorbiert oder sehr **atherman** ist. — In Beziehung auf das durch innere Strahlung bewirkte Verbreiten der absorbierten Wärme in einem Körper unterscheidet man **gute** und **schlechte** Wärmeleiter: Zu den erstern gehören Metalle und Steine, zu den letztern Glas, Kohle, Wolle, etc. Von unten erwärmte Flüssigkeiten und Gase scheinen, infolge der entstehenden Strömungen, bessere Wärmeleiter zu sein, als sie es eigentlich sind. — Durch Erwärmung wird ein Körper ausgedehnt (118), und umgekehrt lässt die Ausdehnung, bei im übrigen gleichen Verhältnissen, auf die Stärke der Erwärmung schliessen (150) [b]. — Die Wärmemenge, welche ein Kilogramm Wasser aufnehmen muss, damit die Temperatur von 0 auf 1° steige (151), nimmt man als Wärmeeinheit oder **Calorie** an und nennt sodann die, in dieser Einheit ausgedrückte Wärmemenge, welche irgend ein anderer Körper erfordert, damit die Temperatur einer Gewichtseinheit desselben um 1° steige, dessen **specifische Wärme** oder **Eigenwärme** [c]. Bei Gasen hat man die Eigenwärme bei **konstantem Volumen** und bei **konstantem Drucke** zu unterscheiden, je nachdem man bei der Wärmezuführung das Volumen der Masse oder den von aussen stattfindenden Druck konstant erhält; bei atmosphärischer Luft ist erstere 0,1687, letztere 0,2377. — Während ein Körper in einen höhern Aggregationszustand übergeht (118), wird alle ihm zufliessende Wärme zu dieser Formänderung verbraucht oder **gebunden**; umgekehrt wird bei Erniedrigung eine entsprechende Wärmemenge **frei**, worauf z. B. die Anwendung des Dampfes zum Heizen, etc. beruht. — Die beim Verschwinden von Bewegung entstehende Wärmemenge ist der verlornen Arbeit (119) proportional, und zwar produziert ein Körper von 1 kg Gewicht, dessen Geschwindigkeit der Fallhöhe 425^m entspricht, beim Verlieren der Bewegung eine Calorie an Wärme; ein sog. mechanisches **Wärme-Equivalent** einer Calorie beträgt somit 425 Kilogrammeter [d]. — Die Flüssigkeiten gehen schon unter der Siedehitze in den expansiblen Zustand über, — sie **verdunsten** an ihrer Oberfläche; dabei wird auf Kosten der umgebenden Körper Wärme gebunden, wodurch die sog. **Verdunstungskälte** entsteht, welche z. B. beim Psychrometer (152) benutzt wird [e].

Zu 149: *a.* Schon **Huygens** sagte in einer der ersten Sitzungen der Pariser Akademie: „Je ne sais quel mouvement c'est que la chaleur, mais je suppose que c'est un mouvement". — *b.* Da für einen kleinen Wert von d offenbar $(1+d)^n \doteq 1 + n \cdot d$ ist, so kann die Flächenausdehnung gleich dem Doppelten,

die Volumenausdehnung gleich dem Dreifachen der Längenausdehnung gesetzt werden. — Bezeichnen v und v' die Volumina eines Gases bei b und b' Zollen Barometerstand und bei t und t' Centesimalgraden Erwärmung, so ist, wenn $\alpha = 0{,}003\,665 = {}^1/_{273}$ den nach **Gay-Lussac** allen Gasen gemeinschaftlichen Ausdehnungskoeffizienten repräsentiert, sein Volumen bei 28'' und 0°

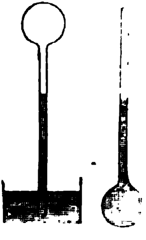
$$x = \frac{b \cdot v}{28\,(1 + \alpha \cdot t)} = \frac{b' \cdot v'}{28\,(1 + \alpha \cdot t')} \quad \text{so dass} \quad \frac{b \cdot v}{b' \cdot v'} = \frac{1 + \alpha \cdot t}{1 + \alpha \cdot t'} \qquad 1$$

das schon von **Amontons** auf verschiedene Temperaturen erweiterte, aber dennoch meist nach **Gay-Lussac** benannte Mariotte'sche Gesetz ist. Nach 1 wird notwendig v = 0, wenn t = — 273° C. ist, und man kann daher den um 273° C. unter dem Eispunkte liegenden Punkt unbedenklich als einen jeder Wärme baren **absoluten Nullpunkt** betrachten (vgl. 151 : c). — *c.* Wenn man z. B. sagt, ein Kilogramm Kohle entwickle beim Verbrennen 7500 Calorien, so ist damit gemeint, es könnte 7500^{kg} Wasser von 0 auf 1° erwärmen. Nach **Saint-Robert** verbrauchen nun die besten Dampfmaschinen $1{,}30^{kg}$ Kohle per Stunde und Pferdekraft: Es geben also (119) die 1,30 als **Nutzeffekt** nur $75 \cdot 60 \cdot 60^{kgm}$, während sie nach oben $1{,}30 \times 7500 \times 425^{kgm}$ entsprechen, so dass der Nutzeffekt nur 7 % beträgt. — *d.* So z. B. würde 1^{kg} Wasser von 0° beim Auffallen in ein 425^{m} tieferes Gefäss sich auf 1° erwärmen. — Auf dem Erzeugen von Wärme durch mechanische Arbeit beruht z. B. das um 1745 von Abbé Augustin **Ruffo** in Rom erfundene **pneumatische Feuerzeug.** — *e.* Für den weitern Detail der Wärmelehre und ihre historische Entwicklung wird auf folgende Specialwerke verwiesen: „**Lambert,** Pyrometrie. Berlin 1779 in 4., — Benjamin Thompson Graf v. **Rumford** (Rumford in Massachusetts 1753 — Auteuil bei Paris 1814; erst Schulmeister, dann Militär, zuletzt Akad. Paris; vgl. Cuvier, Eloges II), Mémoires sur la chaleur. Paris 1804 in 8., — **Leslie,** Experimental inquiry into the nature and properties of heat. London 1804 in 8., — Pierre **Prevost** (Genf 1751 — ebenda 1839; Prof. philos. et phys. Berlin und Genf), Du calorique rayonnant. Genève 1809 in 8. (Suppl. 1832), und: Deux traités de physique mécanique, comme simple éditeur du premier (par G. L. Lesage) et comme auteur du second. Genève 1818 in 8., — **Fourier,** Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822 in 4. (Nouv. éd. par Darboux 1888; engl. durch A. Freeman, Cambridge 1878; deutsch durch B. Weinstein, Berlin 1884), — Sadi **Carnot** (Paris 1796 — ebenda 1832; Sohn von 53 : g; Ingenieur), Réflexions sur la puissance motrice du feu. Paris 1824 in 8., — **Poisson,** Théorie mathématique de la chaleur. Paris 1835 in 4. (Suppl. 1837), — J. R. **Mayer,** Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme. Heilbronn 1851 in 8., und: Die Mechanik der Wärme. Stuttgart 1867 in 8., — Gustav **Zeuner** (Chemnitz 1828 geb.; Prof. mech. Zürich und Dresden), Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Freiberg 1860 in 8. (2. A. 1866; franz. durch Arnthal et Cazin, Paris 1869), — Gustav Adolf **Hirn** (Logelbach bei Colmar 1815 geb.; Civilingenieur in Colmar), Exposition analytique et expérimentale de la théorie mécanique de la chaleur. Paris 1862 in 8. (2 éd. in 2 Vol. 1865—68, 3 éd. 1875—76), — **Tyndall,** Heat considered as a mode of motion. London 1863 in 8. (2. ed. 1865; franz. durch Moigno, Paris 1864; deutsch durch Helmholtz und Wiedemann, Braunschweig 1867), und: Contribution to molecular physics in the domain of radiant heat. London 1872 in 8., — Rudolf **Clausius** (Köslin in Pommern 1822 — Bonn 1888; Prof. phys. Zürich, Würzburg und Bonn), Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie. Braunschweig 1864—67, 2 Th. in 8. (2. A. 1876—79, 3. A. 1887; franz.

durch F. Folie et E. Ronkar, Paris 1888), — P. de **Saint Robert**, Principes de Thermodynamique. Turin 1865 in 8. (2 éd. 1870), — Richard **Rühlmann**, Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. Braunschweig 1876—85, 2 Vol. in 8., — etc."

150. Die ersten Thermoskope. — Da sich bei Zunahme der Wärme und Abnahme des Druckes die Körper ausdehnen, so kann, wie schon erwähnt, umgekehrt durch die Ausdehnung eines Körpers die Erwärmung konstatiert oder sogar gemessen werden, falls der Druck konstant bleibt oder seine Veränderung in Betracht gezogen wird. Hierauf beruhte aber sowohl das erste Thermoskop, das wir **Galilei** verdanken und als Vorläufer des gegenwärtigen Luftthermometers (151) zu betrachten haben [a], — als das etwas später aus ihm hervorgegangene Thermoskop von **Rey** [b], welches alsbald durch **Ferdinand** II. von Toskana verbessert, sowie mit einer Scale versehen wurde [c], durch die von der Accademia del Cimento mit seiner Hilfe angestellten Versuche bereits wissenschaftliche Bedeutung gewann, und aus welchem sodann nach und nach unser gewöhnliches Thermometer (151) hervorging [d].

Zu 150: *a.* Das von **Galilei** vielleicht schon 1593, jedenfalls spätestens 1603 erstellte Thermoskop bestand aus einer Glaskugel von der Grösse eines Hühnereies, mit einem zwei Spannen langen Halse von der Weite eines Strohhalmes: Die Kugel wurde etwas erwärmt, sodann der Apparat umgestürzt in ein Gefäss mit Wasser getaucht, worauf beim Abkühlen der Kugel das Wasser im Halse emporstieg; da nun diese Höhe, welche man an einer Längsscale ablesen konnte, mit der Wärme der umgebenden Luft variierte, so erkannte man auf diese Weise Wärmeveränderungen, wenn man sie auch noch nicht eigentlich messen konnte, zumal Veränderungen des Luftdruckes ebenfalls influierten, — doch leistete schon dieser rohe Apparat, welchen z. B. Santorio



Sanctorius (Capo d'Istria 1561 — Venedig 1636; Prof. med. Padua) zu medicinischen Zwecken verwendete, erhebliche Dienste. — *b.* Jean **Rey** hatte um 1632 den guten Gedanken, sein Instrument, nachdem er in angegebener Weise den Hals und einen Teil der Kugel mit Flüssigkeit (Wasser, — wohl auch Wein oder gefärbter Weingeist) gefüllt hatte, wieder umzuwenden, wodurch die frühere Sperrflüssigkeit zur thermometrischen Substanz wurde und das Thermoskop nicht nur die Form unsers gewöhnlichen Thermometers annahm, sondern namentlich auch vom Einflusse des Luftdruckes grösstenteils befreit war. — *c.* Galileis Zögling, Grossherzog **Ferdinand** II. von Toskana (vgl. 10 : a), hatte etwa 1640 den glücklichen Gedanken, bei dem Thermoskope von Rey die Röhre oben, nachdem durch Erhitzen des eingefüllten Weingeistes die Luft ausgetrieben war, zuzuschmelzen, — und überdies dasselbe dadurch in eine Art Thermometer überzuführen, dass er alle Exemplare mit möglichst übereinstimmenden Scalen zu versehen suchte: Nach einem bis auf uns gekommenen Instrumente dieser Art zu schliessen, wurde der Raum, innerhalb welchem sich der Weingeist von der grössten beobachteten Winterkälte bis zur grössten Sommerhitze bewegte, gewöhnlich in 50 (zuweilen auch in 100

oder 300) gleiche Teile geteilt, — von diesen noch einige nach oben und unten aufgetragen, — sodann durch Versuch ermittelt, dass sich der Weingeist beim Einsetzen des Instrumentes in ein „mit klein geriebenem Eise“ gefülltes Gefäss auf 13½ Grade stelle, — und nun jeweilen auch bei andern Exemplaren dieser Punkt bestimmt, je deren Scale so verschiebend, dass er ebenfalls auf 13½ Grade fiel. Nach Libris Ermittlungen stimmten bei dem erhaltenen Thermometer die Grade 0, 13½ und 55 mit — 15, 0 und 44 der Deluc'schen Scale (151) überein. — *d.* Dieses sog. „florentinische Thermometer“ fand bald grosse Verbreitung und erfuhr erst im folgenden Jahrhundert wesentliche Verbesserungen, mit welchen wir uns unter der folgenden Nummer beschäftigen werden, für den eigentlichen Detail der ältern und neuern Geschichte auf die Specialschriften „E. **Wohlwill**, Zur Geschichte der Erfindung und Verbreitung des Thermometers (Pogg. Annal. 1865), — Fritz **Burckhardt** (Sissach bei Basel 1830 geb.; Prof. phys. und Rektor Basel), Die Erfindung des Thermometers und seine Gestaltung im 17. Jahrhundert. Basel 1867 in 4., und: Die wichtigsten Thermometer des 18. Jahrhunderts. Basel 1871 in 4., — Emilien **Renou** (Vendôme in Loir-Cher 1815 geb.; Dir. Obs. met. du Parc St-Maur), Histoire du thermomètre. Paris 1876 in 8., — E. **Gerland**, Das Thermometer. Berlin 1885 in 8., — etc.“ verweisend.

151. Die Thermometrie. — Unsere gegenwärtigen Thermometer verdanken wir zunächst **Fahrenheit**, der als Füllmittel den Weingeist durch das geeignetere Quecksilber ersetzte und, was noch viel wichtiger war, ja erst das Thermoskop in ein **Thermometer** überführte, dem **Einen** Fundamentalpunkte der Frühern, für welchen er den Schmelzpunkt des Eises beibehielt, im Siedepunkte des Wassers bei einem bestimmten Barometerstande einen **Zweiten** beifügte [a], — sodann **Deluc**, welcher die bald wieder in Vergessenheit geratenen Principien Fahrenheits dauernd zur Geltung brachte, zuerst dessen Fundamentalpunkte mit der nötigen Sicherheit zu bestimmen lehrte, und sich überdies das Verdienst erwarb die **vor, während** und **nach** dem Interregnum gebräuchlichen Scalen einer sorgfältigen Vergleichung zu unterwerfen [b]. — Seit der Zeit von Deluc ist nun freilich sowohl die wissenschaftliche Grundlage als die Technik der Erstellung von Thermometern noch weiter vervollkommnet und namentlich nachgewiesen worden, dass auch die Ausdehnung des Quecksilbers bei sehr verschiedenen Wärmegraden nicht ganz genau dieselbe ist, während dagegen die Spannkraft eines, an ein bestimmtes Volumen gebundenen Luftquantums, wenigstens innerhalb der hiebei in Frage kommenden Fehlergrenzen, wirklich seiner Erwärmung proportional gesetzt und daher, in weiterer Entwicklung der Ideen von **Amontons**, Tob. **Mayer** und **Lambert**, zur Erstellung von tadellosen Normalthermometern benutzt werden darf. So ist auch 1887 durch die internationale Kommission für Mass und Gewicht ein Wasserstoff-Thermometer als Normal-Instrument eingeführt worden [c]. — Auf die zur Bestimmung der täglichen

Temperaturextreme unserer Luft ausgedachten Instrumente, die verschiedenen Metall- und Registrier-Thermometer, die Pyrometer, etc., kann hier nicht wohl näher eingetreten werden [d].

Zu 151: *a.* Nachdem sich **Fahrenheit** erst ebenfalls in Weingeistthermometern versucht hatte, ging er zu dem schon in „**Halley**, Account of several experiments to ascertain the divisions of the thermometer (Ph. Tr. 1692)" als thermometrische Flüssigkeit empfohlenen Quecksilber über, welches er, wahrscheinlich durch Destillation, ganz rein darzustellen wusste. — Die Notwendigkeit eines zweiten Fundamentalpunktes hatte spätestens **Newton** eingesehen und dafür schon etwa 1686 ebenfalls den Siedepunkt des Wassers in Aussicht genommen; aber da weder Newton noch der ihm beistimmende Halley dabei auf den Barometerstand Rücksicht nahmen, während **Fahrenheit** die Notwendigkeit derselben ausdrücklich betonte, so ist diese Einführung dennoch letzterm gutzuschreiben. — Dass **Fahrenheit**, was übrigens höchst nebensächlich ist, zum Eispunkte 32 und zum Siedepunkte 212 schrieb, hängt damit zusammen, dass er bei seinen frühern Weingeistthermometern, bei welchen 0 sowohl der grössten Kälte des Jahres 1709, als der durch eine Mischung von Eis und Salmiak erzeugten künstlichen Kälte, und $4 \times 24 = 96$ der Blutwärme entsprach, den Eispunkt bei 32 gefunden hatte und mit 180 weitern solcher Grade zum Siedepunkte gelangte; auch schien es ihm bequem, nur ausnahmsweise negative Grade anwenden zu müssen. — Vgl. „**Fahrenheit**, Experiments concerning the degrees of heat of boiling liquors (Ph. Tr. 1724)". — *b.* Für die Arbeiten von **Deluc** vgl. seine „Recherches" in 127 und speciell das in 127:b über sein erstes Quecksilberthermometer beigebrachte. Später acceptierte er leider die von René-Antoine Ferchault de **Réaumur** (La Rochelle 1683 — Bermondière in Maine 1757; Akad. Paris) an seinem ziemlich unzuverlässigen Weingeistthermometer, in der Meinung dass sich Weingeist vom Gefrier- bis zum Siedepunkte um 80 $^0/_0$ seines Volumens ausdehne, angewandte Bezifferung 0 bis 80, — anstatt rationeller mit Anders **Celsius** (Upsala 1701 — ebenda 1744; Prof. astr. Upsala) und dessen Nachfolger Märten **Strömer** (Orebro 1707 — Upsala 1770) einfach die Distanz der Fundamentalpunkte centesimal abzuteilen, und entweder mit ersterm die Bezifferung 100—0, oder unserer Übung entsprechend mit letzterm die Bezifferung 0—100 anzuwenden. — Verstehen wir unter R, C und F die Ablesungen, welche einer gewissen Temperatur an den Scalen von Deluc (Réaumur), Strömer (Celsius) und Fahrenheit entsprechen, so ist somit

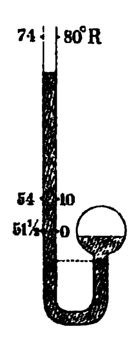
$$R = \frac{4}{5} C = \frac{4}{9} (F - 32) \qquad C = \frac{5}{4} R = \frac{5}{9} (F - 32) \qquad F = \frac{9}{4} R + 32 = \frac{9}{5} C + 32 \qquad 1$$

Für die Reduktion anderer Scalen, wie z. B. der früher namentlich in der Schweiz viel gebrauchten von Jacques-Barthélemi **Micheli** du Crest (Genf 1690 — Zofingen 1766; Hauptmann in franz. Diensten, dann Staatsgefangener in Aarburg; vgl. Biogr. I), bei welcher der Nullpunkt der als konstant angenommenen Temperatur des Kellers der Pariser Sternwarte, seinem sog. „Tempéré" oder „Terme universel", entsprach, während der Siedepunkt mit 100 bezeichnet war, vgl. die „Recherches", oder noch besser „**van Swinden**, Dissertation sur la comparaison des thermomètres. Leide 1792 in 8." — Für die Korrektion des Siedepunktes, welchen **Deluc** bei $27'' = 324'''$ als normal annahm, gab er die Regel, dass der bei dem Barometerstande $324''' \pm d$ bestimmte Siedepunkt der Temperatur $(80^0 \pm t)$ R entspreche, wo $t = d : (1134 \pm d)$

sei, — eine Regel, die nun allerdings seither nach den Versuchen von **Arago** und Pierre-Louis **Dulong** (Rouen 1785 — Paris 1838; Prof. phys. und Akad. Paris) für den Barometerstand $760^{mm} \pm d$ und die Centesimalscale durch

$$t = 0{,}037\,818 \cdot d + 0{,}0000\,18563 \cdot d^2 \qquad 2$$

ersetzt worden ist. Dass eine solche Regel auch umgekehrt ermögliche, aus Beobachtung des Siedepunktes die Höhe zu berechnen, sah **Deluc** ebenfalls ein und ist somit als Begründer der sog. **Hypsothermometrie** zu betrachten, welche dann allerdings erst einen gewissen Aufschwung nehmen konnte, als es durch die von Henri-Victor **Regnault** (Aachen 1810 — Auteuil 1878; erst Kaufmann, dann Prof. phys. et chem. und Akad. Paris) auf seine „Expériences entreprises pour déterminer les principales lois et les données numériques qui entrent dans le calcul des machines à vapeur. Paris 1847—62, 2 Vol. in 4." gegründeten Tafeln, von welchen unsere V^c^ ein Specimen giebt, möglich wurde, eine Siedehitze mit Sicherheit auf Barometerstand zu reduzieren. — Dass es besser sei zur Bestimmung des Siedepunktes das Thermometer in den Dampf des siedenden Wassers als in dieses selbst zu bringen, scheint zuerst Henry **Cavendish** (Nizza 1731 — London 1810; reicher Privatgel.) in seinem „Account of the meteorol. Instruments used at the Roy. Soc. House (Ph. Tr. 1776)" hervorgehoben zu haben; dagegen zeigte schon **Deluc**, dass für den untern Fundamentalpunkt der Schmelzpunkt viel besser als der Gefrierpunkt sei, und machte auch auf die Notwendigkeit aufmerksam, zur Konstruktion von Thermometern nur gut kalibrierte Röhren zu wählen. Auf die 1808 durch Angelo **Bellani** (Monza 1776 — Mailand 1852; Kanonikus in Mailand) konstatierte und durch eine Deformation des Glasgefässes erklärte, successive Erhöhung des Gefrierpunktes, welche seither namentlich **Joule** (vgl. Mem. of Manchester 1868) einlässlich studierte, scheint Deluc noch nicht aufmerksam geworden zu sein. Überhaupt ist seit seiner Zeit noch manches geschehen, wofür z. B. auf „**Bessel**, Methode die Thermometer zu berichtigen (Pogg. Annal. 1827), — A. v. **Oettingen**, Über die Correction der Thermometer. Dorpat 1865 in 4., — Joh. **Pernet**, Beiträge zur Thermometrie (Carls Repert. 1875), — etc." verwiesen werden mag. — *c.* Schon Guillaume **Amontons** (Paris 1663 — ebenda 1705; Architekt und Akad. Paris) hatte, wie aus seiner Abhandlung „Sur quelques propriétés de l'air, et le moyen d'en connaître la température dans tous les climats de la terre (Mém. Par. 1702)" hervorgeht, die Idee, eine Art **Luftthermometer** zu konstruieren, um mit dessen Hilfe ein Weingeistthermometer richtig graduieren zu können: Er sperrte durch Quecksilber in einer Kugel von $^3/_4$" Durchmesser, von der eine nach oben gebogene, lange, im Lichten $^1/_2$''' haltende Röhre ausging, ein sie nahezu füllendes Luftquantum ab, — tauchte dann diesen Apparat bei 28" Barometerstand in siedendes Wasser, und goss nun Quecksilber zu, bis die Luft gerade die Kugel ausfüllte; von dem so erhaltenen Punkte aus, der 46" über dem untern Ende der Kugel lag und dem er, weil nun die Luft unter dem Drucke von 46 + 28 = 74" Quecksilber stand, 74 beischrieb, trug er nun nach unten Zolle auf, — beobachtete bei andern Temperaturen je den Stand des Quecksilbers an der so erhaltenen Scale, — und gab diesen, nachdem er ihn beim Barometerstande $28 \mp b$ um $\pm b$ vermehrt hatte, als Mass der Wärme. So z. B. entsprach $51^1/_2$" dem Eispunkte, und es würde somit nach den Messungen von Amontons, da $74 - 51^1/_2 = 22'',5$ genau



100 Centigraden, also $51\frac{1}{2}$" nahezu 229 Centigraden entsprechen, der sog. **absolute Nullpunkt** (vgl. 149) 229 Centigrade unter dem Eispunkte stehen, während man ihn jetzt allerdings bei 273 annimmt. — Die nächste Zeit zeigte im allgemeinen wenig Verständnis für diese gesunden Ideen, und so ist es doppelt interessant, dass sich (vgl. die „Remarques" von Deluc in Journ. des Sav. 1791) im Nachlasse von Tob. **Mayer** ein von ihm 1755 verfertigtes Quecksilber-Thermometer fand, welches neben den gewöhnlichen Einteilungen eine „Scala expansionum aeris" zeigte, bei der 1000 dem Eispunkte und 1380 dem Siedepunkte entsprach: Diese Scale, deren Nullpunkt somit auf $1000 \times 100 : 380 = 263,2$ Centigrade unter dem Eispunkte gefallen wäre, lässt nämlich nicht bezweifeln, dass Tob. Mayer (nicht erst sein Sohn, wie zuweilen angegeben wird) nicht nur sein Thermometer im Sinne von Amontons graduierte, sondern auch die glückliche, sonst wohl Lambert gutgeschriebene Idee hatte, die frühere Zollscale mit Raumteilen, und die „conventionellen" Temperaturangaben, wie es die neuere Physik zu thun gewohnt ist, mit „absoluten" zu vertauschen. Dagegen bleibt **Lambert** das Verdienst, nicht nur die analogen Untersuchungen noch schärfer durchgeführt und so z. B. die Mayer'schen Werte 380 und 263,2 durch die wesentlich genauern 370 und 270,3 ersetzt, sondern namentlich auch in seiner „Pyrometrie" die Vorzüge des Luftthermometers gehörig beleuchtet und die Basis für die betreffenden Arbeiten der Neuzeit gelegt zu haben. Für letztere muss auf die bereits erwähnten Schriften, sowie auf „Heinrich Gustav **Magnus** (Berlin 1802 — ebenda 1870; Prof. phys. und Akad. Berlin), Über die Ausdehnung der Luft in höhern Temperaturen (Pogg. Ann. 1842), — **Regnault**, Sur la comparaison du thermomètre à air avec le thermomètre à mercure (Ann. ch. et ph. 1842), — Charles-Edouard **Guillaume** (Les Verrières 1861 geb.; Savant attaché au bureau internat. des poids et mesures), Etudes thermométriques, ferner: Formules pratiques pour la transformation des coefficients thermiques (Trav. et mém. 5 u. 6 von 1886 und 1888), und: Traité pratique de la thermométrie de précision. Paris 1889 in 8., — Pierre **Chappuis** (Bremblens bei Morges 1855 geb.; Savant attaché au bureau internat. des poids et mesures), Etudes sur le thermomètre à gaz, et comparaison des thermomètres à mercure avec le thermomètre à gaz (Trav. et mém. 6 von 1888), — etc." verwiesen werden. — *d.* Für die



im allgemeinen wenig verlässlichen Extremthermometer auf „James **Six** (1740? — 1793; Esquire in Canterbury), Account of an improved Thermometer (Ph. Tr. 1782; neue A. London 1794 in 8.), — Daniel **Rutherford** (Edinburgh 1749 — ebenda 1819; Prof. bot. Edinburgh), A description of an improved Thermometer (Tr. Edinb. 1794), — etc." verweisend, mag noch kurz der sog. **Metallthermometer** gedacht, und speciell dasjenige beschrieben werden, welches durch Friedrich **Hermann** (Bern 1835 geb.; Mechaniker in Bern) mit bestem Erfolge vielfach ausgeführt wurde: Es besteht aus zwei zusammengelöteten Metallstreifen (Stahl und Messing), die so zu einer Spirale aufgewunden sind, dass das sich stärker ausdehnende Metall (Messing) nach innen zu stehen kömmt, also die Spirale bei Erwärmung sich öffnet; das innere Ende der Spirale ist festgemacht, jedoch so, dass die ganze Spirale

behufs Regulierung mittelst der Schräubchen a und b etwas gedreht werden kann, — das äussere Ende dagegen ist **entweder** mit einem Zeiger verbunden, der, um die momentane Temperatur anzugeben oder zu registrieren, über eine Scale gleitet, oder (wie z. B. bei den, vgl. 128 : c, durch Wild und Hasler konstruierten Registrierapparaten) durch einen, etwa alle 5^m wirkenden Auslösungsapparat an eine sich langsam vorüberbewegende Walze gedrückt wird, **oder** steht, wenn nur Extreme angegeben werden sollen, zwischen zwei drehbaren Zeigern, die so konstruiert sind, dass beide, wenn ihre Spitzen zusammengeführt werden, teils in Kontakt mit ihm kommen, teils die augenblickliche Temperatur angeben, während sodann bei nachfolgender Zunahme oder Abnahme der Temperatur der eine oder der andere von dem Spiralende vor sich hergetrieben wird. Bei etwas sorgfältiger Behandlung giebt dieser Apparat ganz brauchbare Resultate, wie sich aus der bereits citierten Abhandlung von **Wild** und aus den von mir und Adolf **Hirsch** (Halberstadt 1830 geb.; Prof. astr. und Dir. Obs. Neuenburg) in den Jahrgängen 1867 und 1868 der Schweiz. met. Beob. publizierten Berichten ergiebt. — Zum Schlusse mag noch angeführt werden, dass **Zimmer** schon 1746 für den Salon in Dresden ein Metallthermometer konstruierte, — dass **Magelhaens** (vgl. 128) ein ebensolches beschrieb, — dass Charles **Brooke** (London 1804 geb.; Wundarzt in London) einen photographischen Registrierapparat erfand und (Ph. Tr. 1846—47) beschrieb, — dass Josiah **Wedgwood** (Burslem in Staffordshire 1750 — Etruria bei Newcastle 1795; Töpfer) ein auf der Annahme, dass Thon proportional der Hitze schwinde, beruhendes **Pyrometer** zur Messung sehr hoher Temperaturen erfand, — dass **Pouillet** dieses letztere durch eine Art Luftthermometer mit Platinkugel zu ersetzen vorschlug, — etc.

152. Die Hygrometrie. — Bezeichnen t_1 und t_2 die gleichzeitigen Angaben eines trockenen und eines benetzten Thermometers bei b^{mm} Barometerstand, e_1 und e_2 aber die diesen Temperaturen (nach V^c) entsprechenden Spannkräfte des Wasserdampfes, so geben die Formeln

$$E_1 = e_2 - \left\{ \begin{matrix} 0{,}000\,800 \\ 0{,}000\,691 \end{matrix} \right\} \cdot (t_1 - t_2) \cdot b \qquad E_2 = E_1 : e_1 \qquad \mathbf{1}$$

teils die Spannkraft E_1 des zur Zeit der Beobachtung in der Luft enthaltenen Wasserdampfes, die sog. **absolute Feuchtigkeit,** — teils ihr gewöhnlich in Procenten gegebenes Verhältnis E_2 zu der Spannkraft des bei der vorhandenen Lufttemperatur die Luft sättigenden Wasserdampfes, die sog. **relative Feuchtigkeit,** — wobei zur Berechnung von E_1 der untere Faktor anzuwenden ist, wenn sich das benetzte Thermometer mit einer Eisrinde überzieht [a]. — In der Notwendigkeit dieses Faktorenwechsels spiegelt sich die Unsicherheit ab, an welcher diese um ihrer Einfachheit willen sonst sehr beliebte, gewöhnlich als **Psychrometer von August** bezeichnete Methode der Feuchtigkeitsbestimmung [b], bei raschen Temperaturwechseln in der Nähe des Nullpunktes leidet und eine Kontrolle erfordert, die gewöhnlich einem der ältern **Hygroskope** [c], und zwar

meistens dem von **Saussure** beliebten und jetzt auch vielfach zu Registrierapparaten benutzten **Haarhygrometer** [d], überbunden wird. — Zu noch genauerer Kontrolle im physikalischen Kabinette empfehlen sich die sog. **Kondensationshygrometer**, besonders das von **Daniell** auf die rasche Verdampfung des Schwefeläthers gegründete [e], — oder auch die namentlich von **Brunner** befürwortete Methode, einem bestimmten Luftquantum durch chemische Mittel das Wasser zu entziehen und abzuwägen [f].

Zu 152: *a.* Will man nur die relative Feuchtigkeit bestimmen, so kann man 1, wenn α den dortigen Erfahrungsfaktor bezeichnet, und $\triangle b = 760 - b$ ist, durch

$$E_2 = 100 \cdot \frac{e_2 - \alpha (t_1 - t_2)(760 - \triangle b)}{e_1} = A + B \cdot \frac{\triangle b}{100} \qquad 2$$

ersetzen, wo nun A die Feuchtigkeit bei 760^{mm} und B den Zuschlag repräsentiert, welchen sie für 100^{mm} Abnahme des Barometerstandes erleidet. Eine hierauf basierte Tafel habe ich im Jahrgange 1869 der Schweiz. met. Beob. publiziert. — *b.* Schon in William **Cullen** (Hamilton in Schottland 1710 — Edinburgh 1790; Prof. chem. Glasgow und Edinburgh), On the cold produced by evaporating fluids (Essays of Edinb. Soc. II von 1755)“ wurden Beobachtungen über Verdunstungskälte publiziert, ja in „James **Hutton** (Edinburgh 1726 — ebenda 1797; Privatgel.), Dissertations on different subjects in natural philosophy. Edinburgh 1792 in 4.“ sogar der Vorschlag gemacht, in oben angegebener Weise die Feuchtigkeit zu bestimmen, und da eine Schrift „J. G. **Greiner**, Über das Psychrometer. Berlin 1825 in 8.“ erschienen sein soll, so war auch der Name **Psychrometer** (von ψυχρός = frostig) vorhanden; aber dennoch wird anerkannt, dass diese Methode erst durch Ernst Ferdinand **August** (Prenzlau 1795 — Berlin 1870; Prof. math. Berlin) und dessen Schriften „Über die Anwendung des Psychrometers zur Hygrometrie. Berlin 1828 in 4., und: Über die Fortschritte der Hygrometrie. Berlin 1830 in 4.“, eigentliche Bedeutung erhielt, und somit mit seinem Namen verbunden werden darf. Den von August gegebenen Hilfstafeln folgten z. B. die von Herm. **Suhle** „Cöthen 1866 in 4.“ ausgegebenen. — *c.* Die ältern **Hygroskope** (von ὑγρός = feucht und σκοπεῖν = betrachten) beruhten darauf, dass es gewisse Körper giebt, welche das Vermögen besitzen, Wasserdämpfe zu absorbieren, wie z. B. Saiten (mit Verkürzen), Haare (mit Verlängern), abgestorbene Tann-Ästchen (mit Biegen), Baumwolle (mit Gewichtszunahme), etc. Wie weit die mit Darmsaiten verbundenen „holländischen Puppen“ (Mann mit Regen- und Frau mit Sonnenschirm, etc.) zurückreichen, weiss man nicht; dagegen ist es Thatsache, dass schon um die Mitte des 15. Jahrhunderts **Cusanus** ein Hygroskop beschrieb, welches aus einer Wage bestand, auf deren einer Schale etwas Baumwolle oder Seide lag, — dass Will. **Molyneux** in seiner „Description of a new hygrometer (Ph. Tr. 1685)“ ein aus einer hänfenen Schnur bestehendes Hygroskop unter wissenschaftlicher Begründung empfahl, — dass **Sturm** in seinem „Collegium experimentale curiosum. Norimb. 1676—85, 2 Vol. in 4.“ ein von ihm mit Hilfe einer Darmsaite verfertigtes Hygroskop beschrieb, welches nachmals von **Brander** unter Berücksichtigung von „**Lambert**, Essai d'hygrométrie (Mém. Berl. 1769—72; deutsch: Augsburg 1774—75 in 8.)“ verbessert und vielfach ausgeführt wurde, — etc. — Für ein Asthygrometer vgl. meine Abhandlung im Jahrg. 1866 der Schweiz. meteorol. Beobachtungen. — *d.* Ein brauchbares **Haar-**

hygrometer wurde durch Horace-Bénédict de **Saussure** (Genf 1740 — ebenda 1799; Prof. phys. et philos. Genf; vgl. Biogr. 4) erstellt (vgl. dessen „Essai sur l'hygrométrie. Neuchatel 1783 in 8.") und in neuerer Zeit namentlich durch **Hermann** und **Hottinger** vorzüglich ausgeführt, sowie von **Koppe** in der Schrift „Die Messung des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft. Zürich 1878 in 8." einlässlich besprochen. — *e.* Das erste **Kondensationshygrometer** war wohl die in den „Saggi" beschriebene „Mostra umidaria", welche **Ferdinand** II. aus einem unten geschlossenen konischen Glase erstellte, das er mit gestossenem Eis füllte: Die Wasserdämpfe schlugen sich an demselben nieder, — das Wasser lief in einen graduierten Glasbecher ab, — und es wurde aus der in einer bestimmten Zeit erhaltenen Menge desselben auf die Feuchtigkeit geschlossen. — Ein wesentlicher Fortschritt wurde sodann durch Charles **Le Roy** (Paris 1726 — ebenda 1779; Sohn von Jullien in 122; Prof. med. Montpellier, dann Arzt in Paris) bei seinen Untersuchungen über den Thau erzielt, indem er bei bekannter Lufttemperatur t das in einer Flasche enthaltene Wasser durch Einwerfen kleiner Eisstücke so lange abkühlte, bis sich bei einer gewissen Temperatur τ Feuchtigkeit auf die Flasche niederschlug; er fand so z. B., vgl. sein „Mémoire sur l'élévation et la suspension de l'eau en air et sur la rosée (Mélanges. Paris 1771 in 8.), dass sich einmal $t = 17^0$ und $\tau = 13\frac{1}{2}^0$ entsprachen, d. h. zwei Temperaturen, welchen (nach V^c) die Spannkräfte $s = 14{,}42$ und $\sigma = 11{,}54$ zukommen, so dass damals die Feuchtigkeit $\sigma : s = 80\%$ statt hatte, — eine Rechnung, welche allerdings Le Roy noch nicht in dieser Weise ausführen konnte, da erst gegen Ende des Jahrhunderts John **Dalton** (Eaglesfield in Cumberland 1766 — Manchester 1844; Gymnasiallehrer Manchester) eine Tafel der Spannkräfte herstellte. Als sodann Johannes v. **Soldner** (Anspach 1777? — München 1833; Trigonometer, dann Konservator des Obs. Bogenhausen) in Gilberts Annalen (Bd. 32 von 1809) auf das rasche Verdampfen des Schwefeläthers aufmerksam gemacht hatte, erfand John Frederich **Daniell** (London 1790 — ebenda 1845; Prof. chem. London) das bereits erwähnte und nach ihm benannte Hygrometer (vgl. „On a new Hygrometer" in Quart. Journ. of Science 1820), welches dann später von **Regnault** (vgl. „Etudes sur l'hygrométrie" in Ann. de chim. 1845) noch wesentlich verbessert wurde. — *f.* Karl Emanuel **Brunner** (Bern 1796 — ebenda 1867; Prof. chem. Bern) brachte die längst bemerkte, ja schon 1683 von einem gewissen **Gould** (vielleicht einem Vorfahren des Astronomen) zu einer Art Hygroskop benutzte Eigenschaft der Schwefelsäure, Wasser an sich zu ziehen, zur Anwendung: Er liess (vgl. Pogg. Ann. 20 von 1830) aus einem Gefässe, auf welchem eine Röhre aufgesteckt war, die mit Schwefelsäure befeuchteten Asbest enthielt, Wasser abfliessen, wobei ihm die Menge des letztern das Volumen der durch die Röhre eingetretenen Luft, die Gewichtsvermehrung der Röhre aber das darin enthaltene Wasserquantum ergab.

153. Einige Begriffe aus der Lehre vom Magnetismus. — Manche Körper, besonders der sog. Magneteisenstein, besitzen die Eigenschaft, kleine Stücke Eisen, Stahl, Kobalt, etc. anzuziehen und bei freier Beweglichkeit eine bestimmte Richtung gegen die Weltgegenden anzunehmen, — sie heissen **magnetisch** [a]. — An jedem Magnete sind Paare von Stellen vorhanden, in denen sich diese Anziehungskraft konzentriert, die sog. **Pole**, welche entsprechend dem eben erwähnten Richtungsbestreben die Specialnamen **Nordpol** und

Südpol erhalten haben, — ja, wenn man einen Magnet zerbricht, so zeigt jedes Bruchstück wieder beide Pole [b]. — Nähert man dem einen Pole eines Magneten den einen Pol eines andern Magneten, so findet Anziehung oder Abstossung statt, je nachdem die beiden Pole ungleichnamig oder gleichnamig sind; nähert man ihm dagegen das eine Ende eines des Magnetismus fähigen Stabes, so findet nicht nur immer Anziehung statt, sondern letzterer wird sofort, wie man sagt **durch Verteilung,** selbst zum Magnete, jedoch so, dass das nähere Ende den andern Pol erhält, — beim Zurückziehen aber behält oder verliert er den Magnetismus, je nachdem er aus Stahl oder weichem Eisen besteht [c]. — Giebt man einem Magneten die Form eines Hufeisens und bringt zwischen seine Pole ein frei bewegliches Stäbchen eines andern Körpers, so stellt sich letzteres je nach seiner Beschaffenheit **axial** oder **equatorial**, und man unterscheidet daher **paramagnetische** Körper (Eisen, Stahl, etc.) und **diamagnetische** Körper (Wismuth, Holz, etc.) [d].

Zu 153: *a.* Der Name „Magneteisen“ soll daher rühren, dass man das betreffende Mineral vorzüglich bei der Stadt Magnesia in Lydien fand; die Chinesen sollen ihn jedoch nicht gebraucht, sondern für Magnet ein dem französischen „aimant“ entsprechendes Wort benutzt haben, was nach Lancaster von ihrem Naturforscher **Li-tchi** mit „Si cette pierre n'avait pas un amour pour le fer, elle ne le ferait pas venir à elle“ begründet wurde. Auch die polaren Eigenschaften waren den Chinesen frühe bekannt; denn wenn auch die Sage, es habe ihr Kaiser **Hoang-ti** schon vor seiner Thronbesteigung im Jahre 2698 v. Chr. einen kleinen Wagen konstruiert, auf welchem eine Figur beständig nach Süden wies, der Begründung entbehren mag, so ist ziemlich sicher, dass dieses merkwürdige Volk spätestens im 2. Jahrhundert unserer Zeitrechnung die Schiffsrichtung dadurch bestimmte, dass ein nadelförmiges Stück des Steines auf zwei Strohhalme ins Wasser gelegt wurde. — Obschon bereits **Plinius** in seiner Naturgeschichte den Magneten und seine Anziehungskraft beiläufig erwähnte, wurde derselbe, und zwar mutmasslich durch Vermittlung der Araber, im Abendlande erst im 12. Jahrhundert allgemein bekannt, wo ihn z. B. der Franzose **Guyot** de Provins als „une pierre laide, noirette, où le fer volontiers se joint“ erwähnt, während sein Landsmann **Jacques** de Vitry von einem „poisson de fer creusé et magnétisé qu'on jette à la surface de l'eau“ spricht, und der Engländer **Nekkam** in seiner Schrift „De naturis rerum libri duo (Ed. Th. Wright. London 1863)“ als eine auf einer Metallspitze schwebende Nadel beschreibt. Bei letzterer Form wurde meist ein buchsbaumenes Kästchen (griech. πυξίς, lat. buxus, ital. bussola) gebraucht, womit der jetzt allgemein gebräuchliche Name **Boussole** zusammenhängt. — Speciell für Schiffahrtszwecke wurde die Nadel, und zwar mutmasslich zuerst gegen das Ende des 13. Jahrhunderts durch den Schiffer Flavio **Gioja** aus Amalfi (vgl. Breusing in Z. f. Erdk. IV von 1869), mit einer der Windrose entsprechend geteilten Scheibe verbunden, und erhielt so (wegen compasso = Einteilung) den Namen **Kompass**; die spätere Aufhängung des Kompasses mittelst zweier zu einander senkrechter Axen scheint mit Recht den Namen von **Cardan** zu tragen, der dieselbe im 17. Buche seiner Schrift „De subtilitate

Norimb. 1550 in fol." wohl zuerst beschrieb. — *b.* Um die Pole zu finden, wurde der Magneteisenstein in Eisenfeile gelegt und dann nachgesehen, welche Stellen einen Bart erhielten. — *c.* Die durch Verteilung, respektive durch **Bestreichen** gegebene Möglichkeit, sog. **künstliche** Magnete zu erzeugen, scheint nach den obigen Notizen schon den Alten, jedenfalls spätestens um 1543 Georg **Hartmann,** bekannt gewesen zu sein, und die sog. **Armierung** der Magnete durch Anlegen eines weichen Eisenstabes, des sog. **Ankers,** an beide Pole, findet sich bereits in „William **Gilbert** (Colchester 1540 — London 1603; Arzt in London), De magnete. Londini 1600 in 4."; aber immerhin verdient der zur Zeit als Virtuose in Erstellung kräftiger Hufeisenmagnete betrachtete Johannes **Dietrich** (Basel 1700? — ebenda 1758; Goldschmied und Mechaniker in Basel) specieller Erwähnung, zumal seine Erzeugnisse und die Untersuchungen von Daniel **Bernoulli** sich gegenseitig förderten. — *d.* Nachdem schon Anton **Brugmans** (Hantum in Friesland 1732 — Gröningen 1789; Prof. philos. et philos. nat. Franeker und Gröningen) in seinen „Tentamina philosophica de materia magnetica. Franecqueræ 1763 in 8. (deutsch durch Eschenbach, Leipzig 1784 in 8.)" und einigen spätern Schriften bemerkenswerte Untersuchungen über das Verhalten verschiedener Körper zum Magnete veröffentlicht hatte und auch einzelne andere betreffende Erfahrungen bekannt geworden waren, nahm **Faraday** dieses Gebiet mit gewohnter Meisterschaft in Arbeit und gab nun in seiner Abhandlung „On new magnetic actions and on the magnetic condition of all matter (geschr. 1845, publ. in Ph. Tr. 1849)" die erhaltenen, oben kurz angedeuteten Resultate zum besten. — Zum Schlusse füge ich noch folgende Litteraturangaben bei: „**Musschenbroek,** Dissertatio physica de magnete. Viennæ 1754 in 4., — Antoine-César **Becquerel** (Châtillon-sur-Loing 1788 — Paris 1878; Prof. am Musée d'hist. nat. und Akad. Paris; Vater von A. E. in 130:b), Traité de l'électricité et du magnétisme. Paris 1834—40, 7 Vol. in 8., — **Tyndall,** Researches on diamagnetism and magne-crystallic action. London 1870 in 8., — etc."

154. Die Gesetze des Erdmagnetismus. — Hängt man eine Stahlnadel in ihrem Schwerpunkte an einem ungedrehten Coconfaden auf und macht sie sodann magnetisch, so nimmt sie nach einer Reihe von Schwingungen nicht nur eine Ruhelage an, welche an jedem Orte eine bestimmte Abweichung vom Meridiane oder eine sog. **Deklination**, und eine bestimmte Abweichung von der Horizontalen oder eine sog. **Inklination** zeigt, sondern setzt auch einen von bestimmter **Intensität** zeugenden Widerstand entgegen, wenn man sie aus dieser Lage entfernen will [a]. — Bezeichnet I die Intensität des Erdmagnetismus, — H ihre horizontale und V ihre vertikale Komponente, — k das Trägheitsmoment und m die Masse der Nadel, — d die Entfernung eines Poles derselben von ihrer Drehaxe, — M aber das sog. **magnetische Moment** der Nadel, so hat man nach **Gauss,** da eine Magnetnadel wie ein Pendel schwingt,

$$M = d \cdot m \qquad t_1 = \pi \sqrt{\frac{k}{M \cdot H}} \qquad t_2 = \pi \sqrt{\frac{k}{M \cdot I}} \qquad t_3 = \pi \sqrt{\frac{k}{M \cdot V}} \qquad 1$$

zu setzen, wo t_1 die Schwungzeit einer horizontal, t_2 diejenige einer

im magnetischen Meridiane, und t_3 die einer senkrecht zu demselben schwingenden Nadel ist. Für die Inklination i hat man sodann

$$\text{Si}\, i = V : I = t_2^2 : t_3^2 \qquad \mathbf{2}$$

und wenn ein Magnetstäbchen von a^{mm} Länge, b^{mm} Breite und p^{mgr} Gewicht zu einer einfachen Schwingung t^s braucht, und in einer zum magnetischen Meridiane senkrechten Lage eine in der Entfernung r befindliche Nadel um den Winkel v ablenkt, so setzt man nach **Gauss**

$$H = \frac{\pi}{r \cdot t} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6r \cdot \text{Tg}\, v} \cdot p} \qquad V = H \cdot \text{Tg}\, i \qquad I = H \cdot \text{Se}\, i \qquad \mathbf{3}$$

und überhaupt bildet dessen Schrift „Intensitas vis magneticæ terrestris ad mensuram absolutam revocata. Gottingæ 1833 in 4.“, welcher diese Beziehungen entnommen sind, die feste Grundlage, auf der dieses ganze Gebiet ruht [b].

Zu 154: *a.* Wer die **Deklination** oder **Missweisung** der Magnetnadel zuerst bemerkte, ist unbekannt; dagegen weiss man, dass dieselbe noch in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts vielfach bezweifelt und unrichtiger Beobachtung oder schlechter Beschaffenheit der Nadeln zugeschrieben wurde, so dass es Martin **Cortés** (Burajoloz in Aragon 1510? — Cadix 1580?, Lehrer der Steuermannskunst in Cadix) noch nötig fand, in seinem „Breve compendio de la esfera y de la arte de navigar. Cadix 1546 in 8.“ eine Lanze für deren Realität zu brechen, trotzdem spätestens 1492 Chr. **Columbus**, und 1497 wohl unabhängig von ihm auch Sebastian **Cabot** (Bristol 1477 — England 1557; Sohn eines venet. Kaufmanns; machte in engl. und span. Diensten viele Seereisen) schon sogar die örtliche Verschiedenheit der Deklination nachgewiesen hatten, — ja in demselben Jahre 1546 Gerh. **Mercator** bereits versuchte, die Lage des magnetischen Poles aus zwei an Orten von gegebener Länge und Breite vorgenommenen Messungen der Missweisung zu bestimmen, um daraus für einen andern Ort von Länge und Missweisung je die eine aus der andern berechnen zu können. Ferner weiss man, dass G. **Hartmann** um 1544 die Inklination auffand, — dass, wohl unabhängig von ihm, der englische Seemann Robert **Normann** ebendieselbe 1576 in London zu messen suchte, — und dass G. **Graham** etwa 1722 (vgl. Ph. Tr. 1722) die Intensität aus den Schwingungen einer Nadel zu bestimmen wusste. Ebenso ist bekannt, dass Daniel **Bernoulli** mit bestem Erfolge bemüht war, die Mittel zur Bestimmung der Deklination und Inklination zu verbessern, die nach seinen Ideen durch Dietrich ausgeführten Instrumente grossen Beifall fanden und seine Abhandlung „Sur la meilleure manière de construire les boussoles d'inclinaison (Mém. Par. 1743)“ von der Pariser Akademie gekrönt wurde, — dass die etwas später von **Brander** gelieferten Deklinatorien und Inklinatorien ebenfalls sehr beliebt waren, — und überhaupt Theorie und Praxis entsprechend fortschritten, bis endlich beide in dem Meisterwerke von **Gauss** und den von ihm konstruierten Magnetometern zu einem gewissen Abschlusse gelangten. — Anhangsweise mag noch an den von Johann **Lamont** (Bracmar in Schottland 1805 — Bogenhausen 1879; Konservator des Obs. zu Bogenhausen) für Bestimmungen auf Reisen erstellten und in seinem „Handbuch des Erdmagnetismus. Berlin 1849 in 8.“ beschriebenen sog. **magnetischen Theodoliten** erinnert werden, — sowie an die nette Methode, welche

(vgl. Grunerts Archiv III von 1842) Iwan **Simonoff** (Astrachan 1785 — Kasan 1855; Prof. astr. Kasan) ausdachte, um die Deklination mit dem Spiegelsextanten zu messen. — *b.* Bezeichnet i die Neigung der Magnetnadel im magnetischen Meridiane, und i' diejenige in einer mit demselben den Winkel d bildenden Ebene, so ist nach Dan. **Bernoulli**

$$\mathrm{Tg}\, i' = \mathrm{Tg}\, i \cdot \mathrm{Se}\, d \qquad 4$$

und somit die Inklination im magnetischen Meridiane ein Minimum.

155. Die sekulären Variationen. — Für verschiedene Orte der Erde erhalten, wie bereits angedeutet wurde, die drei magnetischen Elemente im allgemeinen gleichzeitig verschiedene Werte, und wenn man diejenigen Punkte, für welche sie gleich werden, verbindet, oder sog. **Isogonen**, **Isoklinen** und **Isodynamen** zieht [a], so bilden die erstern gewissermassen **magnetische Meridiane**, die beiden letztern **magnetische Parallele**, unterscheiden sich aber wesentlich von den geographischen Linien gleichen Namens. Ich kann mir jedoch nicht erlauben, über diese merkwürdigen Verhältnisse und die Versuche, Theorien für dieselben aufzustellen, näher einzutreten [b], sondern muss mich darauf beschränken, die Veränderungen, und zwar zunächst die **sekulären Variationen**, welche die magnetischen Konstanten im Laufe der Zeit an demselben Orte erfahren haben, noch ganz kurz vorzuführen: Vor allem geht aus den Beobachtungen mit aller Sicherheit hervor, dass die **Deklination** in Europa in den frühern Jahrhunderten eine östliche war, — dass diese abnahm und nach der Mitte des 17. Jahrhunderts vollständig verschwand, um dann aber alsbald in westliche Deklination überzugehen, — dass letztere sodann zunahm, bis sie etwa 1815 ein Maximum erreichte, — dass sie seither wieder beständig abgenommen hat, um unzweifelhaft nach der Mitte des folgenden Jahrhunderts neuerdings das Zeichen zu wechseln, — kurz, dass die Deklinationsnadel etwa in 300 Jahren eine Art Pendelschwingung ausführt [c]. — Wenn ferner die frühern Bestimmungen der **Inklination** gar zu unsicher waren, ja zum Teil widersprechende Resultate ergaben, so unterliegt es dagegen keinem Zweifel, dass dieses zweite Element in Europa seit einem Jahrhundert beständig abgenommen und der Wendepunkt von 1815 bei demselben nicht bemerklich geworden ist [d]. Die **Intensität** endlich scheint gegenwärtig in Europa zuzunehmen, jedoch wird erst eine spätere Generation im stande sein, darüber Genaueres zu ermitteln [e].

Zu 155: *a.* Erste **Isogonen** soll schon 1539 der k. Kosmograph Don **Alonzo** da Santa Cruz gezogen haben; später folgte der 1632 zu Rom verstorbene Jesuit Cristoforo **Borro** und sodann namentlich **Halley**, dessen „General Chart shewing at one view the variation of the compass. London 1701 in fol." den neuern Arbeiten dieser Art zum Muster diente. Die **Isoklinen** führte Joh.

Karl **Wilcke** (Wismar in Mecklenburg 1732 — Stockholm 1796; Sekret. Akad. Stockholm) durch sein „Försök till an magnetisk inclinationskarta (Vet. Acad. Handl. 1768)" ein, und **Isodynamen** scheint zuerst A. v. **Humboldt** zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts gezeichnet zu haben, — derselbe Mann, dem man auch verdankt, den mehr als ein Jahrhundert vorher von J. Chr. **Sturm** durch seine „Epistola invitans ad observationes magneticæ variationis communi studio junctisque laboribus instituendas. Altdorfi 1682 in 4." vergeblich angestrebten Weltverein zur Erforschung des Erdmagnetismus wirklich ins Leben gerufen zu haben. — *b.* Es wird hiefür auf „**Halley**, Theory of the variation of the magnetical compass (Ph. Tr. 1683 und 1693), — Christopher **Hansteen** (Christiania 1784 — ebenda 1873; Prof. astr. und Dir. Obs. Christiania), Untersuchungen über den Magnetismus der Erde. Christiania 1819 in 4., — **Gauss**, Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus (Resultate III von 1838), — Edward **Sabine** (Dublin 1788 — Richmond 1883; zuletzt Generalmajor), Contributions to terrestrial magnetism. Nro. 1—14 (Ph. Tr. 1840—74), — etc." verwiesen. — *c.* Für die Deklination wurden z. B., die westliche Deklination als positiv zählend, folgende Serien erhalten:

London		Paris		Freiberg	
Jahr	Deklination	Jahr	Deklination	Jahr	Deklination
1580	— 11° 15′	1580	— 8° 0′	1649	— 1° 42′
1622	— 6 0	1622	— 6 30	1663	2 28
1634	— 4 6	1634	— 4 16	1693	7 55
1657	0 0	1666	0 0	1735	12 33
1692	6 0	1680	2 45	1748	14 29
1723	14 17	1710	10 50	1775	16 52
1748	17 40	1740	15 30	1800	18 7
1787	23 19	1770	19 50	1811	19 23
1802	24 6	1814	22 34	1815	18 34
1818	24 38	1848	20 41	1825	17 49
1850	22 29	1865	18 47	1835	17 21
1876	19 8	1880	16 52	1850	15 47

Vgl. für meinen Versuch, die Reihe von London (inklusive Inklination) im Anschlusse an „E. **Quetelet**, Recherches sur les mouvements de l'aiguille aimantée à Bruxelles (Bull. Brux. 1878)" als eine gleichförmige Drehung um einen bestimmten Punkt darzustellen, meine Mitth. 72 von 1888. — *d.* In Paris nahm die Inklination von 1671 bis 1880 ziemlich gleichförmig von 75° 0′ bis auf 65° 28′ ab, — in London dagegen nahm sie angeblich von 1580 bis 1723 von 72° 2′ bis auf 74° 42′ zu, seither dann allerdings ebenfalls ziemlich regelmässig ab, und zwar von 1723 bis 1876 von 74° 42′ auf 67° 41′. — *e.* Julius **Maurer** (Freiburg i. B. 1857 geb.; Adjunkt der schweiz. met. Centralanstalt) erhielt für Zürich und Jahr n die Näherungswerte

Deklination . . 13° 6′ — 6′,5 (n — 1885)
Inklination . . 63 35 — 3 ,0 (n — 1885)
Horiz. Intensität 0,2040 + 0,00024 (n — 1885)

wo die Horizontal-Intensität in sog. absoluten Einheiten (Gramm, Centimeter und Sekunde) gegeben ist.

156. Die täglichen Variationen und die sog. Störungen. — Ausser den soeben besprochenen sekulären Veränderungen in dem Stande der magnetischen Instrumente giebt es auch solche, die an kürzere Perioden gebunden sind, und es hat namentlich das Studium der **täglichen Variationen** im Stande der Deklinationsnadel bereits zu höchst interessanten Resultaten geführt [a]. Es hat sich nämlich gezeigt, dass auf der nördlichen Halbkugel das Nordende der Nadel in den Morgenstunden einen östlichsten, in den Nachmittagsstunden einen westlichsten Stand zeigt, — dass auf der südlichen Halbkugel das Südende einen entsprechenden Gang einhält, — und somit eine tägliche, nicht an bestimmte Momente, sondern an die Ortszeit, oder also an den **Stundenwinkel der Sonne**, gebundene Bewegung vorhanden ist [b]. Ferner hat man gefunden, dass der Betrag dieser täglichen Bewegung oder **Deklinations-Variation** einen entschiedenen jährlichen Gang besitzt, der wesentlich von der **Deklination der Sonne** abhängig ist, indem durchschnittlich den Sommermonaten die grössten, den Wintermonaten die kleinsten Beträge zukommen [c]. Endlich hat sich herausgestellt, dass die Jahresmittel der täglichen Deklinations-Variation ebenfalls einer bestimmten, circa 11jährigen Periode unterliegen, welche auch in gewissen andern Naturerscheinungen, mit welchen wir uns später (517 u. f.) zu befassen haben werden, auftritt, — und dass alle diese Veränderungen und Verhältnisse nicht etwa nur bei der Deklination, sondern auch bei den übrigen magnetischen Elementen sich um so mehr zeigen, je genauer man sie kennen lernt [d]. — Neben diesen regelmässigen täglichen Variationen treten dann zuweilen sog. **Störungen** auf, welche sich in **lokale** und **allgemeine** zu teilen scheinen: **erstere** dürften, abgesehen von einzelnen Zufälligkeiten [e], mit elektrischen Strömungen, Winden, etc. zusammenhängen, während **letztere**, die auf der ganzen Erde in demselben physischen Momente und meist gleichzeitig mit Polarlicht auftreten, sowie nach ihrer Häufigkeit ebenfalls jener 11jährigen Periode unterliegen, einen kosmischen Ursprung und damit eine hervorragende Bedeutung zu haben scheinen, auf die wir später (522) zurückkommen werden [f].

Zu 156: *a.* Die tägliche Deklinations-Variation wurde durch G. **Graham** schon im Winter 1722/3 bemerkt und sodann von ihm in der Abhandlung „On the variation of the horizontal needle (Ph. Tr. 1724)“ besprochen. Einige Decennien später wurde sie von **Celsius** und Olof Peter **Hjorter** (Jämtland 1696 — Upsala 1750; Observ. Upsala) weiter verfolgt, und auch John **Canton** (Stroud in Gloucestershire 1718 — London 1772; Vorsteher einer Privatschule in London) widmete ihr „An attempt to account for the regular diurnal variation of the horizontal magnetic needle (Ph. Tr. 1759)“. Einen neuen Aufschwung erhielten diese Untersuchungen, als **Humboldt** nicht nur selbst 1806 im Tiergarten bei Berlin stündliche Beobachtungen über die Schwankungen der Magnetnadel

begann, sondern die ganze gelehrte Welt dafür zu interessieren wusste. — *b.* So ergaben die von England in seinen Kolonien unter Leitung von **Sabine** angeordneten Beobachtungen z. B. 1842 in Toronto ($-5^h\ 17^m,4$ Gr.; $+43^0\ 39',6$) und Hobarton ($+9^h\ 17^m,4$ Gr.; $-42^0\ 53',2$) folgende Werte:

Lokalzeit	Toronto	Hobarton	Monat	Toronto	Hobarton
	′	′		′	′
0^h	4,11	— 1,49	I	6,92	— 9,41
2	4,80	— 3,78	II	5,49	— 10,04
4	2,67	— 2,94	III	8,98	— 9,02
6	0,54	— 1,05	IV	8,63	— 6,06
8	— 0,86	0,36	V	9,71	— 3,78
10	— 1,27	1,26	VI	11,88	— 2,73
12	— 1,67	1,19	VII	12,26	— 3,54
14	— 0,24	0,57	VIII	11,12	— 4,57
16	— 1,07	0,39	IX	9,61	— 7,23
18	— 2,42	1,17	X	8,18	— 9,44
20	— 3,74	2,47	XI	5,51	— 10,48
22	— 0,79	1,83	XII	4,55	— 9,68

wo in der ersten, die Jahresmittel für die einzelnen Stunden enthaltenden Hälfte der Tafel, der Nullpunkt dem mittlern Stande des Nordendes der Nadel entspricht und einer Bewegung desselben nach Westen das positive Zeichen beigelegt ist, — während die zweite Hälfte die Monatmittel der aus $2^h - 20^h$ geschlossenen täglichen Variationen giebt. — Das während der Nacht eintretende sekundäre Minimum soll **Humboldt** schon 1805 in Rom bemerkt haben. — *c.* Einen mit den Jahreszeiten korrespondierenden Wechsel vermuteten schon **Celsius** und **Hjorter**, — während der jüngere **Cassini** in seiner Abhandlung „De la déclinaison et des variations de l'aiguille aimantée. Paris 1791 in 4." die extremen Werte den Equinoktien zuteilte. — *d.* **Lamont** hatte schon 1845 (vgl. Doves Repert.) auf einen periodischen Wechsel in der mittlern täglichen Bewegung der Deklinationsnadel hingewiesen, und als er sodann im Winter 1851/2 (vgl. Pogg. Annal. 84) für München (aus Göttingen 1835—40 und München 1841—50) die Jahresmittel der täglichen Variationen zusammenstellte, erhielt er die Reihe I der nachstehenden Tafel, welche einen so regelmässigen Verlauf zeigte, dass er den Versuch unternahm, dieselbe durch eine Sinusreihe darzustellen: Als Epoche das Jahr 1848 und als Periodenlänge $10^1/_3{}^a$ wählend, erhielt er hiebei die Variation im Jahre x

$$V_x = 8',70 + 2',1 \cdot \mathrm{Si}\,[72^0,58 + (x - 1848) \cdot 360^0 : 10^1/_3] \qquad 1$$

und in der That schloss sich die rückwärts nach 1 berechnete Reihe II der I sehr nahe an; doch wäre die Übereinstimmung, wie ich bald darauf (vgl. Bern. Mitth. 1852) zeigte, noch viel grösser geworden, wenn er in 1 seine $10^1/_3$ durch $11^1/_9$ ersetzt hätte, da er sodann statt II die III erhalten haben würde. Für die grosse Bedeutung dieser Untersuchungen vgl. unsere 522, wo auch die IV erläutert werden wird. — *e.* So geht aus einer Notiz von **Hansteen** (A. N. 1020 von 1856) hervor, dass einzelne lokale Abweichungen in den täglichen Variationen einfach davon herrührten, dass eine Spinne Eingang in den Apparatenkasten fand, — „une araignée perturbatrice", wie sich Terquem ganz passend ausdrückte. — *f.* **Celsius** und **Hjorter**, welche in Upsala Zeugen von Störungen

Jahr	I	II	III	IV	I—II	I—III	I—IV
	′	′	′	′	′	′	′
1835	8,61	7,97	9,11	8,57	0,64	— 0,50	0,04
36	11,11	9,21	10,15	11,24	1,89	0,96	— 0,13
37	11,04	10,29	10,74	11,93	0,75	0,30	— 0,89
38	**11,47**	10,79	10,69	10,49	0,68	0,78	0,98
1839	9,93	10,53	10,02	9,77	— 0,60	— 0,09	0,16
40	8,92	9,62	8,94	8,91	— 0,70	— 0,02	0,01
41	7,82	9,01	7,79	7,78	— 1,19	0,03	0,04
42	7,08	7,26	6,92	7,25	— 0,18	0,16	— 0,17
1843	7,15	6,64	6,60	6,70	0,51	0,55	0,45
44	**6,61**	6,77	6,94	6,90	— 0,16	— 0,33	— 0,29
45	8,13	7,59	7,83	7,93	0,54	0,30	0,20
46	8,81	8,80	8,98	8,67	0,01	— 0,17	0,14
1847	9,55	9,98	10,05	10,32	— 0,43	— 0,50	— 0,77
48	**11,15**	10,70	10,70	11,39	0,45	0,45	— 0,24
49	10,64	10,70	10,73	11,15	— 0,06	— 0,09	— 0,51
50	10,44	9,98	10,12	9,49	0,46	0,32	0,95
				Quadratsummen	8,4851	2,9983	3,9865

waren, verabredeten 1741 mit **Graham** korrespondierende Beobachtungen und entdeckten dadurch die merkwürdige Thatsache, dass die Störungen in England und Schweden gleichzeitig eintreffen, — sowie sie auch bemerkten, dass ihnen gewöhnlich ein **Nordlicht** folgt. Auf letztere Erscheinung werden wir in 229 und 522 etwas näher einzutreten haben, und fügen hier nur noch zur Illustration des Vorhergehenden beispielsweise bei, dass 1842 II 24, wo in Christiania ein schönes Nordlicht beobachtet wurde, die Deklinationsnadel sowohl in Toronto als in Hobarton nach Zeit und Grösse ungewöhnliche Bewegungen zeigte, die an ersterm Orte für jenen Tag die abnorme Variation von 21′,38, an letzterm Orte sogar eine solche von vollen 27′,62 ergaben.

157. Einige Begriffe aus dem Gebiete der Elektricität. — Manche Körper, wie z. B. Glas und Harze, erlangen durch Reiben mit Seide oder Wolle eine sog. **elektrische** Anziehungskraft, welche sich von der magnetischen dadurch unterscheidet, dass sie auf jeden leichten Körper wirkt, nicht an Pole gebunden, aber auf die geriebene Stelle beschränkt ist, — während andere Körper, wie z. B. Metalle und Kohle, durch Reiben nicht elektrisch werden, wohl aber bei Annäherung an einen elektrischen Körper sich nicht nur an der genäherten Stelle, sondern auf ihrer ganzen Oberfläche mit Elektricität bedecken: Man nennt Körper der letztern Art **Konduktoren** oder **Leiter**, — Körper der erstern Art dagegen **Isolatoren** oder **Nichtleiter**[a]. — Da auch Glas- und Harz-Elektricität in einem gewissen Gegensatze zu stehen scheinen, so nimmt man zur sog. Erklärung dieser Vorgänge gewöhnlich an, dass in jedem Körper

zwei elektrische Fluida, ein **positives** und ein **negatives**, vorhanden seien, aber erst deren Trennung, welche bei einzelnen Körpern durch Reibung erreicht werden könne, den elektrischen Zustand bedinge. Stellt man nun einem durch Reibung elektrisierten Körper oder einer sog. **Elektrisiermaschine** [b], einen isolierten Leiter oder **Konduktor** [c], gegenüber, so wird die ungleichnamige Elektricität des letztern von ersterm angezogen, die gleichnamige abgestossen; bei noch grösserer Annäherung wächst die elektrische Spannung, bis sie stark genug wird, um die schlechtleitende Luft zu durchbrechen, d. h. ein nach den Versuchen von **Franklin** dem Blitze entsprechender Funken überspringt, worauf sich der ganze Konduktor mit der abgestossenen Elektricität bedeckt oder damit **geladen** ist; zieht man dagegen den Leiter vor dem Überschlagen zurück, so zeigt er keine Spur von Elektricität, — wohl aber ist er mit der Angezogenen geladen, wenn man ihm vor dem Zurückziehen durch Berührung des abgewandten Teiles die Abgestossene entzieht. Diesem Fundamentalversuche entspricht auch das Laden der beidseitig metallisch belegten **Tafel** oder **Flasche**, das aus zwei an Metallfaden hängenden Hollundermarkkügelchen bestehende **Elektroskop**, der sog. **Elektrophor**, etc., überhaupt so ziemlich alles, was experimentell auf dem Gebiete der sog. **Reibungselektricität** ausgeführt wird [d]. — Wie in dem Augenblicke, wo entgegengesetzt elektrische Körper, wie z. B. die beiden Belegungen der eben erwähnten Flasche, durch einen Leiter verbunden werden, ein momentaner elektrischer Strom entsteht, so kann man auch dauernde elektrische Ströme durch chemische Wirkungen erregen [e]: Taucht man nämlich eine Zinkplatte in verdünnte Schwefelsäure, so entwickelt sich Wasserstoffgas, das zunächst an der Platte aufsteigt; amalgamiert, zeigt sich die Platte fast unempfindlich gegen die Säure, — setzt man aber noch eine Kupferplatte (—) in die Säure und verbindet sie metallisch mit der Zinkplatte (+), so entsteht ein elektrischer Strom, der durch das nunmehrige Aufsteigen des Wasserstoffgases am Kupfer sichtbar wird und, durch Vereinigung mehrerer Elementen-Paare zu einer Kette, verstärkt werden kann [f]. — Dieser sog. **galvanische** Strom, dessen Intensität dem merkwürdigen **Ohm'schen Gesetze** unterliegt [g], erhitzt dünne Leitungsdrähte und durchläuft sie mit einer auf 60000 Meilen angeschlagenen Geschwindigkeit [h], — erregt beim Schliessen oder Öffnen des Stromkreises in einem benachbarten Leiter sog. **Induktionsströme** von entgegengesetzter oder gleicher Richtung [i], — ist auch als chemische Kraft thätig, indem er Wasser zersetzt, aus Kupfervitriollösung metallisches Kupfer niederschlägt, etc. [k]. — Ferner hat der Polardraht auch magnetische Wirkung: Bringt man

ihn in den magnetischen Meridian, so wird das Nordende einer über demselben schwebenden Magnetnadel für einen nach ihr sehenden (Kopf voran im Strome schwimmend gedachten) Beobachter nach links, und zwar um so mehr abgelenkt, je kräftiger der Strom ist, so dass umgekehrt mit einer geeignet konstruierten **Boussole** die Stromstärke gemessen werden kann [l]. — Wird ein weiches Eisen mit einem seidenumsponnenen Polardrahte umwunden, so wird es zum **Elektromagnet**, der einen Anker anziehen und damit eine Arbeit verrichten kann, — verliert aber beim Öffnen der Kette den Magnetismus augenblicklich wieder, während ein Stahlstab unter gleichen Verhältnissen dauernde magnetische Sättigung erhält [m]. — Umgekehrt entstehen, wenn man zwei sog. **Induktoren**, d. h. weiche Eisenkerne mit umgebender Spirale, den Polen eines Magneten, z. B. mit einem Wassermotor, abwechselnd nähert, in den Spiralen elektrische Ströme, so dass man eine **magneto-elektrische** Maschine erstellt hat, in welcher Arbeit in Elektricität umgesetzt wird, die man weiter leiten und sodann mittelst einer **elektromagnetischen** Maschine wieder in Arbeit verwandeln kann [n]. — Für weitern Detail über die ältern und neuern Arbeiten auf diesen sämtlichen Gebieten muss ich jedoch auf die umfangreiche Fachlitteratur verweisen [o].

Zu 157: *a.* Die **elektrische** Anziehung wurde, wie ihr Name belegt, zuerst beim Bernstein (ἤλεκτρον) bemerkt und z. B. durch **Plinius** in seiner Naturgeschichte erwähnt. Nach und nach fand man dann auch noch andere derselben fähige Körper, und schon **Gilbert** sagt in seiner Schrift „De magnete (vgl. 153)", dass man sie bei Glas, Schwefel, Siegellack, etc., durch Reiben hervorrufen könne. Auf den Unterschied zwischen **Konduktoren** und **Isolatoren** machte um 1727 zuerst Stephen **Gray** (1670? — London 1736; Mitglied der Roy. Soc.) in deutlicher Weise aufmerksam, — sprach auch bereits 1734 aus, dass die elektrische Kraft mit Donner und Blitz von gleicher Natur sein möchte, wenn auch diesen Gedanken noch nicht, wie später **Franklin**, belegen zu können. — *b.* Schon Charles-François **Dufay** (Paris 1698 — ebenda 1739; Akad. Paris) wies den Unterschied zwischen Glas- und Harz-Elektricität nach, welchen später Georg Christoph **Lichtenberg** (Ober-Ramstädt bei Darmstadt 1744 — Göttingen 1799; Prof. phys. Göttingen) mit den nach ihm benannten Staubfiguren so schön illustrierte. — Die erste **Elektrisiermaschine** erstellte etwa 1672 Otto v. **Guerike** mit Hilfe einer Schwefelkugel, der sodann 1705 Francis **Hawksbee** (1650? — 1713?; Curator of experiments Roy. Soc.) eine Glaskugel, und um 1755 Martin **Planta** (Süs im Engadin 1727 — Marschlins 1777; Seminarlehrer in Haldenstein und Marschlins; vgl. Biogr. II) eine Glasscheibe substituierte. Während ferner **Guerike** und **Hawksbee** ihre Kugeln einfach mit der trockenen Hand rieben, führte um 1744 Joh. Heinrich **Winkler** (Wingendorf in Ober-Lausitz 1703 — Leipzig 1770; Prof. phys. Leipzig) das sog. **Reibzeug** ein, welches anfänglich aus einem wollenen Kissen bestand, etwa 1762 aber von **Canton** durch ein mit Amalgam bestrichenes Lederkissen ersetzt wurde. — Für neuere Apparate, und namentlich für die von August **Töpler** (Brühl bei Köln 1836 geb.; Prof. phys. Riga, Graz und Dresden) und andern erstellten

Influenzmaschinen, vgl. die unten gegebene Litteratur. — *c.* Zu den verdientesten Elektrikern ihrer Zeit zählen auch Christian August **Hausen** (Dresden 1693 — Leipzig 1743; Prof. math. Leipzig) und Georg Matthias **Bose** (Leipzig 1710 — Magdeburg 1761; Prof. phys. Wittenberg). Ersterm wird nachgerühmt, dass er die vergessene Glaskugel Hawksbees wieder zu Ehren gebracht habe, — letzterm die Einführung des Konduktors verdankt, eines hohlen Metallcylinders, der anfänglich von einer auf einem Pechkasten stehenden Person gehalten, dann an seidenen Schnüren aufgehängt, und noch später auf Glassäulen gestellt wurde. — *d.* Die beidseitig metallisch belegten Glastafeln und Flaschen, in welchen die Elektricität gewissermassen magaziniert werden kann, erfanden ziemlich gleichzeitig um die Mitte des vorigen Jahrhunderts: Erstere **Franklin**, — letztere Ewald Georg v. **Kleist** (Pommern 1704; — Cösslin 1748; Gerichtspräsident zu Cösslin), und ein Schüler von Musschenbroek, Namens **Cunæus**, welchem zu Ehren sie meistens „Leydner-Flaschen“ genannt werden. Der als **Elektrophor** bekannte Harzkuchen mit Metalldeckel wurde in Verfolgung einer schon 1762 durch **Wilcke** ausgesprochenen Idee 1775 durch **Volta** eingeführt. — *e.* Die 1752 von Joh. Georg **Sulzer** (Winterthur 1720 — Berlin 1779; Prof. math. et philos. Berlin; vgl. Biogr. III) gemachte **merkwürdige** Entdeckung, dass Blei und Silber, auf und unter die Zunge gelegt, bei Berührung einen herben Geschmack erregen, war längst wieder vergessen, als **Galvani** 1790 die Entdeckung machte, dass entblösste Froschschenkel, welche man bald nach eingetretenem Tode mit zwei verschiedenen Metallen berührt, jedesmal heftig zucken, wenn man letztere zusammenbringt, — und bald darauf **Volta** nachwies, dass die Elektricität durch die Berührung der Metalle hervorgebracht wird und die Froschschenkel dabei nur die untergeordnete Rolle eines Leiters spielen, wodurch eigentlich erst der **Galvanismus** geschaffen und einer der folgewichtigsten Fortschritte erreicht war. — *f.* Um eine Batterie zu erhalten, kann man auch nach dem Vorschlage von **Volta** eine Säule bauen, bei welcher in gleicher Folge: Zink, Kupfer und eine z. B. mit Salzwasser befeuchtete Tuchscheibe wechseln, — oder mit **Daniell** den oben beschriebenen Zellenapparat in der Weise abändern, dass man jede Zelle durch eine poröse Scheidewand teilt und in den einen Teil das Zinkelement in Salzwasser, in den andern aber das Kupferelement in Kupfervitriollösung einsetzt, — oder mit **Bunsen** eine sog. „Tauchbatterie“ erstellen, bei der die aus Kohle und amalgamiertem Zink zusammengesetzten Elemente gleichzeitig in Gläser niedergelassen werden, welche verdünnte Schwefelsäure mit etwas Kaliumbichromat enthalten, — etc. Für eine sog. „Erdbatterie“ vgl. meine Notiz in Bern. Mitth. 1855. — *g.* Das von Georg Simon **Ohm** (Erlangen 1787 — München 1854; Prof. phys. München; vgl. Lamont, Denkrede, München 1855 in 4.) in seiner Schrift „Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. Berlin 1827 in 8.“ ausgesprochene und nach ihm benannte Gesetz entspricht der Formel

$$J = \frac{E}{W} = \frac{m \cdot e}{(m \cdot w_1 : f) + (l \cdot w_2 : d^2)} \qquad 1$$

wo J die Intensität eines Stromes bezeichnet, der von m Elementen geliefert wird, deren jedes bei f Quadratcentimeter Oberfläche und dem Widerstande w_1 der Flächeneinheit die elektromotorische Kraft e besitzt, und der einen Schliessungsdraht von l Meter Länge, d Millimeter Dicke und w_2 Widerstand (auf 1^m Länge und 1^{mm} Dicke) zu durchlaufen hat, — so dass E der gesamten elektromotorischen Kraft, und W der Summe aller Widerstände entspricht. Die als **1 Volt** eingeführte Einheit für E entspricht ungefähr derjenigen eines ge-

wöhnlichen Daniell'schen Elementes, — die als **I Ohm** für W Eingeführte dem Widerstande eines Kupferdrahtes von 1^{mm} Dicke und 48^{m} Länge, — woraus sich sodann nach 1 die für J gewählte Einheit **I Ampère** von selbst ergiebt; zuweilen wird auch noch als **I Coulomb** die Elektricitätsmenge eingeführt, welche in 1^{s} bei der Intensität 1 einen Leiter durchläuft, — und als **I Farad.** oder sog. „Capacität" das Verhältnis von 1 Coulomb zu 1 Volt. Ferner ist beizufügen, dass E um so grösser wird, je weiter die verwendeten Elemente in der sog. **Spannungsreihe** [+ Zink, Blei, Zinn, Eisen, Wismuth, Kupfer, Platin, Gold, Silber, Kohle, Graphit —) auseinander liegen, — dass W für Wasser sehr gross ist, durch Zusatz von Säuren, Salzen, etc., aber vermindert wird, — und dann namentlich noch, dass aus 1, je nachdem l klein oder sehr gross ist, die Näherungsformeln

$$J = \frac{e}{w_1} \cdot f \qquad \text{oder} \qquad J = \frac{e \cdot d^2}{l \cdot w_2} \cdot m \qquad 2$$

folgen, aus welchen hervorgeht, dass es für Lokalbatterien zunächst auf die Grösse, für Linienbatterien dagegen hauptsächlich auf die Anzahl der Elemente ankömmt. — *h.* Für die Bestimmung der Geschwindigkeit der Elektricität durch Charles **Wheatstone** (Gloucester 1802 — Paris 1875; zuerst musik. Instrumentenmacher, dann Prof. phys. London), vgl. dessen Abhandlung „An account of some experiments to measure the velocity of electricity (Ph. Tr. 1834)". Hat der Strom noch Hindernisse zu überwinden, z. B. durch Apparate zu gehen, so nimmt seine durchschnittliche Geschwindigkeit ab; so brauchte er um die etwa 28 Meilen lange Linie Neuenburg-Bern-Zürich zu durchlaufen $0^{s},015$, was mit einer Geschwindigkeit von nur etwa 1800 Meilen übereinkömmt. — *i.* Die Induktionsströme wurden 1831 durch **Faraday** entdeckt (vgl. Nro. 2 seiner Researches in o), und später teils von ihm, teils in „Moritz Hermann **Jacobi** (Potsdam 1801 — Petersburg 1874; Bruder von 75:d; Prof. arch. Dorpat, dann Akad. Petersburg), Über die Inductionsphänomene beim Öffnen und Schliessen einer Volta'schen Kette (Bull. Pet. 1838), — Elie **Wartmann** (Genf 1817 — ebenda 1886; Prof. phys. Lausanne, Genf), Mémoires I—VIII sur l'induction (Arch. 1844—50), — etc." vielfach weiter untersucht. — *k.* Für die von Anthony **Carlisle** (Stillington 1768 — London 1840; Chirurg in London) etwa 1800 zuerst ausgeführte Wasserzersetzung werden in einem Wassergefässe zwei mit Wasser gefüllte Glasglocken, deren jede (als sog. Elektrode) einen Platindraht enthält, umgestülpt, und nunmehr jeder der beiden Drähte mit einem Pole einer Batterie verbunden; alsbald steigen sodann am positiven Pole (der Anode) Wasserstoffbläschen, am negativen (der Kathode) Sauerstoffbläschen auf, und da ersterer doppelt so viele sind, so kann man schon nach kurzer Zeit an der Menge des Gases unterscheiden, welche Glocke Wasserstoff enthält. — Für das Niederschlagen von Kupfer und die von **Jacobi** 1838 erfundene technische Verwendung vgl. dessen Schrift „Die Galvanoplastik. Petersburg 1840 in 8." — *l.* Schon 1802 bemerkte der Sachwalter Giovanni Domenico **Romagnesi** in Trient beiläufig die Ablenkung der Magnetnadel durch den galvanischen Strom, aber sie wurde dann erst 1819 durch **Oersted** (vgl. dessen Schrift in o) zu einer wissenschaftlich gut konstatierten Thatsache erhoben. — Das Verdienst, zuerst **Boussolen** zum leichten Beurteilen der Stromstärke erstellt zu haben, erwarb sich **Pouillet** 1837; seither ist dann allerdings die Konstruktion durch Wilh. **Weber** und andere vielfach verbessert worden. — *m.* Der Entdeckung Oersteds folgte fast unmittelbar teils diejenige von **Arago**, dass der galvanische Strom in einer Eisen- oder Stahlnadel vorübergehend

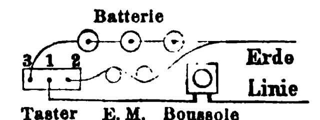
oder bleibend Magnetismus hervorruft, teils diejenige von André-Marie **Ampère** (Lyon 1775 — Marseille 1836; Prof. math. et phys. Paris), dass zwei parallele Leitungsdrähte sich anziehen oder abstossen, je nachdem sie vom Strome im gleichen oder entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden. Aragos Entdeckung veranlasste ferner 1832 Rudolf **Schulthess** (Zürich 1802 — ebenda 1832; Lehrer der Physik in Zürich), sich zu fragen, ob es nicht möglich wäre, die Elektricität der Mechanik dienstbar zu machen, und die aus seinem Nachlass erschienene Schrift „Über Elektromagnetismus. Zürich 1835 in 8.“ zeigt, dass er eine bejahende Antwort zu geben wusste, obschon ein wirklich praktischer Erfolg damals noch kaum möglich war. — *n.* Gleichzeitig mit der Induktion erfand **Faraday** 1831 auch das Princip der Magneto-Elektricität und damit dasjenige der Umwandlung mechanischer Kraft in Elektricität, aus dessen weiterer Entwicklung und Verwertung zuerst die verschiedenen **Magneto-Elektrisiermaschinen** der **Pixii**, **Ettingshausen**, **Stöhrer**, etc., und dann die noch kräftigern, sowie bereits in den Dienst der Technik getretenen **Dynamo-Maschinen** der **Gramme**, **Siemens**, **Ladd**, etc. entstanden sind, auf deren Konstruktion hier jedoch natürlich nicht eingetreten werden kann. — *o.* Zum Schlusse lasse ich zur Ergänzung des bereits Mitgeteilten noch folgende Litteraturangaben folgen: „**Hawksbee**, Physico-mechanical experiments on various subjects touching light and electricity. London 1709 in 4., — Daniel **Gralath** (Danzig 1708 — ebenda 1705; Bürgermeister von Danzig), Geschichte der Elektricität. Danzig 1747—56, 3 Bde. in 8., — Antoine **Nollet** (Pimpré bei Noyon 1700 — Paris 1770; Abbé; Prof. phys. und Akad. Paris), Essai sur l'électricité des corps. Paris 1747 in 12., — **Franklin**, New experiments and observations on electricity. London 1751 in 4. (5. ed. 1774; deutsch durch Wilcke, Leipzig 1758), — **Priestley**, History and present state of Electricity. London 1765, 2 Vol. in 8. (deutsch durch Krünitz, Berlin 1772), — **Galvani**, De viribus electricitatis in motu musculari Commentarius (Comm. Bonon. 1791), — **Volta**, On the electricity excited by the mere contact of conducting substances of different kinds (Ph. Tr. 1800), und (unter dem Namen Configliachi schon 1806 geschrieben): L'identità del fluido elettrico col cosi' detto fluido galvanico vittoriosamente dimostrata. Pavia 1814 in 4., — **Oersted**, Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam. Hafniæ 1820 in 4. (deutsch in Gilberts Annal. 66), — **Savary**, Mémoire sur l'application du calcul aux phénomènes électrodynamiques. Paris 1823 in 4., — **Ampère**, Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience. Paris 1826 in 4., — **Faraday**, Experimental researches in Electricity. Ser. 1—30 (Ph. Tr. 1831—55), — Franz **Neumann**, Über ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter Ströme (Berl. Abh. 1847), und: Vorlesungen über elektrische Ströme. Leipzig 1884 in 8., — Otto Ernst Julius **Seyffer** (Stuttgart 1823 geb.; Prof. phys. Stuttgart), Geschichtliche Darstellung des Galvanismus. Stuttgart 1848 in 8., — Peter Theophyl **Riess** (Berlin 1805 — ebenda 1883; Prof. phys. Berlin), Die Lehre von der Reibungselektricität. Berlin 1853, 2 Bde. in 8., — **De la Rive**, Traité de l'électricité théorique et appliquée. Paris 1854—58, 3 Vol. in 8. (engl. London 1858—63), — James Clark **Maxwell** (Middlebie 1831 — Cambridge 1879; Prof. phys. Cambridge), A treatise on electricity and magnetism. Oxford 1872, 2 Vol. in 8., — Clemens **Hess** (Zug 1850 geb.; Prof. phys. Frauenfeld), Historische Notizen über die Entwicklung der elektrischen Influenzmaschinen und Theorie derselben (Frauenfeld 1879) in 4., — Gustav Heinrich **Wiedemann** (Berlin 1826 geb.; Prof. phys. Basel,

Leipzig), Die Lehre von der Electricität. Braunschweig 1882—85, 4 Bde. in 8., — Edm. **Hoppe**, Geschichte der Elektricität. Leipzig 1884 in 8., — Gust. **Albrecht**, Geschichte der Elektricität mit Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Wien 1885 in 8., — Eugen **Netoliczka**, Illustrirte Geschichte der Elektricität. Wien 1886 in 8., — Heinr. **Meidinger**, Geschichte des Blitzableiters. Karlsruhe 1888 in 8., — etc."

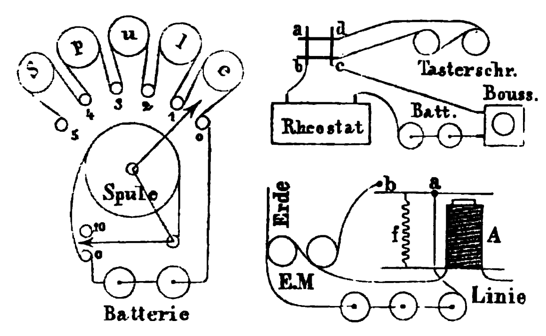
158. Die Telegraphie und Telephonie. — Als zu Ende des vorigen Jahrhunderts die bisdahin üblichen Feuersignale durch sog. **optische Telegraphen** mit beweglichen Gliedern ersetzt wurden [a], betrachtete man dies mit Recht als einen erheblichen Fortschritt, — und wenn sich auch bereits einzelne damit beschäftigten, die Elektricität für solche Zwecke nutzbar zu machen [b], so dachte doch noch kaum jemand daran, dass es schon ein halbes Jahrhundert später möglich sein werde, seine Gedanken mit Blitzesschnelle in den grössten Distanzen kundzugeben, ja bald nachher mit entfernten Personen förmliche Gespräche führen zu können. Doch das Unerwartete geschah infolge der bereits erwähnten grossen Fortschritte auf dem Gebiete der Elektricität [c], an welche sich noch die wichtige Entdeckung der Leitungsfähigkeit der Erde anschloss [d], so zu sagen Schlag auf Schlag: Die nötigen Drahtleitungen zu den wünschbaren Verbindungen auf dem Festlande und die zum Durchsetzen der Meere erforderlichen Kabel wurden gelegt [e], — die Apparate zum Geben und Empfangen der Zeichen auf möglichst zweckmässige Form gebracht [f], sowie durch eine Reihe von Hilfsapparaten sekundiert [g], — und als kaum die **elektrische** Telegraphie die optische überall verdrängt und sich so recht eingebürgert hatte, fand man auch Wege, das alte **Sprachrohr** [h] durch, den Telegraphen ebenbürtige, neue Mittel, das **Telephon** und **Mikrophon**, zu ersetzen [i]. Was bei der gegenwärtigen fieberhaften Thätigkeit noch weiter folgen wird, lässt sich nicht voraussehen [k].

Zu 158: *a.* Die schon von **Hooke** empfohlenen optischen Telegraphen (vgl. Ph. Tr. 1684) wurden nämlich im Frühjahr 1791 von Claude **Chappe** (Brûlon Le Maine in Sarthe 1763 — Paris 1805; Abbé) der Assemblée nationale zur wirklichen Ausführung beliebt, die sodann nach gelungenen Versuchen 1793 dekretiert wurde, zugleich Chappe zum „Ingénieur thélégraphe" ernennend. — *b.* Schon 1774 schlug **Lesage** vor, zwei Punkte mit 24 isolierten, den einzelnen Buchstaben entsprechenden Drähten zu verbinden, an deren Enden Paare von Hollunderkügelchen angehängt würden, welche am einen Punkte auseinander gingen, sobald man am andern den betreffenden Draht mit dem Konduktor einer Elektrisiermaschine verbände. — Nach Erfindung der Wasserzersetzung durch den galvanischen Strom brachte sodann Samuel Thomas **Sömmering** (Thorn 1755 — Frankfurt 1830; Prof. med. Kassel und Mainz, dann Arzt in Frankfurt) in seiner Abhandlung „Uber einen elektrischen Telegraphen (Münchn. Denkschr. 1809/10)" in Vorschlag, die Enden der Drähte zu vergolden und in mit Wasser gefüllte kleine Glocken ausmünden zu lassen, welche man in

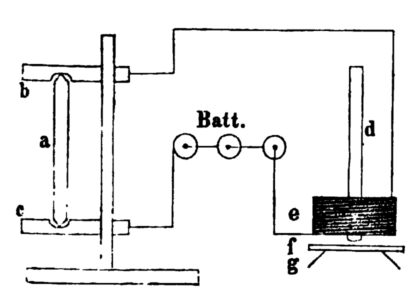
einem gemeinschaftlichen Wassergefässe umzustülpen hätte; es sollte dadurch namentlich erreicht werden, gleichzeitig zwei Buchstaben übermitteln zu können: Der Draht des ersten Buchstabens war an der Abgangsstation mit dem positiven, der des zweiten mit dem negativen Pole verbunden, und nun stiegen an der Empfangsstation in den entsprechenden Glocken Wasserstoff und Sauerstoff auf. — Als sodann die Oersted'sche Entdeckung erfolgt war, lag es nahe, die Sömmering'schen Gläschen durch Magnetnadeln zu ersetzen, wodurch sich zugleich die 48 Drähte auf 24 und einen gemeinschaftlichen Rückleitungsdraht reduzierten und das „non plus ultra" erreicht schien. — *c.* Vgl. 157. — Speciell ist anzuführen, dass anfangs der Dreissigerjahre einerseits **Gauss** und **Weber**, anderseits Pawel Lwowitsch **Schilling** (Reval 1786 — Petersburg 1837; russ. Staatsrat) ziemlich gleichzeitig zeigten, dass man schon mit zwei Drähten, einem Hilfsapparate zum Umkehren des Stromes und geschickter Kombination der Nadelausschläge nach rechts und links, alle nötigen Zeichen geben könne. — *d.* Die durch **Steinheil** gemachte und in seiner Abhandlung „Über Telegraphie. München 1838 in 4." publizierte Entdeckung, dass man den zweiten Draht durch die Erde ersetzen kann, verhalf der Telegraphie zum Durchbruche. — *e.* In wenigen Decennien bedeckten sich die meisten Länder unsers Kontinentes (die Schweiz 1852) mit Telegraphennetzen; ferner wurde 1850 die erste Kabelverbindung zwischen Dover und Calais, und 1858 das erste transatlantische Kabel gelegt. — *f.* Gewöhnlich wird auf jeder Station, ausser einem Elektromagneten und einer Boussole, ein sog. **Dreipunkttaster** aufgestellt,



bei welchem im Ruhezustande die Punkte 1 und 2 verbunden sind, so dass bei der im beistehenden Schema angedeuteten Anordnung ein durch die Linie anlangender Strom, um wieder zur Erde zu kommen, durch die Boussole und die Spulen des Elektromagnets gehen muss, also an ersterer einen Ausschlag bewirkt, und bei letzterm durch Anziehen des Ankers einen mit diesem in Verbindung stehenden Schreibapparat in Thätigkeit setzt, resp. ein Zeichen hinterlässt. Wird dagegen durch Niederdrücken des Tasters die Verbindung von 1 mit 2 gehoben und dafür die von 1 mit 3 erstellt, so schaltet man damit die Batterie ein, und es geht nun durch Boussole und Linie ein Strom nach der andern Station, um dort ein Zeichen zu hinterlassen. Der Schreibapparat hat im Laufe der Zeit sehr verschiedene Einrichtungen erhalten, doch ist noch immer der um 1835 durch Samuel Finlay Breese **Morse** (Charlestown in Massachusetts 1791 — New-York 1872; erst Maler, dann Prof. nat. New-Haven, zuletzt Elektriker) erfundene Schwarzschreiber, mit den aus · (di) und — (doo) kombinierten Buchstaben und Zahlzeichen, sehr beliebt. — *g.* Von Hilfsapparaten erwähne ich zwei in den Dreissigerjahren von **Wheatstone** erfundene und seither allerdings noch umgestaltete Instrumente, — den zum Regulieren der Stromstärke bestimmten **Rheostat**, und das die Zeichenabgabe bei schwachen Strömen ermöglichende **Relais**: Ersterer besteht gewöhnlich aus einer grossen Spule, auf welche 10^{km} Draht, und fünf kleinern Spulen, auf deren jede 1^{km} Draht aufgewunden ist. Schaltet man ihn in eine Linie ein und stellt die beiden Zeiger auf 0, so hat er keine Wirkung, — stellt man sie aber z. B. auf 2 und 10, so muss ein durchgehender Strom 12 Kilometer Draht mehr durchlaufen, was eine bestimmte, an einer eingeschalteten Boussole leicht messbare Schwächung zur Folge haben wird. Überdies kann der **Rheostat** zum Messen des Widerstandes eines Apparates, z. B. des Tasterschreibers, benutzt werden:



Man stellt hiefür den Rheostaten auf 0, steckt bei a und c in den sog. „Kettenwechsel" Metallstifte und liest die Boussole ab; dann steckt man den einen Stift von a nach b über, führt mit dem Rheostaten die Boussole auf den vorigen Stand zurück und kann nun an ersterm den gesuchten Widerstand in Kilometern ablesen. — Das **Relais** dagegen besteht aus einer Spule A mit einem Kerne aus weichem Eisen, über welchem ein Anker in Form eines Hebels spielt, jedoch durch eine Feder f in einer kleinen Distanz gehalten wird; wenn nun auch nur ein schwacher Strom durch die Spule geht, so erhält der Kern hinlänglichen Magnetismus, um den Anker anzuziehen, dadurch die Punkte a und b in Verbindung zu bringen und somit die Lokalbatterie zu schliessen, welche nun den Schreibeapparat E · M, statt der hiefür zu schwachen Linienbatterie des Absenders, zum Spielen bringt. — *h.* Gewöhnlich wird angenommen, es sei Samuel **Morland** (Sulhamstead in Berkshire 1625? — Hammersmith bei London 1695; Diplomat und Ingenieur), Verfasser der „Description of the Tuba stentorophonica or speaking trumpet. London 1671 in fol.", auch der Erfinder vom **Sprachrohr**; doch war mutmasslich schon das von den Chinesen um 362 n. Chr. erwähnte „weit redende Rohr" ein Instrument dieser Art. — *i.* Nachdem sich schon 1854 der Telegrapheninspektor Charles **Bourseul** in Auch (Dép. Gers) eine klare Idee über die Bedingungen, unter welchen ein Fernsprecher möglich wäre, gebildet, aber allerdings noch keine praktischen Resultate erzielt hatte, konstruierte 1860 Philipp **Reis** (Gelnhausen 1834 — Frankfurt 1874; Lehrer zu Friedrichsdorf bei Homburg; vgl. Schenk: Frankfurt 1878 in 8.) nach langjährigen Versuchen unter dem Namen **Telephon** einen, wenigstens zur Not, brauchbaren Apparat, der sodann verschiedentlich umgestaltet wurde, bis es 1876 dem Taubstummenlehrer Graham **Bell** in Boston gelang, unter illoyaler Benutzung der Ideen des Italieners Antonio **Meucci** ein Instrument zu liefern, welches im wesentlichen noch jetzt als Empfangsapparat gebraucht wird, während es dagegen als Gebeapparat durch das etwa 1878 von Professor David Edwin **Hughes** aus Louisville erfundene **Mikrophon** fast ganz verdrängt ist. — Es würde mich zu weit führen, aller der Reklamationen zu gedenken, welche sich an diese beiden Erfindungen knüpfen, oder aller der Verbesserungen, welche sie seither durch die Werner **Siemens** (Leuthe bei Hannover 1816 geb.; Mech. Berlin), Thomas Alva **Edison** (Milan in Ohio 1847 geb.; Elektrotechniker), etc., erhalten haben, und ich muss mich begnügen, noch eine beiläufige Idee von den Hauptbestandteilen und der Wirkungsweise eines solchen Sprechapparates zu geben: Der **Geber** (Mikrophon) besteht aus einem an beiden Enden zugespitzten Kohlenstäbchen a, das lose in zwei Kohlenstücken b und c ruht, von welchen das



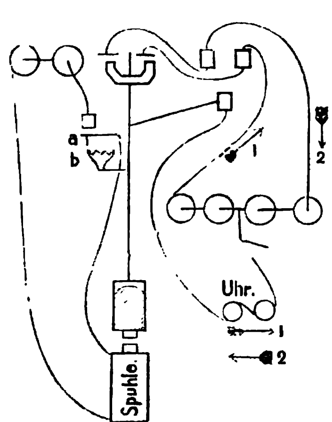
eine mit dem Empfänger, das andere mit der Batterie in Verbindung steht. Der **Empfänger** (Telephon) dagegen besteht aus einem Stabe d von weichem Eisen, der von einer, teils mit der Batterie, teils mit dem Geber, verbundenen Drahtspule e umgeben ist, während sich vor letzterer eine Membrane f aus weichem Eisenblech, mit einem Schalltrichter g, befindet. Wird nun gegen a gesprochen, so wird durch Einwirkung der Schallwellen sein Kontakt mit b und c bald loser, bald inniger, womit der Widerstand an den Berührungsstellen, und damit die Stromstärke, wechselt, so dass ein sog. „undulatorischer" Strom entsteht; dieser bewirkt nun, dass auch der Elektromagnet bald schwächer, bald kräftiger auf die Membrane f einwirkt, folglich diese entsprechende Schwingungen wie a ausführt und dadurch Schallwellen erzeugt, welche durch den an das Ohr gehaltenen Schalltrichter empfangen werden können. — *k.* Der frühern Litteratur füge ich noch bei: „François-Napoléon-Marie **Moigno** (Guémené in Morbihan 1804 — Paris 1884; Abbé; Litterat in Paris), Traité de télégraphie électrique. Paris 1849 in 8. (2 éd. 1852), — **Schellen,** Der elektrische Telegraph in den Hauptstadien seiner Entwicklung. Braunschweig 1850 in 8. (6. A. durch Kareis 1888), — **Briggs,** Story of the Telegraph. London 1858 in 4., — J. **Dub,** Die Anwendung des Electromagnetismus mit besonderer Berücksichtigung der Telegraphie. Berlin 1863 in 8., — Karl Eduard **Zetzsche** (Altenburg 1830 geb.; Telegraphen-Ingenieur Berlin), Handbuch der elektrischen Telegraphie. Berlin 1876—87, 4 Bde. in 8., — etc."

159. Die Registrierapparate und elektrischen Uhren. — Die für die Astronomie äusserst wichtigen Registrierapparate oder **Chronographen** bestehen aus einem entsprechend wie bei den Telegraphenapparaten fortlaufenden Streifen oder einer sich drehenden Walze, worauf mit Hilfe einer Pendeluhr, welche entweder bei jedem Ausschlage oder wenigstens bei jeder vollständigen Schwingung einmal einen Strom schliesst oder öffnet, eine fortlaufende Reihe von Sekundenzeichen oder eine **Zeitscale** entsteht, neben welche der Beobachter die für ihn wichtigen Momente dadurch hinschreibt, dass er mit Hilfe eines Tasters Zeichen giebt. Der grosse Vorteil dieser Vorrichtung besteht darin, dass der Beobachter seine ungeteilte Aufmerksamkeit auf die Erscheinung selbst verwenden, in viel rascherer Folge Notierungen vornehmen und diese in jeder beliebigen Entfernung, ja sogar auf dem Registrierapparate einer andern Sternwarte, eintragen kann [a]. — Schaltet man in den Stromkreis, der in vorstehender Weise durch den Sekundenschlag einer gewöhnlichen Uhr nach bestimmten Intervallen momentan geschlossen wird, eine Reihe von Elektromagneten ein, deren Anker je mit einem entsprechenden Zeigerwerke verbunden ist, so erhält man ebensoviele mit der eigentlichen Uhr korrespondierende, sog. **sympathische** Uhren [b], — ersetzt man dagegen auch noch die Uhr durch ein blosses Sekundenpendel, dessen Elongation, anstatt durch ein Gewicht, durch die zeitweise Einwirkung eines Elektromagneten erhalten bleibt, so hat man eine eigentliche **elektrische** Uhr kon-

struiert [c]. — Anhangsweise mag auch noch das sog. **Chronoskop** erwähnt werden, welches aus einem sich äusserst rasch drehenden Zeigerwerk besteht, das durch Öffnen oder Schliessen eines Stromes momentan ausgelöst und wieder arretiert werden kann, so dass damit die kleinsten Zeitintervalle messbar sind [d].

Zu 159: *a.* Die ersten Chronographen wurden, unter Benutzung der von **Morse** und **Wheatstone** gegebenen Ideen, etwa 1848 durch S. **Walker** und W. **Bond** wirklich erstellt und in die Praxis eingeführt, — erhielten dann aber rasch wesentliche Verbesserungen und allgemeine Anwendung, — namentlich auch als es Matthias **Hipp** (Reutlingen 1813 geb.; erst Uhrmacher, dann Chef der Telegraphenwerkstätten in Bern und Neuenburg) gelang befriedigende Ableseapparate für die Zeichen zu konstruieren, welche er seither nach den Ideen von **Oppolzer** noch wesentlich verbesserte. — Die einfachste, für lokale Verwendung, wo ein Zweipunkttaster genügt, brauchbare Disposition der Apparate, wird durch beistehendes Schema wohl hinlänglich verdeutlicht. Für ein den weitestgehenden Anforderungen genügendes Schema wird auf 410 verwiesen; dagegen mag noch angeführt werden, dass es **Hipp** auch gelungen ist, ein sehr brauchbares Registrierchronometer zu konstruieren. — *b.* Die ersten sympathischen Uhren konstruierten **Steinheil** und **Wheatstone** etwa 1839 gleichzeitig. — *c.* Die von **Hipp** 1867 in Paris ausgestellte elektrische Uhr mit Selbstkompensation der verlorenen Elongation und Stromumkehrung, ist durch beistehendes Schema, in welchem a b die sog. „Paletten-Auslösung" darstellt, wohl hinlänglich erläutert, und für die Leistung kann auf Mitth. 30 von 1872 verwiesen werden. Für weitern Detail und die Hipp seither gelungenen Verbesserungen verweise ich auf „Adolf **Tobler** (Zürich 1850 geb.; Prof. phys. Zürich), Die elektrischen Uhren. Wien 1883 in 8.", sowie speciell für die Leistungen auf den Bericht von **Hirsch** in Bull. neuch. 14 von 1884. — *d.* Für das Hipp'sche Chronoskop vgl. „**Hirsch** et **Plantamour**, Détermination télégraphique de la différence de longitude entre Genève et Neuchatel. Genève 1864 in 4."

Uhrschr. Tasterschr.
Uhr Uhrb. Tasterb. Tast.



160. Die elektrische Beleuchtung. — Führt man die Leitungsdrähte einer starken Stromquelle in zwei Kohlenstücke, deren Spitzen sich berühren, so fliesst der Strom, erwärmt dabei die Kohle, und wenn nachher die Spitzen etwas von einander entfernt werden [a], so zeigt sich, wie schon zu Anfang unsers Jahrhunderts durch **Davy** konstatiert wurde, zwischen ihnen ein blendendes Licht, der sog. **Volta-Bogen** [b]. An eine praktische Verwertung dieser Lichtquelle war jedoch damals aus verschiedenen Gründen nicht

zu denken [c], und noch jetzt sind, obschon nach der Meinung gewiegter Elektrotechniker diese direkte Umsetzung von Elektricität in Licht „die Lampe der Zukunft" liefern wird, die Hindernisse noch nicht vollständig überwunden [d], so dass man sich einstweilen in der Praxis meistens damit begnügt, das sog. **Glühlicht** zu verwenden, welches dadurch entsteht, dass man in den Stromkreis einen Körper einschaltet, welcher dem Strom einen grossen Widerstand leistet und dadurch glühend wird [e].

Zu 160: *a.* Je nach der Intensität des Stromes kann die Distanz 1 bis 7^{mm}, im luftverdünnten Raume sogar ebensoviele Centimeter betragen. — *b.* Schon im Jahre 1800 schrieb Humphry **Davy** (Penzance in Cornwallis 1778 — Genf 1829; Prof. chem. London) an den Herausgeber von Nicholsons Journal, dass Kohle die Elektricität ebensogut wie Metall leite und helle Funken gebe; aber für die zu grössern Versuchen gewünschte Batterie fehlten ihm anfänglich die nötigen Geldmittel. Als er endlich diese zusammengebracht hatte, konstruierte er eine Batterie von 2000 Plattenpaaren à 32 Quadratzolle Oberfläche, welche je zu 10 in einen Porzellantrog tauchten, und experimentierte sodann mit dieser 1810 zu London im Auditorium der Roy. Society mit bestem Erfolge. Dass über diesen grossartigen Versuchen die zum Teil frühern betreffenden Arbeiten der Christian Heinrich **Pfaff** (Stuttgart 1773 — Kiel 1852; Prof. phys. et chem. Kiel), Joh. Wilhelm **Ritter** (Samitz in Schlesien 1776 — München 1810; Akad. München), etc., nicht vergessen werden dürfen, ist selbstverständlich; aber ebenso ungerecht ist es, die Verdienste Davys bemängeln zu wollen. — *c.* Einerseits bildete sich nach kurzer Zeit am positiven Pole, da fortwährend Kohlenteile nach dem negativen Pole hinüberflogen, eine kraterartige Vertiefung, wodurch der Zwischenraum immer grösser wurde, und anderseits waren die Batterien viel zu kostbar. — *d.* Dem ersten Hindernisse suchte **Foucault** dadurch wenigstens etwas zu begegnen, dass er der Holzkohle die weniger verbrennliche Retortenkohle substituierte, und überdies ersann man später verschiedene Vorrichtungen, unter welchen die nach dem Russen Paul **Jablochkoff** (1847 geb.) benannten Kerzen fast am meisten Beifall fanden, um die Kohlenspitzen in gleichem Abstande zu erhalten, — und dem zweiten Hindernisse wurde durch die Erfindung der Dynamo-Maschinen sehr bedeutend gesteuert; aber ein ganz konstantes und überdies billiges Bogenlicht lässt doch noch immer auf sich warten. — *e.* Zuerst wurde hiefür Platin verwendet, das sich aber in der grossen Hitze zu rasch verbrauchte und überhaupt ebenfalls zu teures Licht lieferte; jetzt wendet man meist, nach dem Vorgange von **Edison**, dünne Kohlenfäden an, welche aus Bambusfasern erhalten und in luftleere Glaskugeln eingeschlossen werden, wo sie eine Brennzeit von 7 bis 8 Monaten aushalten sollen, während sie an der Luft fast sofort zu Grunde gehen würden.

Einige Zusätze und Berichtigungen.

---

1 (zu 10): Von der durch **Sturm** in Tafeln disponierten „Scientia cosmica" erschien 1719 noch eine 5. Ausgabe, und auch die deutsche Übersetzung, welche B. H. Ehrenberger 1717 von Sturms entsprechenden „Compendiaria mathematica" zu Koburg in fol. auflegte, soll jenes astronomische Tafelwerk mit umfassen.

2 (zu 11): Für **d'Alembert** vgl. auch seine „Opuscules mathématiques ou Mémoires sur différens sujets de géometrie, de mécanique, d'optique, d'astronomie, etc. Paris 1761—80, 8 Vol. in 4., und: Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires, publ. par J. F. Bastien. Paris an XIII (1805), 18 Vol. in 8." Ferner erschien eine Auswahl seiner Schriften in 5 Bänden: Paris 1821—22 in 8., — etc.

3 (zu 12): Vgl. „Hermann A. **Schumacher**, Die Lilienthaler Sternwarte. Bremen 1889 in 8. (Sep. aus Abh. nat. Ges. Bremen, Bd. 11)."

4 (zu 14): Den biographischen Notizen füge ich bei, dass Gaston **Darboux**, Prof. math. und Akad. Paris, 1842 zu Nîmes geboren wurde, — dass **Houzeau** durch Lancaster in „Ciel et terre" 1888/9 einen einlässlichen Nachruf erhielt, der später auch dem zweiten Halbbande der „Bibliographie de l'astronomie" beigegeben wurde, — und dass Elias **Loomis**, der 1811 zu Wellington in Connecticut das Licht der Welt erblickt hatte, 1889 zu Newhaven, wo er später als Prof. astr. stand, mit Tod abging. — Als Berichtigung der litterarischen Notizen erwähne ich, dass von der durch **Oudemans** besorgten 4. A. von Kaisers „Sterenhemel" 1884 nur der erste, 1889 aber auch der zweite Band erschien. Ferner füge ich bei: „Herm. **Schulz**, Sferiska Astronomins Grundbegrepp. Upsala (1879) in 8., — und: Le Galilée, Revue des sciences cosmologiques, réd. par George Brunel. Paris 1889 in 8."

5 (zu 15): Der Litteratur füge ich bei: „Jul. **Giesing**, Stifels Arithmetica integra. Ein Beitrag zur Geschichte der Arithmetik des 16. Jahrhunderts. Döbeln 1879 in 8., — Wilhelm Láska (Prag 1862 geb.; Obs. Prag), Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. Braunschweig 1888—89, 3 Lfg. in 8., — R. **Reiff**, Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889 in 8., — und: Gustav Lejeune **Dirichlet** (Düren bei Aachen 1805 — Göttingen 1859; Prof. math. und Akad. Berlin und Göttingen; vgl. Kummer, Berlin 1860 in 4.), Werke, herausgeg. von L. Kronecker. Bd. 1. Berlin 1889 in 4."

6 (zu 25): Es ist beizufügen: „H. **Gravelius**, Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimalteilung des Quadranten. Mit einem (die Vorzüge der Decimalteilung beleuchtenden) Vorworte von W. Förster. Berlin 1886 in 8." Zur Bezeichnung der neuen Grade, Minuten und Sekunden werden die Zeichen ○, —, = benutzt, d. h. die alten, aber liegend.

7 (zu 40): Bei den Formeln 15 und 16 haben sich zwei Fehler eingeschlichen, indem $\text{Co}\,3x = 4\,\text{Co}^3x - 3\,\text{Co}\,x$ und $\text{Co}^3x = \frac{3}{4}\,\text{Co}\,x + \frac{1}{4}\,\text{Co}\,3x$ ist. Ferner könnten den 16 die Beziehungen

$$\text{Si}^2x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{Co}\,2x$$
$$\text{Si}^3x = \tfrac{3}{4}\,\text{Si}\,x - \tfrac{1}{4}\,\text{Si}\,3x$$
$$\text{Si}^4x = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\,\text{Co}\,2x + \tfrac{1}{8}\,\text{Co}\,4x$$

beigefügt werden.

8 (zu 41): Von Satz 21 ausgehend ergeben sich durch Differentiation folgeweise die Summenformeln

$$s_1 = x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots + x^h = \frac{x}{1-x}\cdot(1-x^h)$$

$$s_2 = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots\cdots + h\cdot x^h = x\cdot\frac{ds_1}{dx} =$$
$$= \frac{x}{(1-x)^2}\cdot[1-(h+1)\,x^h + h\cdot x^{h+1}]$$

$$s_3 = x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots\cdots + h^2\cdot x^h = x\cdot\frac{ds_2}{dx} =$$
$$= \frac{x}{(1-x)^3}\cdot\left[\begin{array}{l}1 + x - (h+1)^2\cdot x^h - h^2\cdot x^{h+2} + \\ + (2h^2+2h-1)\,x^{h+1}\end{array}\right]$$

$$s_4 = x + 8x^2 + 27x^3 + \cdots\cdots + h^3\cdot x^h = x\cdot\frac{ds_3}{dx} =$$
$$= \frac{x}{(1-x)^4}\left[\begin{array}{l}1 + 4x + x^2 - (h+1)^3\cdot x^h + (3h^3+6h^2-4)\cdot x^{h+1} - \\ - (3h^3+3h^2-3h+1)\,x^{h+2} + h^3\cdot x^{h+3}\end{array}\right]$$

etc., welche jedoch für $x = 1$ den Dienst versagen, indem sie $0:0$ ergeben. Die beiden ersten Formeln werden nun allerdings in dem vorliegenden Falle überflüssig, da man ohnehin weiss, dass

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = h \quad \text{und} \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + h = \tfrac{1}{2}\,h\,(h+1)$$

ist, und für die beiden folgenden ergeben sich mit Hilfe jeder der beiden Regeln in Satz 44 die Specialformeln

$$1 + 4 + 9 + \cdots\cdots + h^2 = \tfrac{1}{6}\,h\,(h+1)\,(2h+1)$$
$$1 + 8 + 27 + \cdots\cdots + h^3 = \tfrac{1}{4}\,h^2\,(h+1)^2$$

so dass er dennoch erledigt ist.

9 (zu 50): Vgl. meine „Studie über das sog. Petersburger-Problem (Mitth. 74 von 1889)", in welcher diese einst so berühmte, in Auflösung eines bei dem beliebten Spiele **Gerade oder Ungerade** (Schrift oder Schild) auftretenden Paradoxons bestehende Aufgabe, gestützt auf das Gesetz der grossen Zahlen, gelöst und so neuerdings die praktische Wichtigkeit dieses letztern und der dasselbe begründenden Versuche demonstriert wird.

10 (zu 53): Der Litteratur füge ich bei: „G. J. **Allman**, Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin 1889 in 8."

11 (zu 60): Für die Geschichte der Quadratur des Zirkels vgl. auch „Pieter Otto Coenraad **Vorsselmann** de Heer (Valburg in Geldern 1809 — Utrecht 1841; Prof. math. Deventer), Responsio ad quæstionem in Academia Groningana A. 1832 propositam: „Datur succincta expositio præcipuarum methodorum, quæ ad circuli quadraturam ducunt", quæ præmium reportavit. Groningæ 1832 in 4., — und: Hermann **Schubert**, Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen. Eine kulturgeschichtliche Studie. Hamburg 1889 in 8."

12 (zu 64): Der erwähnte analytische Nachweis, dass π eine transcendente Zahl und somit die Quadratur des Kreises durch eine geometrische Konstruktion, bei welcher nur algebraische Kurven und Flächen zur Anwendung kommen, unmöglich sei, wurde zuerst durch **Hermite** in der Schrift „Sur la fonction exponentielle. Paris 1874 in 4.“, dann durch Ferdinand **Lindemann** (Hannover 1852 geb.; Prof. math. Königsberg) in der Abhandlung „Über die Zahl π (Math. Annal. 20 von 1882)“, und noch abschliessend durch Karl **Weierstrass** (Ostenfelde bei Münster 1815 geb.; Prof. math. und Akad. Berlin) in der Note „Zu Lindemanns Abhandlung über die Ludolph'sche Zahl (Berl. Sitz. 1885)“ erbracht.

13 (zu 75): George-Henri **Halphen** (1844 — Versailles 1889) war Mitglied der Pariser Akademie. — Von dem Werke von **Enneper** gab 1890 Fel. Müller eine 2. Ausgabe.

14 (zu 99): Bei der definitiven Redaktion meines Handbuches kam es mehrmals vor, dass ich die ursprüngliche Reihenfolge der Sätze noch etwas abändern musste und dadurch einige frühere Verweisungen unrichtig wurden. So sollten z. B. in 99 statt 432 und 433 die Sätze 430 und 431 citiert sein, und es ist sehr wahrscheinlich, dass noch einige andere solche Fälle vorkommen, wenn ich dieselben auch bis jetzt nicht bemerkt habe.

15 (zu 106): Der Litteratur ist beizufügen „E. **Hammer**, Über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen. Stuttgart 1889 in 8.“

16 (zu 107): Der Litteratur sind beizufügen „Wilh. **Schell** (jetzt Prof. Karlsruhe), Theorie der Bewegung und der Kräfte. Leipzig 1879—80, 2 Bde. in 8., — Ernst **Mach** (Turaz in Mähren 1838 geb.; Prof. phys. Prag), Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. Leipzig 1883 in 8. (2. A. 1888), — Ludwig **Lange**, Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes. Leipzig 1886 in 8.“

17 (zu 114): Es ist beizufügen „**Ampère**, Mémoire sur quelques nouvelles propriétés des axes permanens de rotation des corps et des plans directeurs de ces axes. Paris 1823 in 4.“

18 (zu 117): Der Litteratur ist beizufügen „Antoine **Libes** (Béziers 1752 — Paris 1832; Prof. phys. Béziers, Toulouse und Paris), Histoire philosophique des progrès de la physique. Paris 1810—13, 4 Vol. in 8.“ Ferner ist zu erwähnen, dass die 3. Ausgabe von **Moussons** Physik nachträglich das gewünschte Register erhalten hat. — James Prescott **Joule** starb 1889 zu Sale bei Manchester. Für Rob. **Mayer** vgl. „Jakob Weyrauch. Stuttgart 1890 in 8.“

19 (zu 120): W. **Láska** macht in seiner Note „Zur Erfindung der Pendeluhr (Poggend. Annal. 1889)“ darauf aufmerksam, dass Marcus **Marci** (138 : c) in seiner Schrift „De proportione motus. Pragæ 1639 in 4.“ als Prop. 24 den Satz aussprach „Perpendiculum ex quodlibet puncto ejusdem circuli æquali tempore recurrit in suam stationem“, und in einer andern von ihm unter dem Titel „Parergon“ publizierten Schrift das Problem aufstellte „Horologium construere, quod suo motu tempus numeret divisum in partes minores, quam tertias unius secundi“, so dass ihm unzweifelhaft der Isochronismus des Pendels bekannt war, sowie er auch an die Verwendung desselben zur Zeitmessung gedacht zu haben scheint. — Da **Galilei** (120 : c) den Isochronismus des Pendels schon vor der Geburt dieses **Marci** kannte, so ist hiebei an eine Prioritätsfrage nicht von ferne zu denken, wohl aber an den Umstand, dass letzterer jahrelang neben **Bürgi** in Prag lebte.

20 (zu 121): Es ist beizufügen „Max. **Zwerger**, Der Schwingungsmittelpunkt zusammengesetzter Pendel. Historisch-kritische Untersuchung. München 1889 in 8."

21 (zu 127): Es ist beizufügen „G. K. **Gilbert**, A new method of measuring heights by means of the barometer. Washington 1882 in 4."

22 (zu 128): Für den neuen „Wage-Barograph mit Laufgewicht" von **Sprung-Fuess** in Berlin, der keiner Temperaturkorrektion bedarf und nicht bloss wie der ältere nur als Interpolationsinstrument verwendbar ist, vgl. „Bericht über wissenschaftliche Instrumente auf der Berliner-Gewerbeausstellung im Jahre 1879. Berlin 1880 in 8."

23 (zu 130): Es ist beizufügen „E. **Mascart**, Traité d'optique. Tome I. Paris 1889 in 8."

24 (zu 157): Es wird erzählt, dass schon 1678, also ein volles Jahrhundert vor Galvani, der berühmte Anatom Jan **Swammerdam** (Amsterdam 1637 — ebenda 1685; meist auf Reisen) dem Grossherzog Cosmus III. von Toskana analoge Frosch-Zuckungen gezeigt habe; aber da er diese Erscheinung nicht weiter verfolgte, so ist er nur als Vorläufer zu nennen und es bleibt **Galvani** das Verdienst der Entdeckung unverkümmert. — Der Litteratur sind beizufügen „E. **Mascart** et J. **Joubert**, Leçons sur l'électricité et le magnétisme. Paris 1882—86, 2 Vol. in 8., — und: Heinr. **Weber**, Elektrodynamik mit Berücksichtigung der Thermoelektricität, der Elektrolyse und der Thermochemie. Braunschweig 1889 in 8." — Endlich erwähne ich, dass Andreas **v. Ettingshausen** (Heidelberg 1796 — Wien 1878) successive Prof. math. et phys. in Wien war.

25 (zu 158): Den bereits an Wunder grenzenden frühern Leistungen der Elektrotechnik ist durch **Edison** in seinem **Phonograph** wieder eine neue beigefügt worden, indem dieser Apparat auf einer weichen Walze mittelst einer an schwingender Membrane befindlichen Spitze in Form von Erhöhungen und Vertiefungen Tonschwingungen registriert, um dieselben später zu beliebiger Zeit wieder reproduzieren zu können. — Der Litteratur füge ich bei „Victor **Wietlisbach** (Bremgarten 1854 geb.; elektrotechn. Beamter in Zürich und Bern), Die Technik des Fernsprechwesens. Wien 1886 in 8., — und: Jul. **Maier** und W. H. **Preece**, Das Telephon und dessen praktische Verwendung. Stuttgart 1889 in 8."

Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur.

Von

Dr. Rudolf Wolf,

Professor in Zürich.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

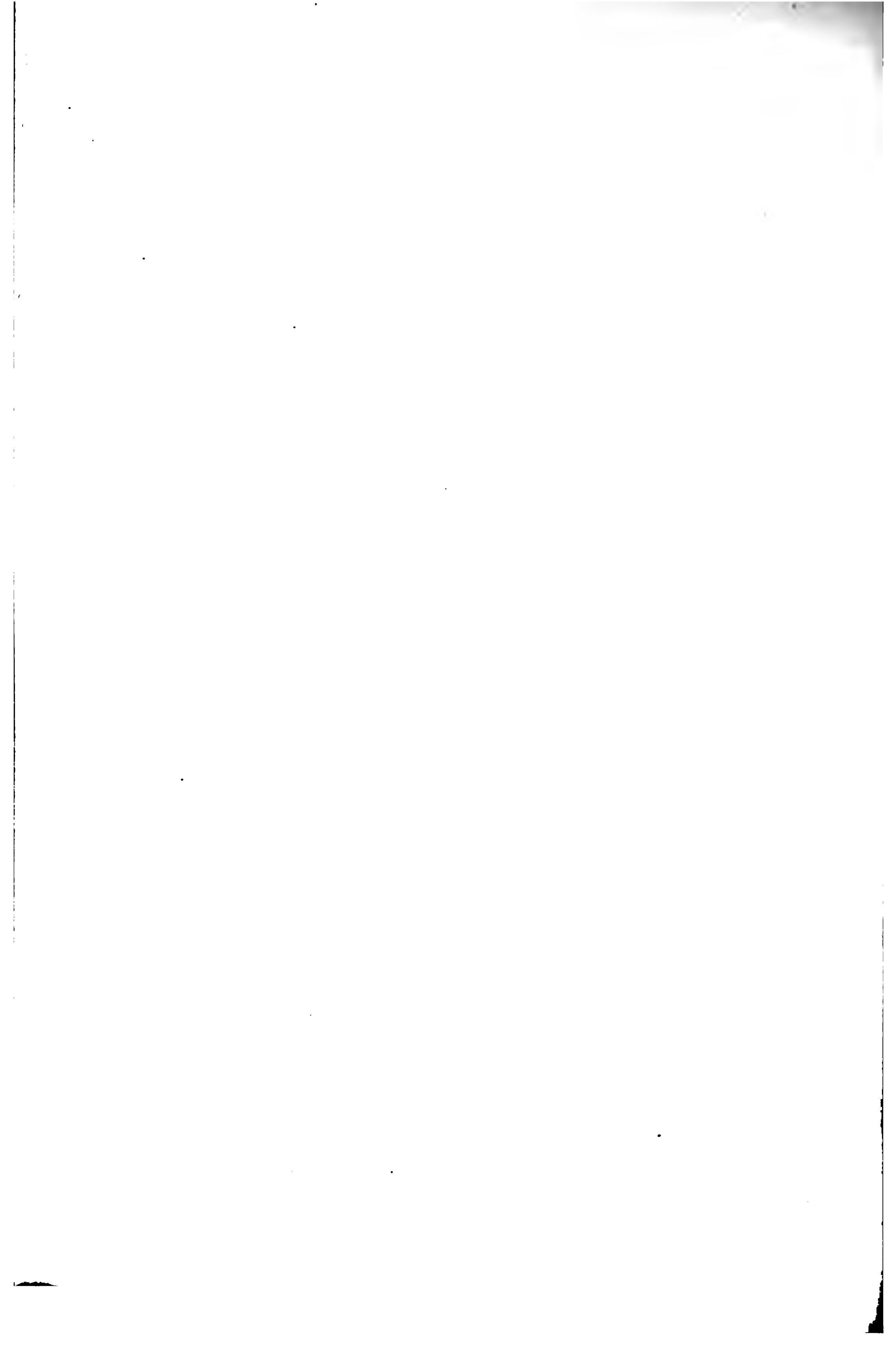
In zwei Bänden.

Zweiter Halbband.

Zürich

Druck und Verlag von F. Schulthess

1891.



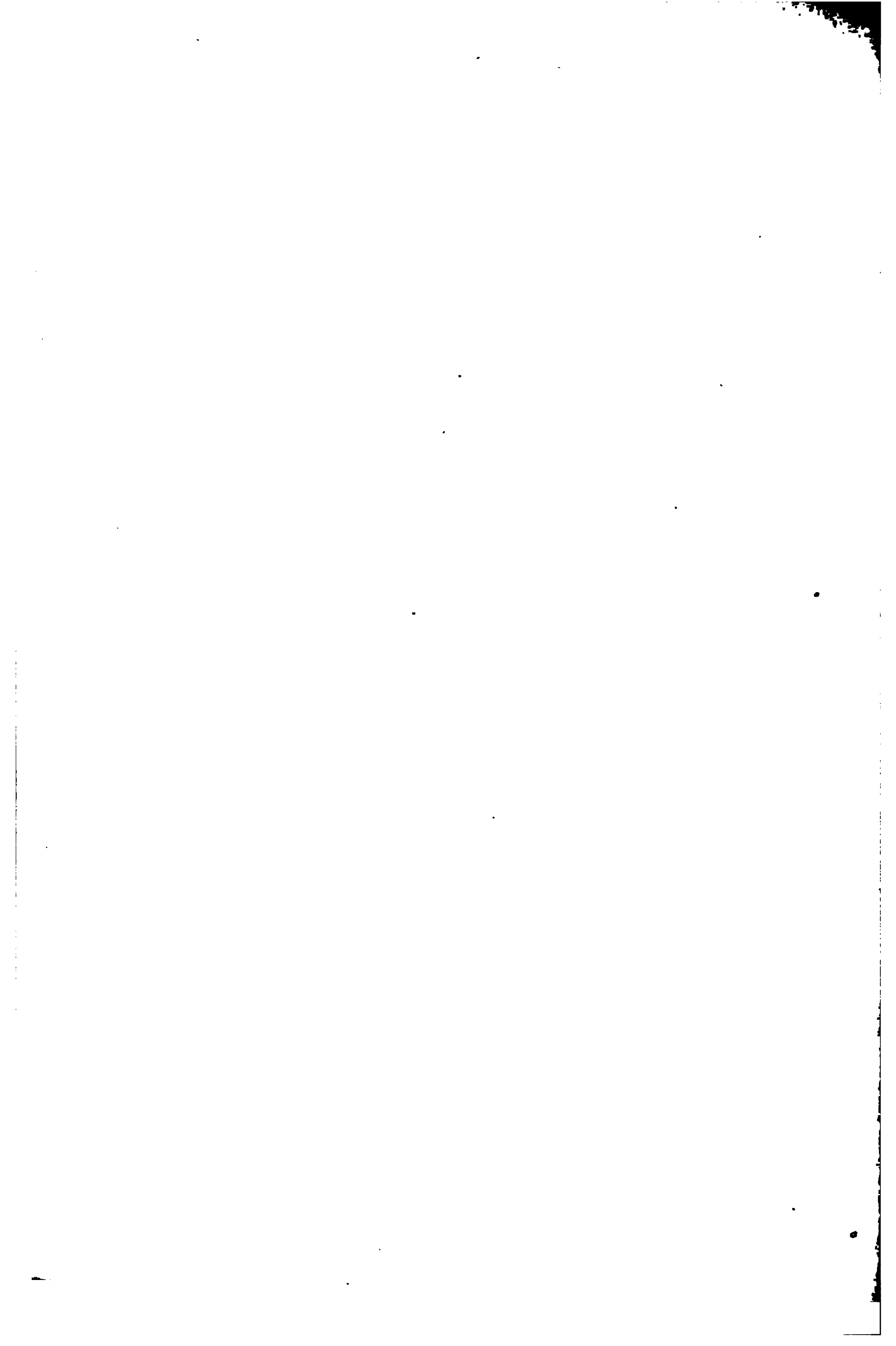
Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur

in vier Büchern.

Zweites Buch:

Einleitung in die Astronomie.



VII. Die ersten Messungen.

Les anciens, préoccupés de considérations métaphysiques, avaient peu observés; on dirait qu'ils ont craint de rencontrer dans la réalité le démenti à leurs idées systématiques.

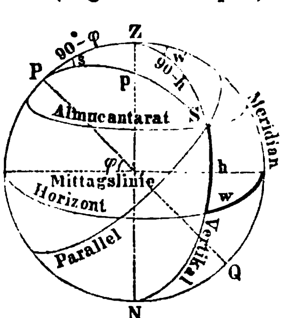
(Sophie Germain.)

161. Die der ersten Umschau entsprechende Hypothese. — Eine erste Umschau macht, wie schon im Eingange zum ersten Buche hervorgehoben wurde, die Annahme plausibel, es stehe die grosse Mehrzahl der Sterne an einem Kugelgewölbe, das sich in einer bestimmten, als **Tag** bezeichneten Zeit, um eine gegen den Horizont geneigte sog. **Weltaxe** gleichförmig umdrehe, und es seien die bemerkten Erscheinungen der sog. **täglichen Bewegung** eine blosse Folge dieser Umdrehung. Wir wollen vorläufig diese Annahme als **Hypothese** festhalten, — die Konsequenzen dieser Hypothese aufsuchen, — und sodann durch einige auf diese Konsequenzen gestützte Messungen ermitteln, ob jene mit den wirklichen Erscheinungen vereinbar sind oder ihnen widersprechen: Im erstern Falle wird die Hypothese als zutreffend bezeichnet werden dürfen, — im zweiten Falle dagegen sich als unhaltbar erwiesen haben.

162. Die Konsequenzen der Hypothese. — Dreht sich eine Kugel um einen ihrer Durchmesser als Axe, so beschreibt jeder Punkt S derselben einen sog. **Parallel**, welcher nur von seiner Poldistanz p abhängig ist, und für $p = 90^0$, wo er **Equator** oder **Equinoktial** heisst, zum grössten Kreise wird; die Grösse des über dem Horizonte liegenden Teiles des Parallels, der sog. **Tagbogen**, hängt offenbar nicht nur von p, sondern auch von der Neigung φ der Drehaxe gegen den Horizont, der sog. **Polhöhe**, ab. Eine im Mittelpunkte der Kugel errichtete Vertikale schneidet dieselbe bei jeder Lage in zwei Punkten, dem sog. **Zenit** Z und dem **Nadir** N, — und jeder durch sie gelegte, folglich zum Horizonte ebenfalls senkrechte Kugelschnitt heisst **Vertikal**; der durch den Pol führende, sämtliche Tagbogen halbierende Vertikal kömmt offenbar mit dem

Meridiane überein, — der zu ihm senkrechte Vertikal wird **erster** genannt, — der Winkelabstand w des Vertikals von S vom Meridiane **Azimut**, — der zwischen S und Horizont liegende Bogen h des Vertikales **Höhe** von S, — der durch S gelegte Parallel zum Horizonte endlich **Almucantarat** [a]. — Mit Hilfe dieser Begriffe folgt nun aus unserer Hypothese, sowohl durch geometrische Anschauung, als durch trigonometrische Rechnung [b], ohne Schwierigkeit, dass gleichen Höhen desselben Sternes vor und nach der Culmination, oder sog. **korrespondierenden** Höhen, auch gleiche Entfernungen vom Meridiane oder gleiche Azimute entsprechen, — folglich z. B. die durch die Höhen Null bedingten Auf- und Untergangspunkte eine Senkrechte zur Mittagslinie bestimmen; ferner folgt, dass gleichen Höhen auch gleiche Winkel am Pole oder gleiche **Stundenwinkel** s entsprechen, — dass die Höhe bei der Culmination wirklich einen Maximalwert annimmt, — dass bei Sternen, für welche $p < \varphi$ ist, oder bei sog. **Circumpolarsternen**, ein zweiter Durchgang durch den Meridian, eine sog. **untere** Culmination mit Minimalhöhe, statt hat, — etc.

Zu 162: *a.* Die Namen **Zenit, Azimut,** etc. sind arabischen Ursprungs, und zwar ist nach Karl **Zöppritz** (Darmstadt 1838 — Königsberg 1885; Prof. geogr. Königsberg) Zenit durch Abkürzung und Verstümmelung aus „samt-arrâs (Gegend des Kopfes)" hervorgegangen, — Azimut aus „as-samt", — etc. — *b.* Aus dem Dreiecke PZS folgen nach den bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie



$$\text{Co w} = \frac{\text{Si}\,\varphi \cdot \text{Si h} - \text{Co p}}{\text{Co}\,\varphi \cdot \text{Co h}} \qquad \frac{\text{Si s}}{\text{Si w}} = \frac{\text{Co h}}{\text{Si p}} \qquad 1$$

$$\text{Si h} = \text{Si}\,\varphi \cdot \text{Co p} + \text{Co}\,\varphi \cdot \text{Si p} \cdot \text{Co s} \qquad 2$$

und hieraus, da nach unserer Hypothese φ und p als konstant zu betrachten sind,

$$\frac{dh}{ds} = -\frac{\text{Co}\,\varphi \cdot \text{Si p} \cdot \text{Si s}}{\text{Co h}} = -\text{Co p} \cdot \text{Si w} \qquad 3$$

$$\frac{d^2h}{ds^2} = -\frac{\text{Co}\,\varphi}{\text{Co h}}(\text{Si p} \cdot \text{Co s} - \text{Si}^2 \text{w} \cdot \text{Si h} \cdot \text{Co}\,\varphi) \qquad 4$$

In den 1 bis 4 sind aber sämtliche der oben ausgesprochenen Sätze enthalten, und namentlich folgt daraus, dass sich für die eigentliche oder obere Culmination

$$\begin{matrix} s = 0 & w = 0 & p > 90^0 - \varphi & h = 180^0 - (\varphi + p) \\ s = 0 & w = 180^0 & p < 90 - \varphi & h = \varphi + p \end{matrix} \qquad 5$$

für die untere aber

$$s = 180^0 \qquad w = 180^0 \qquad p < \varphi \qquad h = \varphi - p \qquad 6$$

entsprechen.

163. Die sog. Weltgegenden und einige andere Erläuterungen. — Schon frühe wurde die Teilung des Horizontes durch die Mittagslinie und eine zu ihr Senkrechte eingeführt: Von den so erhaltenen, als Kardinalpunkte des Horizontes oder **Welt-**

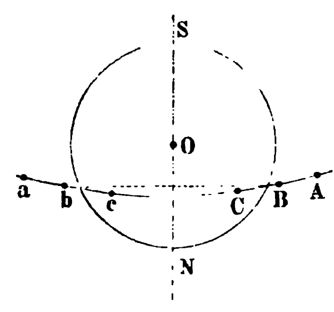
gegenden (plagæ mundi) betrachteten Teilpunkten, entsprechen zwei offenbar genau den Mittags- und Mitternachtspunkten, während die zwei übrigen nur durchschnittlich mit Morgen und Abend zusammenfallen, und sie werden als **Süd** (S) und **Nord** (N), **Ost** (E = Est) und **West** (W = Ouest) bezeichnet [a]. — Um andere Punkte des Horizontes festzulegen, gaben die Griechen und Römer meist ihre Distanz von Ost oder West als **Morgenweite** (amplitudo ortiva) oder **Abendweite** (amplitudo occidua), während die Araber vorzogen, sie einheitlich durch ihre, im Sinne der täglichen Bewegung gezählte Distanz vom Südpunkte, d. h. durch ihr **Azimut**, zu bestimmen. Die neuern Astronomen sind dem arabischen Gebrauche treu geblieben [b], während die Seefahrer und Meteorologen gewohnt sind, jeden der vier Quadranten noch weiter in 8 Teile zu zerlegen, wodurch die von ihnen zur Angabe von Schifflauf und Windrichtung benutzte sog. **Windrose** entsteht [c].

Zu 163: *a.* Früher bezeichnete O bei den Deutschen **Ost**, bei den Franzosen **West**, was viele Irrtümer veranlasste. — *b.* Nur ausnahmsweise bezeichnen sie die Lage eines Punktes im Horizonte dadurch, dass sie angeben, zwischen welchen zwei Kardinalpunkten sich derselbe befindet, und um wie viele Grade er von dem ersten derselben gegen den zweiten hin abliegt. — *c.* Die 32 Teilpunkte werden durch: S, S gen W, SSW, SW gen S, SW, SW gen W, WSW, W gen S, S, etc., bezeichnet.

164. Der Gnomon und die sog. indischen Kreise. — Wohl als ältestes, weit in die vorhistorische Zeit hinaufreichendes Instrument, ist der schon im Eingange zum ersten Buche erwähnte schattenwerfende Stab zu betrachten, und es unterliegt kaum einem Zweifel, dass bereits die alten Egypter zur Orientierung ihrer Pyramiden Vor- und Nachmittags gleich lange Schatten aufsuchten, um durch Halbierung ihres Winkels die Mittagslinie zu erhalten, welche ihnen dann überdies für die Folge, in Verbindung mit dem Stabe, als Mittagszeiger oder **Gnomon** diente [a]. Auch die Chinesen und Inder bestimmten die Mittagslinie in solcher Weise, und letztere suchten sich das Auffinden gleicher Schatten dadurch zu erleichtern, dass sie zum voraus aus dem Fusspunkte des Stabes eine Anzahl konzentrischer Kreise beschrieben, — ein Verfahren, welches unter dem Namen der **indischen Kreise** auch auf andere Völker überging, ja noch im Abendlande beliebt war [b]. Die Senkrechte, welche im Fusspunkte auf die Mittagslinie gezogen wurde, ergab die Linie Ost-West oder die sog. **Equinoktiallinie**, und lief (162) notwendig der Verbindungslinie von Auf- und Untergangspunkt parallel [c].

Zu 164: *a.* Um die Genauigkeit der Bestimmungen am Gnomone zu vermehren, wurde einerseits dessen Höhe vergrössert, und so mass z. B. der Obelisk, welcher zur Zeit von Augustus auf dem Marsfelde zu Rom als Mittags-

zeiger aufgestellt wurde und an seiner Spitze eine Kugel trug, ohne das Fussgestelle volle 111 Fuss, — und anderseits hatten die Chinesen, wie aus ihrem etwa 500 Jahre v. Chr. verfassten Buche „Tcheou-pey“ hervorgehen soll, schon frühe den guten Gedanken, den Stab oben mit einer Öffnung zu versehen und das Bild dieser letztern der unscharfen Schattenspitze zu substituieren. Später brachte man diese beiden Mittel in der Weise in Verbindung, dass an einer hohen Mauer eine Platte mit einer Öffnung eingesetzt wurde, und so hielt es z. B. **Toscanelli,** als er 1468 in der Kirche S. Maria del Fiore in Florenz einen Gnomon von nicht weniger als 277 Fuss Höhe erstellte, welcher den Mittag bis auf $^1/_2$" genau zu bestimmen erlaubte. Es mag beigefügt werden, dass dieser letztere Gnomon später von Lorenzo **Ximenez** (Trapani 1716 — Florenz 1786; Jesuit; Prof. geogr. Florenz) restauriert und in der Schrift „Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino. Firenze 1757 in 4.“ beschrieben wurde, — ferner dass nach **Zach** (Corr. astr. I von 1818) keiner der übrigen Gnomone des spätern Abendlandes auch nur $^1/_3$ seiner Höhe erreichte. — *b.* Vgl. z. B. Pühlers Geometrie von 1563. Immerhin ergiebt folgendes verwandte Verfahren noch bessere Resultate: Man notiert Vormittags eine Reihe von Punkten A, B, C, ..., und ebenso Nachmittags eine entsprechende Reihe von Punkten ... c, b, a, in welchen successive der Schatten endigt, — verbindet jede dieser Punktenfolgen durch eine Kurve, — schneidet letztere durch einen beliebigen, aus dem Fusspunkte O des Stabes beschriebenen Kreis, — und zieht die Sehne, deren Mitte sodann mit O die Mittagslinie bestimmt. — *c.* Die von **Hyginus** um 100 n. Chr. aufgefundene Methode, aus drei kurz nacheinander beobachteten Schatten (z. B. aus A, B, C) die Mittagslinie zu bestimmen, ist natürlich mehr ein mathematisches Kuriosum, als von praktischer Bedeutung. Vgl. dafür **Mollweide** (Mon. Corr. 1813), und „**Cantor,** Die römischen Agrimensoren. Leipzig 1875 in 8.“, — für die theoretische Grundlage auch unsere 195.



165. Die Bestimmung des Meridianes durch korrespondierende Höhen. — Sicherer als das gewissermassen graphische Verfahren mit den Schatten ist das ihm in der neuern Zeit substituierte Theodolit-Verfahren, zumal bei letzterm der unserer Hypothese nicht vollständig genügende Wandelstern Sonne durch einen wirklichen Fixstern ersetzt werden kann [a]: Man misst nämlich mit einem Theodoliten (349) die Horizontalwinkel a und b, welche ein Stern bei gleichen oder sog. **korrespondierenden** Höhen vor und nach seiner Culmination mit einem terrestrischen Gegenstande bestimmt, und hat sodann (162) offenbar nur das Mittel

$$w = {}^1/_2\,(a + b) \qquad \text{I}$$

zu berechnen, um den Winkelabstand des Gegenstandes vom Meridiane, oder dessen **Azimut,** zu erhalten, und dadurch die Richtung des Meridianes festzulegen [b]. Dabei wird es jedoch, um die unvermeidlichen Beobachtungsfehler möglichst zu eliminieren, gut sein,

während dem Aufsteigen des Sternes, unter jeweiliger Notierung der Höhenlage, mehrere, sagen wir n Messungen vorzunehmen, — bei seinem Niedersteigen, successive in umgekehrter Folge wieder auf jene Höhen einstellend, die korrespondierenden Bestimmungen zu machen, — und schliesslich 1 durch

$$w = {}^1/_n (\Sigma a + \Sigma b) \qquad 2$$

zu ersetzen. — Wiederholt man die Bestimmungen an andern Tagen oder mit andern Sternen, so erhält man für w Werte, welche sich nur innerhalb der Unsicherheit ihrer Ermittlung von einander unterscheiden, wodurch offenbar ein erstes Zeugnis für die Zulässigkeit der Hypothese abgelegt ist.

Zu 165: *a.* Für die bei Benutzung der Sonne notwendige sog. Mittagsverbesserung vgl. 357. — *b.* **Regiomontan** scheint, wenigstens im Abendlande, der erste gewesen zu sein, der die korrespondierenden Schattenlängen durch korrespondierende Höhen irgend eines Gestirnes, und zwar, um den durch Veränderung der Sonnendeklination entstehenden Fehler zu vermeiden, vorzugsweise eines Fixsternes, ersetzte, — dabei die unmittelbare Bestimmung des Meridianes mit derjenigen des Azimutes eines terrestrischen Gegenstandes vertauschend. Auch in Kassel benutzten die Gehilfen von Landgraf **Wilhelm** noch meistens diese Methode, jedoch mit folgender Modifikation: Man stellte den Azimutalkreis so auf, dass sein Nullpunkt bereits nahe in den Meridian fiel, — brachte dann vor Culmination des gewählten Sternes den Höhenquadranten nach und nach über verschiedene ganze Teilstriche des Horizontalkreises, wartete je den Durchgang des Sternes durch den betreffenden Vertikal ab und notierte die Durchgangshöhe, — stellte nach der Culmination den Quadranten successive, aber natürlich in umgekehrter Ordnung, auf die entsprechenden westlichen Striche ein, und bestimmte neuerdings die Durchgangshöhen, — und ermittelte endlich (vgl. das Mitth. 45 von 1878 gegebene Beispiel) durch eine Art Interpolation die Entfernung des Nullpunktes vom wirklichen Mittagspunkte; bei Benutzung der Sonne wurden die Beobachtungen am folgenden Vormittag nochmals wiederholt, um den Einfluss der Veränderung der Sonnendeklination eliminieren zu können.

166. Die sog. Miren oder Meridianzeichen. — Ist nach dem vorhergehenden das Azimut w eines terrestrischen Gegenstandes, einer sog. **Mire** [a], bestimmt, so kann man den Höhenkreis des Theodoliten immer wieder in den Meridian bringen, indem man auf die Mire einstellt, und sodann eine Horizontaldrehung um w vornimmt. Noch bequemer ist es allerdings, wenn man, nachdem dies mit möglichster Sorgfalt geschehen ist, ein für allemal ein sog. **Meridianzeichen** einvisiert: Letzteres kann entweder aus einem in so bedeutender Distanz aufgestellten Pfahle oder Pfeiler (Tagmire) bestehen, dass eine kleine Verrückung ohne merklichen Einfluss bleibt, und namentlich das auf Sterne ajüstierte Fernrohr noch ein scharfes Bild desselben gewährt, — oder aus einem, auf nahem, solidem Fundamente ruhenden und Nachts bequem beleuchtbaren

Fadenkreuze (Nachtmire), dessen Sichtbarkeit bei unverändertem Fernrohr durch eine, von ihm gegen den Beobachter um ihre Brennweite abliegende Hilfslinse erzielt wird [b], — zur Not auch aus einem fest aufgestellten, auf unendlich gebrachten Hilfsfernrohr mit beleuchtbarem Fadenkreuz, dessen Objektiv dem Beobachter zugekehrt und dessen optische Axe auf ihn gerichtet ist.

Zu 166: *a.* Der Ausdruck **Mire** ist dem französischen „mire (Visierpunkt)" nachgebildet. — *b.* **Lambert** hob schon 1769 in einem Briefe an Brander hervor, dass man mit einem Fernrohr durch das Objektiv eines andern die Bildebene dieses letztern übersehen und so ein künstliches Signal in der Nähe erhalten könne, das sich wie ein unendlich fernes verhalte. — Wohl unabhängig davon soll auch David **Rittenhouse**, (Germantown bei Philadelphia 1732 — Philadelphia 1796; Uhrmacher und Mechaniker in Philadelphia, später Münzmeister U. S.) etwa 1774 auf dieselbe Idee gekommen sein: jedenfalls empfahl er in seiner Note „New method of placing a meridian mark (Trans. Amer. Soc. II von 1786)", nahe vor dem Objektive des Passageninstruments eine Linse von grosser Brennweite, und sodann im Focus derselben eine Platte mit konzentrischen Kreisen je an einem Pfeiler zu befestigen, — d. h. eine richtige Nachtmire zu erstellen.

167. Die Bestimmung der Polhöhe durch Circumpolarsterne. — Ein Circumpolarstern, für welchen nicht nur $p < \varphi$, sondern auch $p < 90^0 - \varphi$, passiert (162) nach unserer Hypothese den Meridian, je nachdem er in oberer oder unterer Culmination steht, in der Höhe

$$H = \varphi + p \qquad \text{oder} \qquad h = \varphi - p \qquad \mathbf{1}$$

und man hat daher

$$\varphi = {}^1/_2 (H + h) \qquad p = {}^1/_2 (H - h) \qquad \mathbf{2}$$

so dass durch Messung der beiden Culminationshöhen sowohl die Polhöhe des Beobachters als die Poldistanz des Sternes bestimmt werden kann [a]. — Allerdings darf nicht verschwiegen werden, dass die aus verschiedenen Sternen auf diese Weise für die Polhöhe erhaltenen Werte so verschieden ausfallen [b], dass man an der Methode oder an der zu Grunde liegenden Hypothese fast irre werden könnte; aber glücklicher Weise sind diese Anomalien schon längst als notwendige Folgen einer Ablenkung des Lichtes durch die Atmosphäre erkannt und die Mittel aufgefunden worden, diesen störenden Einfluss zu eliminieren, wie dies sofort des nähern besprochen werden soll.

Zu 167: *a.* Diese einfache und bequeme Methode wurde z. B. schon im 13. Jahrhundert von **Aboul-Hhassan** in seiner, nachmals von Sédillot unter dem Titel „Traité des instruments astronomiques des Arabes. Paris 1834 in 4." herausgegebenen Schrift auseinander gesetzt, sowie gleichzeitig von **Nassir-Eddin** auf der Sternwarte zu Méragah eingeführt und noch später im Abend-

lande vielfach benutzt. — *b.* So erhielt ich z. B. im November 1854 zu Bern aus α Ursæ minoris und γ Ursæ majoris

$$H' = 48^0\,25'\,46'' \quad h' = 45^0\,30'\,20'' \quad \text{und} \quad H'' = 82^0\,27'\,14'' \quad h'' = 11^0\,31'\,47''$$

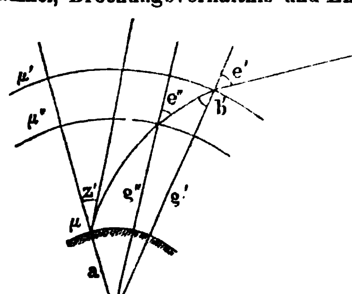
also nach 2 die weit über die Unsicherheit der Messungen differierenden Werte

$$\varphi' = 46^0\,58'\,3'' \qquad \text{und} \qquad \varphi'' = 46^0\,59'\,30^1/_2{}''$$

und ähnlich erging es auch andern Beobachtern.

168. Die sog. Refraktion. — Jeder Stern erscheint (136), infolge der von oben nach unten beständig stärker werdenden Brechung des Lichtes in der Atmosphäre, etwas höher als er wirklich steht, und es muss daher jeder gemessenen oder sog. **scheinbaren** Zenitdistanz z' der Betrag dieser sog. **Refraktion** zugefügt werden, um die **wahre** Zenitdistanz z zu erhalten. Macht man nun die offenbar erlaubte Annahme, dass die Atmosphäre aus einer Folge homogener Schichten bestehe, deren Dichte gegen die Erde hin nach irgend einem Gesetze zunehme, so ergiebt sich, dass (wenigstens bis auf Zenitdistanzen von ca. 75°) mit hinlänglicher Annäherung die **Refraktion proportional der Tangente der Zenitdistanz** gesetzt werden kann[a]. Die Grösse α, mit welcher jeweilen die Tangente multipliziert werden muss, um den Betrag der Refraktion zu erhalten, nennt man **Refraktionskonstante,** obschon sie (455), wie bereits **Picard** bemerkte, mit Luftdruck und Luftwärme merklich variiert, und somit für etwas genauere Bestimmungen jeden Abend nach einer der im folgenden zu erläuternden Methoden bestimmt werden muss.

Zu 168: *a.* Bezeichnen e, b, μ, ϱ der Reihe nach Einfallswinkel, Brechungswinkel, Brechungsverhältnis und Entfernung vom Erdmittelpunkte, so hat man für die betreffende Schichte der Atmosphäre, teils nach dem Brechungsgesetze, teils nach bekannten trigonometrischen Beziehungen,



$$\text{Si } e' : \text{Si } b' = \mu'' : \mu'$$
$$\text{Si } b' : \text{Si } e'' = \varrho'' : \varrho'$$
oder
$$\text{Si } e' : \text{Si } e'' = \varrho'' \cdot \mu'' : \varrho' \cdot \mu'$$

und es ist somit

$$\varrho \cdot \mu \cdot \text{Si } e = \gamma \qquad \mathbf{1}$$

eine für die ganze Atmosphäre konstante Grösse. Bezeichnet daher μ das Brechungsverhältnis an der Erdoberfläche, a den Radius der Erde, und h die Höhe der obersten oder also den Brechungsexponenten 1 besitzenden Schichte der Atmosphäre, so ist auch

$$a \cdot \mu \cdot \text{Si } z' = \gamma = (a + h) \cdot 1 \cdot \text{Si } z$$

also, wenn man h gegen a vernachlässigt und den Betrag der Refraktion gleich r setzt, sehr nahe

$$\mu \cdot \text{Si } z' = \text{Si } (z' + r) \qquad \text{oder} \qquad \mu \cdot \text{Tg } z' = \text{Tg } z' + r \cdot \text{Si } 1''$$

somit
$$r = \alpha \cdot \text{Tg } z' \qquad \text{wo} \qquad \alpha = (\mu - 1) : \text{Si } 1'' \qquad \mathbf{2}$$

w. z. b. w.

169. Die gleichzeitige Bestimmung von Polhöhe, Poldistanz und Refraktionskonstante. — Nach vorstehendem erhalten wir nun statt den 167 : 1, 2 zu Grunde liegenden Beziehungen 162 : 5, 6, wenn zugleich die Höhen durch die ihnen komplementären Zenitdistanzen ersetzt werden, die Gleichung

$$\varphi = 90^0 - p + z' + \alpha \cdot \mathrm{Tg}\, z' \qquad \mathbf{1}$$

wo für Culminationen nördlich vom Zenit z', und für untere Culminationen auch noch p, das Zeichen wechselt. Wenn man somit von zwei Circumpolarsternen bei jeder ihrer beiden Culminationen die Zenitdistanz misst, so ergeben sich vier Gleichungen mit vier Unbekannten (α, φ, p', p''), und man kann daher letztere wirklich bestimmen [a]. — Hat man ferner nach solcher Methode einmal α und φ ausgemittelt, so reicht es hin, bei einer der Culminationen irgend eines Sternes seine Zenitdistanz zu messen, um nach 1 seine Poldistanz berechnen zu können, und es lässt sich somit leicht nach und nach ein kleiner Katalog solcher Poldistanzen oder von, wenigstens in dieser Beziehung, **bekannten** Sternen anlegen [b].

Zu 169: *a.* So erhielt z. B. Alfr. **Wolfer** 1883 VIII 19 am Kern'schen Meridiankreise der Züricher Sternwarte bei den beiden nördlichen Culminationen von α Ursæ minoris und γ Ursæ majoris

$$Z' = 41^0\, 17'\, 35'',77 \quad z' = 43^0\, 55'\, 26'',62 \quad Z'' = 6^0\, 57'\, 49'',70 \quad z'' = 78^0\, 12'\, 25'',66$$

und hieraus folgen in der angegebenen Weise

$$\alpha = 54'',40 \quad \varphi = 47^0\, 22'\, 38'',72 \quad p' = 1^0\, 18'\, 57'',73 \quad p'' = 35^0\, 39'\, 24'',93$$

— *b.* Anhangsweise mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass, wenn man den eben erhaltenen Wert $\alpha = 54'',4$ mit den Cotangenten der (167) in Bern erhaltenen Höhen multipliziert, und letztere um diese Beträge vermindert, dieselben in

$$H' = 48^0\, 24'\, 58'' \quad h' = 45^0\, 29'\, 27'' \quad H'' = 82^0\, 27'\, 7'' \quad h'' = 11^0\, 27'\, 20''$$

übergehen, so dass man nunmehr nach 167 : 2

$$\varphi' = 46^0\, 57'\, 12^1/_2'' \qquad \text{und} \qquad \varphi'' = 46^0\, 57'\, 13^1/_2''$$

d. h. eine Übereinstimmung erhält, welche nichts mehr zu wünschen übrig lässt und die Richtigkeit der Hypothese neuerdings bestätigt.

170. Die Bestimmung von Polhöhe und Refraktionskonstante unter Voraussetzung zweier bekannter Sterne. — Verfügt man bereits (169) über bekannte Sterne, so genügt es, die Zenitdistanz Eines derselben zu messen, um nach 169 : 1 die Polhöhe bestimmen zu können, — sei es dass man, wie es noch im 16. Jahrhundert, wo diese Methode bereits bekannt war [a], meistens geschah, die Refraktion ganz vernachlässige, — sei es, dass man für α einen aus frühern Beobachtungen erhaltenen Wert einführe. — Um letzteres nicht thun zu müssen, ist es allerdings noch besser, **zwei** bekannte Sterne zu beobachten, — aus Verbindung der in

diesem Falle nach 169 : 1 bestehenden zwei Gleichungen

$$\varphi = 90^0 - p_1 + z'_1 + \alpha \cdot \mathrm{Tg}\, z'_1 \qquad \varphi = 90^0 - p_2 + z'_2 + \alpha \cdot \mathrm{Tg}\, z'_2 \qquad \mathbf{1}$$

zuerst nach

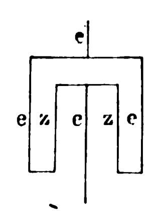
$$\alpha = \frac{p_1 - p_2 - (z'_1 - z'_2)}{\mathrm{Si}\,(z'_1 - z'_2)} \cdot \mathrm{Co}\, z'_1 \cdot \mathrm{Co}\, z'_2 \qquad \mathbf{2}$$

die Refraktionskonstante und sodann nach einer der 1 die Haupt-Unbekannte φ zu berechnen.

Zu 170: *a.* **Pühler** gab schon in seiner Schrift von 1563 (vgl. 164) die Regel, dass man von der Mittagshöhe eines Sternes dessen Deklination abzuziehen habe, um die Equatorhöhe zu erhalten, und fügte auf Blatt 115 eine auf 1560 gestellte kleine Sterntafel bei. — *b.* Ich erhielt z. B. 1864 X 18 am Ertel'schen Meridiankreise der Zürcher Sternwarte für die Culmination von α Piscis australis ($p_1 = 120^0\ 20'\ 11'',6$) $z_1' = 77^0\ 38'\ 46'',1$, und für die obere und nördlich vom Zenit statthabende Culmination von α Cassiopeæ ($p_2 = 34^0\ 12'\ 4'',1$) $z_2' = -8^0\ 25'\ 5'',2$, so dass nach 2 und 1: $\alpha = 54'',27$ und $\varphi = 47^0\ 22'\ 42'',4$ folgte. Ich füge bei, dass nach 2, wie es soeben geschehen ist, Sterne von geringer Differenz der Zenitdistanzen zu vermeiden sind.

171. Die Regulierung einer Uhr nach den Sternen. — Da Bau und successive Entwicklung der Uhren schon früher (122 bis 123) besprochen worden sind, und die Mittel, um die absolute Abweichung der Uhrzeit von der einem gewählten Anfangstermine entsprechenden Zeit, oder die sog. **Uhrkorrektion**, zu finden, erst später (193 u. f.) entwickelt werden können, so kann es sich hier nur noch um die damals nicht behandelte **Kompensation** der Uhren gegen den Einfluss der Wärme, und sodann um die vorläufige **Regulierung** ihres Ganges handeln: Für erstere wird nun schon bei Konstruktion der Uhr vorgesehen [a], und letztere wird einfach dadurch erhalten, dass man an der Uhr die Culminationszeiten eines und desselben Sternes an einer Folge von Tagen aufschreibt, dabei nötigenfalls die Länge ihres Pendels so lange abändernd, bis dieselben nahezu gleich werden. Die übrig bleibenden, zunächst mit der Unvollkommenheit der Kompensation und Regulierung, aber auch mit verschiedenen andern störenden Einflüssen zusammenhängenden kleinen Differenzen, stellen den sog. **täglichen Gang** der Uhr vor, auf welchen wir unter der folgenden Nummer noch specieller eintreten werden. Vorläufig bleibt nur noch zu erwähnen, dass ein Wechseln des Sternes nur auf die absoluten Uhrzeiten der Culmination, nicht aber auf den Gang, Einfluss hat, wodurch offenbar die Richtigkeit unserer Hypothese neuerdings bewährt wird.

Zu 171: *a.* Um eine Uhr gegen den schädlichen Einfluss verschiedener Wärme auf die Pendellänge zu schützen, ersetzt man entweder die Linse so durch ein Gefäss mit Quecksilber, dass bei zunehmender Wärme der Schwingungspunkt um ebensoviel gehoben wird, als er durch die Verlängerung der Pendelstange sinkt, — oder man unterbricht die Pendelstange durch einen sog.



Rost, bei dem die nach oben wirkenden Stäbe z aus einem Metalle (z. B. Zink) bestehen, das sich bedeutend stärker als das Metall der Pendelstange (meist Eisen) ausdehnt, wodurch wieder, bei gehörigen Verhältnissen, der Schwingungspunkt in gleicher Höhe erhalten werden kann. — Die Rost-Kompensation soll **Graham** schon um 1715 erfunden, dann aber zu Gunsten der Quecksilber-Kompensation, welche er in der Abhandlung „A contrivance to avoid the irregularities in a clock motion occasioned by the action of heat and cold on a pendulum rod (Ph. Tr. 1726)" beliebte, wieder verlassen haben; dagegen wurde sie sodann von **Harrison**, mutmasslich ohne etwas hievon zu wissen, etwa 1725 neuerdings, in der jetzt gebräuchlichen Form, in die Pendeluhren eingeführt, und verdrängte nun auf lange die Quecksilber-Kompensation fast gänzlich, bis letztere (vgl. Berl. Jahrb. 1810) etwa 1802 durch Thomas **Blacker** ebenfalls wieder zur Geltung gebracht wurde. — Anhangsweise ist noch anzuführen, dass, obschon ausser diesen beiden Kompensationsmitteln im Laufe der Zeiten noch manche andere vorgeschlagen wurden, man doch immer wieder zu ihnen zurückkehrte, und so auch **Horner**, der (vgl. Notiz 352) 1831 IV 22 Gautier eine neue sinnreiche Idee mitteilte, zugleich aussprach: „Ich halte das Quecksilberpendel für das Beste von Allen, zumal wenn der Mercur in einem eisernen, nicht in einem gläsernen Cylinder sich befindet"; ferner dass es **Harrison** auch gelang, die Unruhe der Chronometer durch die Krümmungsänderung einer aus Stahl und Messing zusammengesetzten Feder zu kompensieren.

172. Der tägliche Gang der Uhr und die Variationen desselben. — Die Grösse des täglichen Ganges einer Uhr ist an und für sich ziemlich gleichgiltig; aber immerhin ist es bequem, wenn sie auf ein Minimum reduziert ist, um dem **Gange** nur bei grössern Zeitintervallen Rechnung tragen zu müssen. Dagegen ist es sehr wesentlich, dass der Gang regelmässig, d. h. seine sog. **Variation** von einem Tage zum andern gering und nahe konstant sei, da sonst Interpolationen nicht mit der nötigen Sicherheit ausgeführt werden können, — ja es wird gegenwärtig angenommen, dass die Variation nie eine volle Sekunde betragen dürfe, wenn die Uhr als **brauchbar**, nie eine Zehntelsekunde, wenn sie als **sehr gut** taxiert werden soll. — Wie schon angedeutet, hängt der tägliche Gang g einer Uhr nicht nur von dem Gelingen der Regulierung und Kompensation, sondern auch noch von andern Einflüssen ab, und unter diesen letztern ist man namentlich auf denjenigen der Variation des Luftdruckes aufmerksam geworden [a], so dass man

$$g = \alpha + \beta \cdot t + \gamma \cdot (b - 700) \qquad 1$$

setzen kann, wo t die Lufttemperatur und b den in Millimetern gegebenen Barometerstand bezeichnet, während α, β, γ Konstante sind, zu deren Bestimmung 1 für eine grössere Anzahl von bekannten Uhrgängen aufgeschrieben wird [b]. Man hat sogar mit Erfolg versucht, auch diesen Einfluss des Barometerstandes zu kom-

pensieren, und es hängt wohl die Vorzüglichkeit der früher (159) beschriebenen elektrischen Uhr von **Hipp** grossenteils damit zusammen, dass es bei derselben möglich ist, sie durch hermetischen Verschluss des Uhrgehäuses den Variationen des Luftdruckes fast ganz zu entziehen [c].

Zu 172: *a.* Schon „Thomas Romney **Robinson** (1793? — Armagh in Irland 1882; Dir. Obs. Armagh), On the dependence of a clock's rate on the height of the barometer (Mem. Astr. Soc. 5), — Adalb. **Krüger**, Über Barometercompensation der Pendeluhren (A. N. 1482 von 1864), — etc." hoben hervor, dass eine feine Uhr gegen die Variation des Luftdruckes kompensiert, oder wenigstens in die Formel für ihren Gang ein betreffendes Glied eingeführt werden müsse. — *b.* So fand **Wolfer** (Mitth. 48 von 1879) aus dreijährigen Bestimmungen für die mit Quecksilber-Kompensation versehene Mairet-Uhr der Zürcher Sternwarte die Formel

$$g = - 1^s,831 + 0,0295 \cdot t + 0,0155 \, (b - 700) \qquad 2$$

Auch **Wagner** und **Förster** erhielten für die Normaluhren in Pulkowa und Berlin den Barometerfaktor 0,016, während dagegen **Hilfiker** und Rich. **Schumann** für die mit Rostpendel versehenen Uhren in Neuenburg und Leipzig 0,0102 und 0,0110 fanden. — *c.* Vergleiche auch „**Schumacher,** Lettre sur une pendule astronomique de Mss. Breguet père et fils, avec le tableau de la marche de cette pendule. Altona 1829 in 4. (Beilage zu A. N. 160), — **Förster,** Untersuchungen über Pendeluhren (A. N. 2182 u. f. von 1878), — J. A. C. **Oudemans,** Über die Compensation eines Sekundenpendels für Temperatur und Luftdruck vermittelst eines Quecksilbercylinders und eines Krüger'schen Manometers (A. N. 2378—80 von 1881; auch Z. f. Instr. 1881), — C. F. W. **Peters,** Über den Einfluss der Luftfeuchtigkeit auf den Gang der Chronometer (Astr. Viert. 22 von 1887; für 1 % Zunahme der relativen Feuchtigkeit soll sich der Gang bis auf $1/4^s$ verlangsamern), — W. A. **Nippoldt,** Ein neues für Temperatur- und Luftdruckschwankungen kompensiertes Pendel (Z. f. Instr. 1889), — J. **Hilfiker,** L'influence de la pression de l'air sur la marche des chronomètres (Bull. Neuch. 1889), — etc."

173. Das parallaktisch montierte Fernrohr. — Verbindet man ein Fernrohr so mit einer Axe, dass dasselbe unter jedem beliebigen Winkel zu derselben festgehalten werden kann, und bringt sodann diese Axe mit Hilfe der bereits gemachten Bestimmungen in die Richtung der Weltaxe, so heisst das Fernrohr **parallaktisch montiert** [a], — zumal wenn damit einerseits ein Uhrwerk verbunden ist, welches die Axe in einem Tage einmal umdreht [b], und anderseits zwei geteilte Kreise, der sog. **Stundenkreis** und der sog. **Deklinationskreis**, vorhanden sind, an welchen man sowohl die Lage der Drehaxe, als die Neigung der optischen Axe gegen diese letztere ablesen kann [c]. Entspricht die erhältliche Genauigkeit der Ablesungen an diesen Kreisen der optischen Kraft des Fernrohrs, so wird das Fernrohr zum **Equatoreal**, auf das wir (387) näher eintreten werden.

Zu 173: *a.* Schon etwa 1620 brachte **Scheiner** zu Gunsten seiner Sonnenbeobachtungen (273) ein Fernrohr mit einer nach den Polen gerichteten Axe in Verbindung, und etwas später konstruierte ihm sein Ordensbruder Christoph **Grünberger** ein in der „Rosa ursina (p. 349) abgebildetes „Helioscopisches Telioscop", welches als ein erstes, wenn auch noch höchst primitives, parallaktisch montiertes Fernrohr betrachtet werden muss. Bereits weit vollkommener war die etwa 1690 von **Römer** gebaute „Machina equatorea", welche, wie uns die in „Horrebow, Basis astronomiæ. Havniæ 1735 in 4." gegebene Abbildung und Beschreibung zeigt, sogar ein eigentliches Equatoreal war. Seither sind dann allerdings durch die **Short, Brander, Ramsden, Fraunhofer, Repsold, Grubb,** etc., successive immer vollkommenere Konstruktionen ausgeführt worden, auf deren Detail wir jedoch natürlich hier nicht eintreten können. — *b.* Ein die Axe in einem Tage umdrehendes Uhrwerk scheint zuerst bei der 1746 von Claude **Passement** (Paris 1702 — ebenda 1769; successive Schreiber, Krämer, Mechaniker und königl. Pensionär; vgl. Sue: Paris 1778 in 4.) erstellten und (Mém. Par. 1746) beschriebenen „Machine parallactique" vorzukommen, und zwar wird gesagt: „L'auteur ajoute à cette machine une horloge qui la fait mouvoir, et qui par conséquent fait suivre l'astre à la lunette qui y est jointe; mais comme les vibrations du pendule pourraient faire aller la lunette par saut, il a imaginé d'y substituer une espèce de tourniquet qui décrit dans sa révolution un cône plus ou moins évasé, suivant que la vitesse devient plus ou moins grande". Aber trotz dieser ingenieusen Vorrichtung und obschon in der spätern Schrift „Description et usage des télescopes, microscopes, ouvrages et inventions de Passement. Paris 1763 in 12." gesagt wird, es habe **Passement** 1757 dem König eine parallaktische Maschine überreicht, welche einem Gestirne **während einer ganzen Nacht** folgte, blieb doch der spätern Zeit, namentlich auch in Beziehung auf diese Uhrbewegung, noch manches zu thun übrig, und es haben sich in dieser Richtung Joseph **Liebherr** (Immenstadt 1767 — München 1840; erst Uhrmacher, dann Mitbegründer des mech.-opt. Institutes, zuletzt Prof. mech. München) durch Erfindung einer sog. „Centrifugal-Unruhe", — Léon **Foucault** durch ein ihm eigentümliches Centrifugalpendel (vgl. Compt. rend. 55, und Beob. Bothkamp. Vol. 2, wo ein von Eichens nach den Ideen von Foucault ausgeführtes Centrifugalpendel beschrieben ist), — etc., nicht unerhebliche Verdienste erworben. — *c.* Vgl. auch „W. **Struve,** Beschreibung des auf der Sternwarte zu Dorpat befindlichen grossen Refractors von Fraunhofer. Dorpat 1825 in fol., — **Bessel,** Astronomische Beobachtungen in Königsberg (Abth. 15 von 1831), — etc."

174. Das Sehen der Sterne am Tage. — Für die aus dem Altertume auf uns übergegangene Sage, man könne aus tiefen Schachten am Tage von freiem Auge Sterne sehen, liegt kein einziges gut konstatiertes Faktum, wohl aber manches Beispiel von Täuschung vor [a], — ja es kann mit grosser Sicherheit behauptet werden, es seien, vor Erfindung des Fernrohrs, am Tage ausser dem Monde nur ganz ausnahmsweise Gestirne gesehen worden, wie etwa einige Male bei besonders günstigen Stellungen Venus und Jupiter (374, 537), und vielleicht etwa ein neu aufleuchtender Stern (599) oder ein besonders glänzender Komet (279) [b]. Sobald man dagegen das Fernrohr besass, so konnte man mit ihm ein helles Gestirn,

auf das man vor Sonnenaufgang eingestellt hatte, auch noch längere Zeit nach Sonnenaufgang verfolgen [c], und als sodann das Fernrohr parallaktisch montiert, sowie mit Aufsuchungskreisen versehen worden war, hatte es nicht mehr die mindeste Schwierigkeit, zu jeder Tageszeit irgend ein seiner Position nach bekanntes, wenn auch dem freien Auge nicht mehr wahrnehmbares Objekt in das Gesichtsfeld zu bringen, und, wenn sein Glanz, im Verhältnis zur Mächtigkeit des Fernrohrs und zur Stärke des diffusen Lichtes, nicht gar zu gering war, deutlich zu sehen [d].

Zu 174: *a.* Vgl. Humboldts Kosmos III 71 und meine Note in Bern. Mitth. von 1851. Letztere widerlegt eine von **Ebel** in seiner „Anleitung die Schweiz zu bereisen (3. A. II 260)" aufgenommene Erzählung gründlich. — *b.* Die bei sog. totalen Sonnenfinsternissen gesehenen Sterne (250) kommen hier natürlich nicht in Betracht, — noch eher die durch **Saussure** (Voyages dans les Alpes. Sect. V) mitgeteilte Angabe, dass seine Führer hoch oben am Montblanc an dem durch den Berg beschatteten Teile des Himmels beim hellen Tage einige Sterne gesehen haben. — *c.* So sah Jos. **Gaultier** in Aix (vgl. Corr. astr. III 336) schon 1611 III 1 Merkur noch nach Sonnenaufgang, — ebenso Wilh. **Schickard** in Tübingen (vgl. Hist. coel. 956) 1632 III 2 den Antares, — etc. — *d.* Immerhin scheinen eigentliche Tagesbeobachtungen erst von 1669 hinweg durch **Picard** gemacht worden zu sein: Bei Angabe einer 1669 V 3 erhaltenen Meridianhöhe des Regulus sagt er nämlich (vgl. Lemonnier, Histoire céleste, p. 38): „Cette hauteur méridienne fut prise en plein jour à $7^h\ 5^m$ du soir, environ 13^m avant le coucher du soleil, ce qui ne s'était encore jamais fait", und sodann bei Angabe der Meridianhöhe von Arcturus von 1669 VII 23: „Cette observation est remarquable, étant inouï qu'on eût jamais pris la hauteur méridienne des étoiles fixes non seulement en plein soleil, mais pas même encore dans la force du crépuscule; de sorte qu'il est maintenant facile de trouver immédiatement les ascensions droites des étoiles fixes non seulement par les horloges à pendule, mais aussi par l'observation du vertical du soleil au même temps qu'on observera la hauteur méridienne d'une étoile fixe".

175. Der faktische Nachweis für die Zulässigkeit der Hypothese. — Die im Eingange des vorigen Satzes hervorgehobene Thatsache leistet offenbar den faktischen Beweis, dass die sog. tägliche Bewegung wirklich genau so vor sich zu gehen scheint, wie wenn sich die scheinbare Himmelskugel in einem Tage gleichförmig um die sog. Weltaxe drehen würde, — dass also die gemachte **Hypothese zulässig** ist und als Grundlage weiterer Betrachtungen benutzt werden darf [a].

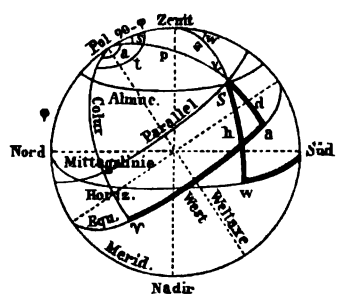
Zu 175: *a.* Es mag beigefügt werden, dass die Existenz und Verwendung der Armillarsphäre (386) uns zeigt, dass bereits die Alten volle Einsicht in die Richtigkeit unserer Hypothese hatten; auch ist von Interesse, dass der um 70 v. Chr. lebende **Geminus** die Anwendung eines um die Weltaxe drehbaren Diopterlineales als ein Mittel bezeichnete, um sich zu überzeugen, dass die Sterne infolge der täglichen Bewegung wirklich Kreise beschreiben.

176. Die Sterncoordinaten. — Die bis jetzt (162) zur Bestimmung der Lage eines Sternes benutzten **Horizontcoordinaten** h und w gelten offenbar nur für einen bestimmten Ort und Moment und fixieren nicht die Lage am Himmelsgewölbe. Zu letzterm Zwecke wurden etwas später **Equatorcoordinaten** eingeführt, d. h. man bezog sich auf den zur Weltaxe senkrechten Hauptkreis, den sog. **Equator,** als Axe, und einen festen Punkt desselben, gewöhnlich den bald (191) näher zu definierenden **Frühlingspunkt**, als Anfangspunkt, — wobei der zur Poldistanz p komplementäre Abstand des Sternes vom Equator, die sog. **Deklination** D oder d, als Ordinate eingeführt wurde, der Abstand des Anfangspunktes vom Deklinationskreise des Sternes aber, die sog. **Rektascension** Æ oder a, als Abscisse: Erstere wird, entsprechend der Höhe, vom Equator aus nach Nord und Süd in + und — bis 90° fortgezählt, — letztere dagegen vom Anfangspunkte aus, in entgegengesetztem Sinne zur täglichen Bewegung und zum Azimute, bis 360° oder 24^h. Der Deklinationskreis des Frühlingspunktes wird (191) **Kolur der Nachtgleichen** genannt, und sein Winkel mit dem Meridiane, oder also der Stundenwinkel des Frühlingspunktes, ist als **Sternzeit** t eingeführt worden, so dass sich somit Rektascension und Stundenwinkel eines Gestirnes immer zur Sternzeit ergänzen, oder die Gleichheiten

$$t = a + s \qquad s = t - a \qquad a = t - s \qquad \mathbf{1}$$

bestehen [a].

Zu 176: *a.* Schon **Timocharis** und **Aristyll** verglichen einzelne Sterne mit den Equinoktialpunkten; aber in unserm Sinne scheint erst **Hipparch** eigentliche Sterncoordinaten, und namentlich den Frühlingspunkt als Anfangspunkt der Coordinaten eingeführt zu haben. — Es ist beizufügen, dass somit Sternzeit und Polhöhe auch Rektascension und Deklination des Zenites vorstellen und erstere wohl aus diesem Grunde früher als „Ascensio recta medii cœli" bezeichnet wurde. Endlich mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass wegen $360 = 24 \times 15$ und $60 = 4 \times 15$ die Relationen



$$1^h = 15^0 \qquad 1^m = 15' \qquad 1^s = 15'' \qquad 1^0 = 4^m \qquad 1' = 4^s \qquad \mathbf{2}$$

bestehen, mit deren Hilfe Bogen und Zeit sich sehr leicht ineinander umsetzen lassen.

177. Das Dreieck Pol-Zenit-Stern. — Durch Anwendung der gewöhnlichen Beziehungen am Raumdreiecke (87—92) auf das Dreieck Pol-Zenit-Stern, in welchem der Winkel am Sterne gewöhnlich als **Variation** v eingeführt wird, erhält man z. B. die Formeln

$$\mathrm{Si\,s : Si\,w : Si\,v :: Si\,z : Si\,p : Co\,\varphi} \qquad \mathbf{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Co\,p} &= \mathrm{Si\,\varphi \cdot Co\,z - Co\,\varphi \cdot Si\,z \cdot Co\,w} \\ \mathrm{Co\,z} &= \mathrm{Si\,\varphi \cdot Co\,p + Co\,\varphi \cdot Si\,p \cdot Co\,s} \\ \mathrm{Si\,\varphi} &= \mathrm{Co\,p \cdot Co\,z + Si\,p \cdot Si\,z \cdot Co\,v} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Co\,s} &= \mathrm{Co\,w \cdot Co\,v + Si\,w \cdot Si\,v \cdot Co\,z} \\ \mathrm{Co\,w} &= \mathrm{Co\,s \cdot Co\,v - Si\,s \cdot Si\,v \cdot Co\,p} \\ \mathrm{Co\,v} &= \mathrm{Co\,s \cdot Co\,w + Si\,s \cdot Si\,w \cdot Si\,\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Co\,s \cdot Si\,p} &= \mathrm{Co\,z \cdot Co\,\varphi + Si\,z \cdot Si\,\varphi \cdot Co\,w} \\ \mathrm{Co\,s \cdot Co\,\varphi} &= \mathrm{Co\,z \cdot Si\,p - Si\,z \cdot Co\,p \cdot Co\,v} \\ \mathrm{Co\,w \cdot Si\,z} &= -\mathrm{Co\,p \cdot Co\,\varphi + Si\,p \cdot Si\,\varphi \cdot Co\,s} \\ \mathrm{Co\,w \cdot Co\,\varphi} &= -\mathrm{Co\,p \cdot Si\,z + Si\,p \cdot Co\,z \cdot Co\,v} \\ \mathrm{Co\,v \cdot Si\,z} &= \mathrm{Si\,\varphi \cdot Si\,p - Co\,\varphi \cdot Co\,p \cdot Co\,s} \\ \mathrm{Co\,v \cdot Si\,p} &= \mathrm{Si\,\varphi \cdot Si\,z + Co\,\varphi \cdot Co\,z \cdot Co\,w} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Si\,s \cdot Co\,p} &= -\mathrm{Co\,w \cdot Si\,v + Si\,w \cdot Co\,v \cdot Co\,z} \\ \mathrm{Si\,s \cdot Si\,\varphi} &= \mathrm{Co\,v \cdot Si\,w - Si\,v \cdot Co\,w \cdot Co\,z} \\ \mathrm{Si\,w \cdot Co\,z} &= \mathrm{Co\,s \cdot Si\,v + Si\,s \cdot Co\,v \cdot Co\,p} \\ \mathrm{Si\,w \cdot Si\,\varphi} &= \mathrm{Co\,v \cdot Si\,s + Si\,v \cdot Co\,s \cdot Co\,p} \\ \mathrm{Si\,v \cdot Co\,p} &= -\mathrm{Co\,w \cdot Si\,s + Si\,w \cdot Co\,s \cdot Si\,\varphi} \\ \mathrm{Si\,v \cdot Co\,z} &= \mathrm{Co\,s \cdot Si\,w - Si\,s \cdot Co\,w \cdot Si\,\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{dp} &= \mathrm{Co\,v \cdot dz - Co\,s \cdot d\varphi - Si\,v \cdot Si\,z \cdot dw} \\ \mathrm{dz} &= \mathrm{Co\,w \cdot d\varphi + Co\,v \cdot dp + Si\,w \cdot Co\,\varphi \cdot ds} \\ \mathrm{d\varphi} &= \mathrm{Co\,w \cdot dz - Co\,s \cdot dp - Si\,s \cdot Si\,p \cdot dv} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{6}$$

deren Wichtigkeit die Folge bewähren wird [a].

Zu 177: *a.* Vorläufig mag es genügen ein Beispiel beizufügen: Setzt man $\mathrm{d\varphi} = 0$, $\mathrm{dw} = 0$ und (168) $\mathrm{dz} = \alpha \cdot \mathrm{Tg\,z}$, so erhält man aus 6 mit Hilfe von 1, 2, 4

$$\mathrm{dp} = \alpha \cdot \mathrm{Tg\,z \cdot Co\,v} = \alpha \frac{\mathrm{Si\,\varphi \cdot Co\,d - Co\,\varphi \cdot Si\,d \cdot Co\,s}}{\mathrm{Si\,\varphi \cdot Si\,d + Co\,\varphi \cdot Co\,d \cdot Co\,s}} = \alpha \cdot \mathrm{Ct\,(n + d)} \qquad \mathbf{7}$$

$$\mathrm{ds} = \frac{\mathrm{dz - Co\,v \cdot dp}}{\mathrm{Si\,w \cdot Co\,\varphi}} = \alpha \cdot \mathrm{Tg\,z} \cdot \frac{\mathrm{Si\,v}}{\mathrm{Si\,p}} = \alpha \cdot \frac{\mathrm{Si\,s \cdot Co\,\varphi}}{\mathrm{m \cdot Co\,d \cdot Si\,(n + d)}} \qquad \mathbf{8}$$

wo $\mathrm{m \cdot Co\,n = Si\,\varphi} \qquad \mathrm{m \cdot Si\,n = Co\,\varphi \cdot Co\,s} \qquad \mathbf{9}$

d. h. Formeln, welche erlauben, den Einfluss der Refraktion auf Poldistanz (Deklination) und Stundenwinkel (Rektascension) in leichter Weise zu berechnen.

178. Die Transformation der Coordinaten. — Die Alten gingen von den Horizontcoordinaten auf die Equatorcoordinaten, und umgekehrt, mit Hilfe eines Globus über, während man jetzt die mehr Genauigkeit darbietende Rechnung vorzieht. Für letztere erhält man nämlich, wenn zwei Hilfsgrössen x′, y′ oder x″, y″ durch

$$\mathrm{Co\,z} = x' \cdot \mathrm{Co}\,y' \qquad \mathrm{Si\,z \cdot Co\,w} = x' \cdot \mathrm{Si}\,y' \qquad \mathbf{1}$$

oder

$$\mathrm{Co\,p} = x'' \cdot \mathrm{Co}\,y'' \qquad \mathrm{Si\,p \cdot Co\,s} = x'' \cdot \mathrm{Si}\,y'' \qquad \mathbf{2}$$

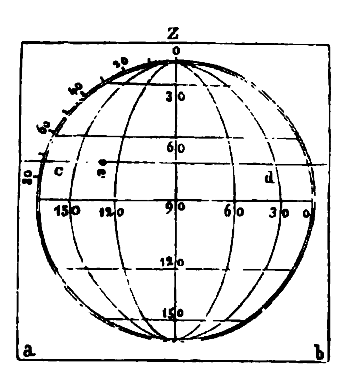
eingeführt werden, nach 177 : 2, 4 die bequemen Formeln

$$\text{Co}\, p = x' \cdot \text{Si}\,(\varphi - y') \qquad \text{Co}\, s \cdot \text{Si}\, p = x' \cdot \text{Co}\,(\varphi - y') \qquad \mathbf{3}$$

$$\text{Co}\, z = x'' \cdot \text{Si}\,(\varphi + y'') \qquad \text{Co}\, w \cdot \text{Si}\, z = - x'' \cdot \text{Co}\,(\varphi + y'') \qquad \mathbf{4}$$

welche die beiden Aufgaben in Verbindung mit 176 : 1 in unzweideutiger Weise zu lösen erlauben, sobald man nur bedenkt, dass p und z ihrer Natur nach beständig konkav, s und w aber beide gleichzeitig entweder konkav oder konvex sind [a].

Zu 178: *a.* Eine nette graphische Transformationsmethode bietet das von **Zescevich** (s. Kosmos 1860) erfundene **Triedometer** dar: Es besteht aus einer quadratischen Scheibe, auf welcher ein Kreis gezogen ist, in dem ein zweiter Kreis sich konzentrisch dreht und über welcher sich cd || ab verschieben lässt. Auf cd befindet sich ein Läufer e, während der innere Kreis ein in orthographischer Equatorealprojektion (vgl. 104) entworfenes Netz von Meridianen und Parallelkreisen hat. Um nun z. B. vom Horizont auf den Equator zu transformieren, stellt man mit Hilfe des Netzes e auf die gegebenen Werte von z und w ein, dreht den innern Kreis um $90^0 - \varphi$, und liest sodann wieder die Stellung von e ab; die neuen Ablesungen sind nun offenbar p und s. Die erhältliche Genauigkeit hängt natürlich ganz von den Dimensionen und der Ausführung des Instrumentchens ab. — Ungefähr gleichzeitig wurde durch C. **Braun** (vgl. dessen Berichte in 382) unter dem Namen **Trigonometer** ein analoges Hilfsinstrument erstellt, mit welchem dasselbe, und vielleicht noch etwas besser, durch zwei aufeinander drehbare Netze in stereographischer Equatoreal-Projektion erreicht wird. — Anhangsweise mag bemerkt werden, dass beide Instrumente auch zur Auflösung irgend eines sphärischen Dreieckes verwendet werden können, da ja jedes solche als ein Dreieck Pol-Zenit-Stern aufgefasst werden kann.



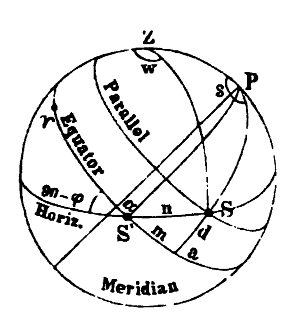
179. Aufgang, Untergang und Tagbogen. — Für $z = 90^0$, d. h. für Auf- und Untergang eines Gestirnes, erhält man nach 177 : 1

$$\text{Co}\, s = - \text{Tg}\,\varphi : \text{Tg}\, p \qquad \text{Co}\, w = - \text{Co}\, p : \text{Co}\,\varphi \qquad \mathbf{1}$$

wo nun s den halben **Tagbogen** des Gestirnes misst, w aber die Entfernung des Auf- oder Untergangspunktes vom Südpunkte giebt, folglich auch die Distanz des erstern von Ost oder die sog. **Morgenweite**, und die Distanz des letztern von West oder die sog. **Abendweite** [a]. — Für $p = 90^0$ wird nach 1, für jeden Wert von φ, sowohl s als w ebenfalls gleich 90^0, oder es geht jeder Punkt des Equators genau im Osten auf, im Westen unter, und sein Tagbogen ist gleich dem Nachtbogen. Für jeden andern Wert von p ändern sich dagegen die Verhältnisse mit φ: Ist, wie bei der sog. **Sphæra recta** der Alten, $\varphi = 0$, so werden für jedes p Tagbogen und Nachtbogen gleich, während $w = 180^0 - p$ wird. Ist dagegen, wie bei

der **Sphæra parallela**, $\varphi = 90^\circ$, so werden s und w unmöglich, d. h. es hat weder Auf-, noch Untergang statt. Für jeden Zwischenwert von φ, oder eine **Sphæra obliqua**, hat für die der sog. **arktischen Zone**, oder den Circumpolarsternen, entsprechende Ungleichheit $p < \varphi$ kein Untergang, für die der **antarktischen Zone** entsprechende Ungleichheit $p > 180^\circ - \varphi$ kein Aufgang statt; ist p zwischen φ und 90° enthalten, so ist der Tagbogen grösser als der Nachtbogen, und $w > 90^\circ$, — wird p grösser, so hat das Gegenteil statt, — etc. [b].

Zu 179: *a.* Ist S ein im Aufgange begriffener Stern und S' der gleichzeitig aufgehende Punkt des Equators, so wird die Ascensio recta von S' auch wohl **Ascensio obliqua** von S genannt. Bezeichnet man nun die sog. **Ascensionaldifferenz** $a - \alpha$ mit m, die Morgenweite SS' mit n, so hat man (87:1)



$$\mathrm{Si}\, m = \mathrm{Tg}\, d \cdot \mathrm{Tg}\, \varphi \qquad \mathrm{Si}\, n = \mathrm{Si}\, d \cdot \mathrm{Se}\, \varphi$$
$$s = 90^\circ + m \qquad w = 90^\circ + n \qquad \alpha = a - m \qquad \mathbf{2}$$

kann also leicht m und n, sowie mit ihrer Hilfe s, w und α berechnen. Für s vgl. Tab. VII^c. Speciell erhält man z. B. für $\varphi = 47^\circ\, 22\frac{1}{2}'$ (Zürich) und $p' = 66^\circ\, 32\frac{1}{2}'$ oder $p'' = 113^\circ\, 27\frac{1}{2}'$ (kleinste und grösste Poldistanz der Sonne)

$s' = 118^\circ\, 8' = 7^h\, 52\frac{1}{2}^m \quad w' = 126^\circ\, 0'$ oder $s'' = 61^\circ\, 52' = 4^h\, 7\frac{1}{2}^m \quad w'' = 54^\circ\, 0'$

Will man jedoch den halben Tagbogen der Sonne mit dem Momente beginnen, wo der oberste Punkt der Sonne (Radius 16') durch die Refraktion (Horizontalrefraktion 35') in den Horizont gehoben wird, so hat man ihn (177:6") um $ds = dz \cdot \mathrm{Se}\, \varphi \cdot \mathrm{Cs}\, w$, wo $dz = 16' + 35' = 3^m{,}4$ ist, d. h. für Zürich und den längsten Tag um $6^m{,}2$ zu verlängern. — Strenge genommen wäre dz noch um die Depression des Horizontes zu vermehren und um die Sonnenparallaxe zu vermindern; jedoch kompensieren sich diese so nahe, dass davon Umgang genommen werden kann. In „Charles A. **Schott** (Mannheim 1825 geb.; Assist. U. S. coust survey), Tables, distribution and variations of the atmospheric temperature. Washington 1876 in 4." finden sich Tafeln, welche für $\varphi = 23^\circ$ bis 60° und jeden 10. Tag unter Berücksichtigung von dz die Zeit von Auf- und Untergang der Sonne geben; sie sind auch von **Hann** in die 2. A. von Jelineks Anleitung (225) aufgenommen worden. — Die Einführung des halben Tagbogens ermöglicht, wie schon **Lambert** (78) gezeigt hat, gewisse Aufgaben in sehr bequemer Weise zu lösen: Soll man z. B. eine Tafel berechnen, welche für jeden Stundenwinkel s die Höhe h giebt, welche ein Stern der Deklination d unter der Polhöhe φ erreicht, so ist dafür die sich unmittelbar ergebende Formel

$$\mathrm{Si}\, h = \mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\, d + \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Co}\, s \qquad \mathbf{3}$$

nicht sehr bequem. Führt man dagegen den halben Tagbogen s' des Sternes ein, für welchen $0 = \mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\, d + \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Co}\, s'$ ist, so erhält man durch Subtraktion die viel bequemere Formel

$$\mathrm{Si}\, h = \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, d\, (\mathrm{Co}\, s - \mathrm{Co}\, s') = 2\, \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Si}\, \frac{s' + s}{2} \cdot \mathrm{Si}\, \frac{s' - s}{2} \qquad \mathbf{4}$$

Wenn allerdings der Stern ein Circumpolarstern ($p < \varphi$ oder $d > 90^\circ - \varphi$)

ist, so wird nach 1 die Hilfsgrösse s' imaginär, also 4 unbrauchbar; jedoch kann man, wie wieder **Lambert** (l. c.) zeigte, auch für diesen Fall eine ähnliche Formel erhalten, indem man die Hilfsgrössen α und β durch

$$\text{Sih}\,\alpha = \text{Co}\,s \qquad \text{Sih}\,\beta = -\text{Tg}\,\varphi \cdot \text{Tg}\,d \qquad \mathbf{5}$$

einführt, da hiefür 3 mit Hilfe von 78:6 in

$$\text{Si}\,h = 2\,\text{Co}\,\varphi \cdot \text{Co}\,d \cdot \text{Co}\,\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \text{Si}\,\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \mathbf{6}$$

übergeht. — *b.* Diese Sätze wurden schon durch den aus Pitane in Kleinasien gebürtigen, um 330 v. Chr. florierenden Griechen **Autolykus** in seinem Buche „*Περὶ κινουμένης σφαίρας* (griech. und lat. durch Conr. Dasypodius, Argentorati 1572 in 8.; franz. durch P. Forcadel, Paris 1572 in 4.)“ publiziert, — dann auch von **Euklid** in seine „Phænomena (Venetiis 1505 in fol. durch Barth. Zamberti, und später; deutsch durch A. Nokk: Freiburg 1850 in 8.)“ aufgenommen, — ferner von **Theodosius** von Tripolis in die etwa im letzten Jahrhundert v. Chr. geschriebenen Bücher „De habitationibus, diebus et noctibus“, welche Dasypodius seiner Ausgabe von Autolykus anhängte, — etc.

180. Die sog. Elongation. — Aus der nach 177:1 bestehenden Formel

$$\text{Si}\,w = \text{Si}\,p \cdot \text{Se}\,\varphi \cdot \text{Si}\,v \qquad \mathbf{1}$$

geht hervor, dass Si w für $v = 90^0$ und $v = 270^0$ einen Maximalwert annimmt, der aber nur zu einem reellen Werte von w führt, wenn zugleich $p < 90^0 - \varphi$ ist, also w beständig im 2. oder 3. Quadranten liegt: In diesem Falle erhalten also $180^0 - w$ und $180^0 + w$ grösste Werte, oder es gelangt der Stern nach seiner obern Culmination im Westen, und sodann wieder nach seiner untern Culmination im Osten, je zu einer grössten **Elongation** (Digression) vom Meridiane, und zwar wird für diese nach 177:2, 4

$$\text{Co}\,z = \text{Si}\,\varphi \cdot \text{Se}\,p \qquad \text{Co}\,s = \text{Tg}\,\varphi \cdot \text{Tg}\,p \qquad \mathbf{2}$$

so dass man nach 1 und 2 Azimut, Höhe und Zeit der Elongation für jeden bekannten Stern zum voraus berechnen und dadurch dessen Beobachtung wesentlich erleichtern kann. Wir werden hievon namentlich in 362 Gebrauch machen.

VIII. Die Fixsterne und Wandelsterne.

> O blicke, wenn den Sinn dir will die Welt verwirren, — Zum Himmel auf, wo nie die Sterne irren. *(Rückert.)*

---

181. Die Einteilung in Fixsterne und Wandelsterne. — Schon die vorläufige Umschau, von welcher im Eingange zum ersten Buche die Rede war, nötigte zwischen **Fixsternen** und **Wandelsternen** zu unterscheiden, und aus den seither vorgenommenen Untersuchungen und Messungen ist sogar mit aller Sicherheit hervorgegangen, dass die grosse Mehrzahl der Gestirne der erstern Kategorie angehört und somit dazu dienen kann, diejenigen der zweiten Kategorie definitiv auszuscheiden und nach ihrer temporären Lage festzulegen. Zu letzterm Zwecke wird es jedoch vorerst nötig sein, sich unter diesen vielen Fixsternen zu orientieren, und es soll zunächst nur diese Aufgabe ins Auge gefasst werden, während alles, was die Fixsterne selbst anbelangt, spätern Abschnitten vorbehalten bleibt.

182. Die Anzahl der Fixsterne. — Zwar liest man schon im ersten Buche Moses: „Der Herr sprach zu Abraham: Lieber, siehe gen Himmel, und zähle die Sterne"; aber über die Ausführung dieses Auftrages wird nichts mitgeteilt, ja das einzige einschlagende Datum aus alter Zeit ist, dass **Hipparch** in seinem, uns im Almagest aufbewahrten Sternkataloge, 1022 Sterne aufzählt. Genauere Anhaltspunkte für Kenntnis des Sternreichtums hat erst die neuere Zeit durch das Bestreben geliefert, Kartenwerke zu erstellen, welche alle mit freiem Auge erkennbaren Sterne in sich fassen: Hiebei erhielt nun z. B. **Argelander** für die nördliche Hemisphäre 2342, und für die bis zum 36. Grad reichende südliche Zone noch 882, also im ganzen 3224 solcher Sterne, — **Behrmann** vom 20. südlichen Parallel bis zum Südpole 2344 Sterne, — **Houzeau** am ganzen Himmel 5719 Sterne. Da nun der ganze Himmel, wenn man den Grad als Einheit oder $r = 180 : \pi$ einführt, $4 r^2 \pi = 41253$ Quadratgrade hält, so fallen bei Houzeau durchschnittlich 0,139

Sterne auf einen Quadratgrad, — auf den von Argelander und Behrmann abgezählten Räumen aber 0,099 und 0,173, also im Mittel aus beiden, nahe mit Houzeau übereinstimmend, 0,136 Sterne. — Werden auch die teleskopischen Sterne einbezogen, so nimmt dann allerdings die Anzahl auf Hunderttausende, ja bei Steigerung der optischen Mittel bald in solchem Masse zu, dass von eigentlicher Abzählung abstrahiert und zur Schätzung übergegangen werden muss, und es ist natürlich letztere, welche Wilh. **Herschel** zu der Angabe führte, dass in seinem 20-füssigen Spiegelteleskope bei 20 Millionen Sterne, oder durchschnittlich an 500 Sterne per Quadratgrad sichtbar sein möchten.

183. Die scheinbare Grösse. — Als erstes Mittel zur Orientierung unter den Sternen kam schon bei den Griechen die Klassifizierung nach dem Glanze, oder der sog. **scheinbaren Grösse,** in Gebrauch: Sie teilten die von freiem Auge sichtbaren Sterne in 6 Grössenklassen, wobei die erste Klasse die hellsten, die sechste die gerade noch wahrnehmbaren Sterne umfasste. So ist im Sternverzeichnisse des Almagest jedem Sterne eine solche Grössennummer beigefügt, und in dem von dem Perser **Al-Sûfi** im 10. Jahrhundert angelegten Sternverzeichnisse ist sogar auf diese Grössenbestimmung bereits viele Sorgfalt verwendet [a]. — Nach Erfindung des Fernrohrs wurden sodann noch neue Klassen beigefügt, und zwar so, dass etwa die 6 folgenden mit 6-füssigen Refraktoren bequem gesehen werden können, und wieder etwa die 6 folgenden bis zu den kleinsten Sternen führen, welche in den lichtstärksten Fernröhren der Neuzeit noch deutlich sichtbar sind. Überdies werden in allen Klassen, nach dem Vorgange von **Al-Sûfi** [b], noch Zwischenstufen, und zwar wohl am zweckmässigsten in der Weise eingeschaltet, dass man einer Grössennummer noch die vorhergehende oder die nachfolgende anhängt, je nachdem man verstärken oder schwächen will; so z. B. werden starke, mittlere oder schwache Sterne zweiter Klasse mit 2.1, oder 2, oder 2.3 bezeichnet. **Argelander** hat sogar (285) zu gewissen Zwecken für nötig erachtet, von einer Grössenklasse zur nächsten mittelst 10 **Stufen** überzugehen [c].

Zu 183: *a.* Hans Frederik Christian **Schjellerup** (Odense 1827 — Kopenhagen 1887; erst Uhrmacher, dann Observ. Kopenhagen) hat sich das Verdienst erworben, das Sternverzeichnis von **Al-Sûfi** unter dem Titel „Description des étoiles fixes. St-Pétersbourg 1874 in 4." herauszugeben. Dasselbe wurde jedoch schon früher mehrfach benutzt, und so sagt z. B. der etwa 4½ Jahrhunderte später als Al-Sûfi lebende **Ulugh-Beg** selbst, dass er von dessen Grössenangaben Gebrauch gemacht habe. Wie **Mädler** (Gesch. I 104) auf letzteres gestützt fabeln konnte: „Durch den Araber Al-Sûfi liess er den Hipparch'schen Katalog auf seine Zeit reduciren" ist unbegreiflich und hat

ihm auch in der Note „Chr. H. **Peters**, Über Ulugh Beg's Sterngrössen (A. N. 2367 von 1881)" wohlverdienten Tadel eingetragen. — Nach Houzeau (Ciel et terre 1885) verglich Henri **Selder** zu Tournay 1340 und wieder 1367 den Sternkatalog des Almagest mit dem Himmel, um allfällige Veränderungen im Glanze der Sterne oder das Verschwinden einzelner derselben zu konstatieren; sein Doppelkatalog liege auf der Pariser Bibliothek und wäre publikationswürdig. — *b.* Nach Peters (l. c.) sollen schon im Kataloge des Almagest durch Beifügen von μείζων (grösser) und ἐλάσσων (kleiner) eine Art Zwischenstufen angedeutet sein: In Halmas Ausgabe konnte ich jedoch nur die 6 Klassen, und bei einzelnen Sternen, statt eigentlicher Grössenangabe, die Bezeichnung ἀμαυρῶς (dunkel, undeutlich) finden. — *c.* Die spätern abendländischen Beobachter (inklusive Piazzi) legten auf die Notierung der Sterngrössen nur untergeordnetes Gewicht und **Lalande** war so ziemlich der erste neuere, der die Grössen sorgfältig zu bestimmen suchte, jedoch meistens überschätzte, so dass man bei ihm einzelne Sterne als 5., ja 4. Grösse eingetragen findet, die dem freien Auge kaum sichtbar sind. — Auf 1000 von freiem Auge sichtbare Sterne besitzen

die Grösse	1	2	3	4	5	6
nach Argelander am Nordhimmel	4	14	41	91	235	615
nach Behrmann am Südhimmel .	3	9	24	53	199	712
nach Houzeau überhaupt . .	4	9	35	104	212	636

184. Die Sternnamen. — Der schon im höchsten Altertum eingeführte, dann aber namentlich durch die Araber sehr ausgedehnte Gebrauch, einzelne Sterne zu benennen, ist zwar in neuerer Zeit, als gar zu belästigend für das Gedächtnis, im allgemeinen wieder ausser Kurs gekommen; jedoch finden immer noch manche der früher benutzten Namen in der sog. Astrognosie Verwendung, und es durfte somit auch hier dieses Mittel zur Orientierung unter den Sternen nicht ganz unbeachtet bleiben [a].

Zu 184: *a.* Es dürfte angegeben sein, die gebräuchlichsten dieser Sternnamen, unter Beifügung der korrespondierenden Bezeichnungen Bayers (188), hier aufzuführen, — nämlich:

Acharnar . .	α Eridani	Gemma	α Coronæ
Aldebaran	α Tauri	Hamal	α Arietis
Alderamin	α Cephei	Markab	α Pegasi
Algenib	α Persei	Menkar	α Ceti
Algol	β Persei	Pollux	β Geminorum
Alphard	α Hydræ	Procyon	α Canis min.
Altair	α Aquilæ	Regulus	α Leonis
Antares	α Scorpii	Rigel	β Orionis
Arcturus . . .	α Bootis	Sadalmelek . .	α Aquarii
Arneb	α Leporis	Schedir	α Cassiopeæ
Canopus	α Argus	Sirius	α Canis maj.
Capella	α Aurigæ	Sirrah	α Andromedæ
Castor	α Geminorum	Spica	α Virginis
Deneb	α Cygni	Thuban	α Draconis
Denebola	β Leonis	Wega	α Lyræ
Dubhe	α Ursæ maj.	Yildun	δ Ursæ min.

Für weitern Detail muss auf „Victor **Lach**, Anleitung zur Kenntniss der Sternnamen mit Erläuterungen der arabischen Sprache und Sternkunde. Leipzig 1796 in 8., — Ludwig **Ideler**, Untersuchungen über den Ursprung und die Bedeutung der Sternnamen. Berlin 1809 in 8., — etc.", verwiesen werden.

185. Die Sternbilder der Alten. — Als wirksamstes Hilfsmittel für die Astrognosie muss noch jetzt die bereits in vorhistorischer Zeit begonnene Einteilung der Sterne in Gruppen oder sog. **Sternbilder** betrachtet werden. — Diese Einteilung nahm wohl ihren Anfang mit Ausscheidung des die Wandelsterne beherbergenden Himmelsgürtels, des **Zodiakus** oder **Tierkreises**, und dessen Zerlegung in zwölf, den Monaten entsprechende **Zeichen**; aber bald dehnte sie sich auch auf die übrigen Teile des Himmels aus, und obschon dabei die verschiedenen Völker etwas verschieden vorgingen, namentlich in der den Gruppen beigelegten Bedeutung variierten, so ist doch eine gewisse Verwandtschaft nicht zu verkennen, somit die Annahme ganz plausibel, dass die von den Chinesen [a] in grauer Vorzeit gemachte Einteilung nach und nach unter fortwährender Modifikation auf andere Völker, und so schliesslich auch auf die Griechen [b] übergegangen sei. Sicher ist, dass sich schon bei **Homer** und **Hesiod**, oder circa neun Jahrhunderte vor Beginn unserer Zeitrechnung, einige unserer Sternbilder erwähnt finden, und dass bereits zur Zeit von **Eudoxus**, oder im 4. Jahrhundert v. Chr., der ganze in Griechenland sichtbare Sternhimmel so ziemlich mit denselben mythologischen Figuren bedeckt war, welche der im 2. Jahrhundert n. Chr. geschriebene Codex der griechischen Astronomie, der sog. Almagest des Ptolemäus, auf uns gebracht hat [c].

Zu 185: *a.* Vgl. „**Deguignes**, Planisphère céleste chinois. Paris 1782 in 4., und: G. **Schlegel**, Uranographie chinoise. Leyde 1875, 2 Vol. in 8., Atl. in fol. (eine sehr verdienstliche Arbeit, obschon es nicht jedermanns Sache sein dürfte, mit deren Verfasser auf volle 17 Jahrtausende v. Chr. zurückzugehen)". — *b.* Da die griechischen Sternbilder den Argonautenzug verherrlichen, dagegen die Helden des trojanischen Krieges ignorieren, so kann man ziemlich sicher annehmen, dass die Griechen die Mehrzahl ihrer Sternbilder schon im 13. Jahrhundert v. Chr. besassen. — *c.* **Ptolemäus** zählt im Almagest folgende 21 Sternbilder nördlich vom Tierkreise auf:

1. *Ursa minor,* der kleine Bär, la petite ourse.
2. *Ursa major,* der grosse Bär, la grande ourse. — Der dafür noch jetzt gebräuchliche Name „Wagen" kömmt schon bei den Indern und im Buche Hiob vor; auch bei den Griechen soll ἅμαξα fast häufiger als ἄρκτος gebraucht worden sein.
3. *Draco,* der Drache, le dragon.
4. *Cepheus,* ein König von Ethiopien.
5. *Bootes,* der Ochsentreiber (Bärenhüter), le bouvier.
6. *Corona borealis,* die nördliche Krone, la couronne boréale.

7. *Herkules*, ein in schwerer Arbeit begriffener Mann. — Bei Ptolemäus „der Knieende (τοῦ ἐν γόνασιν)".
8. *Lyra*, die Leyer, la lyre. — Früher eine Schildkröte, aus deren Schale sodann Apollos Leyer entstand.
9. *Cygnus*, der Schwan, le cygne. — Bei Ptolemäus schlechtweg „der Vogel (ὄρνιθος)", — bei den Arabern eine Henne.
10. *Cassiopeia*, die Gemahlin des Cepheus (4).
11. *Perseus*, der Retter der Andromeda (20).
12. *Auriga*, der Fuhrmann, le cocher.
13. *Ophiuchus*, der Schlangenträger (Eskulap), le serpentaire.
14. *Serpens*, die Schlange, le serpent.
15. *Sagitta*, der Pfeil, la flèche.
16. *Aquila*, der Adler, l'aigle. — Schon Ptolemäus sagt, dass man aus den informen Sternen des Adlers eine Beigabe zu demselben, den Antinous, gebildet habe.
17. *Delphinus*, das Meerschwein, le dauphin.
18. *Equuleus*, das Füllen, le petit cheval. — Bei Ptolemäus „des Pferdes Vorderteil (ἵππου προτομή)".
19. *Pegasus*. — Bei Ptolemäus noch schlechtweg „das Pferd (ἵππος)", — früher ohne Flügel.
20. *Andromeda*, die Tochter des Cepheus (4).
21. *Triangulum*, das Dreieck, le triangle. — Das sog. Nil-Delta.

Sodann folgen im Almagest die zwölf Sternbilder des Tierkreises oder Zodiakus (vgl. 191):

22. *Aries*, der Widder, le bélier.
23. *Taurus*, der Stier, le taureau.
24. *Gemini*, die Zwillinge, les gémaux. — Bei den Griechen die sog. Dioskuren Castor und Pollux, — dagegen bei den Orientalen Kinder verschiedenen Geschlechtes, — und bei den ältern Abendländern (vgl. pag. 168 von Seb. Münsters „Rudimenta" von 1551, und pag. 82 von Portas Schrift „Della celeste fisionomia" von 1616) wohl auch Mann und Weib als Sinnbild der Ehe.
25. *Cancer*, der Krebs, l'écrevisse.
26. *Leo*, der Löwe, le lion.
27. *Virgo*, die Jungfrau, la vierge. — Anfänglich, wie auch die beigegebene Ähre andeutet, die Ernährerin, — wohl auch eine Frau, die ein Kind säugt.
28. *Libra*, die Wage, la balance. — Von den Orientalen als Schalen (Wagschalen) bezeichnet, ging dies Sternbild bei den Griechen, durch Verwechslung mit den ebenso genannten Skorpionsscheren, in dem folgenden Sternbilde auf, so dass sie längere Zeit nur 11 Zeichen hatten, — während die Römer die Wage kannten und wohl der als Themis gedachten Jungfrau in die Hand gaben. Ptolemäus hat die Wage als eigenes Sternbild, aber noch unter dem Namen der „Scheren (χηλαί)".
29. *Scorpius*, der Skorpion, le scorpion.
30. *Sagittarius*, der Schütze, le sagittaire.
31. *Capricornus*, der Steinbock, le capricorne.
32. *Aquarius*, der Wassermann, le verseau.
33. *Pisces*, die Fische, les poissons.

Zum Schlusse führt Ptolemäus südlich vom Tierkreise noch folgende 15 Sternbilder auf:

34. *Cetus,* der Wallfisch, la baleine.
35. *Orion,* ein gewaltiger Jäger.
36. *Eridanus,* ein Fluss. — Bei Ptolemäus schlechtweg „der Fluss (ποταμός)", — also wohl am ehesten der Nil.
37. *Lepus,* der Hase, le lièvre.
38. *Canis major,* der grosse Hund, le grand chien. — Bei Ptolemäus schlechtweg „der Hund (κυνός)".
39. *Canis minor,* der kleine Hund, le petit chien. — Bei Ptolemäus „Procyon (προκύων)", wie jetzt der Hauptstern.
40. *Argo navis,* ein (als Symbol des Jahres) 12 oder 52 Ruder besitzendes Schiff. — Bei Ptolemäus nur „Argus (Ἄργους)".
41. *Hydra,* die Wasserschlange, l'hydre.
42. *Crater,* der Becher, la coupe.
43. *Corvus,* der Rabe, le corbeau.
44. *Centaurus,* der Centaur, le centaure.
45. *Lupus,* der Wolf, le loup. — Bei Ptolemäus schlechtweg ein Tier (θηρίον)", und erst bei den Arabern ein Wolf.
46. *Ara,* der Altar, l'autel. — Bei Ptolemäus „das Rauchfass (θυμιατήριον)".
47. *Corona australis,* die südliche Krone,. la couronne australe. — Bei den Arabern ein Straussennest.
48. *Piscis austrinus,* der südliche Fisch, le poisson austral.

Diese 48 Sternbilder der Alten wurden sodann auch alsbald im Abendlande angenommen; doch kamen anfänglich noch zuweilen Variationen vor: So findet man z. B. in der „Teutsch Astronomei (Frankfurt 1545) in fol." zwischen Löwe und Jungfrau ein „Panner (vexillum = Fahne)" eingeschoben, — unter Schütze und Steinbock ein „Nebiger (Neper = Bohrer = cerabellum)", — etc.; dafür fehlen dann aber einige der südlichsten Sternbilder, und die Zahl 48 wird immer eingehalten. — Für die Bedeutung der Sternbilder vgl. z. B. „J. H. **Westphal,** Astrognosie. Berlin 1822 in 8."

186. Die neuern Sternbilder. — Nachdem die griechischen Sternbilder sich auch im Abendlande eingebürgert hatten, fanden dieselben dort nach und nach vielfache Ergänzungen, indem man einerseits aus den noch uneingeteilten, sog. **informen** Sternen des Ptolemäus neue Gruppen bildete, und anderseits, entsprechend der fortschreitenden Kenntnis des südlichsten Himmels, auch diesen, den Griechen noch unbekannt gebliebenen Teil des Firmamentes, mit Sternbildern bedeckte; ja es entstand zeitweise eine förmliche Manie, sich in solcher Weise zu bethätigen, so dass es schliesslich unerlässlich wurde, derselben entgegenzutreten und die Neubildungen auf das Notwendige zu beschränken [a].

Zu 186: *a.* Zunächst wurden 4 neue Sternbilder acceptiert, welche am Ende des 16. und zu Anfang des 17. Jahrhunderts in Vorschlag gekommen waren, nämlich:

49. *Coma Berenices,* das Haupthaar der egyptischen Königin Berenice oder Pherenike, la chevelure de Bérénice. — Die Coma wurde schon von Archimeds Freund **Conon** eingeführt und von **Hipparch** als eigenes Sternbild aufgezählt, dagegen von **Ptolemäus** nur unter dem Namen „Haar-

flechte (πλόκαμος)" als nebliger Sternhaufen nach den informen Sternen des Löwen erwähnt: Erst auf den Vorschlag von **Tycho** wurde sie dann definitiv als eigentliches Sternbild angenommen.

50. *Columba*, die Taube, la colombe. — Dieses Sternbild wurde zuerst von dem holländischen Geographen **Plancius** vorgeschlagen, sodann 1603 durch **Bayer** in seine Uranometrie, und 1624 durch **Bartsch** (als Columba Nohæ) in sein Planisphærium aufgenommen. Dass erst **Halley** die Taube eingeführt habe, ist also nicht wahr.
51. *Monoceros*, das Einhorn, la licorne. — Dieses Sternbild wurde nach Klöden schon um die Mitte des 16. Jahrhunderts als „Ross", dagegen erst durch **Bartsch** als „Einhorn (unicornu, μονόκερως)" eingeführt.
52. *Camelopardalus*, die Giraffe, la giraffe. — Wahrscheinlich ebenfalls schon ältern Ursprungs, wurde auch dies Sternbild definitiv durch **Bartsch** eingeführt.

Als sodann die vereinzelten Wahrnehmungen, welche mutmasslich schon die spätern **Araber**, und dann jedenfalls die abendländischen Indienfahrer und Weltumsegler, an dem südlichsten Himmel gemacht hatten, nach und nach durch eigentliche Beobachtungen gestützt wurden, — als namentlich der Seefahrer Pieter Dircksz Keyser oder **Petrus Theodorus** von Emden, von 1594 bis zu seinem 1596 erfolgten Tode auf Java, etc., bei 121 der südlichsten Sterne nach ihrer Lage bestimmt, und um 1600 auch der, nachmals 1627 zu Alkmaar verstorbene, aber von Gouda gebürtige Seemann Friedrich **v. Houtman** eine ähnliche, noch umfangreichere Arbeit durchgeführt hatte, welche als Anhang zu seinem „Sprack end Woordenboeck in de Malijsche ende Madagaskarsche Talen. Amsterdam 1600 in 8." erschien, und noch neuerlich durch Aristide **Marre** (Mamers in Sarthe 1823 geb.; Prof. orient. Paris) unter dem Titel „Catalogue des étoiles circumpolaires australes observées dans l'île de Sumatra par Fr. Houtman (Bull. math. et astr. 1881)" in französischer Übersetzung ausgegeben wurde, — fing auch der Südhimmel an sich auf den Karten und Globen zu bevölkern. So finden wir am Ende des 16. und im Anfange des 17. Jahrhunderts teils bei Peter **Plancius**, dem Lehrer des Petrus Theodorus, in einer, seiner Karte „Orbis terrarum typus" beigegebenen südlichen Hemisphäre, — teils in wachsender Ausdehnung bei **Hondius, Blaeu** und **Bayer**, sei es einzelne jener Sterne, sei es einige aus ihnen formierte Gruppen eingetragen, — ja **Bartsch** hat in seinem „Usus astronomicus planisphærii stellati. Argentinæ 1624 in 4." ausser einigen später verworfenen, bereits folgende 13, noch jetzt gebräuchliche solche Sternbilder:

53. *Hydrus*, die kleine Wasserschlange, l'hydre mâle. — Kömmt schon bei Bayer vor.
54. *Phönix*, der Phönix, le phénix. — Schon bei Bayer.
55. *Dorado*, der Schwertfisch oder Goldfisch, la dorade. — Schon bei Bayer.
56. *Chamæleon*, das Chamäleon, le caméléon. — Schon bei Bayer.
57. *Piscis volans*, der fliegende Fisch, le poisson volant. — Schon bei Bayer.
58. *Crux*, das südliche Kreuz, la croix du Sud. — Seine Sterne stiegen in früherer Zeit noch in Alexandrien merklich über den Horizont, wurden aber von **Ptolemäus**, ja noch von **Bayer**, dem Centaur zugeteilt, wobei jedoch letzterer die Bemerkung machte, es sei aus ihnen von den neuern ein Kreuz gebildet worden. Es geschah dies vielleicht schon recht frühe (wahrscheinlich von den Arabern), da bereits **Dante** in seiner „Divina Comedia" davon zu sprechen scheint, — ziemlich sicher von den Spaniern,

wie aus „Jose **d'Acosta**, Historia natural y moral de los Indias. Sevilla 1590 in 4." hervorgehen soll, und auch **Bartsch** dadurch andeutet, dass er auf „Crux" noch „Hispan. Cruzero" folgen lässt, — jedenfalls also nicht erst 1679 durch Aug. **Royer** in seinen zu Paris ausgegebenen „Cartes du ciel", wie einige berichten.

59. *Musca,* die Fliege, la mouche. — Royer hat dafür „Apis (die Biene)".
60. *Apus,* der Paradiesvogel, l'oiseau de paradis. — Kömmt als „Apis (seu avis) indica" schon bei Bayer vor.
61. *Triangulum australe,* das südliche Dreieck, le triangle austral. — Kömmt schon bei Bayer vor. Die Angabe, dass **Lacaille** dasselbe in eine Bleiwage umgeändert habe, scheint unrichtig, da er in seinem „Coelum australe" Name und Figur beibehielt; dagegen ist allerdings bei **Fortin** dem „triangle austral" noch „niveau" beigeschrieben.
62. *Pavo,* der Pfau, le paon.
63. *Indus,* der Indianer, l'indien. — Schon bei Bayer.
64. *Grus,* der Kranich, la grue. — Schon bei Bayer.
65. *Tucana,* der Tukan, le toucan. — Kömmt ebenfalls schon bei Bayer vor, — auch als „anser indica (amerik. Gans)".

Als ferner 1690 aus dem Nachlass von **Hevel** unter dem Titel „Firmamentum Sobiescianum" eine Darstellung des Sternhimmels auf 54 Blättern erschien, fanden sich in derselben auch verschiedene neue Sternbilder vor, von welchen noch folgende 7 acceptiert wurden:

66. *Lynx,* der Luchs, le lynx. — Ein Bild in einer sternarmen Gegend aus lauter kleinen Sternen gebildet, so dass nach Hevels Ausdruck die meisten derselben nur mit „Luchsaugen" zu sehen sind.
67. *Leo minor,* der kleine Löwe, le petit lion.
68. *Sextans,* der Sextant, le sextant. — Von Hevel zum Andenken an das Instrument eingeführt, mit welchem er von 1658 bis zu der Feuersbrunst, welche ihm 1679 Instrumente, Bibliothek und fast alle Manuskripte vernichtete, seine Sternpositionen bestimmte.
69. *Canes venatici,* die Jagdhunde, les levriers. — Eine Wiederherstellung der früher Bootes beigegebenen Hunde.
70. *Scutum Sobiesii,* der Sobieski'sche Schild, l'écu de Sobieski. — Zur Erinnerung an den Retter Wiens, den Polenkönig Joh. **Sobieski**, welchem Hevel viele Unterstützung verdankte.
71. *Vulpecula cum ansere,* das Füchschen mit der Gans, le renard et l'oye.
72. *Lacerta,* die Eidechse, le lezard.

Nachdem endlich **Lacaille** 1752 während seinem Aufenthalte am Kap eine Revision des Südhimmels durchgeführt hatte, fand er nötig, auch da noch einige neue Sternbilder einzuführen, von welchen später folgende 12 acceptiert wurden:

73. *Apparatus sculptoris,* die Bildhauerwerkstatt, l'atelier du sculpteur.
74. *Fornax,* der chemische Ofen, le fourneau chimique.
75. *Horologium,* die Pendeluhr, l'horloge à pendule.
76. *Reticulum,* das Fadennetz, le réticule romboide. — Das von Lacaille vorzugsweise gebrauchte Mikrometer.
77. *Caelum sculptoris,* der Grabstichel, le burin du sculpteur.
78. *Mons mensæ,* der Tafelberg, la montagne de la table. — Von Lacaille zum Andenken an seinen Aufenthalt am Kap eingeführt.
79. *Equus pictoris,* die Malerstaffelei, le chevalier du peintre.

80. *Antlia pneumatica,* die Luftpumpe, la machine pneumatique.
81. *Circinus et norma,* Zirkel und Lineal, le compas du géomètre et l'équerre de l'architecte.
82. *Telescopium,* das Fernrohr, le télescope.
83. *Octans,* der Octant, le compas de réflexion.
84. *Microscopium,* das Mikroskop, le microscope.

Ausser diesen 84 Sternbildern, welche vollkommen hinreichen, um sämtliche Sterne unterzubringen, kamen im Laufe der Zeiten noch viele andere, zum Teil sogar auf Kosten schon bestehender gebildete Gruppen in Vorschlag: So wollte z. B. **Halley** zum Andenken an seinen unglücklichen König eine „Karls-Eiche" einführen, — Gottfr. **Kirch** das „Brandenburgische Scepter" an den Himmel setzen, — **Lemonnier** zum Andenken an die Lappländische Messung ein „Rennthier", — Pater **Hell** das Herschel'sche „Spiegelteleskop", und zu Ehren von Herschels Mäcen die „Georgs-Harfe", — **Lalande** zum Andenken an den Kometenjäger Messier den „Erntehüter (messier)", zur Verherrlichung seiner Zonenbeobachtungen den dabei gebrauchten „Mauerquadrant", und überdies noch seine „Katze", — **Bode** die „Friedrichsehre", die „Buchdrucker-werkstatt" und den „Luftballon", — etc. — Wäre nicht Halt geboten und das Überflüssige wieder beseitigt worden, so würde die beim Einführen der Sternbilder angestrebte Übersichtlichkeit und Ordnung bald in die ärgste Unordnung und Willkür übergegangen sein. Man kann es daher **Argelander** nicht genug danken, dass er 1843 in seiner massgebenden „Uranometria nova" diesen Reinigungsprocess konsequent und energisch durchgeführt hat.

187. Die Abänderungsvorschläge. — Neben der gesunden Thätigkeit, welche das 17. Jahrhundert für den Ausbau der beschreibenden Gestirnkunde zeigte, traten in demselben auch mehrere ganz gut gemeinte, aber die vor allem aus wünschbare Übereinstimmung gefährdende Vorschläge auf, die bildliche Darstellung des Sternhimmels ganz umzugestalten [a]. Zu gutem Glücke wurden jedoch diese Vorschläge sämtlich abgelehnt, und auch die auf völlige Beseitigung gerichtete Bilderstürmerei einiger neuern hat bis jetzt, wie ich glaube mit Recht, ebenfalls wenig Anklang gefunden [b].

Zu 187: *a.* So ärgerte sich Julius **Schiller** (1580? — Augsburg 1627; Rechtsgelehrter und Scholarch in Augsburg) über die heidnischen Sternbilder, und verband sich mit seinem Freunde Joh. **Bayer** zur Entwerfung eines „christlichen" Sternhimmels: Die 12 Zeichen des Tierkreises sollten den für die 12 Stämme Israels bestimmten Aposteln, der Perseus dem Heidenapostel Paulus weichen, — die Stelle des grossen Bären sollte dem Schiff Petri, diejenige von Argo navis der Arche Noäh eingegeben werden, — der Schlangenträger wurde durch Papst Benedikt ersetzt, der Pegasus durch den Erzengel Gabriel, der Fuhrmann durch den hl. Hieronymus, — Herkules war durch die hl. drei Könige verdrängt, Cassiopeia durch Maria Magdalena, der Centaur durch den Erzvater Abraham, der Paradiesvogel durch Eva, der Orion durch den hl. Joseph, der grosse Hund durch den König David, — etc., wobei natürlich nur selten der Umfang der alten Bilder genau eingehalten werden konnte. Zu gutem Glücke fand aber dieser Vorschlag, trotz der schönen Ausführung des ihn darstellenden, schon 1624 mit k. Privilegium versehenen, jedoch erst 1627, nach dem Tode der beiden Freunde unter Aufsicht von Jakob **Bartsch** (Lauban

in der Lausitz 1600 — ebenda 1633; zuerst Gehilfe, dann auch Schwiegersohn Keplers; Arzt und designierter Prof. math. Strassburg) im Drucke vollendeten und zu Augsburg unter dem Titel „Coelum stellatum christianum" ausgegebenen Atlasses, wenig Anklang, wenn auch letzterer von einigen Kartenfabrikanten (wie z. B. von Schenk und Falk in Amsterdam) als Kuriosum nachgebildet wurde und wahrscheinlich die jetzt selten gewordene Schrift „Hier. **Drexelius**, Zodiacus christianus locupletatus. Coloniæ Agripp. 1634 in 12." veranlasste. Schillers Vorschlag, den 7 Wandelsternen der Alten von Saturn abwärts die Namen: „Adam, Moses, Josua, Christus, Johannes der Täufer, Elias und Maria" beizulegen, ging vollends ungehört vorüber. — Fast gleichzeitig mit Schiller sprach auch Wilhelm **Schickard** (Herrenberg in Würtemberg 1592 — Tübingen 1635; Diacon zu Nürtingen, dann Prof. math. et hebr. Tübingen) in seinem „Astroscopium. Tubingæ 1623 in 12. (Noch später, z. B. Stuttgart 1698)" aus, man könnte bei den Sternbildern „biblische Gedanken" haben, und G. Ph. **Harsdörffer** stimmte sodann 1651 in seinen „Deliciæ (II 275)" dieser Ansicht ebenfalls bei: So z. B. wollten sie die Zwillinge in Esau und Jakob, das Haar der Berenice in dasjenige Absalons, Orion in Josua, Perseus mit dem Medusenhaupte in David mit dem Kopfe Goliaths, Cassiopeia in Bathseba, etc., umwandeln. Auch diese Modifikation wurde jedoch mit Recht abgelehnt. — Der sonderbare Vorschlag endlich, welchen Erhard **Weigel** in einem Anhange zu seiner „Sphærica. Jenæ 1688 in 8." machte und mehrfach auf kolossalen Globen ausführte, nämlich die Sternbilder durch die Wappen der Fürsten, Länder und Städte zu ersetzen, d. h. einen sog. „heraldischen" Himmel einzuführen, fand begreiflicherweise noch weniger Beifall, und es ist nur der Kuriosität wegen anzuführen, dass man noch gegenwärtig im Museum zu Kassel einen „Himmelsglobus von getriebenem Silber von Prof. Weigel in Jena 1699 (Durchm. 0m,36)" sieht, auf welchem solche Wappen angebracht sind. — *b.* Dass die neuere Zeit bei bildlichen Darstellungen des Sternhimmels, im Gegensatze zu früher, die Sterne als Hauptsache behandelt und die Bilder nur in leichten Umrissen beifügt, — bei Detailkarten letztere sogar ganz weglässt, — ist natürlich nur zu loben; aber man soll auch da das Kind nicht mit dem Bade ausschütten.

188. Die Bezeichnung der Sterne. — Um die einzelnen der einem Sternbilde zugeteilten Sterne noch leichter von einander zu unterscheiden, fügte **Ptolemäus** im Almagest ihren Coordinaten und scheinbaren Grössen noch Beschreibungen der Lage im Bilde bei, was bei sternreichen Bildern zu Weitläufigkeiten, und wegen Ermanglung fester Figuren sogar häufig zu Missverständnissen führte [a]. Dennoch wurde dieses Verfahren mehr als ein Jahrtausend beibehalten; ja als etwas vor der Mitte des 16. Jahrhunderts **Piccolomini** den praktischen Vorschlag machte, jedem Sterne eines Bildes einen Buchstaben beizulegen und sodann Bild und Buchstabe zur Bezeichnung desselben zu verwenden [b], wurde er kaum beachtet. Erst als zu Anfang des 17. Jahrhunderts **Bayer** einen analogen Vorschlag machte [c], bürgerte sich die ihm entsprechende, jetzt allgemein gebräuchliche Sternbezeichnung, nach und nach ein.

Zu 188: *a.* So bezeichnete z. B. **Ptolemäus** den später „Aldebaran" genannten Stern als denjenigen, der im südlichen Auge des Stieres stehe, —

„Arcturus" als den feuerfarbigen Stern zwischen den Schenkeln des Bootes, — „Rigel" als den Glänzenden am linken Fusse des Orion, — etc. — *b.* Aless. **Piccolomini** gab seiner Schrift „Della sfera del mondo. Venezia 1539 in 4. (viele spätere Ausgaben, so z. B. lat. 1568, ital. 1579)" ein „Libro delle stelle fisse" bei, welches Kärtchen der Sternbilder und einen beschreibenden Text enthält: In den Kärtchen liess er, um sie nicht zu überladen, die Umrisse der Bilder und die kleinern Sterne absichtlich weg, fügte dagegen jedem aufgenommenen Sterne einen lateinischen Buchstaben bei und benutzte sodann diesen im Texte als Bezeichnung; ferner enthalten einzelne Ausgaben (so diejenige von 1579) eine 69 Blätter füllende Tafel, in welcher zu Gunsten der Astrognosie je für die Sterne a, b, c eines Bildes angegeben ist, in welcher Zenitdistanz und in welcher Morgen- oder Abendweite dieselben in jedem Monate und in jeder Nachtstunde am Himmel zu suchen sind. — *c.* Auch Johannes **Bayer** (Rhain in Bayern 1572 — Augsburg 1625; Rechtsanwalt in Augsburg) fügte in seiner noch später (190) zu besprechenden „Uranometria" jedem Sterne eines Bildes einen Buchstaben bei, — für die hellern Sterne die ersten Buchstaben des griechischen Alphabets benutzend, — für die schwächern die spätern Buchstaben desselben, — und, wo diese nicht ausreichten, noch lateinische Buchstaben. Immerhin hielt er sich nicht ängstlich an die Regel, der Grössenfolge auch die Buchstabenfolge korrespondieren zu lassen, sondern liess oft mnemonische Rücksichten mitwirken, und **Argelander** tadelte daher in seiner Abhandlung „De fide Uranometriæ Bayeri. Bonnæ 1842 in 4." mit Recht das unkritische Verfahren einiger Neuern, aus solchen Differenzen auf seitherige reelle Veränderungen schliessen zu wollen.

189. Die Lehrgedichte. — Obschon gegenüber dem Almagest von untergeordneter Wichtigkeit, verdienen immerhin die uns erhaltenen Lehrgedichte, welche **Aratus** [a], **Manilius** [b] und **Hyginus** [c] der Beschreibung des Sternhimmels widmeten, eine kurze Erwähnung, da durch sie teils direkt, teils indirekt infolge der ihnen gewidmeten Kommentare, viele historisch wertvolle Notizen auf uns gekommen sind, die uns bereits gedient haben und noch im folgenden dienen werden [d].

Zu 189: *a.* Um 270 v. Chr. am Hofe des Königs Antigonus von Macedonien lebend, verfasste **Aratus** in griechischer Sprache ein Lehrgedicht, das im Altertume hoch gehalten, von **Cicero** ins Lateinische übergetragen, und nach Erfindung der Buchdruckerkunst unter dem Titel „Phænomena et prognostica" vielfach aufgelegt wurde, — so schon „Venetiis 1499 in fol., und dann wieder „Basileæ 1523 in 8." mit Scholien von Jakob Wiesendanger oder **Ceporinus** (Dynhard bei Zürich 1499 — Zürich 1525; erst Korrektor bei Cratander in Basel, dann Prof. philol. Zürich); als eine der besten Originalausgaben wird diejenige bezeichnet, welche **Buhle** „Heidelberg 1793—1801, 2 Bde. in 8." besorgte, — auch ist die „Heidelberg 1824 in 8." erschienene deutsche Übersetzung in Versen bemerkenswert, welche man **Voss** verdankt. — Der Inhalt, welcher sich auf zwei seither verloren gegangene Werke von **Eudoxus**, nämlich auf dessen „Ἔνοπτρον (Spiegel)" und dessen „Φαινόμενα (Himmelserscheinungen)", stützt, ist nicht gerade sehr bedeutend, wie die Voss entnommene Probe

„Unter den Füssen sodann des Orion schaue den Hasen
Jenen im ewigen Laufe gejageten; und wie beständig
Seirios hinter ihm her forteilt, dem verfolgenden ähnlich,
Und ihm zunächst aufgeht und auch dem gesunkenen nachspäht"

zeigt; aber ein gewisser Wert ist ihm dennoch als ältestem Versuche dieser Art nicht abzusprechen, und überdies kömmt ihm das Verdienst zu, **Hipparch** zu einem, von Dion. **Petavius** in sein „Uranologion. Parisiis 1630 in fol." aufgenommenen Kommentar veranlasst zu haben, durch welchen uns manche wertvolle Notizen über dessen eigene Arbeiten und über diejenigen von Eudoxus erhalten worden sind. — *b.* Ein demjenigen von Aratus verwandtes Lehrgedicht ist das „Astronomicon", welches der unter Augustus, also etwa in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts v. Chr., lebende römische Dichter Marcus **Manilius** schrieb. Wie geschätzt auch diese Schrift, aus der im folgenden einiger Detail mitgeteilt werden wird, früher war, bezeugt z. B. die Thatsache, dass sie schon „Ex officinâ Jo. de Regiomonte. Nurembergâ 1473 in 4." erschien, also zu einer Zeit, wo kaum noch ein anderes astronomisches Werk aufgelegt worden war; auch später wurde sie noch mehrfach herausgegeben, namentlich „Paris 1786, 2 Vol. in 8." durch **Pingré**, unter Beigabe von franz. Übersetzung und von Noten. — *c.* Das von einem Zeitgenossen des Manilius, dem Freigelassenen Julius **Hyginus**, verfasste „Poeticon astronomicon" wurde ebenfalls schon „Venetiis 1488 in 4." in der Ursprache, und sogar bereits „Augsburg 1491 in 4." in deutscher Übersetzung publiciert, — vieler späterer Ausgaben nicht zu gedenken. — *d.* Anhangsweise mag noch der, **Eratosthenes** zugeschriebenen „Catasterismi" gedacht werden, welche allerdings nur eine trockene Aufzählung von den Sternbildern und einem Teile der zugehörenden Sterne geben. Sie wurden 1672 einer Oxforder-Ausgabe des Aratus angehängt und sodann „Gottingæ 1795 in 8." durch J. C. **Schaubach**, unter Beigabe von Erläuterungen, herausgegeben.

190. Die Globen, Sternverzeichnisse und Karten. — Zur bildlichen Darstellung des Sternhimmels und der vereinbarten Gruppen wurden von den Griechen wohl ausschliesslich Kugeln benutzt, auf welche die Hauptsterne, mit Hilfe eines Netzes von Meridianen und Parallelen, nach einem Sternverzeichnisse; — die Nebensterne aber, gestützt auf direkte Vergleichung mit dem Himmel, nach dem Augenmasse eingetragen wurden [a]. In der Ausführung solcher „Himmelsgloben" zeichneten sich dann wieder die Araber aus [b], und ebenso entstanden etwas später im Abendlande manche bemerkenswerte Arbeiten dieser Art [c], — ja als die Holländer den guten Gedanken hatten, die Kugeln mit bedruckten Streifen zu überziehen, wurden die Globen alsbald zu einem nicht unbedeutenden Handelsartikel [d]. — Die Ausbildung der Chorographie hatte sodann zur Folge, dass die Sterngloben in Sternkarten, wie solche schon im Altertume in den später (360) zu behandelnden „Retes" der Planisphärien einigermassen repräsentiert waren, eine wirksame Konkurrenz erhielten [e]. Als ferner nach Erfindung des Fernrohrs und nach dem Eintreten der grossenteils damit zusammenhängenden

Vervollkommnung der praktischen Astronomie, die Reichhaltigkeit und Zuverlässigkeit der Sternverzeichnisse ungemein zunahm, so schlugen die Karten, welche diesen Fortschritten besser als die Globen folgen konnten, diese letztern fast ganz aus dem Felde und es entstand successive eine ganze Reihe immer vollkommenerer, überdies meist von entsprechenden Sternverzeichnissen begleiteter Kartenwerke, wie solche zu wissenschaftlichen Zwecken jetzt ausschliesslich gebraucht werden [f].

Zu 190: *a.* Man weiss, dass schon **Eudoxus** und **Hipparch** Himmelsgloben verfertigten, und aus dem Almagest (vgl. Buch VII, Kap. 1) geht hervor, dass wenigstens derjenige des Letztgenannten zur Zeit des Ptolemäus noch im Museum zu Alexandrien existierte. Leider sind seither beide samt den zugehörigen Sternverzeichnissen spurlos verschwunden; dagegen erzählt **Heis** im Vorberichte zu seinem neuen Himmelsatlas, dass der im k. Museum zu Neapel aufbewahrte „Farnesische Atlas“ eine Marmorkugel trage, welche „in künstlerischer Vollendung“ die Himmelsfiguren in erhabener Arbeit zeige, und nach der Lage des Frühlingspunktes etwa von 300 v. Chr. datiere, also nur wenig jünger als der Globus von Eudoxus sein dürfte. — *b.* Die Araber basierten bekanntlich alle ihre Arbeiten auf den Almagest, und so legte auch der im 10. Jahrhundert am Hofe zu Bagdad lebende persische Astronom **Al-Sûfi** seinem, bereits in 183 besprochenen Sternverzeichnisse ebenfalls zunächst jenes Kapitalwerk zu Grunde; aber er blieb hiebei nicht stehen, sondern verfertigte nach seinem, unter der 201 entsprechenden Annahme einer Präcession von 1° in 66 Jahren, erhaltenen Kataloge einen Globus, verglich denselben sorgfältig mit dem Himmel und verbesserte sodann rückwärts erstern bestmöglich. Dass nichts destoweniger **Ulug-Begh**, als er etwa $4^1/_2$ Jahrhunderte später den Katalog von Al-Sûfi unter Annahme einer Präcession von 1° in 70 Jahren auf seine Zeit reduzieren und sodann darnach ebenfalls einen Globus konstruieren liess, bei Vergleichung des letztern mit dem Himmel noch manche Unrichtigkeiten fand, darf uns nicht verwundern, — ja brachte sogar der Astronomie insofern grossen Nutzen, als sich hiedurch Ulug-Begh veranlassen liess, alle ihm sichtbaren Sterne neu zu bestimmen und nur 27 ihm hiefür zu südliche Sterne nach der von Al-Sûfi angenommenen Lage beizubehalten: So entstand der erste, von Hipparch-Ptolemäus wenigstens grösstenteils unabhängige Sternkatalog, der sodann 1665 zu Oxford durch Thomas Hyde unter dem Titel „Tabulæ longitudinis et latitudinis stellarum fixarum ex observatione Ulugbeighi“ veröffentlicht und noch 1843 durch Fr. Baily in sein Sammelwerk aufgenommen wurde. — Leider haben sich auch die Globen von Al-Sûfi und Ulug-Begh nicht erhalten; dagegen besitzt Florenz einen um 1080 von dem Araber Ibn Said **As-Sahli** al Wazzan erstellten Globus, — Velletri im Kirchenstaate einen solchen vom Jahre 1225, den S. Asseman unter dem Titel „Globus cœlestis cufico-arabicus Musei Borgiani illustratus. Patavii 1790 in 4.“ beschrieben hat, — London einen ebensolchen von 1275, für welchen Bernh. Dorns „Description of the celestial globe belonging to the Roy. Asiatic Society of London (Trans. Asiat. Soc. 1845)“ zu vergleichen ist, und einen zweiten nahe aus derselben Zeit, auf welchen sich R. W. Rothmans Notiz „On an arabic globe belonging to the Society (Mem. Astr. Soc. 12 von 1842)“ bezieht, — Dresden einen ebensolchen von 1279, welchen schon früher W. Beigel (Berl.

Jahrb. 1808) beschrieb, und der seither in den Schriften „C. Schier, Globus cœlestis arabicus qui Dresdæ in museo mathematico asservatur. Lipsiæ 1865 in 8., und: Adolf Drechsler, Der arabische Himmelsglobus, angefertigt 1279 zu Maragha, zugehörig dem k. math. Salon zu Dresden. Dresden 1873 in 4." einlässlich behandelt wurde, — Paris einen mutmasslich ebenfalls aus dem 13. Jahrhundert stammenden Globus, von welchem Sédillot in seinem Mémoire von 1841 (p. 117—41) handelte, — etc. — *c.* Von den im Abendlande ausgeführten Arbeiten solcher Art mag z. B. ein Globus von $1^{2}/_{3}'$ Durchmesser erwähnt werden, welchen Joh. **Stöffler** 1493 konstruierte und der sich noch jetzt (vgl. Heis Woch. 1857) im Lyceum zu Konstanz vorfinden soll, — ferner ein „grosser" Himmelsglobus, welchen Gerhard **Mercator** 1551 (nach Breusing) für den Bischof von Lüttich ausführte, und ein kleinerer, welchen derselbe Künstler etwa 1553 für Karl V. anfertigte und bei dem die Sternbilder auf einer Glaskugel „mit dem Demant eingeschnitten und mit Gold eingebrannt" waren, — sodann der dreifüssige Globus, welchen **Dasypodius** (vgl. Biogr. III) etwa 1560 verfertigte und zur Ausschmückung der Strassburger-Uhr hergab, — endlich der kupferne Globus von $0^{m},72$ Durchmesser mit zum Teil in Silber eingelegten, zum Teil eingravierten Sternen, welchen Joost **Bürgi** von 1585 hinweg für Landgraf Wilhelm baute, und der noch jetzt, wie aus „Cöster und Gerland, Beschreibung der Sammlung im Museum zu Cassel. Cassel 1878 in 4." hervorgeht, um seiner vorzüglichen Ausführung willen, neben verschiedenen Planetolabien desselben Meisters, bewundert wird. — *d.* Während von den ältern Globen jeder einzelne für sich durch Gravieren auf Metall, Malen auf grundiertes Holz, etc., erstellt war, hatte Jans **Blaeu** den guten Gedanken, Streifen zu konstruieren und zu vervielfältigen, mit welchen er eine beliebige Anzahl von Globen bekleben konnte; er benutzte dabei wahrscheinlich ein Sternverzeichnis, das er durch seinen bei Tycho weilenden Sohn Willem erhalten hatte, und es waren mutmasslich Exemplare solcher Streifen, welche Tycho (vgl. Kästner II 393) austeilte und auf welche sich Kepler in dem von „Carl Anschütz, Ungedruckte wissensch. Correspondenz zwischen Joh. Kepler und Herwart von Hohenburg. Prag 1886 in 8." mitgeteilten Briefe von 1599 IV 9 bezog. — Mit Blaeu konkurrierte Jodocus Hond oder **Hondius** (Wackene in Flandern 1563 — Amsterdam 1611; Kupferstecher und Schriftgiesser in Amsterdam) in Konstruktion grosser Globen, und „Jodocus Hondius jun.", der 1613 mit Adr. Veen einen hübschen Himmelsglobus von $0^{m},56$ Durchmesser herausgab, war ohne Zweifel dessen Sohn und Geschäftsnachfolger. — *e.* Als etwa 1515 Konrad **Heynfogel** den Entschluss fasste, den Sternhimmel mit seinen Bildern auf einer Ebene darzustellen, so war er, da ihm jede Kenntnis alter Globen abging, genötigt, folgenden Weg einzuschlagen: Er trug die Sterne nach den ihm von Stabius auf Grund des Almagests gelieferten Positionen in das entworfene Netz ein, — schrieb dann jedem derselben bei, wo er nach der von Ptolemäus gegebenen Beschreibung in dem betreffenden Bilde zu stehen habe, — und ersuchte nunmehr seinen Freund Albrecht **Dürer** (Nürnberg 1471 — ebenda 1528; der berühmte Maler), die Figuren nach diesen Indikationen bestmöglich herzustellen. Dürer löste die ihm gestellte Aufgabe mit gewohnter Meisterschaft, wenn auch natürlich nicht ohne einige Willkür, und es sind diese, von ihm selbst in Holz geschnittenen, aber jetzt äusserst selten gewordenen, auch in den meisten Exemplaren von „Cl. Ptolemæi phænomena stellarum 1022 fixarum. Acc. imagines sphæræ barbaricæ 48 Albr. Dureri. Coloniæ Agr. 1537 in fol." fehlenden Figuren, welche den Karten der folgenden

Jahrhunderte fast ausschliesslich als Vorbild gedient haben. — Von dieser eigentümlichen Leistung abgesehen, basiert der erste grössere Fortschritt in Darstellung des Sternhimmels auf der bereits (188) erwähnten, durch **Bayer** herausgegebenen „Uranometria, sive omnium asterismorum schemate quinquaginta et unum, in totidem tabulis novâ methodo delineata. Aug. Vind. 1603 in fol. (auch spätere Ausgaben von 1648, 1661, etc., bei welchen jedoch der bei der ersten Ausgabe auf der Rückseite der Tafeln gegebene, beschreibende Text fehlt; letzterer wurde dagegen später als „Explicatio" selbständig ausgegeben, z. B. „Ulmæ 1697 in 8.")". Da nämlich Bayer bei Anlage seiner Karten nicht nur mit grossem Sachverständnisse vorging und sich keineswegs darauf beschränkte, das Tychonische Sternverzeichnis und andere ihm zugängliche Hilfsmittel auszunützen, sondern auch selbst viele Vergleichungen mit dem Himmel vornahm, ferner zugleich die (188) bereits besprochene Reform der Sternbezeichnung durchführte, so erwarb er sich durch seine Arbeit wirklich grosses Verdienst und es blieb mit Recht sein Atlas bei einem Jahrhundert der beliebteste. — Aus der nächsten Nachfolge von Bayer erwähne ich noch: „Jak. **Bartsch**, Usus astronomicus planisphærii stellati. Argentinæ 1624 in 4. (auch 1651, und: Norimb. 1662), — Franc. **Lamb**, Astroscopium, or two hemispheres containing all the northern and southern constellations projected upon the poles of the world. London 1673 in 4. (die zwei Karten haben einen Radius von 40^{cm} und sind ganz hübsch ausgeführt), — Aug. **Royer**, Cartes du ciel, réduites en quatre tables. Paris 1679 in 12., — Joh. **Hevelius**, Firmamentum Sobiescianum. Gedani 1690 in fol. (vgl. 186), — Andreas **Cellarius**, Harmonia macrocosmica seu Atlas universalis et novus, totius universi creati cosmographiam generalem et novam exhibens. Amstel. 1708 in fol. (21 Tafeln stellen die Weltsysteme und die Theorien der Wandelsterne dar, 2 den christlichen und 6 den heidnischen Sternhimmel), — Leonh. **Rost**, Atlas portatilis cœlestis oder compendiöse Vorstellung des ganzen Weltgebäudes. Nürnberg 1723 in 8., — etc." — *f.* Als 1729 zu London aus dem Nachlasse von **Flamsteed** dessen „Atlas cœlestis" erschien, der, grossenteils gestützt auf dessen eigene Beobachtungen, den Sternhimmel auf 28 Karten von 19" Höhe und 23" Breite in mustergiltiger Weise darstellte, war die Bayer'sche Leistung definitiv überflügelt, und als sodann der Civilingenieur J. **Fortin** den guten Gedanken hatte, diesen teuren und alsgemach auch selten werdenden Atlas, unter Aufsicht von **Lemonnier**, auf $^1/_3$ zu reduzieren und unter dem Titel „Atlas céleste de Flamsteed, seconde édition. Paris 1776 in 4. (neue Ausg. 1795 nach Revision durch Lalande und Méchain)" zu publizieren, fand derselbe eine grosse Verbreitung, zumal ihm noch eine Karte des südlichsten Himmels nach Lacaille beigegeben wurde. — Eine merkliche Konkurrenz trat dann allerdings ein, als **Bode** mit seiner „Représentation des astres sur 34 planches en taille douce, suivant l'atlas céleste de Flamsteed, édition de Paris. Berlin 1782 in 4.", unter Beigabe eines Kataloges von 5058 Sternen, sowie von Abbildungen einiger Nebel und Sternhaufen, ein ähnliches Hilfsmittel bot, und sodann seine „Uranographia viginti tabulis æneis. Berolini 1801 in fol." bearbeitete, welche nunmehr Grundlage zahlreicher grösserer und kleinerer Produktionen solcher Art wurde, deren Verwandtschaft durch Überladung mit allen möglichen unnötigen Sternbildern gekennzeichnet ist. — Einen wohlthuenden Kontrast zu diesen letztern bildet die bereits erwähnte Musterarbeit „**Argelander**, Uranometria nova. Berlin 1843 in fol.", welche sodann später für den nur durch eine einzige Übersichtskarte repräsentierten Südhimmel in

„Carl **Behrmann**, Atlas des südlichen gestirnten Himmels. Leipzig 1874 in fol.“ die wünschbare Ergänzung fand: Die Sterne und ihre möglichst richtige Darstellung nach Lage und Grösse sind bei beiden Werken zur Hauptsache geworden, — die nur in leichten Umrissen (Argelander) oder Grenzlinien (Behrmann) gegebenen und auf das Notwendigste beschränkten Sternbilder treten gegen jene zurück und erfüllen nur noch den ihnen allein zukommenden Dienst, die Orientierung zu erleichtern. — Als eine in ihrer Art einzige Leistung ist endlich noch speciell die von **Houzeau**, auf Grund einer 1868—75 in Jamaika, Panama, etc., gemachten uniformen Aufnahme des ganzen Himmels, entworfene „Uranométrie générale (Ann. Brux. 1878)“ zu erwähnen. — Eine Reihe anderer, zum Teil ebenfalls wichtiger und später noch näher zu berührender Publikationen, mag vorläufig noch in chronologischer Folge Erwähnung finden: „Joh. Gabriel **Doppelmayr**, Atlas novus cœlestis. Norimbergæ 1742 in fol., — Christian Friedrich **Goldbach** (Taucha in Sachsen 1763 — Moskau 1811; Prof. astr. Moskau), Neuester, auf der Sternwarte Seeberg revidirter Himmelsatlas. Weimar 1799 in fol., — A. **Jamieson**, A celestial Atlas of 30 Maps. London 1822 in fol., — C. L. **Harding**, Atlas novus cœlestis viginti septem tabulis. Gottingæ 1822 in fol. (sehr reichhaltig; neue A. durch Jahn: Halle 1856), — Academische Sternkarten. Berlin 1830—58 in fol., mit Sternverzeichniss (Specialkarten der Equatorealzone, welche auf Anregung von Bessel unter Leitung von Encke per Hora durch Argelander (2), d'Arrest, Bogulawski, Bremiker (5), Capocci, Fellöcker, Göbel, Harding (2), Hencke, Hussey, Knorre, Luther, Morstadt, Olufsen, Schwerd, Steinheil und Wolfers (2) ausgeführt wurden), — G. **Schwinck**, Mappa cœlestis. Lipsiæ 1843 in fol., — Karl Friedrich **v. Klöden** (Berlin 1786 — ebenda 1856; Schuldirektor in Berlin), Der Sternenhimmel. Weimar 1848 in 8. (nur Text, aber sehr reichhaltig), — Otto **Möllinger** (Speier 1814 — Zürich 1886; Prof. math. Solothurn), Himmelsatlas mit transparenten Sternen. Solothurn 1851 in 4. (noch mehrere verwandte Werke von ihm und seinem Sohn Oskar in 106 : g), — **Bishops** ecliptical charts, observed and laid down by R. Hind. London 1852 in fol., — **Argelander**, Atlas des nördlichen gestirnten Himmels, unter Mitwirkung von E. Schönfeld und A. Krüger entworfen. Bonn 1863 in fol., und als Fortsetzung: Atlas der Himmelszone zwischen 1 und 23° südl. Deklination, in den Jahren 1876—85 bearbeitet von E. Schönfeld. Bonn (1887) in fol., — Ch. **Dien**, Atlas céleste. Paris 1865 in fol. (3 éd. 1877), — Richard **Proctor** (Chelsea in England 1837 — New-York 1888; langjähriger Sekretär Roy. Astr. Soc. und Litterat), A Star Atlas. London 1870 in fol., — Eduard **Heis** (Köln 1806 — Münster 1877; Prof. math. Köln, Aachen und Münster), Neuer Himmelsatlas. Köln 1872 in fol., — B. A. **Gould**, Uranometria argentina. Buenos Ayres 1879 in 4., Atlas in fol. (für das Studium des Südhimmels von höchstem Interesse), — Richard **Schurig**, Himmelsatlas. Leipzig 1886 in fol., — Herm. **Klein**, Sternatlas. Leipzig 1887 in fol., — etc.“ — Für die neuern Sternkataloge auf 616 verweisend, mag zum Schlusse noch darauf aufmerksam gemacht werden, welche reiche und ausreichende Mittel in diesen Globen und Karten für die sog. **Astrognosie** vorliegen: Sobald man nur einige wenige der leicht kenntlichen Sternbilder, wie z. B. den grossen Bär oder Wagen, die ein W an den Himmel schreibende Cassiopeia, den ein Kreuz darstellenden Schwan, etc., aufzufinden weiss, so hat man keine Schwierigkeit, Globus oder Karte zu orientieren, dann auf ihnen und am Himmel entsprechende Konfigurationen und Alignements aufzusuchen, etc., um sich so bis in ein beliebiges Detail hinein vorläufig auf diese äusserliche Art mit dem Sternhimmel vertraut zu machen.

191. Die Sonne als Wandelstern. — Unser Tagesgestirn, die **Sonne**, nimmt zwar im allgemeinen ebenfalls an der täglichen Bewegung des Himmels Teil; aber ausserdem hat es noch eine entgegengesetzte Bewegung, welche dasselbe in einem zu dem Equator um etwa $23^1/_2{}^0$ geneigten, vom aufsteigenden Knoten aus, dem sog. **Frühlingspunkte**, in 12 sog. **Zeichen** von je 30° geteilten grössten Kreise, der sog. **Ekliptik**, um die Erde führt [a]. Infolge dieser sekundären Bewegung verspätet sich die Sonne bei jeder folgenden Culmination um nahe 4^m gegen die Sterne, — eine Verspätung, welche in einem circa $365^1/_4$ Tage langen Zeitraume, dem sog. **Jahre**, zu einem vollen Tage anwächst [b]. Diese jährliche Bewegung, und die demselben Cyklus unterworfene Veränderung der Morgenweite und der Mittagshöhe, wurde schon frühe durch Beobachtungen am Gnomone, durch Notieren der Tageslänge, durch Beachten des sog. **helischen** Aufganges gewisser Sterne, etc., erkannt [c]; auch merkte man auf die Zeitpunkte der sog. Sonnenwenden oder **Solstitien**, der sog. Nachtgleichen oder **Equinoktien**, von denen erstere den grössten und kleinsten, letztere den mittlern Mittagshöhen entsprechen, — und teilte das Jahr vom Equinoktium des Frühlingspunktes aus in die vier sog. **Jahreszeiten**: Frühling, Sommer, Herbst und Winter [d]. — Die mit der halben Distanz der die Ekliptik zwischen sich schliessenden Parallelkreise, der sog. **Wendekreise**, oder auch mit der halben Differenz der Solstitialhöhen übereinkommende Neigung der Ekliptik gegen den Equator, die sog. **Schiefe der Ekliptik**, nimmt nach den Beobachtungen gegenwärtig langsam ab, beträgt im Jahre 1850 + t nahe

$$e = 23^0\,27'\,29'',6 - 0'',48 \cdot t$$

und wird nach den Ergebnissen der sog. Mechanik des Himmels etwa A. 6000 im Minimum gleich 22° 54′ werden, während sie etwa A. 2000 v. Chr. ein Maximum von 23° 53′ erreicht hatte [e]. — Endlich ist zu erwähnen, dass die durch die Equinoktial- und Solstitialpunkte führenden Deklinationskreise **Coluren**, — die durch die Ekliptikpole bestimmten Parallele aber **Polarkreise** heissen [f].

Zu 191: *a.* Wenn man wiederholt, wo möglich tagtäglich, die Deklination der Sonne und ihre Rektascensionsdifferenz mit einem Fixsterne misst, — sodann mit Hilfe dieser Daten auf einem Globus die Folge der Sonnenörter verzeichnet, — und diese verbindet, so erhält man in der That einen um $23^1/_2{}^0$ gegen den Equator geneigten Kreis. Jedoch scheint die Sonnenbahn, lange bevor diese Methode ausführbar war, bekannt, und **Pythagoras** höchstens „der erste Grieche" gewesen zu sein, welcher von derselben Kenntnis besass. Aus jener ältern Zeit stammt wohl auch die schon früher (185) angedeutete, noch von **Eudoxus** und seinen Nachfolgern eingehaltene Übung, die Sonnenbahn mit dem Tierkreise oder Zodiakus (ζωδιακός κύκλος) zu identifizieren, und wie

diesen in 12 Zeichen (ζώδια oder δωδεκατημόρια) zu zerlegen; der Name **Ekliptik** (ἔκλειψις = Wegbleiben), welcher an die Thatsache erinnert, dass die Finsternisse nur beim Eintreten des Mondes in die Sonnenbahn entstehen, soll nach Ideler erst durch **Makrobius**, der um 405 einen „Commentarius in somnium Scipionis" schrieb, eingeführt worden sein. — Die unter sich gleichen Zeichen der Ekliptik erhielten die Namen der uns schon bekannten Sternbilder des Tierkreises, obschon letztere sehr ungleiche Räume bedecken und sich ihrer Lage nach gegen den Frühlingspunkt (nach 200) fortwährend verschieben. Das vierte bis neunte dieser Zeichen heissen **absteigend**, die übrigen **aufsteigend**, und ihre Folge wird durch die Verse

„Sunt Aries (♈), Taurus (♉), Gemini (♊), Cancer (♋),
Leo (♌), Virgo (♍),
Libraque (♎), Scorpius (♏), Arcitenens (♐), Caper (♑),
Amphora (♒), Pisces (♓)"

festgehalten, welchen Joh. **Reinstein** in seinem „Schlüssel der newen astronomischen Rechentaffel. Erffordt 1584 in 4. (auf der schon 1583 zu astrologischen Zwecken gedruckten „Rechentaffel" selbst liest man: „A Johañe Reinsteinio Thuringo, Theologo et Astronomo in Baronatu Tautenburgensi".)" die deutschen Verse

„Widder, Stier, Zwilling, Krebs und Leu,
Jungfrau, Wag, Scorpius dabey,
Schütz, Steinbock, Wassermann und Visch
Seind die zwölff Himmelisch Bildtniss."

substituieren wollte. — Der Tierkreis wurde frühe und vielfach in egyptischen Tempeln abgebildet, und so soll z. B. Kambyses, als er 525 v. Chr. Egypten eroberte, im Tempel von Heliopolis einen Tierkreis aus reinem Golde annexiert haben. Von den auf uns gekommenen Darstellungen ist diejenige am berühmtesten, welche im Anfange unsers Jahrhunderts durch französische Gelehrte im Vorhofe eines Tempels zu Denderah oder Tentyra gefunden wurde und die 1821 Louis XVIII. teilweise nach Paris transportieren liess. Man legte diesem Tierkreise im Anfange ein enormes Alter bei, indem man glaubte, in demselben ein Bild des Himmels zur Zeit seiner Verfertigung zu besitzen, bis J. B. **Biot** (vgl. seine „Recherches" von 1823) zeigte, dass derselbe kaum vor 716 v. Chr. konstruiert worden sei, ja bald darauf Jean-Antoine **Letronne** (Paris 1787 — ebenda 1848; Prof. Gesch. und Bibl. Paris) in seinen „Recherches pour servir à l'histoire de l'Egypte" und spätern Abhandlungen nachwies, dass der betreffende Tempel erst im 3. Jahrhundert n. Chr. erbaut sein könne; auch K. **Riel** soll durch die auf dem Tierkreise selbst vorkommenden Zahlen zu einer entsprechenden Altersbestimmung geführt worden sein. Vgl. ferner „Johannes **Dümichen** (Weissholz in Schlesien 1833 geb.; Prof. Strassburg), Baugeschichte des Denderatempels. Strassburg 1877 in 8." — Anhangsweise ist zu erwähnen, dass die alten Inder und Chinesen, sowie auch die Araber vor Mohammed, den Tierkreis ausserdem in 28 Teile geteilt haben sollen, welche sie **Mondhäuser** hiessen, — eine Einteilung, welche für die Völker, die (303) ihrer Zeitrechnung die Mondbewegung zu Grunde legten, in der That ganz natürlich war. — *b.* Die der Sonne zur Rückkehr in dieselbe Lage zu einem Sterne nötige Zeit, oder die Länge des sog. **siderischen Jahres**, lässt sich aus Meridiandurchgängen leicht bestimmen. So wurden z. B. zu Paris (vgl. Annal. de l'Observ. 12—13) folgende Culminationen beobachtet:

Datum	Objekt	Angabe Sternuhr	Gang nach α Tauri	Korrigierte Uhrzeiten	
		h m s		s	
1856 VII 28	α Tauri	4 28 2,16		2,16	$4^h\ 7^m\ 45^s{,}66$
— 29	⊙	8 35 47,70	$+0^s{,}71$	47,82	
— —	α Tauri	4 28 1,45		2,16	$60^s{,}25$
1857 VII 28	α Tauri	4 27 25,60		25,60	
— 29	⊙	8 34 10,69	$+1{,}92$	11,01	4 6 45,41
— —	α Tauri	4 27 23,68		25,60	0 3 54,43 = 234,43
— 30	⊙	8 38 3,20		5,44	

Es brauchte somit die Sonne 1857 VII 29, über die bereits verflossenen 365 Tage hinaus, noch $60{,}25 : 234{,}43 = 0^d{,}256$, um dieselbe Distanz von α Tauri zu erreichen, welche sie 1856 VII 29 hatte, oder es hält das siderische Jahr etwa 365,256 Tage, — genauer im Mittel aus vielfachen Bestimmungen

$$365^d{,}256\,3744 = 365^d\ 6^h\ 9^m\ 10^s{,}75$$

eine Zahl, welche nahe mit dem Mittel der von **Gauss** und **Hansen** angenommenen Werthe 365,256 3835 und 365,256 3582 übereinstimmt. Wenn also die Sonne zum 365. Mal culminiert, so hat ein Stern, bei welchem sie anfänglich stand, dies schon fast einen Tag früher gethan, — culminiert also bald nachher zum 366. Mal, — und erreicht sodann die Sonne schliesslich unter dem Stundenwinkel 0,256 3744, so dass genau 366,256 3744 Sternculminationen dieselbe Zeit wie 365,256 3744 Sonnenculminationen erfordern. Setzt man daher den Jahresdurchschnitt des, wie wir bald sehen werden, etwas veränderlichen Zeitintervalles zwischen zwei sich folgenden Sonnenculminationen, den sog. **mittlern Sonnentag**, gleich einer Einheit, und die in dieser Einheit ausgedrückte konstante Länge des Sterntages gleich x, so ist $1 . 365{,}256\,3744 = x . 366{,}256\,3744$, woraus

$$x = \overline{9{,}998\,8126} = 0{,}997\,2696 = 23^h\ 56^m\ 4^s{,}09$$
$$1 = \overline{0{,}001\,1847} \cdot x = 1{,}002\,7379 \cdot x = 24\ \ 3\ \ 56{,}55$$

folgt, und sich zugleich die mnemonisch wertvolle Beziehung ergiebt, dass 365 mittlere Zeitsekunden sehr nahe 366 Sternzeitsekunden ausmachen. — c. Die Alten nannten den Auf- oder Untergang eines Sternes bei Auf- oder Untergang der Sonne **kosmisch** (ortus et occasus cosmicus = Frühaufgang und Spätuntergang), — denjenigen bei Unter- oder Aufgang der Sonne **akronyktisch** (ortus et occasus acronychus = Spätaufgang und Frühuntergang), — den zum ersten Mal sichtbar **vor** Sonnenaufgang statthabenden Aufgang, oder den zum letzten Mal **nach** Sonnenuntergang sichtbaren Untergang endlich **helisch** (ortus et occasus heliacus). Für die Berechnung dieser Erscheinungen auf später (197) verweisend, mag hier noch bemerkt werden, dass die alten Griechen namentlich den helischen Aufgang des Sirius (für sie VII 16, jetzt etwa VIII 20) beachteten, und auf ihn den Anfang einer Hitzeperiode, der sog. **Hundstage** (jours caniculaires), setzten, welche sie 55 Tage (bis IX 8) andauern liessen; die Schweizer-Kalender legen diese Periode auf VII 16 bis VIII 27 (6 Wochen), während man sonst (nach Ideler) übereingekommen sein soll, dafür VII 23 bis VIII 23 zu wählen, d. h. die Zeit, wo die Sonne im Zeichen des Löwen weilt. Die Tiefe der Sonne beim helischen Aufgange eines Gestirnes nennt man den **Erscheinungsbogen** (arcus apparitionis) dieses letztern,

und **Ptolemäus** nahm an, dass diese Tiefe für Sterne 1. Grösse 12°, für jede folgende Klasse aber 1° mehr, also für Sterne 6. Grösse bereits 17° betrage, — für Merkur 5°, für Venus und Jupiter 10°, für Saturn 11° und für Mars 11½°. (Vgl. Math. Lex. von 1747, wo für diese Zahlen, die noch Kepler und Riccioli benutzt haben sollen, auf Almagest lib. 23 cap. 7 verwiesen wird; die Ed. Halma hat nun bloss 13 Bücher, und in lib. 8 cap. 5—6 oder II 104—13, wo von diesen Verhältnissen gehandelt wird, fand ich sie nicht.) — Die kosmischen und akronyktischen Auf- und Untergänge konnten nicht beobachtet werden, dagegen die helischen, welche den Alten als eine Art Kalender dienten, nach dem sie ihre landwirtschaftlichen Arbeiten ordneten. **Autolykus** nahm statt den 18° Depression der Sonne, welche nach der gewöhnlichen Annahme (223) dem Anfange oder Ende der Dämmerung entsprechen, 15 Ekliptikgrade, und kam so zu dem Schlusse, dass man von den 12 Zeichen des Tierkreises im Verlaufe jeder Nacht 11 sehen könne, — gewissermassen von 15° nach der Sonne bis zu 15° vor derselben. — *d.* Für die Bestimmung der Eintritte der Sonne in die vier Kardinalpunkte der Ekliptik (welche gegenwärtig auf III 20, VI 21, IX 22 und XII 21 fallen) vgl. 199; dagegen mag hier erwähnt werden, dass den durch sie bedingten vier **astronomischen** Jahreszeiten die sog. **meteorologischen** Jahreszeiten gegenübergestellt werden, welche mit III 1, VI 1, XI 1 und XII 1 beginnen, so dass die durchschnittlich wärmsten und kältesten Tage in die Mitte des Sommers und Winters fallen. — *e.* Zur Ermittlung der Schiefe der Ekliptik wandte man, wie schon oben angedeutet, meistens die Solstitialhöhen der Sonne an, und diese wurden früher in der Regel, nach dem Vorgange von **Tschu-Kong,** aus den am Gnomone bestimmten längsten und kürzesten Mittagsschatten abgeleitet, — später wohl auch direkt gemessen. Es erhielten auf solche Weise z. B.

Tschu-Kong in Loyang	um —2100	... e = 23°	54′	2″
Eratosthenes in Alexandrien	— 220		45	7
Albategnius in Damaskus	879		35	41
Ulugbegh in Samarkand	1437		31	48
Bradley in Greenwich	1750		28	18
Bakhuijzen in Leiden	1870		27	22

so dass sich eine beständige Abnahme derselben ergiebt, deren jährlicher Betrag im Mittel auf etwa ½″ ansteigt. Eine solche sekuläre Verminderung hatten schon einzelne ältere Astronomen vermutet, und namentlich war Egn. **Danti** in seinem „Trattato dell' Astrolabii. Firenze 1569 in 4.“ für dieselbe eingestanden, während andere dieselben bezweifelten. Die neuern Beobachtungen haben nun die Richtigkeit von Dantis Ausspruch erwiesen, und überdies gelang es schon **Euler,** mit Hilfe der Mechanik des Himmels die Veränderlichkeit der Schiefe der Ekliptik als eine Notwendigkeit zu erweisen, sowie dann etwas später **Lagrange,** die oben mitgeteilten Grenzwerte zu ermitteln. Wir werden übrigens später auf diese Verhältnisse, mit welchen sich zur Zeit namentlich auch Thomas **Bugge** (vgl. seine Note „Über die Schiefe der Ekliptik und ihre Secular-Abnahme“ in Berl. Jahrb. 1794, die viele Zusammenstellungen und historische Angaben enthält) und der unglückliche Joh. Wilhelm **Wallot** (Oppenheim 1743 — Paris 1794; Observator des Grafen Mercy d'Argenteau; gerade damit beschäftigt, seine Beobachtungen am Gnomone von St-Sulpice in einer Abhandlung über die Schiefe zu verwerten, wurde er ein Opfer von Robespierres Mordlust) befassten, wiederholt zurückzukommen haben. — *f.* Die nach Ideler schon bei **Eudoxus** vorkommenden Namen **Koluren** wollte **Kepler**

(vgl. Epitome II 9—10) damit in Zusammenhang bringen, dass besagte Kreise nie vollständig, sondern nur „verstümmelt“ zu sehen seien; da dies aber bei allen Deklinationskreisen der Fall ist, so ist die Vermutung von **Heis** (vgl. Wochenschrift 1874 p. 350) weit plausibler, dass sie den Namen **Schwanz-Verstümmler** (von *κολούειν* = verstümmeln, und *ουρά* = Schwanz) darum erhalten haben, weil sie (der Kolur der Equinoktien beim grossen, derjenige der Solstitien beim kleinen Bären) je den Schwanz abschneiden.

192. Anfang und Einteilung des Sonnentages. — Während gegenwärtig so ziemlich alle Kulturvölker in der **bürgerlichen** Zeitrechnung den Tag nach alt-egyptischem Gebrauche mit Mitternacht beginnen, und 12 Vormittagsstunden ebensoviele Nachmittagsstunden à 60 Minuten à 60 Sekunden à 60 Tertien folgen [a], in der **astronomischen** Zeitrechnung aber nach dem Vorgange der Araber [b] den neuen Tag erst mit dem folgenden Mittag anfangen lassen und die Stunden bis 24 fortzählen, — so bestanden früher neben diesen in Beziehung auf Tagesanfang und Tageseinteilung noch verschiedene andere Übungen: Die Babylonier begannen den Tag mit Sonnenaufgang, — die Griechen und Juden mit Sonnenuntergang oder später mit 6^h abends; dabei teilten diese Völker den Tag zunächst, entsprechend den jeweiligen Tag- und Nachtbogen der Sonne, in **Tag** und **Nacht**, und erst jeden dieser beiden Hauptabschnitte in 12 Stunden, wodurch die sog. **ungleichen** Stunden entstanden, welchen jedoch bald (wenigstens für wissenschaftliche Zwecke) die aus Einteilung des ganzen Tages in 24 gleiche Teile hervorgehenden **Equinoktialstunden** gegenübergestellt wurden [c]. Die alten Inder sollen den Tag sexagesimal in 60^h à 60^m à 60^s geteilt haben [d], während die Japanesen und Chinesen denselben von jeher in 12 **Doppelstunden** zerlegten, auf jede 8 **Kerben** rechnend [e]. Ein 1792 von **Laplace** gemachter Vorschlag, auch den Tag decimal in 10^h à 100^m à 100^s zu teilen, also eine **Decimal-Sekunde** von $0^s,864$ einzuführen, fand glücklicherweise keinen Beifall und hat gegenwärtig nur noch darum einiges Interesse, weil ihn der Urheber in seiner „Mécanique céleste“ festhielt.

Zu 192: *a.* Sonderbarer Weise zeigten die öffentlichen Uhren in Basel (vgl. Biogr. III und Notiz. 258—59) ungefähr von der Zeit des Basler Konzils hinweg, und zum grossen Ärger von Dan. Bernoulli bis gegen Ende des vorigen Jahrhunderts, fortwährend eine Stunde mehr als es der Länge dieses Ortes zukam, — und zwar nur in der Stadt, nicht auf der zugehörigen Landschaft. Die ursprüngliche Veranlassung dieser Übung ist unbekannt. — *b.* Nach „**Ideler,** Über die Zeitrechnung der Araber (Berl. Abh. 1812/3)“ sollen **bürgerlich** auch die Araber, wie überhaupt die Mohammedaner, den Tag mit Sonnenuntergang begonnen haben. — *c.* Die Juden sollen früher auf jede dieser Stunden 1080 Chlakim (Teile) à 76 Regaïm (Augenblicke) gerechnet haben. — *d.* Vgl. eine Note von **Legentil** im Journ. des Sav. von 1773. — *e.* Die Chinesen

setzten um die Mitte des 17. Jahrhunderts nach dem Vorschlage von Joh. Adam **Schall** (Köln 1591 — Peking 1666; Jesuit und Vorstand des math. Tribunals in Peking), die Kerbe gleich 15 Minuten, so dass von da hinweg ihre Minute mit der unsrigen übereinstimmt.

193. Wahre, mittlere und bürgerliche Zeit. — Wie bereits angedeutet, ist der wahre Sonnentag (teils infolge der elliptischen Bewegung, teils wegen der Schiefe der Ekliptik) etwas veränderlich, und zwar schwankt er zwischen einem IX 15/6 eintretenden Minimum von $23^h\,59^m\,39^s$ und einem auf XII 23 fallenden Maximum von $24^h\,0^m\,30^s$. Sobald man daher etwas gute Uhren besass, war es unbedingt notwendig, als Zeitregulator der wirklichen, sich in der Ekliptik etwas ungleichförmig bewegenden Sonne, in Gedanken eine sich im Equator gleichförmig bewegende Sonne zu substituieren, — d. h. dem aus den Sonnenbeobachtungen folgenden Stundenwinkel der Sonne, oder der sog. **wahren Zeit** (apparent time; W), eine durch Rechnung zu ermittelnde Korrektion, die sog. **Zeitgleichung** (equation of time; $Z = M - W$), beizufügen, um die der fingierten Sonne entsprechende sog. **mittlere Zeit** (mean time; M) zu erhalten [a]. Wir werden später (494) einlässlich von der Berechnung dieser Zeitgleichung sprechen, und es mag vorläufig die Angabe genügen, dass sie annähernd

II 12	IV 15	V 14	VI 14	VII 26	VIII 31	XI 18	XII 24
14^m31^s	0	-3^m53^s	0	6^m12^s	0	-16^m18^s	0

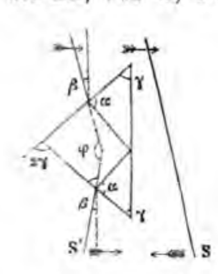
beträgt. Der mittlern Zeit ist sodann noch, wo als **bürgerliche Zeit** die mittlere Zeit eines bestimmten Ortes eingeführt ist [b], der Mittagsunterschied (217) gegen jenen Ort beizufügen, — und ebenso, um die auf einen ersten Meridian (218) bezügliche sog. **Universalzeit** zu erhalten, die auf denselben bezogene westliche Länge des Beobachtungsortes.

Zu 193: *a.* Bald nach Genf, wo schon etwa von 1780 hinweg, nach dem Vorschlage von Jacq. André **Mallet**, der Moment des mittlern Mittags durch einen Schlag auf die grosse Glocke der Kathedrale weithin verkündet wurde, nahm man auch in England die mittlere Zeit an, und 1798 gab man sich auf dem bei Zach in Gotha versammelten astronomischen Kongresse das Wort, dieselbe nicht nur in Ephemeriden, etc., ausschliesslich zu gebrauchen, sondern auch ihre allgemeine Einführung ins bürgerliche Leben zu befürworten. Letztere gelang 1810 in Berlin, 1816 in Paris, 1832 in Zürich, etc. — *b.* So wurde 1853 die mittlere Berner-Zeit als bürgerliche Zeit für die ganze Schweiz eingeführt und ich hatte so einige Jahre das Vergnügen, in meinem Vaterlande „Herr der Zeit“ zu sein.

194. Passagenprisma, Sonnensextant und verwandte Instrumente. — Unter den Mitteln, die wahre Zeit zu bestimmen,

sind, neben dem bereits (164) besprochenen **Gnomone** und einigen ebenso den Eintritt des wahren Mittags ergebenden Apparaten, unter welchen besonders das sog. **Passagenprisma** [a] hervorzuheben ist, namentlich diejenigen zu erwähnen, welche aus der momentanen Sonnenhöhe auf dieselbe schliessen lassen [b], — sei es dass man, wie bei dem sog. **Sonnensextanten** [c], dieselbe wirklich misst und daraus durch Rechnung, oder mit Hilfe von eigens erstellten Tafeln und Netzen, auf den Stundenwinkel der Sonne schliesst, — sei es dass, wie z. B. bei dem sog. **Horoskope** [d], unmittelbar nach Einstellung auf die Sonne deren Stundenwinkel abgelesen werden kann. — Einige andere Hilfsmittel werden unter den folgenden Nummern einlässlich behandelt werden.

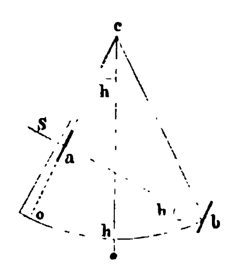
Zu 194: *a.* Das durch **Steinheil** (vgl. A. N. 569 von 1846) erfundene **Passagenprisma** beruht auf folgendem, schon 1821 durch **Amici** (vgl. Mem. Soc. dei XL, Vol. 19) zu ähnlichem Zwecke benutzten Principe: Wenn von zwei Parallelstrahlen der eine durch ein gleichschenkliges Prisma aufgefangen wird, so verlässt er, da gleichen γ notwendig auch gleiche α und gleiche β entsprechen, dasselbe so, dass er mit seiner ursprünglichen Richtung den Winkel

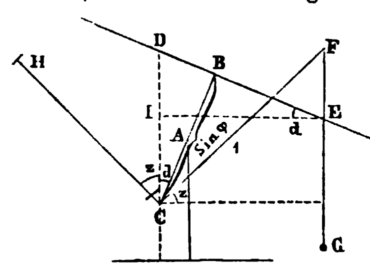


$$\varphi = 180^0 - 2\beta \qquad 1$$

bildet, sich für $\beta = 0$ somit $\varphi = 180^0$ oder S' ‖ S ergiebt. Wird daher ein Fernrohr so mit einem Prisma verbunden, dass in ersteres von einem fernen leuchtenden Punkte sowohl direkte als durch das Prisma abgelenkte Strahlen eintreten können, — sodann dieser Apparat so aufgestellt, dass die Basisebene des Prismas in einen Vertikal fällt, — und nun abgewartet bis sich ein Gestirn letzterm nähert, so wird man zwei Bildchen sehen, welche sich gegen einander bewegen, bis sie sich am Ende für $\beta = 0$, d. h. beim Durchgange durch den Vertikal, decken, um dann sofort wieder auseinander zu gehen. Fällt der Vertikal mit dem Meridiane zusammen, so wird die Beobachtung des Deckens (oder bei der Sonne noch besser diejenige der beiden Berührungen) die Culminationszeit des Gestirnes geben, — und durch Beobachtung der Deckungsmomente von zwei in Deklination wesentlich verschiedenen Sternen wird sich sogar untersuchen lassen, ob man das Instrumentchen wirklich in den Meridian gebracht hat, da in letzterm Falle die erhaltene Zeitdifferenz notwendig genau mit dem Rektascensionsunterschiede übereinstimmen muss. Bei sorgfältiger Behandlung kann, wie die Erfahrung zeigt, die Culmination der Sonne, und damit die wahre Zeit, bis auf $^1/_2{}^s$ genau erhalten werden. — Für ein schon etwas früher durch Edward J. **Dent** (1800? — London 1853; Uhrmacher in London) nach verwandten Principien unter dem Namen **Dipleidoskop** nach den 1843 (vgl. Abridgements) patentierten Ideen von James Mackenzie **Bloxam** erstelltes, und sodann durch **Plössl** verbessertes, aber vom Passagenprisma überholtes Instrumentchen, vgl. „**Dent,** On the Dipleidoscope. London 1844 in 8. (4. ed. 1845), und: **Heinen,** Das Dipleidoskop. Düsseldorf 1847 in 8.", auch Handb. d. Math. 352. — *b.* Entsprechend sehen die Orientalen, wie weit ihr Schatten reicht, — schreiten ihn ab, — und schliessen daraus

auf die Zeit. — *c.* Aus einer gemessenen Sonnenhöhe lässt sich der Stundenwinkel leicht (vgl. 177, oder noch besser 355) berechnen, — ja die von Friedrich Christoph **Müller** (Allendorf bei Giessen 1751 — Schwelm in der Grafschaft Mark 1808; Lehrer zu Hamm, dann Pfarrer zu Schwelm) berechneten „Tafeln der Sonnenhöhen für ganz Deutschland. Leipzig 1791 in 8." ersparen sogar diese Arbeit, indem sie für jeden Grad Polhöhe von 47—54° und für jeden Grad Sonnenhöhe von 0—55° die entsprechende wahre Zeit auf 1^m genau geben. Vgl. 355 für andere solche Tafeln. — Um ferner jedermann das Messen von Sonnenhöhen ohne grosse Kosten zu ermöglichen, hat man eigene sog. **Sonnensextanten** konstruiert, welche gewöhnlich aus einem vertikal aufgehängten und sowohl nach, als in seiner Ebene drehbaren, geteilten Sector bestehen: Eine Öffnung in der Platte a und eine Marke auf der zu ihr parallelen Platte b bestimmen eine Visierlinie, deren Neigung, wenn sie senkrecht zur Null-Linie steht, offenbar durch das in c aufgehängte Lot an der Teilung markirt wird. **Brander** hatte (vgl. den Anhang zu seiner „Beschreibung eines magnetischen Declinatorii und Inclinatorii. Augsburg 1779 in 8.", sowie Verz. 53) die nette Idee, die Öffnung a durch eine Konvexlinse der Brennweite ab zu ersetzen, — während in neuerer Zeit Mechanikus Michael **Eble** in Ellwangen bei a zwei Öffnungen von solcher Distanz anbrachte, dass die infolge davon auf b entstehenden zwei Sonnenbildchen sich berühren und somit scharf auf die aus einem wagrechten Striche bestehende Marke eingestellt werden können. Eble liess ferner, um das diffuse Licht abzuhalten, die Sonnenstrahlen durch eine hohle Speiche laufen, — und überdies konstruierte er, um jede Rechnung zu ersparen, ein eigenes Netz mit Scale, in welches man mit der abgelesenen Höhe einzugehen hat, um ihm sofort ein ganz brauchbares Schlussresultat zu entnehmen. — *d.* Neben dem eben beschriebenen sog. **Zeitbestimmungswerk** erfand **Eble** auch noch ein sehr sinnreiches, von ihm **Horoskop** genanntes Instrument, das nach Einstellung auf die Sonne anstatt der Höhe unmittelbar die wahre Zeit abzulesen erlaubt: Es besteht aus zwei zu einander senkrechten und fest verbundenen Stäben CB und DE, von welchen der erstere die Länge Si φ hat und einen beliebigen Drehpunkt A besitzt, in welchem er durch ein Stativ gehalten wird, — während der zweite von B aus eine Teilung trägt, an welcher $DB = CB \cdot Tg\, d$ ist; ferner aus zwei andern, ebenfalls zu einander senkrechten und fest verbundenen Stäben CH und CF, welche um C drehbar sind, die gewählte Einheit zur Länge haben und bei H ein Blättchen mit zwei feinen Öffnungen, bei C ein Blättchen mit einem Striche, bei F ein Lot tragen. Das Ganze sei so gestellt, dass CD vertikal, d. h. parallel zum Lote FG steht, und dass das durch H eindringende Sonnenlicht zwei sich an dem Striche auf C berührende Sonnenbildchen erzeugt; dann soll das Lot FG an einer Teilung auf BE die wahre Zeit der Einstellung zeigen. Nun folgt, mit Hilfe von 177 : 2, dass





$$BE = DE - BD = \frac{EI}{Co\,d} - CB \cdot Tg\,d = \frac{Co\,z - Si\,\varphi \cdot Si\,d}{Co\,d} = Co\,s \cdot Co\,\varphi \quad 2$$

ist; also zeigt das Lot was es zeigen soll, sobald die Teilung auf BE die Werte von $Co\,s \cdot Co\,\varphi$ darstellt.

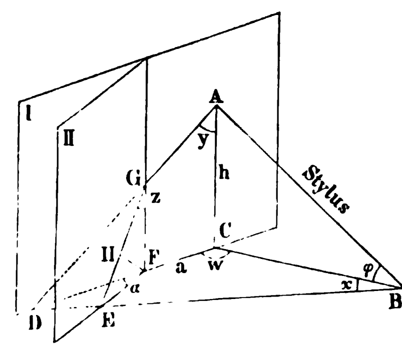
195. Die sog. Sonnenuhren. — In früherer Zeit waren sog. **Sonnenuhren** (Horologium sciotericum, cadran solaire, dial), bei welchen der Schatten eines **Stylus** (*στύλος* = Säule) an einer mit Stundenzahlen versehenen Einteilung, bei gehöriger Orientierung und Sonnenschein, ohne jegliche Rechnung unmittelbar die wahre Zeit weist, ungemein beliebt und in allen möglichen Variationen verbreitet, so dass die Anleitung zu ihrer Konstruktion, die sog. **Gnomonik** (art of dialing) einen Hauptabschnitt der Astronomie bildete [a]. Man unterschied dabei namentlich, je nachdem der Stylus (wie früher vorzugsweise, wenn auch nicht ausschliesslich) vertikal gestellt oder (wie es später mit Recht meistens geschah) in die Weltaxe gelegt wurde, den **Gnomon** und den **Polos**, wobei beide Arten je nach der gewählten Auffangsfläche wieder in Unterarten zerfielen. — Als einfachste aller Sonnenuhren ist die sog. **Equatorealuhr** zu bezeichnen [b], aus welcher sich alle übrigen Uhren der zweiten Klasse durch Konstruktion oder Rechnung leicht ableiten lassen, — so die sich, in Verbindung mit einer Boussole, für tragbare Exemplare am besten eignende **Horizontaluhr** [c], und die zur Erstellung an Gebäuden vorzugsweise benutzte **Vertikaluhr** [d]. Von den Uhren der ersten Art haben diejenigen mit sphärischer Auffangsfläche durch ihr hohes Alter [e], diejenigen mit horizontaler Auffangsfläche durch ihre Verwandtschaft mit dem früher behandelten Gnomone [f], ebenfalls ein gewisses Interesse behalten. Jedoch muss für detailliertere Behandlung beider Arten auf die einschlägige, sehr umfangreiche Litteratur verwiesen werden [g].

Zu 195: *a.* Die Juden, Phönicier, Chinesen, Babylonier, etc., scheinen nicht nur frühe schattenwerfende Stäbe zur Bestimmung der Zeit benutzt, sondern auch (vgl. z. B. e) eigentliche Sonnenuhren konstruiert zu haben und in dieser Kunst Vorgänger und Lehrer der Griechen gewesen zu sein, welche unzweifelhaft sowohl den Polos als die Gnomone kannten. Ganz besonders entwickelte sich aber die Gnomonik bei den Arabern, welche grossenteils die Trigonometrie zu deren Gunsten entwickelten, und wenn sich auch unter den zahlreichen Sonnenuhren, welche **Aboul Hhassan** in seinem früher erwähnten „Traité des instruments astronomiques" beschrieb, kein einziger Polos findet, so darf man daraus wohl nicht mit Marie (II 141) den Schluss ziehen, dass jenes merkwürdige Volk einseitig Gnomone konstruierte, da sich sonst kaum schon bei den ersten betreffenden Schriftstellern des Abendlandes, welche sich ja nach eigenem Geständnis zunächst auf die Araber stützten, beide Arten ebenmässig berücksichtigt finden würden. — *b.* Die sog. **Equatorealuhr** wird erhalten, indem man eine Tafel mit einem dazu senkrechten Stifte und einer

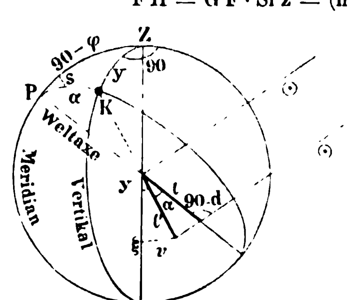
von dessen Fusspunkte auslaufenden Winkel- oder Zeitteilung so aufstellt, dass der Stift die Lage der Weltaxe erhält und der Nullpunkt der Teilung in den Meridian fällt: Der Schatten des als Stylus wirkenden Stiftes notiert sodann offenbar an der Teilung in jedem Augenblicke den Stundenwinkel s der Sonne und damit die wahre Zeit. Jedoch ist selbstverständlich, dass, wenn eine solche Uhr auch im Winterhalbjahr funktionieren soll, Stift und Teilung nach unten wiederholt werden müssen. — Wird die Equatorealuhr, statt der Sonne, dem Monde ausgesetzt, oder als **Monduhr** benutzt, so entspricht der Ablesung u annähernd die Sonnenzeit $u + {}^4/_5 \cdot a$, wo a (vgl. 314) das Alter des Mondes, und ${}^4/_5 = 24 : 29^1/_2$ (nach 207) die tägliche Verspätung der Mondculmination bezeichnet. — *c.* Bei gleicher Lage des Stiftes wie bei der Equatorealuhr bildet dagegen (vgl. Fig. b) unter der Polhöhe φ sein Schatten auf einer Horizontalebene mit der Mittagslinie einen Winkel x, so dass



$$\text{Tg}\,x = \text{Si}\,\varphi \cdot \text{Tg}\,s \qquad 1$$



ist, wonach, sei es durch Rechnung, sei es nach Art der Alten durch entsprechende, in beistehender Figur angedeutete Konstruktion, die sog. **Horizontaluhr** leicht aus der Equatorealuhr abgeleitet werden kann. — In entsprechender Weise lassen sich auch aus jeder dieser beiden beliebige andere Uhren ableiten, indem man jeweilen durch Rechnung oder Konstruktion den Durchschnitt der durch Stylus und Schattenlinie bestimmten Ebene mit der neuen Auffangsfläche aufsucht. — *d.* Nach dem eben ausgesprochenen Grundsatze entsprechen z. B. der Schattenlinie BD der Horizontaluhr, auf den Vertikalebenen I und II die Schattenlinien AD und GE, und dabei ergeben sich aus der Figur, wo h als Projektion des Stylus auf I eine sog. **Substylarlinie** ist, sofort die Beziehungen



$$\text{Tg}\,y = \frac{DC}{h} = \frac{CB \cdot \text{Si}\,x}{h \cdot \text{Si}\,(w + x)} = \frac{\text{Si}\,x \cdot \text{Ct}\,\varphi}{\text{Si}\,(w + x)} \qquad 2$$

$$\text{Tg}\,z = \frac{EF}{GF} = \frac{EF}{DF} \cdot \frac{DF}{GF} = \frac{\text{Si}\,x \cdot \text{Ct}\,\varphi}{\text{Si}\,(w + x - \alpha)} \qquad 3$$

$$FH = GF \cdot \text{Si}\,z = (h \cdot \text{Tg}\,y - a) \cdot \text{Ct}\,y \cdot \text{Si}\,z \qquad 4$$

Für $w = 90^0$ (Mittagsuhr) und $\alpha = 90^0$ (Morgenuhr) wird somit unter Benutzung von 1

$$\text{Tg}\,y = \text{Tg}\,x \cdot \text{Ct}\,\varphi = \text{Co}\,\varphi \cdot \text{Tg}\,s \qquad 5$$

$$\text{Tg}\,z = \text{Ct}\,\varphi$$
$$z = 90^0 - \varphi$$
$$GE \parallel AB \qquad 6$$
$$FH = h \cdot \text{Co}\,\varphi - a \cdot \text{Ct}\,s$$

Ferner folgt für die **Mittagsuhr** mit Hilfe beistehender Figur

$$\operatorname{Ct} u = \operatorname{Tg} \varphi \cdot \operatorname{Co} s \qquad l' : l = \operatorname{Co} d : \operatorname{Co}(d + u)$$
$$\xi = l' \cdot \operatorname{Co} y \qquad v = l' \cdot \operatorname{Si} y \tag{7}$$

und hieraus erhält man successive unter Berücksichtigung von 5

$$l' = l \cdot \frac{\operatorname{Co} d \sqrt{1 + \operatorname{Ct}^2 u}}{\operatorname{Co} d \cdot \operatorname{Ct} u - \operatorname{Si} d} = l \cdot \frac{\operatorname{Co} d \sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2 y}}{\operatorname{Co} d \cdot \operatorname{Si} \varphi - \operatorname{Si} d \sqrt{\operatorname{Co}^2 \varphi + \operatorname{Tg}^2 y}}$$

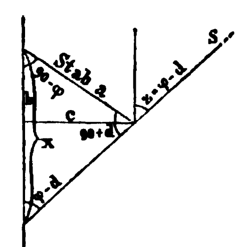
und
$$v^2 \cdot \operatorname{Tg}^2 d - \xi^2 \cdot i \cdot \operatorname{Se}^2 d + 2 \xi \cdot l \cdot \operatorname{Si} \varphi - l^2 = 0 \tag{8}$$

wo
$$i = \operatorname{Si}^2 \varphi \cdot \operatorname{Co}^2 d - \operatorname{Co}^2 \varphi \cdot \operatorname{Si}^2 d = \operatorname{Si}(\varphi + d) \cdot \operatorname{Si}(\varphi - d) \tag{9}$$

ist. Es folgt somit nach 73, wenn das dortige φ mit v vertauscht wird,

$$\mathfrak{a} = \frac{l}{i} \operatorname{Co}\varphi \cdot \operatorname{Si} d \cdot \operatorname{Co} d, \quad \mathfrak{b} = \frac{l}{\sqrt{-i}} \operatorname{Co}\varphi \cdot \operatorname{Co} d, \quad A = \frac{l}{i} \operatorname{Co}^2 d \cdot \operatorname{Si}\varphi, \quad B = 0, \quad v = 0 \tag{10}$$

so dass die Schattenkurve für $\varphi > d$ immer eine Hyperbel ist und nur in der heissen Zone zuweilen in eine Parabel oder Ellipse übergehen kann. Man pflegte früher diese Schattenkurven, welche für $d = 0$ in eine Gerade übergehen, für jedes Zeichen aufzutragen. — Will man nicht eine vollständige Vertikaluhr, sondern nur einen, quasi als Kalender dienenden **Mittagszeiger** konstruieren, so berechnet man am bequemsten

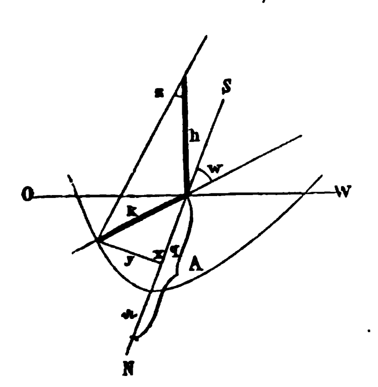


$$x = a \cdot \operatorname{Co} d : \operatorname{Si}(\varphi - d) \tag{11}$$

für die Mitte jedes Monats. So z. B. findet man für $a = 3'$ und $\varphi = 47^\circ\ 23'$ für die Mitten der zwölf Monate Januar bis December

x = 3',00 3,28 3,95 4,86 5,97 6,76 6,39 5,28 4,27 3,57 3,11 2,92

während $b = a \cdot \operatorname{Si}\varphi = 2',22$ und $c = a \cdot \operatorname{Co}\varphi = 2',01$ ist. — *e.* Schon der Chaldäer **Berosus**, der um 640 v. Chr. auf der Insel Kos gegenüber Milet eine stark besuchte Schule gründete, soll einen solchen Gnomon erfunden haben, — nämlich eine unter dem Namen „Heliotrop oder Skaphe" noch bei den Griechen und Römern gebräuchliche, in Stein gehauene Halbkugel, auf der die Schattenwege einer in ihrem Centrum aufgestellten kleinen Kugel verzeichnet und je in 12 gleiche Teile geteilt waren: Ein 1741 aufgefundenes Exemplar findet sich in „**Zuzzeri**, D'una antica villa scoperta sul dosso del Tusculo. Venezia 1746 in 4." beschrieben, — und seither sind noch mehrere andere ans Tageslicht gezogen worden, ja man hat sogar noch in neuerer Zeit (vgl. Verz. 334) nach analogen Principien ganz hübsche Sonnenuhren konstruiert. — *f.* Um die Kurve zu ermitteln, welche das Ende des Schattens eines Stabes der Höhe h auf einer Ebene beschreibt, erhält man mit Hilfe von 177



$$y = k \cdot \operatorname{Si} w = h \cdot \operatorname{Tg} z \cdot \operatorname{Si} w =$$
$$= h \cdot \frac{\operatorname{Si} p \cdot \operatorname{Si} s}{\operatorname{Co} p \cdot \operatorname{Si}\varphi + \operatorname{Si} p \cdot \operatorname{Co}\varphi \cdot \operatorname{Co} s} \tag{12}$$
$$x = h \cdot \frac{\operatorname{Si} p \cdot \operatorname{Si}\varphi \cdot \operatorname{Co} s - \operatorname{Co} p \cdot \operatorname{Co}\varphi}{\operatorname{Co} p \cdot \operatorname{Si}\varphi + \operatorname{Si} p \cdot \operatorname{Co}\varphi \cdot \operatorname{Co} s}$$

und hieraus durch Elimination von s

$$y^2 \cdot Co^2 p + x^2 \cdot k^2 + x h Si 2\varphi + h^2 \cdot Co(\varphi + p) Co(\varphi - p) = 0 \qquad \mathbf{13}$$

wo

$$k^2 = Si(\varphi + p) Si(\varphi - p)$$

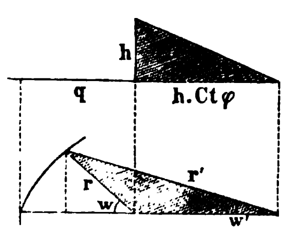
Es ist also die gesuchte Kurve eine Linie 2. Grades, und zwar fallen (73) Axe und Mittelpunkt in die Mittagslinie, während

$$g = -4k^2 Co^2 p \quad A = -\frac{h}{k^2} \cdot Si\varphi \cdot Co\varphi \quad \mathfrak{a} = \frac{h}{k^2} \cdot Si\, p \cdot Co\, p \quad \mathfrak{b} = \frac{h}{k} \cdot Si\, p \qquad \mathbf{14}$$

Es wird also g nur für $\varphi = p$ zu Null, nur für $\varphi > p$ negativ, d. h. es kann die Schattenkurve nur im Sommer, und auch da nur in der kalten Zone, eine Parabel oder Ellipse werden, — im allgemeinen ist sie eine Hyperbel, deren Scheitel um

$$q = A - \mathfrak{a} = h \cdot Ct(p - \varphi) \qquad \mathbf{15}$$

vom Fusspunkte des Stabes nach Norden abliegt. Zur Zeit der Equinoktien ($p = 90^0$) wird $\mathfrak{a} = 0$ und $q = A = h \cdot Tg\,\varphi$, d. h. die Schattenkurve eine zur Linie O W parallele Gerade. — Stellt man anstatt dem Stabe h ein rechtwinkliges Dreieck der Kathete h und des Winkels φ auf, so wirft dieses einen dreieckigen Schatten, dessen Spitze noch die frühere Hyperbel beschreibt, während



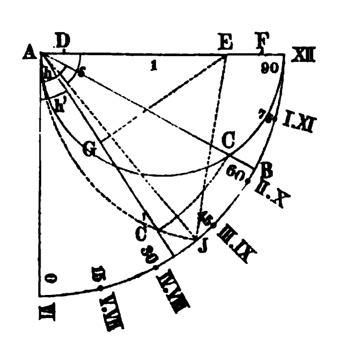
$$Tg\, w' = Tg\, s \cdot Si\,\varphi \qquad r' = h \cdot \frac{Si\, s \cdot Co\, d}{Si\, w' \cdot Co\, z} \qquad \mathbf{16}$$

ist. Ein hübsches Exemplar einer solchen, gewissermassen Gnomon und Polos vereinigenden Uhr, bei welchem überdies neben der gewöhnlichen Stunde (entsprechend wie bei Bion Tab. 25 Fig. 1) auch noch die „Hora ab ortem Solis (die babylonische Stunde)“ und die „Hora ab occasum Solis (die italienische Stunde)“ angemerkt ist, besitzt das Museum in St. Gallen: Es zeigt die Inschrift „Isaac **Kieming** 1576“, rührt also wohl von demselben Meister her, von welchem die k. k. Ambraser Sammlung in Wien eine Sonnenuhr mit der Aufschrift „Isaac **Kiening** pictor Ilnensis me fecit 1569“ besitzt. — In der heissen Zone kann für die Sonne $p < 90^0 - \varphi$ werden, also dieselbe zur Elongation kommen, und in diesem Falle (zu welchem durch Neigen des Auffangsbrettes auch unter höhern Breiten ein Analogon geschaffen werden kann) wird vor der östlichen und nach der westlichen Elongation ein **Zurückweichen** des Schattens statthaben, welches schon von **Nonius** zur Erklärung der bekannten Angabe im 2. Buche der Könige (XX 9—11) benutzt werden wollte. — *g.* Nachdem **Regiomontan** 1474 und sodann wieder **Stöffler** 1518 in ihren Kalendarien je eine kurze Anleitung zur Verfertigung von Sonnenuhren veröffentlicht hatten, begannen Orontius **Finäus** mit seiner Schrift „De solaribus horologiis et quadrantibus libri IV. Paris 1531 in 4.“ und Sebastian **Münster** (Ingelheim in der Pfalz 1489 — Basel 1552; Prof. hebr. Basel; vgl. Biogr. II) mit seiner „Compositio horologiorum. Basileæ 1531 in 4. (2 ed. 1533), und: Fürmalung und künstlich Beschreibung der Horologien. Basel 1537 in fol.“ im Abendlande die eigentliche Fachlitteratur, und da die Schriften Münsters sich einer besonders starken Verbreitung erfreuten, so wurde derselbe vielfach als „Vater der Gnomonik“ bezeichnet. Von den folgenden Publikationen erwähne ich beispielsweise: „Joh. Conrad **Ulmer** (Schaffhausen 1519 — ebenda 1600; Antistes in Schaffhausen), De horologiis sciotericis. Noribergæ 1556 in fol., — Andreas **Schoner** (Nürnberg 1528 — Kassel? 1590; Sohn von Johannes Sch. in 63; einige Zeit Gehilfe

von Landgraf Wilhelm), Gnomonices libri III. Noribergæ 1562 in fol., — Bartholomäus **Scultetus** (Görlitz 1540 — ebenda 1614; Lehrer und Bürgermeister in Görlitz), Von allerley Solarien. Görlitz 1572 in fol., — Chr. **Clavius**, Gnomonices libri VIII. Romæ 1581 in fol., und: Fabrica et usus instrumenti ad horologiorum descriptionem peropportuni. Romæ 1586 in 4., sowie: Gnomonices libri VIII (als Vol. IV d. Opera 1612 erschienen und namentlich auch die Beschreibung einer Art Proportionalzirkel enthaltend, welchen Jakob **Curtius** zu Gunsten der Sonnenuhren erfand), — Burkart **Leemann** (Zürich 1531 — ebenda 1613; Prof. hebr. und Antistes Zürich; vgl. Biogr. II), Sonnen Uhren zu ryssen nach mancherley art. Zürich 1589 in 4. (auch Basel 1606), — Rudolf **v. Graffenried** (Burgdorf 1584 — Dalmatien 1648; Landvogt in Unterseen; vgl. Biogr. I), Compendium sciotericorum. Bern 1617 in 4. (auch 1629), — Salomon **de Caus** (Normandie 1576 — Paris 1626; einige Jahre kurfürstl. Ingenieur in Heidelberg), La pratique et démonstration des horloges solaires. Paris 1624 in fol., — Samuel **Foster** (Northamptonshire 1600? — London 1652; Prof. astr. London), The art of dialling. London? 1638 in 4., — Mutio **Oddi** von Urbino, Degli horologii solari trattato. Venetia 1638 in 4., — **La Hire**, La gnomonique. Paris 1682 in 8. (2 éd. 1698; engl. durch Leck, London 1685), — **Doppelmayr**, Gründliche Anweisung zur Beschreibung grosser Sonnenuhren. Nürnberg 1719 in fol., — Joh. Friedrich **Penther** (Fürstenwalde 1693 — Göttingen 1749; erst Bergbeamter, dann Prof. math. Göttingen), Gnomonica fundamentalis et mechanica. Augsburg 1733 in fol. (auch 1760), — J. B. **Garnier**, Gnomonique. Marseille 1733 in 8., — Dom François **Bedos** de Celles (Caux bei Béziers 1706 — Paris 1779; Benediktiner), La gnomonique pratique. Paris 1760 in 8. (zur Zeit sehr beliebt), — G. H. **Martini**, Abhandlung von den Sonnenuhren der Alten. Leipzig 1777 in 8., — **Castillon**, Sur la gnomonique (Mém. Berl. 1784), — J. J. **v. Littrow**, Gnomonik. Wien 1831 in 8. (2. A. 1838), — Fr. **Wöpke**, Disquisitiones archæologico-mathematicæ circa solaria veterum. Berolini 1842 in 4., — Rud. **Sonndorfer**, Theorie und Construction der Sonnenuhren. Wien 1864 in 8., — etc.“

196. Einige andere Zeitbestimmungswerke. — Neben den unter den zwei vorhergehenden Nummern behandelten Zeitbestimmungswerken wurden nach und nach noch viele andere vorgeschlagen, von welchen beispielsweise folgende speciell erwähnt werden mögen: Ein durch **Sacrobosco** auf uns gekommener arabischer, später mit verschiedenen Variationen wiederholt ausgeführter **Sonnenquadrant** [a], — der spätestens aus dem 15. Jahrhundert stammende, nachmals besonders durch Rainer **Gemma** Frisius kultivierte **astronomische Ring** [b], — und das wahrscheinlich eben so alte, wenigstens schon durch Pet. **Apian** und Sebast. **Münster** beschriebene **Nocturnal** [c].

Zu 196: *a.* Der durch **Sacrobosco** in dem Pariser-Mss. „De compositione quadrantis simplicis et compositi et utilitatibus utriusque“ beschriebene **Sonnenquadrant** besteht aus einem in seine 90 Grade geteilten Quadranten des Radius 1, in dessen Centrum A ein starres oder massives Lot hängt, welches, wenn die durch die Diopter D und F bestimmte Visur horizontal ist, auf Null steht, so dass es beim Richten von D F auf die Sonne ohne weiteres deren Höhe an der Teilung angiebt. Beschreibt man ferner aus Punkten der



Geraden AE Kreise, welche durch A und die Teilpunkte 90, 75, 60, ... gehen, — lässt diese Kreise den Stunden XII, I = XI, II = X, ... entsprechen, — stellt das Lot auf den der Mittagshöhe $h = 90^0 - \varphi + d$ der Sonne an dem betreffenden Tage entsprechenden Punkt B der Teilung, — schiebt einen am Lote befindlichen Läufer C in den Stundenkreis XII, — und richtet endlich in irgend einem Momente, dessen wahre Sonnenzeit bestimmt werden soll, die Diopter nach der Sonne, so fällt C von selbst nach C' in den betreffenden Stundenkreis: Ist nämlich AG = GC' und GE ⊥ AC', so ist E der Mittelpunkt des durch A und C' gehenden Kreises, der den Quadranten in J trifft, und man hat

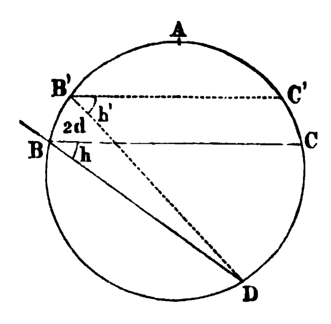
$$AE \cdot Si\,h' = \tfrac{1}{2}\,AC' = \tfrac{1}{2}\,Si\,h \qquad AE \cdot Co\,s = \tfrac{1}{2}\,AJ = \tfrac{1}{2}$$

oder
$$Co\,s = \frac{1}{2 \cdot AE} = \frac{Si\,h'}{Si\,h} = \frac{Si\,h'}{Co\,\varphi \cdot Co\,d + Si\,\varphi \cdot Si\,d} \qquad \mathbf{1}$$

während streng genommen der, der Höhe h' entsprechende Stundenwinkel s' (nach 177:2) durch

$$Co\,s' = \frac{Si\,h' - Si\,\varphi \cdot Si\,d}{Co\,\varphi \cdot Co\,d} = Co\,s - 2\,Tg\,\varphi \cdot Tg\,d \cdot Si^2\,\tfrac{1}{2}\,s \qquad \mathbf{2}$$

gegeben ist, so dass das Verfahren allerdings nur für d = 0 oder $\varphi = 0$ ganz korrekt wird, aber auch für nicht gar zu bedeutende Werte dieser Grössen noch gute Annäherungen giebt. — Für einen verwandten, durch R. **v. Graffenried** unter dem Namen „Horarium bilimbatum" beschriebenen Quadranten vgl. Verz. 201. — ***b.*** Der **astronomische Ring** (cadran à anneau, ring-dial) besteht aus einem Metallringe, der, bei A gehalten oder aufgehängt, sich von selbst vertikal stellt und in irgend einem Punkte B eine Öffnung hat. Wird der Ring zur Zeit eines Equinoktiums unter der Polhöhe φ zur wahren Zeit s in den Vertikal der Sonne gebracht, so bestimmt der durch die Öffnung B dringende, bei D einen Lichtpunkt markierende Sonnenstrahl BD mit der Horizontalen BC den gleichzeitigen Höhenwinkel $h = \tfrac{1}{2}\,CD$ der Sonne, so dass (177:2)



$$Si\,h = Co\,\varphi \cdot Co\,s \qquad \mathbf{3}$$

ist. Sind daher die nach 3 verschiedenen Werten von s entsprechenden h berechnet und den diesen letztern zukommenden Lagen von D die betreffenden s beigeschrieben (z. B. 6^h bei C), so kann das Instrumentchen zur Zeit des Equinoktiums unter der Breite φ als Sonnenuhr dienen. Eine kleine Veränderung der Breite und eine kleine Deklination der Sonne fallen kaum in Betracht; dagegen ist 3 für ein grösseres d durch

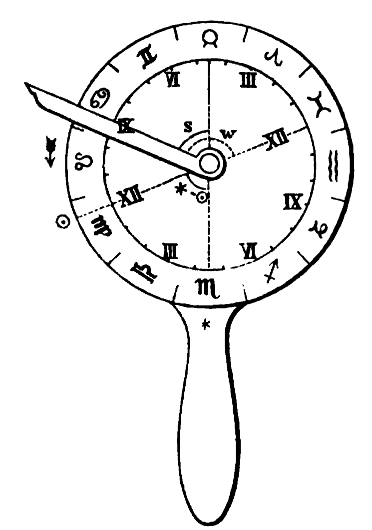
$$Si\,h' = Si\,\varphi \cdot Si\,d + Co\,\varphi \cdot Co\,d \cdot Co\,s \qquad \mathbf{4}$$

zu ersetzen, und es muss daher **entweder** für verschiedene Werte von d je eine neue Zeitscale berechnet und aufgetragen werden, was natürlich nur bei grössern Dimensionen angeht, — **oder** man muss den veränderten Umständen z. B. in folgender Weise wenigstens einigermassen Rechnung tragen: Die

Stundenteilung wird nur für d = 0 aufgetragen, dagegen wird B auf einem in dem Hauptringe sich drehenden Ringe angebracht, so dass ihm längs einer Grade, Zeichen oder Monatsnamen tragenden Scale auch andere Stellungen B' gegeben werden können, und wenn nun BB' = 2 d ist, so fällt das Sonnenbild wieder auf D, sofern h' = h + d ist, was aber allerdings nur um Mittag strenge, und nur bei geringern Werten von d und s mit zulässiger Annäherung statt hat. — Der astronomische Ring wurde schon in einem, dem von 1492 bis 1503 regierenden Papst Alexander VI. gewidmeten Traktate „**Boneti** de Latis Hebræi medici provenzalis, Annuli astronomici utilitatum liber (13 Quartblätter s. a. et l.; neue Ausgabe: Parisiis 1507)" beschrieben, — sodann später in den Schriften „**Gemma**, De annuli astronomici usu. Antuerpiæ 1548 in 4., — und: Gerh. **Mercator**, De usu annuli astronomici. Lovanii 1552 in 4." einlässlicher behandelt, — und noch in „N. **Bion**, Traité de la construction des instrumens de mathématiques. Paris 1713 in 8. (2 éd. 1716, p. 359—60)" abgebildet und kurz besprochen. Vgl. auch Verz. 263, — sowie für verwandte Instrumente späterer Zeit Verz. 143, und „**Steinheil**, Das Chronoskop (Münchn. Abh. 1870)". — *c.* Das **Nocturnal** endlich beruht auf folgender Überlegung: Bezeichnen t und w die einem gewissen Momente entsprechende Sternzeit und wahre Zeit, ⊙ und ✶ die Rektascensionen der Sonne und eines Sternes, und s den entsprechenden Stundenwinkel des letztern, so ist

$$t = \odot + w \qquad t = \ast + s \qquad \text{also} \qquad w = \ast - \odot + s \qquad \mathbf{5}$$

und man kann daher, wenn man ✶ — ⊙ kennt, durch Messen von s auch bei Nacht die wahre Zeit leicht finden. — Das 1537 durch Seb. **Münster** in seiner „Fürmalung" beschriebene **Nocturnal** besteht nun aus zwei konzentrischen, etwas verschieden grossen Scheiben, deren Mittelpunkt, um welchen sich überdies ein Stab dreht, durch ein Loch repräsentirt ist, das „so gross sein sol, das man unfehrlich ein erbiss dadurch treiben mög": Die **grössere**, mit einem Handgriffe fest verbundene Scheibe ist im Sinne des Pfeiles teils in die 12 Zeichen und ihre Grade, teils in die Monate und Tage abgeteilt, so dass Jahrestag und Länge der Sonne sich entsprechen, und derjenige Längengrad, in dem der gewählte Stern steht (bei Münster 13° ♏ und β Ursæ min.), in die Mitte des Handgriffes fällt; die **kleinere** Scheibe ist in 2 × 12 Stunden abgeteilt und drehbar.



— Beim Gebrauche hat man nach **Münster**, nachdem die eine XII auf die Sonnenlänge des betreffenden Tages eingestellt ist, wie folgt zu verfahren: „Nimm das Nocturnal in dein handt mit seiner Handtheben, und heb es über oder für deine augen gegen dem polus, und hab acht das es nit uff ein seiten hang, nemmlich zu der linken oder gerechten, und sehe durch das loch zu des polus stern, und halt das nocturnal also still, biss du die regel umbher treibest uff den stern; darnach fange an zu zelen von dem zan der 12. stund zu der gestelten regel, so wirstu finden die nacht stund". — Wenn man den

Polarstern als Pol betrachtet und (was nach 197:b einen Maximalfehler von $2^1/_2{}^0 = 10^m$ zur Folge haben kann) die Längendifferenz der Rektascensionsdifferenz gleichsetzt, so kömmt diese Regel mit unserer 5 wirklich überein, falls man die eine XII (Mittag) zum Einstellen auf die Sonne, die andere XII (Mitternacht) als Ausgangspunkt für das Zählen benutzt. Bei dem in der Figur repräsentierten Stande ist etwa ⊙ = 7° ♍ = 157°, was VIII 30 entspricht, ferner $s = 4^1/_2{}^h$ und w nicht ganz 9^h. — Wir werden in 358 auf verwandte Zeitbestimmungsmethoden älterer und neuerer Zeit zurückkommen und wollen hier nur noch erwähnen, dass auch P. **Apian** in einem Anhange zu seinem „Cosmographicus liber. Landishuti 1524 in 4.“ ein dem Münster'schen Nocturnal ganz ähnliches Instrumentchen beschrieb und dass für ein ebensolches auf Verz. 305 verwiesen werden kann.

197. Die Ekliptikcoordinaten. — Ganz entsprechend wie auf den Equator kann man die Lage der Gestirne auch auf die Ekliptik beziehen, und es sind sogar diese **Ekliptikcoordinaten**, nämlich die vom Frühlingspunkte aus in der Ekliptik nach der Ordnung der Zeichen gezählte Abscisse, die sog. **Länge** (l), und der die Ordinate repräsentierende Abstand von der Ekliptik, die sog. **Breite** (b), in älterer Zeit vorzugsweise benutzt worden[a]. — Da der Frühlingspunkt Pol des Kolurs der Solstitien ist, so lassen sich die Equator- und Ekliptikcoordinaten leicht in Dreieck Pol-Ekliptikpol-Stern vereinigen, und aus diesem folgen z. B., wenn noch der Winkel zwischen Deklinations- und Breitenkreis, die sog. **Position** (u) eingeführt wird, die Beziehungen

$$\mathrm{Si\,e : Co\,b : Co\,d :: Si\,u : Co\,a : Co\,l} \qquad 1$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Co\,u} &= \mathrm{Si\,l \cdot Si\,a + Co\,l \cdot Co\,a \cdot Co\,e}\\
\mathrm{Si\,l} &= \mathrm{Si\,a \cdot Co\,u + Co\,a \cdot Si\,u \cdot Si\,d}\\
\mathrm{Si\,a} &= \mathrm{Si\,l \cdot Co\,u - Co\,l \cdot Si\,u \cdot Si\,b}
\end{aligned}\right\} \qquad 2$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Si\,b} &= \mathrm{Co\,e \cdot Si\,d - Si\,e \cdot Co\,d \cdot Si\,a}\\
\mathrm{Si\,d} &= \mathrm{Co\,e \cdot Si\,b + Si\,e \cdot Co\,b \cdot Si\,l}\\
\mathrm{Co\,e} &= \mathrm{Si\,b \cdot Si\,d + Co\,b \cdot Co\,d \cdot Co\,u}
\end{aligned}\right\} \qquad 3$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Si\,e \cdot Si\,l} &= \mathrm{Si\,d \cdot Co\,b - Co\,d \cdot Si\,b \cdot Co\,u}\\
\mathrm{Si\,e \cdot Si\,a} &= -\mathrm{Si\,b \cdot Co\,d + Co\,b \cdot Si\,d \cdot Co\,u}\\
\mathrm{Co\,b \cdot Co\,u} &= \mathrm{Co\,e \cdot Co\,d + Si\,e \cdot Si\,d \cdot Si\,a}\\
\mathrm{Co\,b \cdot Si\,l} &= \mathrm{Si\,e \cdot Si\,d + Co\,e \cdot Co\,d \cdot Si\,a}\\
\mathrm{Co\,d \cdot Si\,a} &= -\mathrm{Si\,e \cdot Si\,b + Co\,e \cdot Co\,b \cdot Si\,l}\\
\mathrm{Co\,d \cdot Co\,u} &= \mathrm{Co\,e \cdot Co\,b - Si\,e \cdot Si\,b \cdot Si\,l}
\end{aligned}\right\} \qquad 4$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Co\,l \cdot Co\,e} &= \mathrm{Co\,u \cdot Co\,a - Si\,u \cdot Si\,a \cdot Si\,d}\\
\mathrm{Co\,l \cdot Si\,b} &= -\mathrm{Si\,a \cdot Si\,u + Co\,a \cdot Co\,u \cdot Si\,d}\\
\mathrm{Si\,u \cdot Si\,b} &= -\mathrm{Si\,a \cdot Co\,l + Co\,a \cdot Si\,l \cdot Co\,e}\\
\mathrm{Si\,u \cdot Si\,d} &= \mathrm{Si\,l \cdot Co\,a - Co\,l \cdot Si\,a \cdot Co\,e}\\
\mathrm{Co\,a \cdot Co\,e} &= \mathrm{Co\,u \cdot Co\,l + Si\,u \cdot Si\,l \cdot Si\,b}\\
\mathrm{Co\,a \cdot Si\,d} &= \mathrm{Si\,l \cdot Si\,u + Co\,l \cdot Co\,u \cdot Si\,b}
\end{aligned}\right\} \qquad 5$$

welchen die Fehlergleichungen

$$\left.\begin{aligned} db &= Co\,u \cdot dd - Si\,l \cdot de - Co\,d \cdot Si\,u \cdot da \\ dd &= Co\,u \cdot db + Si\,a \cdot de + Co\,b \cdot Si\,u \cdot dl \\ de &= Si\,a \cdot dd - Si\,l \cdot db + Co\,a \cdot Co\,d \cdot du \end{aligned}\right\} \quad 6$$

entsprechen [b]. — Ferner ergeben sich, wenn die Hilfsgrössen m und n durch

$$Tg\,m = Ct\,d \cdot Si\,a \qquad Tg\,n = Ct\,b \cdot Si\,l \qquad 7$$

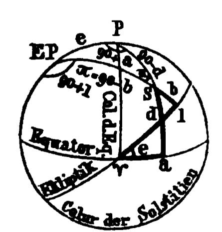
bestimmt werden, aus den 1—5

$$Si\,b = Si\,d \cdot Co\,(m + e) \cdot Se\,m \qquad Tg\,l = Tg\,a \cdot Si\,(m + e) \cdot Cs\,m \qquad 8$$

$$Si\,d = Si\,b \cdot Co\,(n - e) \cdot Se\,n \qquad Tg\,a = Tg\,l \cdot Si\,(n - e) \cdot Cs\,n \qquad 9$$

so dass man leicht von Equator auf Ekliptik, und umgekehrt, transformieren kann, zumal a und l notwendig immer demselben Quadranten angehören [c]. — Anhangsweise ist zu erwähnen, dass der jeweilen im Breitenkreise des Zenites liegende Punkt der Ekliptik, dessen Höhe offenbar deren gleichzeitigen Winkel mit dem Horizonte misst, und dessen in der Ekliptik gezählte Distanz vom Horizonte 90° beträgt, unter dem Namen **Nonagesimus** früher eine grosse Rolle spielte und noch jetzt die Lösung einzelner Probleme wesentlich erleichtert [d].

Zu 197: *a.* **Hipparch** gab in seinem Kataloge die Sterne nach Länge und Breite, und es wurde diese Übung, welche nach Entdeckung der Präcession (200) doppelt gerechtfertigt erschien, im allgemeinen bis auf die neuere Zeit beibehalten, wenn auch einzelne, wie es namentlich um 1230 durch **Aboul-Hhassan** geschah, die Equatorcoordinaten vorzogen; so bestimmte zwar Wilhelm IV. für seinen Katalog direkt Æ und D, setzte dann aber (vgl. Mitth. 45 von 1878) diese Coordinaten nachträglich doch in Länge und Breite um. Nachdem dann aber **Hevel** die Equatorcoordinaten begünstigt hatte, wurden diese durch **Flamsteed** in allgemeinen Gebrauch eingeführt. — *b.* Für die Sonne ist b = 0 und man erhält daher aus den 1—5 für sie speciell



$$Co\,l = Co\,a \cdot Co\,d \qquad Co\,e = Co\,d \cdot Co\,u \qquad 10$$

$$Si\,a = Si\,l \cdot Co\,u \qquad Tg\,a = Co\,e \cdot Tg\,l = Si\,d \cdot Ct\,u \qquad 11$$

$$Si\,d = Si\,e \cdot Si\,l \qquad Tg\,d = Tg\,e \cdot Si\,a \qquad 12$$

$$Si\,u = Co\,a \cdot Si\,e \qquad Tg\,u = Tg\,e \cdot Co\,l \qquad 13$$

Aus 11'' folgt

$$Tg\,(l - a) = \frac{Tg\,l \cdot (1 - Co\,e)}{1 + Co\,e \cdot Tg^2\,l} \qquad 14$$

und hieraus erhält man durch Differentiation

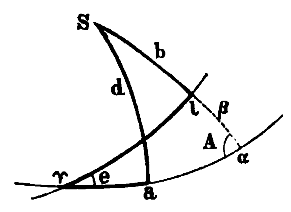
$$\frac{d\,(l - a)}{Co^2\,(l - a)} = \frac{(1 - Co\,e)\,(1 + Tg^2\,l)}{(1 + Co\,e \cdot Tg^2\,l)^2} \cdot (1 - Co\,e \cdot Tg^2\,l) \cdot dl \qquad 15$$

so dass $Tg^2\,l = Se\,e$ ein Maximalwert

$$Tg^2\,(l - a) = Si^4\,\frac{e}{2} \cdot Se\,e \qquad 16$$

entspricht, somit 1850 (e = 23° 27′ 30″), als die Länge der Sonne l = 46° 14′ 7″

war, l — a einen Maximalwert von 2° 28′ 14″ annahm. Der Unterschied zwischen Länge und Rèktascension der Sonne kann also nie auf volle $2\frac{1}{2}°$ ansteigen, obschon Or. **Finäus** (vgl. dessen Schrift von 1544 in 408) in einem zwar offenbar nur fingierten Beispiele auf 23° 23′ geht, ohne dass sich dies durch einen Druckfehler erklären lässt. — *c.* Um diese Transformationen, welche bei häufiger Wiederholung immerhin etwas lästig werden, zu erleichtern, gab **Regiomontan** (nach Delambre III 289 in Ausführung einer von Albategnius ausgesprochenen Idee) schon 1475 in seinen „Tabulæ directionum" für die Reduktion auf den Equator Hilfstafeln, welche sodann Er. **Reinhold** für die 2. Ausgabe von 1554 noch erweiterte. Sie geben für das Argument Länge die sog. **Radix ascensionum** (α) und den sog. **Arcus** (β), sowie zwei **Faktoren** (Si A und Ct A), — lassen sich einerseits nach



$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \mathrm{Tg}\,l \cdot \mathrm{Se}\,e \qquad \mathrm{Tg}\,\beta = \mathrm{Si}\,l \cdot \mathrm{Tg}\,e \qquad \mathrm{Co}\,A = \mathrm{Co}\,l \,.\, \mathrm{Si}\,e \qquad \mathbf{17}$$

leicht erstellen, — und erlauben anderseits wirklich die d und a nach

$$\mathrm{Si}\,d = \mathrm{Si}\,(b + \beta) \cdot \mathrm{Si}\,A \qquad \mathrm{Si}\,(\alpha - a) = \mathrm{Tg}\,d \cdot \mathrm{Ct}\,A \qquad \mathbf{18}$$

bequem zu berechnen. — *d.* Da für einen zur Sternzeit t unter der Polhöhe φ im Zenit stehenden Stern notwendig a = t und d = φ ist, so hat man nach 7 und 8, wenn L und B die jenen Werten entsprechende Länge und Breite des Zenites bezeichnen und $\mathrm{Tg}\,\mu = \mathrm{Ct}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,t$ ist,

$$\mathrm{Si}\,B = \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,(\mu + e) \cdot \mathrm{Se}\,\mu \qquad \mathrm{Tg}\,L = \mathrm{Tg}\,t \cdot \mathrm{Si}\,(\mu + e) \cdot \mathrm{Cs}\,\mu \qquad \mathbf{19}$$

und dabei stellt L nach obiger Definition offenbar die Länge des von **Kepler** und andern ältern Astronomen vielfach benutzten **Nonagesimus** dar, B aber dessen Zenitdistanz. Noch bequemer als die 19 sind allerdings die mit staatlicher Unterstützung herausgegebenen, nach Wunsch von Lalande durch Pierre **Levêque** (Nantes 1746 — Havre 1814; Prof. hydrogr. Nantes, dann Akad. Paris) berechneten „Tables générales de la hauteur et de la longitude du Nonagésime calculées pour toutes les latitudes. Avignon 1776, 2 Vol. in 8." — Solche Tafeln können z. B. bei Berechnung der verschiedenen Auf- und Untergänge der Sterne Verwendung finden: Berechnet man nämlich für einen Stern (a, d) den ihm zukommenden halben Tagbogen s, so sind t′ = a — s und t″ = a + s die Sternzeiten seines Auf- und Unterganges. Findet man nun für diese Zeiten die Längen L′, L″ und Breiten B′, B″, so sind L′ + 90° und L′ — 90°, oder L″ + 90° und L″ — 90°, die Längen der beim Auf- oder Untergange des Sternes im Horizonte stehenden Punkte der Ekliptik; wenn daher die Sonne die Länge L′ + 90° hat, so geht der Stern kosmisch auf, — für L″ — 90° kosmisch unter, für L′ — 90° akronyktisch auf, — für L″ + 90° akronyktisch unter. Es können jedoch (vgl. 191) alle diese Auf- und Untergänge nicht wirklich gesehen werden, da sogar die hellern Sterne erst sichtbar werden, wenn die Sonne mindestens die Depression $\alpha = 15°$, oder von dem gleichzeitig mit dem Auf- oder Untergange des Sternes im Horizonte liegenden Punkte der Ekliptik die nach

$$\mathrm{Si}\,\beta' = \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Se}\,B' \qquad \mathrm{Si}\,\beta'' = \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Se}\,B'' \qquad \mathbf{20}$$

zu berechnenden Abstände β' und β'' hat; es geht daher der Stern helisch auf, wenn die Sonne die Länge L′ + 90° + β' besitzt, — helisch unter, wenn dieselbe L″ — 90° — β'' ist. Vgl. „Ernst Wilhelm **Hartwig** (Pirna 1829 geb.; Prof. math. Schwerin), Über die Berechnung der Auf- und Untergänge der Sterne. Schwerin 1863 in 8."

198. Die Bestimmung einer ersten Rektascension und Uhrkorrektion. — Misst man die Zenitdistanz $z = \varphi - d$ der Sonne im Momente ihrer Culmination, und notiert zugleich an einer nach den Sternen regulierten Uhr die entsprechende Zeit t, so kann man (197 : 12″) unter Voraussetzung, dass φ und e bereits bekannt seien, nach

$$\mathrm{Si}\, a = \mathrm{Tg}\, d \cdot \mathrm{Ct}\, e \qquad \text{und} \qquad \Delta t = {}^1/_{15}\, a - t \qquad \mathbf{1}$$

die Rektascension a der Sonne und die Uhrkorrektion Δt bestimmen, womit die früher kontrahierte Schuld vorläufig abbezahlt ist, eine genauere Auseinandersetzung dem dritten Buche vorbehaltend [a].

Zu 198: *a.* Will man bei dieser, durch **Hipparch** inaugurierten Methode, die Schiefe der Ekliptik nicht als bekannt voraussetzen, so wird es nötig, bei zwei verschiedenen Culminationen der Sonne deren Deklinationen d_1 und d_2, sowie die Uhrzeiten t_1 und t_2 zu notieren. Bezeichnen sodann a_1 und a_2 die entsprechenden Rektascensionen der Sonne, τ deren Unterschied, g den Gang der Uhr und n die Anzahl der Zwischentage, so hat man entsprechend 1

$$\mathrm{Tg}\, d_1 = \mathrm{Tg}\, e \cdot \mathrm{Si}\, a_1 \qquad \mathrm{Tg}\, d_2 = \mathrm{Tg}\, e \cdot \mathrm{Si}\, a_2 \qquad \mathbf{2}$$

$$a_1 = t_1 + \Delta t \qquad a_2 = t_2 + \Delta t + n \cdot g \qquad \tau = a_2 - a_1 = t_2 - t_1 + n \cdot g \qquad \mathbf{3}$$

so dass τ eine bekannte Grösse ist. Es folgt hieraus

$$\frac{\mathrm{Tg}\, d_1}{\mathrm{Tg}\, d_2} = \frac{\mathrm{Si}\, a_1}{\mathrm{Si}\,(a_1 + \tau)} \quad \text{oder} \quad \mathrm{Tg}\, a_1 = \frac{\mathrm{Tg}\,\tau \cdot \mathrm{Co}\, d_2 \cdot \mathrm{Si}\, m}{\mathrm{Si}\,(d_2 - m)} \quad \text{wo} \quad \mathrm{Tg}\, m = \mathrm{Tg}\, d_1 \cdot \mathrm{Co}\,\tau \qquad \mathbf{4}$$

Es kann daher wirklich nach 4 ohne Voraussetzung von e eine erste Rektascension a_1, sodann nach 3 eine erste Uhrkorrektion Δt, — ja zur Not, jedoch nur etwas befriedigend, wenn die beiden Beobachtungen ein Equinoktium einschliessen, nach 2 auch noch e berechnet werden.

199. Die Bestimmungen von Hipparch und seinen Vorgängern. — Sobald eine erste Rektascension (⊙) der Sonne bekannt war, konnten auch die Rektascensionen (✶) der übrigen Gestirne verhältnismässig leicht bestimmt werden, da (wegen $t = a + s$) die Differenz der Rektascensionen zweier Gestirne notwendig gleich der Differenz ihrer Culminationszeiten ist, oder auch durch den Gegensatz der Differenz ihrer gleichzeitigen Stundenwinkel gegeben wird: Ersteres Verfahren konnte nun allerdings von **Hipparch**, da er über keine auch nur irgendwie zuverlässigen und bei Nacht ebenfalls funktionierenden Uhren verfügte, noch nicht zur Anwendung gebracht werden und wurde (374) erst in einer weit spätern Zeit brauchbar; dagegen benutzte er das zweite, allerdings später (373) auch noch wesentlich verbesserte Verfahren in der Weise, dass er am Tage mit Hilfe einer sog. Armillarsphäre (386) die Sonne mit dem neben ihr sichtbaren Monde (☾), — sodann nachts letztern mit den Sternen verglich, — und schliesslich durch Addition von

$$\odot \qquad ☾ - \odot \qquad ✶ - ☾$$

die Rektascension des Sternes ableitete. Er erhielt so bereits weit zuverlässigere Bestimmungen für die Lage der Sterne, als solche früher (372) durch andere Methoden, wie namentlich durch Beobachtung der Auf- und Untergänge, erhalten worden waren, — ja auch als diejenigen, welche man seinen bedeutendsten Vorgängern **Timocharis** und **Aristyll** verdankte [a], da diese zwar einzelne Sterne in entsprechender Weise mit den Equinoktialpunkten verglichen zu haben scheinen, aber den Eintritt der Sonne in letztere noch nicht mit genügender Genauigkeit zu bestimmen wussten [b].

Zu 199: *a.* Die erste Beobachtung, welche **Ptolemäus** (Almagest VII 3) von diesen beiden alten Astronomen beibringt, bezieht sich auf eine Bedeckung der Spica im Jahre 294 v. Chr. — *b.* Der Eintritt eines **Equinoktium** wurde früher aus dem Momente bestimmt, wo der innere Rand einer sog. „Equatoreal-Armille", d. h. eines senkrecht zur Weltaxe befestigten Ringes, gleichmässig beschattet erschien, — wohl auch, indem man am Gnomon vor und nach dem Eintritte die Mittagshöhe der Sonne bestimmte und daraus durch eine Art Interpolation den Moment ableitete, wo dieselbe mit der Equatorhöhe übereinstimmte, — oder indem man vor und nach jedem Equinoktium wiederholt die von der auf- und untergehenden Sonne geworfenen Schatten mit der Linie Ost-West verglich und daraus den Moment abzuleiten suchte, wo der Schatten auf diese Linie selbst gefallen wäre. In ähnlicher Weise wurden die **Solstitien** durch Aufsuchen der Zeit erhalten, wo der Gnomon den kürzesten oder längsten Mittagsschatten warf, — wohl auch, indem man wieder durch eine Art Interpolation die Zeiten zu bestimmen suchte, zu welchen die Sonne vor und nach einem Solstitium die gleiche Höhe besass und aus diesen das Mittel nahm.

200. Die sog. Präcession der Nachtgleichen. — Als **Hipparch** nach den erwähnten Methoden einen ersten grössern Sternkatalog anlegte [a], fand er z. B., dass die Spica dem Herbstpunkte nur um 6° vorausgehe, während 150 Jahre früher **Timocharis** und **Aristyll** noch 8° gefunden hatten [b], — ein Resultat, das sich ergeben würde, wenn der Frühlingspunkt in jedem Jahre um 48″ im Sinne der täglichen Bewegung vorrückte. Ähnliche, wenn auch zum Teil etwas stark variierende Werte ergaben sich **Hipparch** bei Vergleichung anderer Sterne, — immer Zunahme der Länge bei wesentlich gleicher Breite, — und so glaubte er schliesslich aussprechen zu können, dass besagtes Vorrücken wirklich statt habe und **mindestens** 1° in 100 Jahren oder also 36″ in Einem Jahre betrage [c]. Die Folgezeit hat, wie wir sofort hören werden, die Richtigkeit dieses Ausspruches vollständig dargethan und die Entdeckung dieser sog. **Präcession der Nachtgleichen** den Hauptleistungen von **Hipparch** beigeschrieben, obschon es auch nicht an Versuchen fehlte, dieselbe, wenn auch meist aus sehr futilen Gründen, schon ältern Völkern zu vindicieren [d].

Zu 200: *a.* Die früher in das Gebiet der Sage verwiesene Angabe, dass **Hipparch** durch einen neu aufleuchtenden Stern zur Anlage seines Kataloges veranlasst worden sei, ist durch den chinesischen Bericht von einem im Jahre 134 v. Chr. erschienenen neuen Stern im Skorpion vollständig rehabilitiert worden. — *b.* Da **Ptolemäus** im Almagest (Ed. Halma II 10) ausdrücklich **Timocharis** nennt, so ist wohl die von manchen gemachte Angabe, es habe **Hipparch** die Präcession durch Vergleichung seiner Beobachtungen mit denjenigen von **Eudoxus** gefunden, ganz unhaltbar. — *c.* Auch **Ptolemäus** kam zu ähnlichen Resultaten, indem er (II 26) aus zwei Bedeckungen eines Sternes im Skorpion durch den Mond, welche **Timocharis** im Jahre 292 v. Chr. zu Alexandrien und **Menelaus** im Jahre 99 n. Chr. zu Rom beobachtet hatten, herausrechnete, dass die Länge dieses Sternes in 391 Jahren um 3° 55′, oder in 100 Jahren nahe um 1° gewachsen sei, — ja liess sich durch die Übereinstimmung verleiten, die 36″ nicht nur als untere Grenze, sondern als wirklichen Betrag der jährlichen Präcession anzusehen und (II 30) zur Reduktion der Sternpositionen auf eine andere Epoche zu empfehlen. Dass **Ptolemäus** bei Konstruktion des in den Almagest aufgenommenen Sternkataloges hievon auch selbst weitgehenden Gebrauch machte, lässt sich kaum bezweifeln; dagegen ist die durch **Delambre** (Hist. I) erhobene Anklage, derselbe habe seinen Katalog einfach mit Hilfe der angenommenen Präcession aus dem Hipparch'schen abgeleitet und dann in unredlicher Weise, als auf neuen Beobachtungen beruhend, ausgegeben, mutmasslich eine viel zu weit gehende, und es hat auch in neuester Zeit C. H. **Peters** (A. N. 2803 von 1887) mit Erfolg dieselbe zu entkräften versucht. — *d.* So z. B. wollte **Bailly** die Entdeckung den Chaldäern zuschreiben, weil dieselben nach dem Zeugnisse von **Albategnius** die nahe richtige Länge $365^d\ 6^h\ 11^m$ des siderischen Jahres gekannt und dennoch ihrem bürgerlichen Jahre nur $365\frac{1}{4}^d$ gegeben haben, — oder sogar den Persern, weil sie behaupteten, die Welt werde 12000 Jahre dauern, so dass jedem Zeichen 1000 Jahre zukommen, was mit einer Präcession von 3° per Jahrhundert in Rapport stehen dürfte, — etc. **Biot** glaubte die Kenntnis der Präcession auch bei den alten Chinesen zu finden, während nach **Delambre** (Hist. I 372) erst der im 3. oder 4. Jahrhundert n. Chr. lebende Astronom **Yu-Hi** von derselben spricht und ihr noch den rohen Wert von 1° in 50 Jahren beilegt. Etc.

201. Die neuern Bestimmungen und die sog. Nutation. — Als **Albategnius** die von ihm um 879 ermittelten Sternpositionen mit den Angaben des Almagest verglich, erhielt er für die Präcession den bereits gegenüber Ptolemäus einen wesentlichen Fortschritt konstatierenden Wert von 1° in 66 Jahren oder 55″ per Jahr, — und um 1260 leitete **Nassir-Eddin** den Betrag von 1° in 70 Jahren oder von etwa 51″ per Jahr ab, an welchem die Neuzeit nahezu festhalten konnte [a]. Wir werden später (514 und 609) auf diese neuern und neuesten Bestimmungen, sowie auf die betreffenden theoretischen Untersuchungen und die Ermittlung des Einflusses der Präcession auf die Sterncoordinaten eingehend zurückzukommen haben, und wollen hier nur zur vorläufigen Orientierung **einerseits** beifügen, dass die Präcession durch die Mechanik des Himmels als eine notwendige Folge der Abplattung der Erde erwiesen, sowie

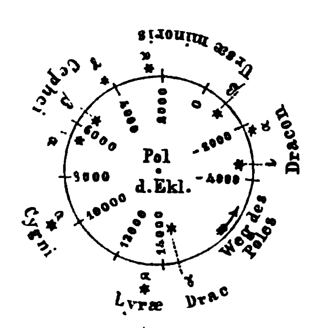
in Beziehung zu der bereits (191) besprochenen Veränderlichkeit der Schiefe der Ekliptik gebracht worden ist, — und **anderseits**, dass **Bradley** 1747 eine an die Mondsknotenperiode von 18,6 Jahren gebundene, allerdings (610) im Maximum in Länge nur etwa 18″ betragende periodische Störung der Präcession entdeckte, welche seither als sog. **Nutation** in Betracht gezogen wird [b].

Zu 201: *a.* Die Vergleichung einiger früherer Bestimmungen veranlasste eine eigentümliche Kontroverse: **Ptolemäus** hatte nämlich um 130 die Länge von α Virginis zu 176° 40′ angenommen, — **Alfons** aber um 1281 zu 193° 48′, — während Johannes **Werner** (Nürnberg 1468 — ebenda 1528; Pfarrer zu Nürnberg; vgl. Günthers 5. Studie von 1878) gegen Ende von 1514 dafür 196° 53′ 19″ fand; es würde daraus, wenn diese Daten und Jahreszahlen richtig wären, für die Zeit von Ptolemäus bis Alfons eine jährliche Präcession von 53″,6, für diejenige von Alfons bis Werner dagegen nur eine solche von 47″,6, also eine entschiedene Ungleichheit folgen, — und eine solche nahm dann auch **Werner** in seinem „Tractatus de motu octavæ sphæræ. Norimbergæ 1522 in 4.“ nicht nur als Thatsache an, sondern benutzte sie sogar als Ausgangspunkt für einen weitern Ausbau der Lehre von der sog. **Trepidation** (206), wofür er aber 1524 von **Coppernicus** in einem Briefe an Bernhard **Wapowski** (1475? — 1535; Domherr in Krakau), dem neuerlich durch Maximilian Curtze (Ballenstedt in Anhalt 1837 geb.; Gymn. Thorn) in Wien wieder aufgefundenen und durch Günther (Mitth. II des Copp. Ver.) kommentierten „Wapowski-Briefe“, unter Nachweis begangener Rechnungsfehler, scharf ins Gericht genommen wurde. Auch spätere verwandte Theorien, wie z. B. die von Geronimo **Fracastoro** (Verona 1483 — ebenda 1553; Arzt zu Verona) aufgestellte, fielen ebenso in sich selbst zusammen. — *b.* Vgl. „**Bradley**, On the apparent motion of the fixed stars (Ph. Tr. 1748).“

202. Die Folgen der Präcession und das sog. tropische Jahr. — Infolge der Präcession durchläuft der Frühlingspunkt in circa 26000 Jahren die ganze Ekliptik [a], während sich gleichzeitig auch der Equator und sein Pol verschieben, und zwar so, dass letzterer nahe einen Kreis um den Pol der Ekliptik beschreibt [b]. — Ferner hatte man früher schlechtweg ein Jahr von $365^1/_4{}^d$ angenommen, während nun **Hipparch** infolge seiner Entdeckung zwischen dem **tropischen Jahre**, das die Sonne zu demselben Punkte der Ekliptik, und dem **siderischen Jahre**, das sie zu demselben Sterne zurückführt, unterscheiden und jedes dieser Jahre bestimmen musste. Er begann mit dem tropischen Jahre, dessen Ermittlung ihm näher lag, da er (199) die Eintritte der Sonne in die Solstitien und Equinoktien ziemlich genau zu erhalten wusste [c], ja sogar für diese einige zuverlässige Bestimmungen aus älterer Zeit zur Vergleichung besass: Als er nun z. B. fand, dass das Sommersolstitium des Jahres 134 v. Chr. um einen halben Tag früher eintraf, als er dasselbe aus einem 147 Jahre zuvor durch **Aristarch** beobachteten mit einem Jahre von $365^1/_4{}^d$ erhalten hatte,

so musste er annehmen, dass letzteres um den 147. Teil von $^1/_2{}^d$ oder um circa 5^m zu gross sei, dass also das tropische Jahr nur $365^d\ 5^h\ 55^m$ betrage, — und eine spätere ähnliche Bestimmung von **Albategnius** ergab sogar nur $365^d\ 5^h\ 46^m\ 24^s$, während die Gegenwart $365^d\ 5^h\ 48^m\ 46^s$ gefunden hat [d]. In einem tropischen Jahre legte aber die Sonne nach **Hipparchs** Bestimmung der Präcession höchstens $359^\circ,99$ zurück, also musste das siderische Jahr mindestens $365^d\ 6^h\ 10^m$ betragen, und in der That hat (191) die Neuzeit dafür den nur wenig kleinern Wert $365^d\ 6^h\ 9^m\ 10^s,75$ gefunden [e].

Zu 202: *a.* Nach **Ideler** (I 193) war es im Altertum eine sehr verbreitete, vermutlich zuerst durch **Plato** in seinem Timæus angeregte Meinung, dass es ein grosses Jahr gebe, welches „den Anfang und das Ende aller Dinge" in sich begreife. Später wurde dieses sog. **Platonische Jahr** mit unserer Periode von circa 26000 Jahren identifiziert. Vgl. auch 200 : d. — *b.* Während der Pol des Equators in vorhistorischen Zeiten bei ι und α Draconis, dann bei β Ursæ min. gestanden hatte, nähert er sich jetzt noch bis A. 2100 unserm gegenwärtigen Polarsterne α Ursæ min. (Minimalabstand 28′), entfernt sich dann aber wieder von ihm gegen den Cepheus hin, so dass etwa A. 3500 in γ Cephei ein neuer Prätendent für die Würde eines Polarsternes auftreten wird, u. s. f., bis endlich nach vielen Jahrtausenden unsere gegenwärtigen Zenitalsterne (erst α Cygni, dann α Lyræ) näher am Pole leuchten werden als α Ursæ min. zur Zeit Hipparchs. — *c.* **Hipparch** wusste seine Bestimmungen noch in verschiedener Weise zu kontrolieren, so z. B. das Herbstequinoktium durch Vergleichung mit der in der Ekliptik stehenden und dem Herbstpunkte nahen Spica. — *d.* Setzt man die Länge des siderischen Jahres nach **Hansen** (191) gleich $365^d,256\,3582$, die mittlere tägliche tropische Bewegung nach ebendemselben gleich $3^m\ 56^s,555 = 3548'',33$, und (609) den jährlichen Betrag der Präcession nach **Bessel**



$$\frac{d\psi}{dt} = \left\{ \begin{matrix} 50'',21129 + 0'',00024\,42966 \cdot t \\ 22354 \qquad\qquad 42966 \cdot t' \end{matrix} \right\} \qquad 1$$

wo t die seit 1750 und t′ die seit 1800 verflossenen Jahre zählt, so erhält man die Länge des tropischen Jahres im Jahre t′ unsers Jahrhunderts

$$\begin{aligned} T &= 365^d,256\,3582 - (50'',22354 + 0'',00024\,42966 \cdot t') : 3548'',33 \\ &= 365^d,242\,2041 - 0^d,000000\,068848 \cdot t' \qquad 2 \\ &= 365^d\ 5^h\ 48^m\ 46^s,43424 - 0^s,00594\,84672 \cdot t' \end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen dem tropischen und julianischen Jahre beträgt somit

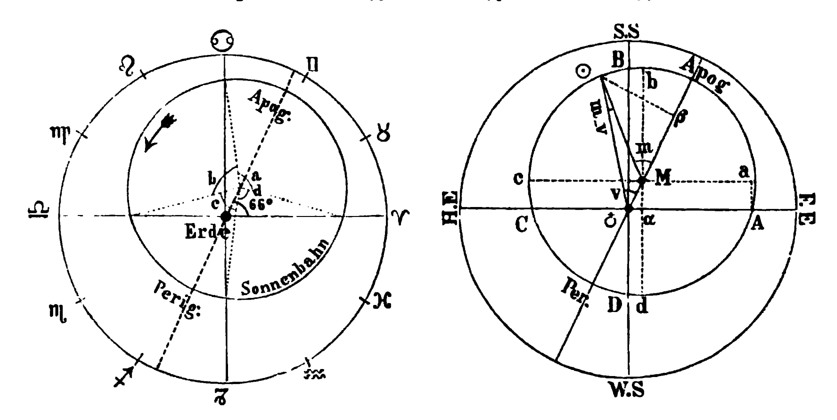
$$\tau = 678^s,56576 + 0^s,00594\,84672 \cdot t' \qquad 3$$

e. **Hipparch** bestimmte 146 v. Chr. zu Alexandrien die Frühlingsnachtgleiche auf III 23, $23^h\ 55^m$, — **Cassini** zu Paris 1735 auf III 20, $14^h\ 21^m$, was auf alten Kalender und Alexandrien reduziert mit III 9, $16^h\ 12^m$ übereinkömmt. Die beiden Equinoktien stehen also um $14^d,1286$ weniger als 1880 julianische

Jahre auseinander, und es ist somit durchschnittlich das tropische Jahr um $14^d,1286 : 1880 = 0^d,00752 = 649^s,728$ kürzer als das julianische, oder es ist ersteres gleich $365^d,24248$ zu setzen, was dem jetzt angenommenen Werte 365,24220 schon recht nahe kömmt. — Setzt man dagegen das siderische Jahr (191) $T' = 365,256\,3744$, so ist die Bewegung der Sonne in einem Tage gleich $360^0 : T' = 0,993706^0 = 3,550009''$, — also entsprechen einer Präcession von $51''$ etwa $51 : 3,550009 = 0,014\,3735^d$, — also hält das tropische Jahr nach diesen Grundlagen nur $365,256\,3744 - 0,014\,3735 = 365,242009^d$, und man erhält im Mittel aus diesen beiden Berechnungen nahezu den richtigen Wert.

203. Die Ungleichheit der Jahreszeiten. — Durch wiederholte Bestimmung des Eintrittes der Equinoktien und Solstitien (199) fand **Hipparch**, dass dem sog. Frühling $94^1/_2$, dem Sommer $92^1/_2$, dem Herbst 88 und dem Winter 90 Tage zufallen, dass also die Jahreszeiten ungleich lang seien: Hieraus schloss er aber mit seinem gewohnten Scharfsinne, dass das Centrum des von der Sonne beschriebenen Kreises nicht mit dem von der Erde eingenommenen Centrum der Fixsternsphäre zusammenfallen könne, sondern um $^1/_{24}$ des Radius gegen den 6. Grad der Zwillinge verschoben sein müsse [a]. Es erreichte also die Sonne jedes Jahr ein **Apogeum** (Erdferne) und ein **Perigeum** (Erdnähe), und zwar ergab sich **Hipparch**, dass sie ersteres am 25. Mai passiere [b].

Zu 203: *a.* Um die Grösse und Richtung der durch die Ungleichheit der Jahreszeiten bedingten Excentricität zu bestimmen, schlug **Hipparch** (vgl. Almagest Halma I 184) folgenden Weg ein: Da bei gleichförmiger Bewegung im Kreise aus den Proportionen $94^1/_2 : a = 365^1/_4 : 360$ und $92^1/_2 : b = 365^1/_4 : 360$



sehr nahe $a = 93^0\,9'$ und $b = 91^0\,11'$ folgen, so kann man $Aa = {}^1/_2(a + b - 180) = 2^0\,10'$ und $Bb = a - 90^0 - Aa = 0^0\,59'$ setzen, also nach der Sehnentafel (61), bei welcher der Radius 60 Partes à 60 Minuten hatte, $M\alpha = {}^1/_2$ Subt. $2 \times 2^0\,10' = 2^p\,16'$ und $\delta\alpha = 1^p\,2'$, somit nach dem pythagoräischen Lehrsatze $M\delta = \sqrt{M\alpha^2 + \delta\alpha^2} = 2^p\,29^1/_2{}'$. Hieraus folgt aber **einerseits**, dass die Excentricität nahezu $^1/_{24}$ von 60^p oder dem Radius ist, — und dass **anderseits**, da man aus der Sehnentafel $(M\alpha : M\delta) \times 60^p = 54^p\,39' = {}^1/_2$ Subt. $2 \times 65^1/_2{}^0$ findet, das

Centrum des Sonnenkreises von der Erde aus in der Länge von nahe $66^0 = 2^s\ 6^0$ gesehen wird. — *b.* Apogeum und Perigeum zusammen heissen **Apsiden** (von ἄψις = Krümmung) und ihre Verbindungslinie bildet die sog. **Apsidenlinie.**

204. Hipparchs Theorie der Sonne. — Die vorstehenden Bestimmungen ermöglichten **Hipparch**, auch eine erste Theorie der Sonne aufzustellen, d. h. eine Tafel zu berechnen, der man für jede beliebige Zeit entnehmen konnte, in welchem Winkelabstande vom Apogeum die Sonne von der Erde aus erscheinen werde, oder wie gross ihre sog. **wahre Anomalie** (v) sei: Bezeichnet nämlich t die zu jener Zeit seit dem Durchgange der Sonne durch ihr Apogeum verflossene Anzahl von Tagen, und m die dem Mittelpunkte der Bahn entsprechende, also bei gleichförmiger Bewegung der Zeit proportionale, sog. **mittlere Anomalie,** so hat man offenbar

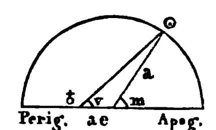
$$m : 360 = t : 365^1/_4 \qquad \text{oder} \qquad m = 0^0{,}9856 \cdot t \qquad \mathbf{1}$$

und kann somit vorerst m leicht berechnen, — sodann aber nach

$$\mathrm{Tg}\, v = \frac{\mathrm{Si}\, m}{e + \mathrm{Co}\, m} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Tg}\,(m - v) = \frac{e \cdot \mathrm{Si}\, m}{1 + e \cdot \mathrm{Co}\, m} \qquad \mathbf{2}$$

wo $e = {}^1/_{24}$ ist, auch die eigentlich gesuchte v [a]. — Die Differenz (m — v), welche auf $\pm\ 2^0\ 13'$ anwachsen kann [b], bezeichnet man gewöhnlich als **Gleichung** [c].

Zu 204: *a.* Die 2 ergeben sich durch leichte Umsetzungen aus der Proportion $a : ae = \mathrm{Si}\, v : \mathrm{Si}\,(m - v)$, welche unmittelbar der beistehenden Figur entnommen werden kann. — Zur Zeit von **Hipparch,** wo man noch auf die Sehnentafel angewiesen war, hatte man derselben zunächst (vgl. 203 : Fig.) ⊙β und Mβ zu entnehmen, dann aus ⊙β und ♁β = e + Mβ nach dem pythagoräischen Lehrsatz ♁⊙ zu berechnen, und schliesslich, wieder mit Hilfe der Tafel, aus ⊙β und ♁⊙ die gesuchte v zu ermitteln. — *b.* Aus 2 erhält man durch Differentiation



$$d\,(m - v) : d\,m = e\,(e + \mathrm{Co}\, m) : (1 + 2e \cdot \mathrm{Co}\, m + e^2) \qquad \mathbf{3}$$

also nimmt die Gleichung für $\mathrm{Co}\, m = -e$ ihren Maximalwert an, und zwar folgen hiefür nach 2 für $e = {}^1/_{24}$ sofort $v = 90^0$ und $\mathrm{Tg}\,(m - v) = e : \sqrt{1 - e^2} = \pm\, 2^0\, 13'$, wie dies auch Hipparch, aber allerdings nicht in so einfacher Weise, gefunden hatte. — *c.* Die „Gleichung" wurde früher wohl auch als „Anomalie" bezeichnet oder (vgl. 89 : a) als „Prostaphäresis".

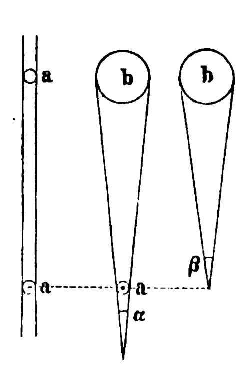
205. Die scheinbare Grösse der Sonne. — Dass der Winkel, unter welchem man den Durchmesser der Sonne von der Erde aus sieht, oder die sog. **scheinbare Grösse** der Sonne, mit ihrer Distanz wechseln, und zwar annähernd in reciprokem Verhältnisse zu letzterer stehen muss, war natürlich schon **Hipparch** klar; aber die damals zur Bestimmung vorhandenen Methoden und Instrumente waren noch unzureichend, um die Differenz nachweisen zu können [a]. Letzteres gelang erst der neuern Zeit, wo man dieselbe

allerdings schon mit dem Spiegelsextanten (353), geschweige mit dem Heliometer (399) erkennt, und den scheinbaren Sonnendurchmesser, welcher in der That etwa zwischen

$$1890'',0 = 31' \; 30'',0 \quad \text{und} \quad 1954'',6 = 32' \; 34'',6$$

schwankt, teils mit den ebengenannten Instrumenten, teils auch aus Meridiandurchgängen (408) mit grosser Annäherung zu bestimmen weiss [b]. — Hätte **Hipparch** bereits diese neuern Mittel besessen, so wäre es ihm wohl beigefallen, von der Erde als Pol und der Geraden nach dem Frühlingspunkte als Axe, die aus den Beobachtungen folgenden Längen der Sonne als Winkel, die Reciproken der scheinbaren Durchmesser aber als Leitstrahlen aufzutragen und die so erhaltenen Punkte zu verbinden: Er hätte dann für die Sonnenbahn eine Ellipse der Excentricität $^1/_{60}$ erhalten, in deren einem Brennpunkte die Erde gestanden haben würde und in welcher die vom Leitstrahl der Sonne überstrichenen Flächen den Zwischenzeiten der Beobachtungen proportional gewesen wären.

Zu 205: *a.* Die Egypter setzten den Durchmesser der Sonne gleich der Drehung, welche der Schatten eines vertikalen Stabes während ihrem Aufgange vollführt, was wenigstens für mittlere Breiten zur Zeit der Equinoktien nahe richtig ist; denn aus 177 : 1, 2, 6 folgt für $dp = 0$, $d\varphi = 0$, $z = 90^0$, $w = 90^0$ und $\varphi = 45^0$ in der That $dw = dz$. Grosse Genauigkeit lässt jedoch offenbar dieses Verfahren nicht zu, — so wenig als dasjenige der Chaldäer, welches darin bestand, in dem Augenblicke, wo zur Zeit der Nachtgleiche der erste Punkt der Sonne am Horizonte erschien, das am Boden eines mit Wasser gefüllten Gefässes befindliche kleine Loch zu öffnen, die Mengen a und b des, unter Vollhaltung des Gefässes, teils bis zum vollständigen Aufgange, teils von da bis zum Beginn des nächsten Aufganges, ausfliessenden Wassers zu messen, und sodann den Sonnendurchmesser aus der Proportion $d : 360^0 = a : (a + b)$ zu berechnen; aber immerhin war die von **Thales** gemachte, auf einer solchen Messung beruhende Angabe, dass der Sonnendurchmesser $^1/_{720}$ der Sonnenbahn betrage, ein grosser Fortschritt gegen die landläufige, nicht nur von **Epikur** (Samos 342 — Athen 270; Philosoph), sondern noch jetzt von manchen Laien festgehaltene Meinung, es sei die Sonne eine Scheibe von Ein Fuss Durchmesser, was einer Sonnendistanz von nur etwa 100 Fuss entsprechen würde. Bemerkenswert ist, dass **Archimedes** sich in seinem „Arenarius (Oeuvres Peyrard 350)" nicht damit begnügte, anzuführen, es gebe **Aristarch** dem Sonnendurchmesser ebenfalls $^1/_{720} = ^1/_2{}^0$, sondern diese Bestimmung in folgender Weise zu verifizieren suchte: Er verschaffte sich einen kleinen Cylinder a, der, vor das Auge gestellt, einen etwas entferntern gleichen Cylinder gerade zu decken schien, also gewissermassen der Breite des wirksamen Auges entsprach; dann richtete er einen langen Lineal, sein Auge an dessen Ende legend, nach der aufgehenden Sonne und verschob auf dem Lineal einen grössern Cylinder b einmal so weit, dass er die Sonne kaum mehr, — ein andermal



nur so weit, dass er sie noch wirklich bedeckte; im erstern Falle erhielt er, indem er das Auge durch a ersetzte und an die Cylinder gemeinschaftliche Tangenten zog, einen Winkel $\alpha = {}^1/_{200}$ R = 27′, der kleiner als der Durchmesser der Sonne war, — im zweiten Falle, indem er direkt vom Auge Tangenten an b zog, einen Winkel $\beta = {}^1/_{164}$ R = 33′, der grösser als jener Durchmesser war, — im Mittel aus beiden Grenzwerten aber den mit Aristarchs Angabe übereinstimmenden Näherungswert 30′ = $^1/_2$°. Auch **Hipparch** scheint bei seinen Bestimmungen (vgl. Almagest Halma I 339) in ähnlicher Weise verfahren zu sein, nur dass sein Stab mutmasslich eine Längsteilung hatte, für das Auge eine Art Okulardiopter, statt b ein längs der Scale in einer Coulisse verschiebbares Scheibchen vorhanden war, ferner die scheinbare Grösse der Sonne aus dem Durchmesser des letztern und seiner Entfernung vom Auge berechnet wurde, — und noch in Meragah kam nach Charles-Marie Bréchillet-**Jourdain** (Paris 1817 — ebenda 1886; Akad. Paris) ein ähnlicher Apparat zur Verwendung, vermochte jedoch auch nicht, die Veränderlichkeit der scheinbaren Grösse mit Sicherheit zu konstatieren. — *b.* Für eine allfällige, sekuläre oder periodische, wirkliche Veränderung des Sonnendurchmessers vgl. 529—30.

206. Die Bewegung des Apogeums. — Als **Albategnius** gegen Ende des 9. Jahrhunderts Hipparchs Theorie der Sonne revidierte, erhielt er für die grösste Gleichung nur 1° 58′, für die Excentricität nur etwa $^1/_{58}$, dagegen für die Länge des Apogeums volle 82° 17′, so dass letztere entschieden mehr zugenommen hatte, als die Präcession allein bewirken konnte, folglich eine **Bewegung des Apogeums im Sinne der Zeichen** konstatiert war. Da nun allerdings diese Länge für seine Zeit um etwa 4° zu gross war, und er überdies die von **Hipparch** erhaltenen 66° der Zeit von Ptolemäus zuschrieb, d. h. die sich ergebende Differenz von 16° 17′ nur auf 780 Jahre verteilte, so war die hieraus folgende jährliche Verschiebung des Apogeums von 75″ gegen den Frühlingspunkt, oder (die Präcession nach eigener Bestimmung zu 54″ annehmend) von 21″ im Sinne der Zeichen, merklich zu gross, und so konnte es kommen, dass man später wieder eine Bewegung in entgegengesetztem Sinne zu erkennen glaubte, welche man sodann mit der schon etwas früher aufgestellten, zum Glück jetzt schon längst begrabenen Theorie einer sog. **Trepidation** in Verbindung bringen wollte [a]. Die Bewegung selbst ist dagegen von der neuern Zeit vollständig bestätigt, nur von den 21″ auf 11″,464 reduziert, und mit Hilfe dieser Zahl die Länge des sog. **anomalistischen**, d. h. die Sonne zum Apogeum zurückführenden Jahres, auf 365^d, 259 6053 = $365^d\ 6^h\ 13^m\ 49^s,90$ festgesetzt worden [b]. — Endlich mag noch erwähnt werden, dass gegenwärtig die vier Jahreszeiten etwa die Dauer von 93, 93$^1/_2$, 89$^1/_2$ und 89 Tagen haben, — das in 101° Länge fallende Apogeum am 1. Juli erreicht wird, — und alle

diese Grössen fortwährend variieren, bis sie je etwa in 20900 Jahren wieder ihre frühern Werte erhalten [c].

Zu 206: *a.* Gewöhnlich nimmt man an, es habe ein Zeitgenosse von Albategnius, der schon früher (5:b) erwähnte Tabit ben Korra oder **Thebit**, die Lehre von der Trepidation aufgestellt, während **Günther** (Studien II 78) glaubt, sie möchte älter, ja den Arabern von indischer Seite übermittelt worden sein. Wie dem übrigens sei, so halte ich nicht dafür, dass es sich hier lohnen würde, näher auf diese Lehre einzutreten, welche (wie die verwandte Werner'sche in 201) bloss auf dem Fundamente irriger Thatsachen basierte und so von selbst wieder fallen musste, — es wäre denn, dass man sie als Warnungstafel für diejenigen Naturforscher hinstellen wollte, welche auch jetzt noch jeden Augenblick bereit sind, nach Art mancher sog. Philosophen, Kartenhäuser zu bauen. — *b.* Nimmt man das siderische Jahr zu $365^d,256\,3744$ an, so braucht die Sonne nach Ablauf eines solchen Jahres noch $11,464 : [360 \cdot 60 \cdot 60 : 365,256\,3744] = 0^d,003\,2309 = 4^m\,39^s,15$, um das Apogeum einzuholen, und es übertrifft daher das anomalistische Jahr das siderische um diese Grösse. — *c.* Es ist nämlich $360 \cdot 60 \cdot 60 : (11^1/_2 + 50^1/_2) \doteq 20900$.

207. Der Mond als Wandelstern. — Neben der Sonne musste notwendig in frühern Zeiten der Mond als Hauptgestirn erscheinen, — war er ja das Einzige, das neben ihr sichtbar zu bleiben und nachts sie einigermassen zu vertreten vermochte, — und zugleich dasjenige, welches am leichtesten als Wandelstern zu erkennen war. Seine Verschiebung gegen die Sterne ist nämlich eine so rasche, dass sie mittelst geeigneten Alignements im Laufe einiger Stunden deutlich erkannt wird, — und überdies kann, da der Mond Schatten zu werfen vermag, schon der Gnomon, in ähnlicher Weise wie für die Sonne (191), benutzt werden, um die tägliche Verspätung der Culmination des Mondes und dessen zwischen weiten Grenzen variierende Culminationshöhe zu messen. Man findet so, dass sich der Mond jeden Tag gegen die Sonne um circa 50^m, oder also gegen die Sterne um etwa 54^m verspätet, somit seine Rektascension täglich um beiläufig $54^m = 13^1/_2{}^0$ zunimmt, wodurch er in circa 27^d, genauer (208) in etwa $27^1/_3{}^d$, je wieder zu denselben Sternen zurückgeführt wird, — dass ferner seine Deklination in derselben Zeit einen Cyklus von Werten durchläuft, die zwischen $\pm 28^1/_2{}^0$ enthalten sind, — und kann hieraus schliessen, dass der Mond, wenigstens annähernd, in dieser Zeit oder dem sog. **siderischen Monat** einen grössten Kreis an der Himmelssphäre zu beschreiben scheint, der gegen die Ekliptik um nahe $28^1/_2 - 23^1/_2{}^0 = 5^0$, genauer um $5^0\,9'$, geneigt ist [a], folglich letztere in zwei sog. **Knoten**, dem **Drachenkopf** und **Drachenschwanz**, schneidet [b].

Zu 207: *a.* Nach Houzeau erzählen „**Plutarch**, De creatione animæ (cap. 45) und: **Diodorus**, Bibliotheca historica (lib. 1)“, dass, aber allerdings wohl nur bei den Griechen, **Pythagoras** zuerst die Neigung der Mondbahn erkannt

habe. Infolge derselben verändert sich die Deklination des Mondes um volle $2 \times (23^\circ 27' + 5^\circ 9') = 57^\circ 12'$, und hiemit hängen die grossen Schwankungen in der sog. täglichen **Verspätung** des Mondaufganges zusammen, die von $^1/_4{}^h$ bis auf $1^1/_2{}^h$ anwachsen kann. — *b.* Diese Namen, von welchen der erstere dem aufsteigenden und der zweite dem absteigenden Knoten entspricht, hängen nach **Houzeau** (Ciel et terre 1887) mit einer altindischen, auch das Gebahren bei Finsternissen (244) erklärenden Sage zusammen. — Anhangsweise füge ich bei, dass da und dort die Übung herrscht, die Zeit, während welcher die Culminationshöhe des Mondes zunimmt, **Obsiggent** (◡; Monds-Aufsteigen), die Zeit der Abnahme dagegen **Nidsiggent** (◠; Monds-Absteigen) zu nennen.

208. Die Lichtgestalten des Mondes. — In den Kinderzeiten der chaldäischen Sternkunde soll die Ansicht geherrscht haben, der Mond sei ein zur Hälfte heller, zur Hälfte dunkler Ball, wie er gegenwärtig noch etwa in Lunarien dargestellt wird. Später erkannte man jedoch in ihm einen dunkeln, von der Sonne erleuchteten Körper, und diese Erkenntnis findet sich auch spätestens zur Zeit des **Pythagoras** bei den Griechen, ja wurde bei ihnen bald so populär, dass sich **Kleomedes** darauf stützen konnte, um **Epikurs** Lehre vom Erlöschen der Sonne bei ihrem Untergange zu bekämpfen, indem er die Frage stellte, woher in diesem Falle der Mond sein Licht erhalten würde [a]. Die Hauptempfehlung bildete wohl die sich unter dieser Annahme aus den Stellungsverhältnissen von Sonne und Mond so leicht ergebende Folge der Lichtgestalten oder **Phasen** des Mondes [b], und durch Benutzung der Zwischenzeit weit entlegener korrespondierender Phasen fand man bald, dass

$$t = 29^d{,}53059 = 29^d\ 12^h\ 44^m\ 2^s{,}5 \doteq 29^1/_2{}^d$$

der Zeit entspreche, welche Sonne und Mond in dieselbe gegenseitige Lage zur Erde zurückführe oder zu einem sog. **synodischen** Umlauf erforderlich sei. Bezeichnet man daher mit τ die mittlere Zwischenzeit zwischen zwei Mondculminationen oder die Länge eines sog. **Mondtages**, so ist

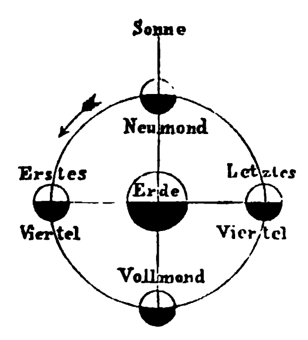
$$\tau\,(t - 1) = t \qquad \text{oder} \qquad \tau = 1^d{,}03505 = 1^d\ 0^h\ 50^m\ 28^s{,}3$$

und, wenn t' und T die siderischen Umlaufszeiten von Mond und Sonne sind,

$$t \cdot \frac{360}{T} + 360 = t \cdot \frac{360}{t'} \qquad \text{oder} \qquad t' = 27^d{,}32166$$

womit auch die oben (207) nur provisorisch erhaltene Länge des **siderischen** Monats wirklich gefunden ist [c].

Zu 208: *a.* Kleomedes Zeitgenosse **Geminus** äusserte scharfsinnig: „Der Beweis, dass der Mond sein Licht von der Sonne erhält, liegt in dem Umstande, dass die Senkrechte auf die Hörnerlinie stets nach der Sonne gerichtet ist“. — *b.* Die vier Hauptphasen ergeben sich leicht aus der folgenden Figur:



Der **Neumond** oder die **Neomenie** (von νέος = neu und μήν = Mond) entspricht der sog. **Konjunktion** (☌ bei 0° Abstand) von Sonne und Mond, — der **Vollmond** ihrer sog. **Opposition** (☍ bei 180°), — jedes der **Viertel** oder jede **Dichotomie** (von διχότομος = in zwei Hälften geteilt) einer sog. **Quadratur** (□ bei 90° oder 270°). Dass die frühe Einführung der **Woche** von 7 Tagen und des **Monat** von circa 4 Wochen oder 30 Tagen, auf die wir noch später (XII) zurückzukommen haben werden, mit dem regelmässigen Wechsel dieser Hauptphasen in Beziehung steht, ist wohl selbstverständlich. — Der Kuriosität wegen ist anzuführen, dass der Mond, weil er beim Wachsen seiner Lichtsichel mit ☽ gewissermassen den Anfangsbuchstaben von Decresco, beim Abnehmen mit ☾ denjenigen von Cresco an den Himmel schreibt, der älteste Lügner genannt worden ist. Ferner, dass derjenige Neumond, welcher sich ereignet, wenn die Sonne im Zeichen des Stiers steht, **Stieren-Neu** heisst und von den Landwirten gefürchtet wird, weil er häufig in die sog. kalten Tage des Mai fällt, an denen er aber höchst unschuldig ist, — gerade so wie der entsprechende Vollmond, die sog. **Lune rousse** der Franzosen. — *c.* Da die Knotenlinie der Mondbahn in der Ekliptik in $6798^d,33553 \eqcirc 18^a,6$ eine Umdrehung im Sinne der täglichen Bewegung vollendet, so kömmt sie dem Monde etwas entgegen und es kehrt dieser schon nach $27^d,21222$, dem sog. **Drachenmonat**, zu demselben Knoten zurück; dagegen vollendet die Apsidenlinie (vgl. 203 : b) in $3231^d,46623 \eqcirc 9^a,0$ eine Umdrehung in entgegengesetztem Sinne, so dass sie vom Monde eingeholt werden muss und dieser erst in $27^d,55460$, dem sog. **anomalistischen** Monat, zu demselben Apsidenpunkte zurückkehrt.

209. Die scheinbare Grösse des Mondes. — In der ältesten Zeit, und so z. B. (437) noch von **Aristarch**, wurde die scheinbare Grösse des Mondes ohne weiteres derjenigen der Sonne gleichgesetzt; auch kamen zu ihrer Bestimmung wesentlich je dieselben Methoden zur Anwendung, welche (205) für die Sonne im Gebrauche waren. Immerhin suchte schon **Ptolemäus** auch die Mondfinsternisse für solche Bestimmungen zu benutzen und erhielt dabei das bemerkenswerte Resultat, dass der scheinbare Durchmesser des Mondes, je nach der Distanz des letztern von der Erde, unter einem Winkel gesehen werde, welcher von $31^1/_3{}' = 1880''$ bis $35^1/_3{}' = 2120''$ variieren könne, wodurch eine einschlagende Angabe von **Aristoteles** (230) mit Zahlen belegt und überdies eine Schwankung gefunden war, welche man für jene Zeit, wie die Vergleichung mit neuern Untersuchungen zeigt, als eine gar nicht üble bezeichnen muss [a]. Da nach letztern jene Grenzwerte etwa zu

$$29' \, 30'',0 = 1770'',0 \qquad \text{und} \qquad 32' \, 55'',2 = 1975'',2$$

angenommen werden können, so geht (205) hervor, dass der Mond kleiner, aber auch etwas grösser als die Sonne erscheinen kann. —

Hätten die ältern Astronomen die Monddurchmesser mit zureichender Sicherheit messen können, so würden sie bei entsprechender Behandlung, wie sie früher (205) für die Sonne besprochen wurde, als Mondbahn eine Ellipse der Excentricität $^1/_{16}$ erhalten haben, in deren einem Brennpunkte die Erde gestanden wäre [b].

Zu 209: *a.* Während **Ptolemäus** entsprechend vorstehendem den Halbmesser des Mondes in seiner mittlern Entfernung etwa zu 1000″ annahm, fand **Albategnius** dafür 972″, **Coppernicus** 948″, **Tycho** 925″, **Kepler** 941″, **Huygens** 942″,5, Tob. **Mayer** 944″,2, **Lalande** 943″,0, **Burckhardt** 932″,0, **Airy** 939″,9, etc., und es wird jetzt vielfach der aus einigen neuern Bestimmungen sich ergebende Mittelwert 933″,5 angewandt. Mit diesem Schlusswerte stimmt nun allerdings der von Friedr. **Küstner** in seiner Preisschrift „Bestimmungen des Monddurchmessers aus neun Plejadenbedeckungen des Zeitraumes 1839—76. Halle 1880 in 4." gegebene Wert 932,851 ± 0″,040 ziemlich nahe überein; aber da anderseits in „H. M. **Paul**, A determination of the semi-diameter of the moon from two occultations of the Pleiades, observed on July 1877 and Sept. 1879. Washington 1883 in 4." die merklich verschiedene Zahl 931″,78 ± 0″,12 gegeben wurde, so glaubte dennoch W. **Döllen** in seiner Note „Zur totalen Mondfinsterniss 1884 X 4 (A. N. 2615 von 1884)" aussprechen zu sollen, dass für den mittlern Wert des Monddurchmessers die Sekunde noch nicht feststehe, — zugleich beifügend, dass man auch in Bezug auf eine allfällig vorhandene Abplattung der Mondscheibe noch nicht mehr wisse, als dass dieselbe nicht sehr bedeutend sein könne, — dass sich aber diese Daten durch Beobachtung totaler Mondfinsternisse, „während welchen in sehr kurzer Zeit eine erkleckliche Anzahl von Ein- und Austritten derselben Sterne an sehr verschiedenen Punkten des Mondrandes mit verhältnismässig geringer Mühe erlangt werden könnte", mit grosser Sicherheit erhalten liessen. Für Näheres und die auf den Radius 932″,65 ± 0″,12 führenden ersten Ergebnisse vgl. „Ludw. **Struve**, Bestimmung des Mondhalbmessers aus den während der totalen Mondfinsterniss 1884 X 4 beobachteten Sternbedeckungen. Dorpat 1889 in 4." — *b.* Anhangsweise mag an das bekannte Faktum erinnert werden, dass der Mond am Horizonte grösser erscheint als sonst, und zwar, wie schon **Gauss** (Brief an Bessel von 1830 IV 9) betonte, nicht nur „Personen, die den Mond nach Teller- oder Wagenbreiten schätzen", sondern auch „Astronomen, die gewohnt sind nur Winkel zu sehen" und sich dennoch „bei allem Bewusstsein der Theorie nicht von dem Grössersehen losmachen" können; wahrscheinlich hängt dasselbe, nach seiner Annahme, mit physiologischen Geschichten zusammen, die „überhaupt bei manchen optischen Phänomenen eine wichtigere Rolle spielen dürften, als man sonst wohl gedacht hat".

210. Die ersten Mondtheorien. — Als sich **Hipparch** die Aufgabe stellte, auch für den Mond eine Theorie aufzustellen, wurde ihm bald klar, dass dies viel schwieriger als für die Sonne auszuführen sei, weil beim Monde nicht nur zu der ungleichförmigen Bewegung in Länge eine ebensolche in Breite hinzukomme, sondern auch die grössten und kleinsten Bewegungen in Länge, und ebenso die grössten und kleinsten Breiten successive in alle Punkte des Tierkreises fallen, also sowohl die Apsidenlinie als die Knotenlinie

der Mondbahn umlaufen müssen, folglich beim Monde, ausser dem **synodischen** und **siderischen** Monate, noch ein **anomalistischer** und ein **draconitischer** Monat in Betracht falle [a]. Er liess sich jedoch hiedurch nicht abschrecken, ähnlich wie für die Sonne (204) auch für den Mond einen seiner Bewegung im grossen Ganzen genügenden excentrischen Kreis aufzusuchen; aber, obschon er letzterm noch eine Drehung um das Centrum des Tierkreises zuschrieb, gelang es ihm nur notdürftig, die sich bei Neumond und Vollmond, oder in den sog. **Syzygien** [b], zeigende Ungleichheit, die sog. **Gleichung,** darzustellen, und andere (wenigstens geahnte) Ungleichheiten wusste er gar nicht zu bewältigen [c]. — Als später **Ptolemäus** dieselbe Aufgabe neuerdings an die Hand nahm, entschloss er sich, die Darstellung der Gleichung in der Weise zu versuchen, dass er den Mond an einen Hilfskreis, den sog. **Epicykel**, versetze, welchen er in einem anomalistischen Monat in gleichförmiger Bewegung zu durchlaufen habe, während gleichzeitig der Mittelpunkt des Epicykels sich in einem zweiten, dem sog. **deferierenden** Kreise, gleichförmig in einem draconitischen Monat um die Erde bewege, — dabei überdies die Anordnung treffend, dass der Deferens gegen die Ekliptik um die von ihm zu $5^0\ 0'$ bestimmte Neigung der Mondbahn abwich und dessen Knotenlinie eine retrograde Bewegung besass, welche dem Überschusse der Bewegung in Beziehung auf die Knoten über die Bewegung in Länge entsprach. Mit Hilfe dreier, durch die Chaldäer in den Jahren 720 und 719 v. Chr. beobachteter Mondfinsternisse, fand er sodann nach einer scharfsinnigen Methode [d], dass, wenn man den Radius des Deferens zu 60 partes annehme, derjenige des Epicykels $5^p\ 13'$ oder 0,0869 des erstern betragen müsse, — konnte dann auch eine zweite, sich namentlich in den Quadraturen zeigende Ungleichheit, die sog. **Evection** [e], darstellen, indem er das Centrum des Deferens um $10^p\ 29'$ gegen das Apogeum hinrückte, — ja schliesslich die restierenden kleinen Unterschiede zwischen Theorie und Beobachtung durch Annahme einer Art Schwankung der Apsidenlinie, seiner sog. **Prosneusis** [f], noch merklich vermindern. Trotz diesem Erfolge verhehlte sich **Ptolemäus** keineswegs, dass spätere Nachfolger veranlasst sein werden, diese Mondtheorie noch mehr zu vervollkommnen, und es ist dies in der That auch, und zwar abgesehen von den später (XIX) zu besprechenden, nach Entdeckung des Gravitationsgesetzes ausgeführten Arbeiten, schon durch die **Abul Wefa, Tycho, Kepler,** etc. mehrfach geschehen [g].

Zu 210: *a.* Für die vier verschiedenen Mondmonate kann auf 208 verwiesen werden. — **Hipparch** fand, dass die alte Saros von $6585^1/_3{}^d$ (245) nicht

nur nahe 223 synodische und 242 draconitische, sondern auch 239 anomalistische und 241 siderische Monate umfasse, was in der That durch $6585\frac{1}{3} : 239 = 27{,}55370$ und $6585\frac{1}{3} : 241 = 27{,}32506$ auffallend bestätigt wird. Multipliziert man nun jede jener 4 Zahlen mit 360 und dividiert die Produkte durch $6585\frac{1}{3}$, so erhält man für den Mond als mittlere tägliche synodische, anomalistische, siderische und draconitische Bewegung

$$12^{\circ}{,}19073 \qquad 13^{\circ}{,}06570 \qquad 13^{\circ}{,}17473 \qquad 13^{\circ}{,}22940$$

welche Werte Hipparch sodann unter Benutzung ihm vorliegender Beobachtungen von Mondfinsternissen in

$$12^{\circ}{,}19075 \qquad 13^{\circ}{,}06498 \qquad 13^{\circ}{,}17646 \qquad 13^{\circ}{,}22935$$

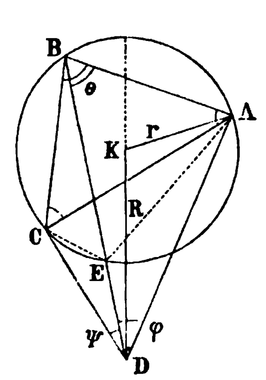
abänderte und damit namentlich die mittlern wesentlich verbesserte, da $360^{\circ} : 13^{\circ}{,}06498 = 27^{d}{,}55451$ und $360^{\circ} : 13^{\circ}{,}17646 = 27^{d}{,}32141$ ist. — *b.* Von συζυγέω = vereinigt sein, oder in demselben Gliede (derselben Geraden) stehen. — *c.* Ich beschränke mich für weitern Detail über die Vorarbeiten von **Hipparch** auf Buch IV des Almagest zu verweisen, um Platz für ein näheres Eintreten auf die wertvollern Entwicklungen von **Ptolemäus** zu gewinnen. Dagegen gebe ich hier noch, zu Gunsten einer vorläufigen Übersicht über die Hauptungleichheiten in der Mondbewegung, die allerdings einer weit spätern Zeit angehörende Formel

$$\lambda = l + I + II + III + IV \qquad 1$$

wo

$$I = 6^{\circ}\,16' \cdot \text{Si}\, m + 12'\,50'' \,\text{Si}\, 2m \qquad III = 39' \cdot \text{Si}\, 2\,(l - L)$$
$$II = 1^{\circ}\,16' \cdot \text{Si}\,[2\,(l - L) - m] \qquad IV = 11' \cdot \text{Si}\, M \qquad 2$$

ist, und λ die wahre Länge des Mondes bezeichnet, l, L, m, M aber die mittlern Längen und Anomalien von Mond und Sonne sind: Dabei entspricht I der schon **Hipparch** bekannten, sich bei jeder elliptischen Bahn ergebenden **Gleichung**, — II der von **Ptolemäus** aufgefundenen zweiten Ungleichheit, die an eine Periode von 32^{d} gebunden ist, später (vgl. e) den Namen **Evection** erhalten hat und sich in den Syzygien ($l - L = 0$ oder 180°) als $-1^{\circ}\,16' \cdot \text{Si}\, m$, in den Quadraturen ($l - L = 90^{\circ}$ oder 270°) als $+1^{\circ}\,16' \cdot \text{Si}\, m$ mit I vermischt, so dass **Hipparch** aus den Finsternissen eine zu kleine, **Ptolemäus** dagegen aus den Quadraturen eine zu grosse Gleichung fand, wie wenn sich die Mondbahn periodisch verändern würde, — III der mutmasslich schon von **Abul Wefa** und dann wieder von **Tycho** (vgl. g) entdeckten, in den Syzygien und Quadraturen verschwindenden, dagegen namentlich in den Oktanten hervortretenden **Variation**, — IV endlich der früher **Tycho** zugeschriebenen, mutmasslich aber (vgl. g) erst durch **Kepler** festgestellten, je im Perigeum und Apogeum der Sonne verschwindenden sog. **jährlichen Gleichung**. — *d.* **Ptolemäus** löste nämlich die der sog. Pothenot'schen (vgl. 67) verwandte Aufgabe, aus den drei Winkeln A, B, C eines Dreieckes und den einem Standpunkte D entsprechenden scheinbaren Distanzen φ und ψ seiner Ecken, das Verhältnis des Radius r des dem Dreiecke umschriebenen Kreises zu der Distanz R des Centrums von jenem Standpunkte zu bestimmen, — und zwar verfuhr er dabei, wenn wir sein Sehnenverfahren in uns geläufigere trigonometrische Rechnung umsetzen, in folgender Weise: Man erhält aus der Figur nach bekannten Sätzen



$$\frac{AE}{DE} = \frac{Si\,\varphi}{Si\,(C-\varphi)} \quad \text{oder} \quad AE = \alpha \cdot DE \quad \text{wo} \quad \alpha = \frac{Si\,\varphi}{Si\,(C-\varphi)} \qquad 3$$

$$\frac{CE}{DE} = \frac{Si\,\psi}{Si\,(A-\psi)} \qquad CE = \beta \cdot DE \qquad \beta = \frac{Si\,\psi}{Si\,(A-\psi)} \qquad 4$$

also $AC = \gamma \cdot DE$ wo $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cdot Co\,B$ **5**

und daher, da auch $AC = 2r \cdot Si\,B$ ist,

$$2r \cdot Si\,B = \gamma \cdot DE \quad \text{oder} \quad DE = \delta \cdot 2r \quad \text{wo} \quad \delta = Si\,B : \gamma \qquad 6$$

Ferner hat man

$$AE = 2r \cdot Si\,\theta \quad \text{oder} \quad Si\,\theta = AE : 2r = \alpha \cdot \delta \qquad 7$$

$$BE = 2r \cdot \varepsilon \quad \text{wo} \quad \varepsilon = Si\,(C+\theta) \quad \text{folglich} \quad DB = 2r \cdot (\delta + \varepsilon) \qquad 8$$

endlich

$$R^2 - r^2 = (R+r)(R-r) = BD \cdot ED = 4r^2\delta \cdot (\delta + \varepsilon) \quad \text{oder} \quad \frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{1 + 4\delta(\delta+\varepsilon)} \qquad 9$$

womit die Aufgabe vollständig gelöst ist. — Die von **Ptolemäus** benutzten drei Mondfinsternisse hatten nun

— 720 III 19, $8^h\ 40^m$ — 719 III 8, $11^h\ 10^m$ — 719 IX 1, $8^h\ 30^m$

m. Z. Alexandrien statt, zu welchen Zeiten nach den Sonnentafeln der in Opposition stehende Mond die Längen

$24\frac{1}{2}^\circ$ ♍ = 174° 30′ $13\frac{3}{4}^\circ$ ♍ = 163° 45′ $3\frac{1}{4}^\circ$ ♓ = 333° 15′

besass. Es entsprachen also den Zwischenzeiten von $354^d,104$ und $176^d,888$ wahre Bewegungen in Länge von 349° 15′ und 169° 30′, während **Ptolemäus** für dieselben Zwischenzeiten nach den von ihm angenommenen Werten der mittlern täglichen siderischen und anomalistischen Bewegung (bei Weglassung der ganzen Umdrehungen) 345° 51′ und 170° 7′ Bewegung in Länge (Deferens), sowie 306° 25′ und 150° 26′ Bewegung in Anomalie (Epicykel) erhielt. Es war also **einerseits** der wahre Mond dem mittlern in den beiden Zwischenzeiten um $\varphi = 349^\circ 15' - 345^\circ 51' = 3^\circ 24'$ und $\psi = 169^\circ 30' - 170^\circ 7' = -37'$ vorgeeilt, und **anderseits** war (da die anomalistische Bewegung retrograd ist) $AB = 360^\circ - 306^\circ 25' = 53^\circ 35'$ und $BC = 360^\circ - 150^\circ 26' = 209^\circ 34'$, also $\angle A = 104^\circ 47'$ und $C = 26^\circ 47\frac{1}{2}'$, folglich $B = 48^\circ 25\frac{1}{2}'$. Mit diesen Daten findet man aber nach den Formeln 3—8 successive $Lg\,\alpha = 9{,}174\,295$, $Lg\,\beta = 8{,}047\,799 \cdot n$, $Lg\,\gamma = 9{,}152\,956$, $Lg\,\delta = 0{,}720\,988$, $\theta = 51^\circ 47\frac{2}{5}'$, $Lg\,\varepsilon = 9{,}991\,318$, $r : R = 0{,}086\,94$, und somit für $R = 60^p$ schliesslich, in Übereinstimmung mit **Ptolemäus**, $r = 5^p\ 13'$. — *e.* Für die **Evection auf** Note c verweisend, bleibt zu bemerken, dass diese zweite Ungleichheit ihren (von evēho = sich erheben, abgeleiteten) Namen erst 1687 durch **Boulliau** erhalten haben soll. — *f.* Von προσνεύω = sich wohin neigen. — *g.* Nachdem man die Entdeckung der **Variation** lange Jahre **Tycho** zugeschrieben hatte, teilte **Sédillot** in seiner Note „Sur un manuscrit arabe dans lequel la variation de la lune est signalée (Compt. rend. 1836)“ mit, dass **Abul Wefa** in seinem „Almagest“ betitelten, sich in Paris und Leyden als Manuskript vorfindenden Werke, nach Behandlung der Gleichung und Evection, von einer dritten Anomalie, genannt „Mohadzat“, spreche, welche zur Zeit der „trine et sextile (worunter bis auf Longomontan die Oktanten verstanden worden seien)“ bis auf $\pm\ \frac{3}{4}^\circ$ anwachse er sage dabei, dass er auf diese neue Ungleichheit aufmerksam geworden sei, als er die von ihm beobachteten Mondlängen mit den aus den mittlern Bewegungen berechneten und für die beiden ersten Anomalien korrigierten Längen verglichen habe, und es liege also ganz klar vor, dass **Abul Wefa** bereits die

Variation entdeckt habe, folglich **Tycho**, der übrigens selbst diese Entdeckung nie für sich in Anspruch genommen, nur unter seinen Papieren eine Note hinterlassen habe, in welcher die Variation als eine „Hypothesis redintegrata (erneuerte)" bezeichnet werde, nicht mehr als Entdecker zu nennen sei. Kaum hatte jedoch 1838 diese Ansicht durch einen der Pariser Akademie von **Arago** und **Mathieu** erstatteten Bericht gewissermassen offizielle Sanktion erhalten, als sie andere Akademiker, wie z. B. **Biot** und **Bertrand**, wieder zu bemängeln begannen, indem sie die Authenticität des Manuskripts, die Richtigkeit der Übersetzung, etc., anzweifelten, in der betreffenden Hauptstelle nur eine unklare Wiedergabe Ptolemäischer Ideen finden wollten, etc., — und da **Sédillot**, von **Chasles** und **Mathieu** sekundiert, nicht ermüdete, seine Ansichten mit Geschick zu verteidigen, so entspann sich ein lange Jahre, namentlich die Comptes rendus füllender, ziemlich unerquicklicher Streit, der nie zu vollständigem Austrage kam. Doch ist mutmasslich der Standpunkt von **Sédillot**, wie auch der verdiente Kepler-Forscher Karl **Anschütz** (München 1853 geb.; Jesuit; Gymnasiallehrer am Freinberg bei Linz) in seiner bemerkenswerten Note „Über die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes (Z. M. Ph. 31 von 1886)" nicht bestreiten will, im allgemeinen der richtige, wenn auch **Tycho** das Verdienst zu bleiben scheint, selbständiger Begründer der vor ihm in Europa unbekannten Variation gewesen zu sein; dagegen weist **Anschütz** nach, dass die früher ebenfalls **Tycho** zugeschriebene Entdeckung der **jährlichen Gleichung** nicht diesem, sondern erst **Kepler** zukömmt, — dass dieser letztere nahe daran war, einen sehr genauen Wert für dieselbe zu ermitteln, — und nur durch eine unglückliche Idee abgehalten wurde, sie auch als Mondgleichung definitiv aufzustellen.

211. Die übrigen Wandelsterne der Alten. — Ausser Sonne und Mond fanden schon die Alten noch fünf andere, in ähnlicher Weise wie diese gegen die Sterne zurückbleibende Wandelsterne auf, die sog. **Planeten**: Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn, — und bestimmten schon frühe ihre Umlaufszeiten, nach welchen sie dieselben mit Sonne und Mond zusammenordneten. Sie erhielten so die Reihe:

1.	Saturn	(♄ Blei)	mit	29^a,46	Umlaufszeit
2.	Jupiter	(♃ Zinn)	-	11,86	-
3.	Mars	(♂ Eisen)	-	1,88	-
4.	Sonne	(☉ Gold)	-	1,00	-
5.	Venus	(♀ Kupfer)	-	0,62	-
6.	Merkur	(☿ Quecksilber)	-	0,24	-
7.	Mond	(☾ Silber)	-	0,07	-

in welcher den gebräuchlichen Planetenzeichen die Metalle beigefügt sind, für welche im Mittelalter dieselben Symbole verwendet wurden [a]. — Auf die Theorien dieser Planeten werden wir erst in Abschnitt X eintreten können; dagegen wollen wir unter den folgenden Nummern noch einige untergeordnetere Beziehungen absolvieren.

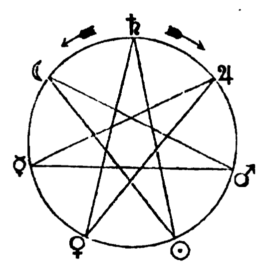
Zu 211: *a.* Die für Sonne und Mond noch jetzt gebräuchlichen Zeichen, eine Scheibe und eine Sichel (bei den Franzosen ☽ = croissant), kommen schon im höchsten Altertume vor, so z. B. in der ältesten chinesischen Zeichenschrift und auf frühen egyptischen Monumenten; dagegen wurden anfänglich die fünf übrigen Wandelsterne nur mit ihren Namen bezeichnet, und auch noch in den vielen auf uns gekommenen arabischen Manuskripten sollen sich keine Spuren von Symbolen für dieselben finden. Nach **Humboldt** (Kosmos III 424) kamen solche Zeichen erst vom 10. Jahrhundert hinweg nach und nach in Gebrauch, — variierten anfänglich nach **Long** (vgl. dessen „Astronomy", wo solche Variationen abgebildet sind) noch wesentlich, — und nahmen nach **Höfer** (vgl. dessen „Histoire de la chimie") erst etwa im 15. Jahrhundert, bei den Astrologen und den sie als Metallzeichen benutzenden Alchymisten ziemlich gleichzeitig, definitiv ihre gegenwärtige Gestalt an: Merkur- oder Schlangenstab (caducée) für Merkur, — Handspiegel (miroir à manche) für Venus, — Schild und Pfeil (lance dépassant un bouclier) für Mars, — eine Deformation des Anfangsbuchstabens von Ζεύς für Jupiter, — und eine Sense (faux) für Saturn. — Als dann nach Aufstellung des heliocentrischen Systemes auch die Erde unter die Planeten eingereiht wurde, erhielt sie, offenbar von christlichem Standpunkte aus, das Zeichen ♁ einer dem Kreuze unterworfenen Kugel. — In Beziehung auf das Venuszeichen sagte Georg Philipp **Harsdörffer** (Nürnberg 1607 — ebenda 1658; Ratsherr in Nürnberg) in seiner Fortsetzung der Schwenter'schen „Deliciæ (II 280)" launig: „♀ ist ein umgewendeter Reichsapfel, weil ihr Reich sich über alles Fleisch erstrecket, jedoch unter sich und zum bösen".

212. Die sog. Zeitregenten. — Weil die Gesamtzahl der Wandelsterne gerade der Anzahl der Wochentage entsprach, so schien es den Alten, dass die Reihe der erstern komplet sein dürfte, dass aber auch diese Übereinstimmung nicht ohne einen tiefern Grund statthaben möchte, — etwa in der Weise, dass die Planeten der Reihe nach die Tageszeiten oder Tagesstunden zu regieren hätten [a]. Bezeichnet man aber denjenigen Planeten, der einen Tag zu regieren beginnt, als **Tagesregent**, so ergiebt sich nach beiden Systemen übereinstimmend für die Tagesregenten die Reihenfolge

♄ ☉ ☾ ♂ ☿ ♃ ♀

und dieser Folge entsprechend sind denn auch wirklich in alter Zeit die Wochentage benannt worden [b], — wann und durch wen weiss man jedoch allerdings nicht sicher [c]. — Die Übung, denjenigen Planeten, dessen Nummer bei Division der um 4 verminderten Jahreszahl durch 7 als Rest hervorgeht, zum **Jahresregenten** zu erheben, scheint erst im Mittelalter aufgekommen zu sein [d].

Zu 212: *a.* Nimmt man nämlich an, dass die erste **Stunde** des ersten Tages dem obersten Planeten Saturn zufalle, die zweite Jupiter, etc., — so fallen die Stunden 8, 15 und 22 wieder auf Saturn, also 23 auf Jupiter, 24 auf Mars, — somit die erste Stunde des zweiten Tages auf die Sonne, — etc.,



bis am Schlusse einer Woche die ganze Kehrordnung erschöpft und Saturn am 8. Tage wieder Regent der ersten Tagesstunde geworden ist. — Analoges ergiebt sich, wenn man Saturn die erste **Tageszeit** des ersten Tages zuweist, dann in umgekehrter Folge dem Monde die zweite, etc., — auch da erhält die Sonne den ersten Abschnitt des zweiten Tages, — etc. — *b.* An diese Benennungen finden wir noch jetzt vielfache Anklänge, wie die Parallele

Dies Saturni	Samstag	Samedi	Sabbato	Saturday
- Solis	Sonntag	Dimanche	Domenica	Sunday
- Lunæ	Montag	Lundi	Lunedi	Monday
- Martis	Dienstag	Mardi	Martedi	Tuesday
- Mercurii	Mittwoch	Mercredi	Mercoledi	Wednesday
- Jovis	Donnerstag	Jeudi	Jovedi	Thursday
- Veneris	Freitag	Vendredi	Venerdi	Friday

um so deutlicher zeigt, als Mars den altdeutschen Schlachtengöttern Tues (Tuesday), Zio (Zistig in der Schweiz) und Erich (Erchtag in Steyermark) entspricht, — Merkur dem Wodan, — Jupiter dem Donnerer Thor (Donar), — und Venus der Freia. — *c.* Eine Notiz des im 2. Jahrhundert n. Chr. lebenden griechischen Geschichtschreibers **Dio Cassius** deutet darauf, dass es durch die Egypter geschehen sei, welche auch zuerst die **Woche** von 7 Tagen als Zeitabschnitt benutzt haben sollen. Die Juden, welche die Woche ebenfalls frühe benutzten und im Abendlande eingeführt zu haben scheinen, hatten keine besondern Tagesnamen, sondern zählten die Wochentage von ihrem Sabbath aus als Secunda Sabbati, Tertia Sabbati, etc., auf, — und in ähnlicher Weise numerierten anfänglich auch die Christen die Wochentage, nur dass sie dem Sabbath den folgenden Tag als Ersten oder als **Feria** (Ruhetag) gegenüberstellten, und dann ihm, welchen sie als **Domenica** (Auferstehungstag oder Tag des Herrn) feierten, die übrigen Tage als Feria secunda, tertia, etc., aureihten. Ebenso sollen die Araber seit alter Zeit die Woche gebraucht und je mit dem Untergange der Sonne am Sabbath begonnen haben, — während bei den ältern Römern je 7 Arbeitstagen unter dem Namen **Nundinæ** ein Markttag folgte, und die siebentägige Woche, sowie wohl auch die Benennung der Wochentage, erst 325 Eingang fand, als Kaiser Konstantin das Christentum zur Staatsreligion erhob. — *d.* Anhangsweise mag noch erwähnt werden, dass man früher zu Gunsten der Astrologie (214) vielfach sog. **Planetenuhren** konstruierte, welche für alle Tage und Stunden die regierenden Planeten zeigten und es sollen im mathematischen Salon zu Dresden noch mehrere gut erhaltene Exemplare zu sehen sein. Ferner wurden früher vorzugsweise die sog. **ungleichen** Stunden (192) als **Planetenstunden** benutzt, und Günther rühmt von **Apian**, dass er in seiner jetzt höchst seltenen Schrift „Ein künstlich Instrument oder Sonnen ur, dardurch auch vil nutzbarliche Dinge gefunden werden. Landshut 1524“ ein sehr elegantes, konstruktives Verfahren gelehrt habe, um dieselben in gewöhnliche Stunden zu verwandeln.

213. Die sog. Aspekten. — Derselbe Ideengang, welcher darauf führte, die Wandelsterne zu Zeitregenten zu erheben, legte es auch nahe, sie als „**Dolmetsche**, deren eigene Bewegung dazu

dienen möchte das künftige vorherzusagen", zu betrachten, und so ihrer gegenseitigen Stellung, oder den sog. **Aspekten**, einen gewissen Einfluss beizulegen, — namentlich zu einer Zeit, wo noch alle Anhaltspunkte für die Distanzbestimmung fehlten, somit auch die Distanzverschiedenheit ausser Betracht fiel, ein ganz verzeihliches Vorgehen. Es wurden hiefür nicht nur die (208) bereits erwähnten **Konjunktionen**, **Quadraturen** und **Oppositionen** zweier oder mehrerer Gestirne beigezogen, sondern auch noch der **Trigonalschein** (△) bei 120° Abstand in Länge, und sogar zuweilen der **Sextilschein** (✶) bei 60° Abstand, — und daraus, unter Benutzung gewisser Regeln, welche sich im Verlaufe der Zeit aus Vergleichung entsprechender Konstellationen mit deren Folgen zu ergeben schienen, ein sog. **Prognostikon** aufgestellt [a]. — Die hiefür nötige Vorausberechnung der Aspekten setzte natürlich voraus, dass die Theorien der Wandelsterne festgestellt, respektive Hilfstafeln vorhanden seien, und es verdient hervorgehoben zu werden, dass zu Gunsten dieser an und für sich futilen Spekulationen manche Tafeln erstellt wurden, welche der Astronomie grosse Dienste leisteten, aber für diese letztere allein kaum berechnet worden wären [b].

Zu 213: *a.* Es werden unter folgender Nummer einige solche Regeln mitgeteilt werden, während hier vorläufig erzählt werden mag, dass Johannes **Stöffler** (Blaubeuren 1452 — ebenda 1531; Prof. math. Tübingen; vgl. „Moll, Joh. Stöffler. Lindau 1877 in 8."), gestützt auf solche, unter anderm die Prophezeiung wagte, es werde 1524 II 20 durch eine grosse Konjunktion der drei obern Planeten eine neue Sündflut entstehen: Viele Gläubige kauften eiligst Barken oder flüchteten auf hohe Berge; aber es folgte keine Sündflut, sondern gegenteils ein ungewöhnlich trockener Februar. — Ähnliche Misserfolge liessen sich zu Dutzenden aufführen; aber dann war auch wieder etwa einmal eine einzelne Voraussage zutreffend, und dies hielt nachher auf lange vor, wie solches **Kepler** so trefflich in den Worten ausdrückte: „**Das Fehlen vergisset man**, weil es nichts besonderes ist; **das Eintreffen behält man** nach der Weiber Art; damit bleibt der Astrologus in Ehren". — *b.* Ich erinnere vorläufig an die (63) bereits erwähnten „Tabulæ directionum" von **Regiomontan** und füge bei, dass einzelne hieher gehörige Aufgaben, wie namentlich die Bestimmung der Wiederkehr einmal beobachteter Aspekten, auch ohne Hilfe von Tafeln analog dem früher (27) behandelten Zeigerprobleme gelöst werden können: Bezeichnen nämlich T, t, τ die Umlaufszeiten dreier Zeiger, so stellen (27)

$$x_1 = \frac{T \cdot t}{T - t} \qquad x_2 = \frac{T \cdot \tau}{T - \tau} \qquad x_3 = \frac{t \cdot \tau}{t - \tau} \qquad 1$$

die Zeiten vor, welche der 2. braucht um den 1., der 3. um den 1., und der 3. um den 2. je einmal zu überholen, — und wenn zu einer gewissen Zeit alle drei Zeiger beisammen standen, so werden sie, falls a und b ganze Zahlen sind, für

$$a \cdot x_1 = b \cdot x_2 \qquad \text{oder} \qquad a : b = x_2 : x_1 \qquad 2$$

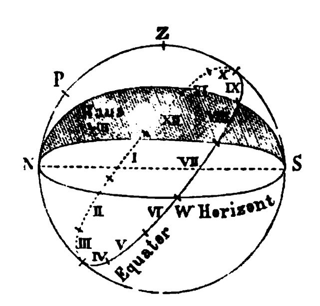
wieder zusammentreffen. Setzt man nun z. B. für ♄, ♃, ♂ in 1 die Werte $T = 29^a{,}4566$, $t = 11^a{,}8616$, $\tau = 1^a{,}0000$ ein, so erhält man $x_1 = 19^a{,}85805$, $x_2 = 1^a{,}03514$, $x_3 = 1^a{,}09257$ und somit nach 2

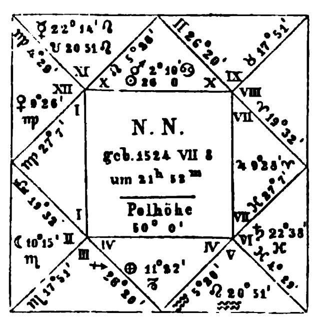
$$\frac{a}{b} = \frac{1,03514}{19,85805} = 1 : [19, 5, 2, 3, 2, 6, \ldots] = \frac{1}{19}, \frac{5}{96}, \frac{11}{211}, \frac{38}{729}, \frac{87}{1669}, \frac{560}{10743}, \ldots$$

Es wird also z. B. alle 19,858 ≕ 20ª eine Konjunktion von ♄ und ♃ statthaben, und falls eine solche einmal in der Nähe der Sonne beobachtet worden ist, so wird sie, da 1,03514 × 211 = 218,415 und auch 19,85805 × 11 = 218,439 ist, nach etwa 218,4ª sich nahe in derselben Weise wiederholen. Etc.

214. Die sog. Astrologie. — Die nach Erkenntnis gewisser Perioden möglich gewordene richtige Voraussage der Finsternisse (245) und anderer Konstellationen (213) ebnete den Boden für den Glauben an die Möglichkeit, etwas Zukünftiges vorauszubestimmen [a], und so entstand nach und nach bei verschiedenen alten Völkern, ganz besonders bei den Chaldäern und Egyptern, eine Art Sterndeuterei oder **Astrologie**, welche sich in dieser nicht ganz unberechtigten Form lange erhielt, ja sogar in der jüngsten Zeit in den Studien über den Einfluss des Mondes (242), der Sonnenflecken (521—24), etc., wieder neuerdings aufgetreten ist. Dagegen war allerdings die, sich ihr bald beigesellende, ja sie überwuchernde, sog. **Astrologia judiciaria**, d. h. die Kunst, einzelne Ereignisse aus den Sternen vorherzusagen, z. B. aus der Stellung der Gestirne bei Geburt eines Menschen seine **Nativität** zu ermitteln oder ihm ein sog. **Horoskop** zu stellen [b], von Anfang an ein purer und meist bewusst-betrügerischer Schwindel, gerade wie ihre ältern und jüngern Geschwister: Wahrsagerei, Geisterbeschwörung, Tischklopferei, etc., — überhaupt jeder Betrieb, welcher die Dummheit ausbeutet [c].

Zu 214: *a.* Schon in Jesajas (47, 13) liest man bei Anlass von Babylon: „So lass nun herzutreten und dich erretten die Beschauer des Himmels und die Sternseher, die nach den Monaten rechnen, was über dich kommen werde". — *b.* Um ein **Horoskop** zu stellen, wurde der Equator von dem in der Geburts-





stunde des Betreffenden aufgehenden Punkte aus, in entgegengesetztem Sinne zur täglichen Bewegung, in zwölf gleiche Teile zerlegt: Die durch die Mittagslinie N S und diese Teilpunkte bestimmten Ebenen teilten sodann offenbar die Kugeloberfläche in zwölf sphärische Zweiecke von verschiedener Grösse, die sog. zwölf **Häuser**, welche schematisch in einer sog. **Himmelsfigur** dargestellt

wurden, wie dies vorstehend durch eine Figur erläutert ist, welche ich dem zur Zeit geschätzten Werke „Mart. **Pegius**, Geburtsstundenbuch. Basel 1570 in fol.“ entnommen habe. In jedes dieser Häuser, welche nach **Ozanam** die ihre Bedeutung involvierenden Namen „I Maison de la vie, II M. des richesses, III M. des frères, IV M. des parens, V M. des enfans, VI M. de la santé, VII M. du mariage, VIII M. de la mort, IX M. de la piété, X M. des offices, XI M. des amis, XII M. des ennemis“ trugen, wurden die Längen des eintretenden Punktes der Ekliptik und der in dasselbe fallenden Wandelsterne eingetragen, — ebenso die beiden Mondsknoten, der sog. **Drachenkopf** (☊) und **Drachenschwanz** (☋), — und endlich das sog. **Glücksrad** (⊕), d. h. derjenige Punkt, der ebensoweit vom Monde abstand als die Spitze des ersten Hauses von der Sonne. Hierauf wurde noch ein sog. **Speculum astrologicum** konstruiert, d. h. ein Täfelchen, in welches die 7 Wandelsterne nach ihrer Länge in die Zeichen eingetragen, sowie ihre Aspekten eingeschrieben wurden, und aus dem man daher leicht den gegenseitigen Stand der Planeten finden konnte, wie z. B. ♃ △ ☿, ♂ ☌ ☉, ♀ ✶ ☾, etc. —

♈	♉	♊	♋	♌	♍	♎	♏	♐	♑	♒	♓
♃		✶	□	△		☍		△	□	✶	
□	✶		♂		✶	□	△		☍		△
□	✶		☉		✶	□	△		☍		△
△	□	✶		☿		✶	□	△		☍	
	△	□	✶		♀		✶	□	△		☍
	☍		△	□	✶		☾		✶	□	△
	✶	□	△		☍		△	□	✶		♄

Hieraus, sowie nach dem Stande in den Häusern, wurde nun nach bestimmten Regeln auf die künftigen Schicksale des jungen Erdenbürgers geschlossen: Wenn z. B. bei Geburt eines Knaben ☉ in I stand, so war zu erwarten, dass aus ihm ein gesunder und gelehrter Mann werde, während ♄ in I auf einen unreinlichen und faulen Kerl gedeutet hätte; ☾ in V versprach ihm dereinst grossen Kindersegen, ♄ in VI häufig Zahnschmerzen und Leibreissen; ♂ in VII stellte ihm eine Xantippe in Aussicht, ☿ in X gute Erfolge als Geometer; etc. — Die Hauptkunst bestand dann allerdings darin, schliesslich die einzelnen Ergebnisse in möglichst unbestimmten Phrasen, aber unter Berücksichtigung der äussern Umstände des Kindes, zu einem Prognostikon zusammenzustellen. — *c.* Es würde mich hier viel zu weit führen, an der Hand der im 4. Jahrhundert durch den Sicilianer Julius **Firmicus** Maternus verfassten „Astronomicorum libri VIII (Venetiis 1499 in fol., und später) und anderer alter Schriftsteller, sowie unter Benutzung der betreffenden neuern Forschungen von Julius **Oppert** (Hamburg 1825 geb.; Prof. orient. Paris) und andern Assyriologen, zu versuchen, eine Geschichte der Astrologie im Altertume zu erstellen, wie dies z. B. durch „A. **Häbler**, Astrologie im Alterthum (s. l.) 1879 in 4.“ in ganz verdienstlicher Weise geschehen ist, und ich muss mich auf die Bemerkungen beschränken, dass es wenig begründet erscheint, die grossen griechischen Astronomen **Eudoxus** und **Ptolemäus** auch den Astrologen zweiter Klasse beizuzählen, ja dass der letzterm zugeschriebene und unter dem Titel „De judiciis astrologicis“ in die 1551 zu Basel veranstaltete Gesamtausgabe seiner Schriften aufgenommene Traktat „Τετράβιβλος“ gar nicht von ihm, sondern von einem zu Neros Zeit in Rom lebenden Namensvetter verfasst worden sein dürfte, — auch zunächst nur die allgemeinen Einflüsse in Betracht zieht, welche die Gestirne infolge ihrer Stellung auf die Erde ausüben könnten, obschon er die Möglichkeit der speciellen Sterndeuterei nicht geradezu in Abrede stellt. —

Später betrieben namentlich die Araber die Astrologie mit grossem Eifer und bei ihnen entstanden zunächst die betreffenden Gesetzbücher, welche nach Erfindung der Buchdruckerkunst so oft nützlichere Werke von den Pressen verdrängten, wie z. B. „**Albumasar** (Balkh in Khorassan 805 — Vacith 885; Astronom in Bagdad), Flores astrologici (Aug. Vind. 1488 in 4.), und: De magnis conjunctionibus (Aug. Vind. 1489 in 4.), — **Alchabitius** (um 950), Libellus ysagogicus ad magisterium judiciorum astrorum (Venetiis 1485 in 4.), — **Albohazen** Haly (um 950), Liber de judiciis astrorum (Venetiis 1485 in fol.; in besserer Übersetzung durch Ant. Stupa: Basileæ 1551 in fol.), — etc." — Teils über Rom, teils durch die Araber verpflanzte sich die Astrologie auch in das Abendland und gelangte dort bald zu so grossem Ansehen, dass sie auf manchen hohen Schulen, wie z. B. in Bologna und Padua, eigene Lehrstühle erhielt, ja viele Fürsten und Städte sich Astrologen besoldeten: Ich erinnere an Guido **Bonatti** (Cascia in Toscana 1223? — Ancona 1300?; vgl. dessen „Vita. Roma 1851 in 8." durch B. Boncompagni), der längere Zeit Astrolog der Republik Florenz war. Wohl wurde sie auch wiederholt bekämpft, wie z. B. von Nic. **Oresme**, der sich in einem als Manuskript in Paris liegenden „Liber de divinacionibus" sehr scharf dagegen ausgesprochen haben soll, — von **Toscanelli**, der sich selbst als Beweis für die Trüglichkeit der Astrologie hinstellte, da ihm sein Horoskop nur eine kurze Lebensdauer verheissen habe, — von **Paracelsus**, der mit Bezug darauf in seiner derben Weise sagte: „Unterstand dich nicht unmügliche Ding, dann es ist spöttisch", und wieder: „Das Kind bedarff keines Gestirns noch Planeten; seine Mutter ist sein Planet und sein Stern", — etc.; aber dafür waren wieder andere, die zu den Besten ihrer Zeit gehörten, wie ein **Melanchthon**, **Cardan**, etc., der Astrologie sehr zugethan. — Landgraf **Wilhelm** liess sich durch die Astrologen nicht bethören, während dagegen **Tycho** denselben Glauben geschenkt, aber allerdings selbst nie prophezeit haben soll, was bekanntlich **Kepler**, wenn auch mit Widerwillen, des Broderwerbes wegen nicht selten that: „Es ist wohl diese Astrologie ein närrisches Töchterlein", sagte letzterer; „aber du lieber Gott, wo wolt jhr Mutter die hoch vernünfftige Astronomia bleiben, wenn sie diese jhre närrische Tochter nit hette, ist doch die Welt noch viel närrischer und so närrisch dass deroselben zu jhrem Frommen diese alte verständige Mutter durch der Tochter Narrentaydung eyngeschwatzt und eyngelogen werden muss; und seynd der Mathematicorum salaria so gering, dass die Mutter gewisslich Hunger leyden müsste; wann die Tochter nichts erwürbe". — Nach der Kepler'schen Zeit verlor die Astrologie alsgemach ihre Bedeutung und man kann kaum begreifen, wie es der sonst verdiente **Morin** unternehmen mochte, dieselbe durch seine posthum erschienene „Astrologia gallica. Hagæ 1661 in fol." nochmals stützen zu wollen, — geschweige wie noch in unserm Jahrhunderte der allerdings zuweilen überhaupt verrückte Wilhelm Andreas **Pfaff** (Stuttgart 1774 — Erlangen 1835; Prof. math. Dorpat, Würzburg und Erlangen; Bruder von Ch. Pfaff in 160) wagen durfte, den Tod des ersten Napoleon mit einer Konjunktion von Jupiter und Saturn in Parallele zu setzen. — Für weitern Detail vergleiche: „Adolf **Drechsler**, Astrologische Vorträge. Dresden 1855 in 8., — Robert **Billwiller** (St. Gallen 1849 geb.; Dir. meteorol. Centralanstalt in Zürich), Vortrag über Astrologie. Basel 1878 in 8., — etc."

IX. Die Erde und ihr Mond.

Ce que nous connaissons est peu de chose,
mais ce que nous ignorons est immense.
(Laplace.)

---

215. Die ältesten Ansichten über die Gestalt der Erde. — In der vorhistorischen Zeit scheint man sich entweder gar nicht um die Gestalt der Erde bekümmert, oder dann die, dem Ergebnisse unserer ersten Umschau entsprechende, Annahme festgehalten zu haben, dass sie diejenige einer runden Scheibe besitze. Im Anschlusse an letztere Annahme lehrte noch der Weltweise **Thales**, dass die Erdscheibe, über welche der Himmel wie eine Glocke gestülpt sei, gleich einem Schiffe auf dem Ocean schwimme [a], und es störte ihn wenig, dass er dadurch gezwungen wurde, anzunehmen, es sinken die Gestirne beim Untergange in das Weltmeer und werden auf diesem nach ihren Aufgangspunkten zurückgeführt. Ja die ganze von Thales gegründete jonische Schule hielt wesentlich an dieser primitiven Anschauung fest, wenn sie sich auch einige Modifikationen erlaubte, auf die es sich aber kaum lohnen dürfte, einlässlich einzutreten [b].

Zu 215: *a.* Aus dieser „schwimmenden Scheibe" machten einzelne spätere Berichterstatter eine „freischwebende Kugel" und veranlassten dadurch, dass **Thales** von vielen als Vorläufer von **Pythagoras** betrachtet wurde. Wie sich ersterer sein Wasserbecken und dessen Unterlage vorstellte, wird nicht gesagt. — *b.* Am ehesten wäre noch bemerkenswert, dass **Anaximander** (610 bis 546) die Glocke seines Lehrmeisters in eine die Erde umschwebende Krystallsphäre umwandelte, — ferner die Dicke der Erdscheibe auf $^1/_3$ ihres Durchmessers anwachsen, also die Scheibe zum Cylinder werden und letztern in der Mitte jener Sphäre schweben liess, da kein Grund vorhanden sei, warum er sich vorzugsweise nach einer Seite bewegen sollte, — endlich die Sphäre die Fixsterne tragen und sich wie „der Hut um unsern Kopf" um die Erde drehen liess, wobei hinter ihr noch Raum für die Wandelsterne übrig blieb.

216. Die Lehre von der Kugelgestalt. — Schon die Chaldäer scheinen (vgl. 412) der Erde die Gestalt einer Kugel zugeschrieben zu haben, — wahrscheinlich weil sie auf die Abhängig-

keit des scheinbaren Horizontes von der Situation des Beobachters, und auf das Steigen der mitternächtlichen Sterne beim Wandern nach Norden aufmerksam geworden waren. Wohl ohne etwas hievon zu wissen, kam sodann **Pythagoras** bei seinen Betrachtungen über das Weltsystem (vgl. 253) durch eine Reihe von Schlüssen anderer Art auf dieselbe Lehre, und dem etwas spätern **Parmenides** [a] wird sogar nachgerühmt, dass er aus „mathematischen", also wohl aus ähnlichen Gründen, wie die oben den Chaldäern zugeschriebenen, derselben beigestimmt habe. Sicher ist, dass zur Zeit von **Aristoteles** die Kugelgestalt der Erde bereits so ziemlich allgemein angenommen war, ja dass sie weder im spätern Altertume, noch bei den Arabern oder im Abendlande, je wieder ernstlich bezweifelt wurde [b], und dass die von einigen Kirchenvätern oder Scholastikern erhobenen Bedenken sich weniger auf diese Gestalt, als auf die damit verbundene Lehre der Existenz von sog. **Antipoden** (vgl. 217) bezogen, welche nicht etwa nur „lächerlich", sondern mit der Kirchenlehre von der Einheit des Menschengeschlechtes im Widerspruche zu stehen schien, da damals die Meinung herrschte, es sei die sog. heisse Zone (vgl. 217) nicht nur „unbewohnbar", sondern sogar „unüberschreitbar": Letztere Meinung fiel erst definitiv dahin, als **Apono** nachwies, dass **Marco Polo** Sterne gesehen habe, welche er ohne Überschreiten der Linie nicht hätte wahrnehmen können [c], und sodann bald darauf die Indienfahrer und Weltumsegler dieselbe faktisch widerlegten [d].

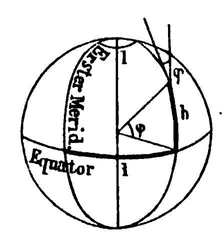
Zu 216: *a.* Von **Parmenides** weiss man nur, dass er aus Elea in Gross-Griechenland gebürtig war, dort lehrte und 460 v. Chr. nach Athen kam. — *b.* Schon **Aristoteles** stellte die Gründe für diese Annahme in seiner Schrift „De coelo (Lugd. 1559 in 8., und viele spätere Ausg.)" in ähnlicher Weise zusammen, wie es jetzt noch in populären Schriften gebräuchlich ist, indem er nicht nur (wie schon Pythagoras in 253) die Mondfinsternisse herbeizog, sondern (in Erweiterung des schon oben beigebrachten) wörtlich sagte: „Auch folgt aus der Erscheinung der Sterne über dem Horizonte, dass diese Gestalt kugelförmig ist, und zugleich, dass diese Kugel nicht eben sehr gross sein kann; denn wenn man auch nur ein wenig gen Süd oder gen Nord fortgeht, so ändert sich der Kreis des Horizontes sogleich auffallend, so dass die in unserm Scheitel stehenden Sterne sich sofort von demselben entfernen. Ebenso werden mehrere (südliche) Sterne in Egypten und Cypern noch gesehen, die man in den nördlicher liegenden Ländern nicht mehr sieht, und wieder andere Sterne, die gegen Norden liegen, bleiben in den nördlichen Gegenden der Erde während ihres ganzen täglichen Laufes über dem Horizonte, während sie in den südlichen Gegenden gleich allen andern auf- und untergehen". Hiezu fügte später **Plinius** in seiner „Historia naturalis" noch bei, dass alle Dinge einen Hang haben, nach dem Mittelpunkte der Erde zu fallen, also die Erde selbst keinen Hang zum Fallen haben könne, — dass die Unebenheiten der Oberfläche der Erde so gering seien, dass sie keinen wesentlichen Einfluss auf ihre

Gestalt haben können, — dass endlich die runde Gestalt der Erde auch dadurch bewiesen werde, dass man von entfernten Schiffen zuerst die obersten Teile erblicke. Auch in **Al-Fergans** „Rudimenta" wird die Erdgestalt auf entsprechende Weise begründet, jedoch allerdings damit, wie schon Thomas **Burnet** (Croft in Yorkshire 1635 — Charterhouse 1715; Kabinettsprediger in London) in seiner „Telluris theoria sacra. London 1681—89, 2 Vol. in 4. (auch Amstelodami 1694; englisch London 1697, deutsch durch J. J. Zimmermann, Hamburg 1698)" hervorhob, nur bewiesen, „dass die Erde nicht platt, sondern bäuchig seye", aber nicht „was das für eine Bäuchigkeit seye, ob Eyrund oder Kugelrund". — *c.* Pietro d'Abano oder **Apono** (Abano bei Padua 1250? — Padua 1316) war Arzt, Astrolog und Prof. med. Padua, wo er als Zauberer und Ketzer im Inquisitionsgefängnisse starb. — **Marco Polo** (Venedig 1256 — ebenda 1323) wurde durch die Berichte, welche er über seine Reisen nach China, etc., gab, und die später in allen Sprachen erschienen, sowie sich bei scharfer Kritik vorzüglich bewährten, man kann wohl sagen, weltberühmt. — *d.* Schon in einem im 13. Jahrhundert von dem Franzosen **Omons** unter dem Titel „Imagine du monde" verfassten Pariser Manuskript wird die Möglichkeit der Erdumsegelungen geahnt, indem von der Erde gesagt wird: „Elle est ronde, de sorte qu'un homme qui partirait d'un point quelconque de sa surface, pourrait, s'il ne rencontrait pas d'obstacle, tourner tout autour, de même qu'un insecte qu'on verrait se promener sur la circonférence d'un fruit"; aber, wenn auch mutmasslich schon lange vor Marco Polo die Araber die Linie passierten, also die heisse Zone durchsetzten, so scheint doch 1486 Bartollomeo **Diaz** (Tabira in Portugal 1450 — Algoa-Bay an der Südküste Afrikas 1500) der erste gewesen zu sein, der das Kap der guten Hoffnung umschiffte, und Fernando de Magalhães oder **Magellan** (Portugal 1470? — Mactan in den Philippinen 1521) der erste, welcher 1519 von Sevilla aus eine Weltumsegelung unternahm, von der sein Schiff unter beständigem Segeln nach Westen bis 1522 wieder dahin zurückkehrte.

217. Die geographischen Coordinaten. — Unter der Annahme, dass die Erde eine zum scheinbaren Himmelsgewölbe konzentrische Kugel sei, lassen sich die an letzterm eingeführten Axen und Kreise leicht auf die Erdkugel übertragen[a], und dies soll schon **Parmenides** wenigstens in Beziehung auf die Polarkreise und Wendekreise wirklich ausgeführt und so die Erdoberfläche in fünf **Zonen** abgeteilt haben: Die **heisse**, durch den Equator oder die sog. **Linie** halbierte Zone zwischen den beiden Wendekreisen, — die sich an dieselbe zu beiden Seiten anschliessenden zwei **gemässigten** Zonen, — und die von letztern durch die beiden Polarkreise abgetrennten zwei Kugelhauben, die sog. **kalten** Zonen[b]. Später wurden diese Zonen von den Geographen noch weiter abgeteilt und darauf annähernde Lagenbestimmungen gegründet, bis man endlich nach dem Vorgange von **Hipparch** allgemein die Übung annahm, die Lage eines Ortes auf der Erde einerseits durch seine Entfernung vom Equator, die mit der Polhöhe übereinstimmende sog. **geographische Breite** ($b = \varphi$), und anderseits durch die Distanz

seines Meridianes von einem beliebig gewählten **ersten** oder Ausgangs-Meridiane, die mit dem Mittagsunterschiede identische sog. **geographische Länge** (l), festzulegen [e]. Dabei nennt man, in Beziehung auf die unter b und l Wohnenden, die unter — b und l, oder unter b und 180° + l, oder unter — b und 180° + l Wohnenden, je **Gegenwohner** (Antoeci, mit entgegengesetzten Jahreszeiten), **Nebenwohner** (Perioeci, mit entgegengesetzten Tageszeiten), oder **Gegenfüssler** (Antipodes, mit entgegengesetzten Jahres- und Tageszeiten) [d].

Zu 217: *a.* Die Axen und grössten Kreise tragen sich von selbst über, — beliebige Punkte und kleine Kreise (Almucantarate und Parallelkreise) durch Ziehen von Radien. — Von dem **wahren** Horizonte, dessen Ebene noch durch den Mittelpunkt der beiden Kugeln geht, hat man nunmehr den **scheinbaren** Horizont, dessen Ebene die Erde tangiert, und den sog. **Meereshorizont**, der durch die Tangenten vom Auge an die Erdkugel bestimmt wird, zu unterscheiden. — *b.* Die **heisse** Zone enthält offenbar diejenigen Punkte der Erde, deren Zenit die Sonne jedes Jahr zweimal erreicht, so dass deren Bewohner **Unschattige** (Ascii) werden können, während sie sonst **Zweischattige** (Amphiscii) heissen, da sie die Sonne um Mittag bald südlich, bald nördlich vom Zenite sehen; in den beiden **kalten** Zonen wird die Sonne zeitweise circumpolar, in welchem Falle die Bewohner **Umschattige** (Periscii) sind, — während dagegen die Bewohner der **gemässigten** Zonen immer **Einschattige** (Heteroscii) bleiben.



— *c.* Dass die Breite b mit der Polhöhe φ übereinstimmt, geht aus der beistehenden Figur unmittelbar hervor, — ebenso dass die nach Osten gezählte Länge l gleich dem Stundenwinkel ist, um welchen ein Gestirn in dem Augenblicke vom Ortsmeridiane abweicht, in welchem es unter dem ersten Meridiane culminiert. Bezeichnet daher a die Rektascension eines Gestirnes, t die Sternzeit seiner Culmination im ersten Meridiane, und t_1 die gleichzeitige Angabe einer in der Länge l_1 aufgestellten Sternuhr, so ist

$$t = a \quad \text{und} \quad t_1 = a + l_1 \quad \text{also} \quad l_1 = t_1 - t \qquad \mathbf{1}$$

und analog für einen zweiten Ort

$$t = a \qquad t_2 = a + l_2 \qquad l_2 = t_2 - t$$

so dass

$$l_2 - l_1 = t_2 - t_1 \qquad \mathbf{2}$$

oder die **Längendifferenz gleich der Differenz der Ortszeiten in demselben Momente**, oder also auch (abgesehen von der für nicht sehr entlegene Orte verschwindenden Bewegung der Sonne in Æ) gleich dem **Mittagsunterschiede** ist, folglich durch eine **Uhrvergleichung** erhalten werden kann. Da die Differenz unverändert bleibt, wenn man von beiden Zeiten die Rektascension der Sonne abzieht und allfällig noch die Zeitgleichung zufügt, so ist es ganz gleichgiltig, in welcher der drei üblichen Zeiten (vgl. 193) die Uhrvergleichung ausgeführt wird. Das Nähere über die praktische Ausführung solcher Uhrvergleichungen dem Abschnitte XVI vorbehaltend, mag vorläufig nur erwähnt werden, dass sie gegenwärtig auf dem Lande am bequemsten und sichersten durch telegraphische Verbindungen erhältlich sind. Für die Bestimmung der Uhrkorrektion wird auf 198, für diejenige der Polhöhe auf 167—70, — für beide überdies auf Abschnitt XIV verwiesen. — *d.* Als die (216) erwähnte Expedition von

Magellan 1522 nach Sevilla zurückkehrte, zeigte die Schiffsrechnung zu allgemeiner Bestürzung nur IX 6, während man am Lande bereits IX 7 zählte: Man schloss also, dass auf dem Schiffe manche Feste und Fasttage zu falscher Zeit abgehalten worden seien und dies musste die Mannschaft in der Domkirche öffentlich abbüssen, — wie man sich aber den Defekt zu erklären habe, scheint nicht erörtert worden zu sein, so dass man hinter dem syrischen Fürsten **Abulfeda** (1273—1331) zurückblieb, der bereits in seiner Geographie derartige Vorkommnisse besprochen haben soll. Jetzt übersieht man allerdings diese Sache ganz leicht, sowie folgende verwandte Verhältnisse: Ist von Europa aus ein Ort der Länge l zuerst besucht worden, indem man nach Osten (z. B. mit den Portugiesen um das Kap herum) reiste, so wird er, wenn es in Paris a^h ist und die Länge von Paris aus gezählt wird, die Zeit $(a + l)^h$, — dagegen, wenn er zuerst auf einer Reise nach Westen (z. B. mit den Spaniern durch die Magellans-Strasse) erreicht wurde, $a - (24 - l) = (a + l)^h - 24^h$, d. h. einen Tag weniger notieren. Es haben auf diese Art auch wirklich, z. B. im stillen Ocean (Polynesien), manche Orte, welche nahe unter demselben Meridiane liegen, zwar dieselbe Tagesstunde, dagegen Datum und Wochentag verschieden. Nach **Heis** (Wochenschrift 1868) zieht sich diese Datumsscheidelinie durch die Behringsstrasse längs der asiatischen Küste, ausserhalb Japan aber innerhalb der Philippinen, nach Indien hin, und läuft dann an Borneo, Guinea, den Hebriden und Neu-Seeland vorbei, um sich von dort direkt dem Südpol zuzuwenden; so z. B. haben die Bewohner der Hebriden Montag, während diejenigen der Carolinen erst Sonntag zählen. — Bei den Nautikern soll jetzt die Übung bestehen, beim Durchfahren des grossen Oceans das Datum um eine Einheit zu vermehren oder zu vermindern, je nachdem man den West- oder den Ost-Kurs einhält.

218. Der erste Meridian. — Obschon theoretisch jeder beliebige Meridian als Ausgangsmeridian gewählt werden kann, so spricht die Praxis unbedingt dafür, einen solchen zu nehmen, unter welchem die Möglichkeit fortwährender genauer Beobachtungen vorhanden ist, d. h. den Meridian einer in allen Beziehungen gut ausgerüsteten Sternwarte. Man kann es daher nur bedauern, dass **Ptolemäus** von seiner ursprünglichen Absicht abging, alle Längen auf den Meridian von Alexandrien zu beziehen, und einen etwas zuvor von **Marinus** durch die Fortunatsinseln gelegten Meridian als **ersten** acceptierte [a], — und allerdings noch mehr, dass die auf ihn folgenden Astronomen und Geographen nicht nur nichts Besseres an die Stelle setzten, sondern sich überhaupt während circa $1^1/_2$ Jahrtausenden nicht über eine betreffende Wahl einigen konnten [b]. Erst als sich die Verwirrung kaum mehr steigern konnte, gelang es gegen die Mitte des 17. Jahrhunderts, wenigstens zwischen den Geographen eine etwelche Verständigung zu erzielen, aus welcher der durch die Westspitze der Insel Ferro gelegte Meridian als erster hervorging [c]. Als sodann bald darauf Frankreich und England in Paris und Greenwich National-Sternwarten gründeten und die Astronomen sich nun natürlich an die Meridiane von diesen

hielten, so fand der Vorschlag des Geographen **Delisle** vielfach Anklang, zu geographischen Zwecken jenem Meridiane von Ferro einen fingierten Meridian in genau 20° westlicher Länge von Paris zu substituieren, so dass nun auf dem Kontinente der Meridian von Paris (mit 0^h oder 20°) dominierte, während in England und seinen Besitzungen ausschliesslich derjenige von Greenwich gebraucht wurde [d]. — Nachdem sich dieser, immerhin leidliche, aber doch häufig zu Missverständnissen führende Zustand, bis in die Mitte des gegenwärtigen Jahrhunderts erhalten, begannen neue Anstrengungen für vollständige Unifizierung der Längen, und es scheint gegenwärtig der **Meridian von Greenwich** die besten Chancen zu haben, als allgemeiner Ausgangsmeridian angenommen zu werden, — was dann wohl auch zur Folge hätte, dass die auf ihn bezügliche Zeit als **Universalzeit** (vgl. 193) eingeführt würde [e].

Zu 218: *a.* Dass **Ptolemäus** (vgl. Almagest Halma I 148) bei Abfassung seiner Syntaxis beabsichtigte, den ursprünglich von **Hipparch** benutzten Meridian von Rhodus mit demjenigen von Alexandrien zu vertauschen, war ganz sachgemäss; dass er dagegen später auf den Meridian von **Marinus** übergehen mochte, ist kaum zu begreifen, da dieser dem Haupterfordernisse nicht genügte und bloss den untergeordneten Vorteil darbot, alle Längen in demselben Sinne zählen zu können, da damals die um ihrer Fruchtbarkeit willen den Namen „Fortunatæ Insulæ (später bei den Spaniern: Islas Canarias)" führende Inselgruppe das westlichste bekannte Land war. — *b.* Die Zerfahrenheit, welche in Beziehung auf den ersten Meridian herrschte, mag durch folgende Zusammenstellung belegt werden: Die arabischen Astronomen legten den ersten Meridian durch eine ihrer Beobachtungsstellen, voraus durch Bagdad, — während die Geographen bald von den Fortunaten, bald von dem äussersten Westrande Afrikas aus, ihre Längen gegen Osten zählten, wohl auch den sog. „weltteilenden" Meridian benutzten, welchen Al-Zercali oder **Arzachel** (um 1075 in Toledo beobachtend) genau 10° östlich von Bagdad durch den Punkt Azin oder Arin gelegt hatte. Die europäischen Astronomen benutzten zuerst den Meridian von Toledo, auf welchen sich die Alfonsinischen Tafeln bezogen, — sodann den Meridian von Nürnberg, für welchen **Regiomontan** seine Ephemeriden berechnet hatte, oder auch mit **Coppernicus** den Meridian von Krakau, — noch später vorzugsweise den Meridian der Uranienburg, welchen **Kepler** seinen Rudolphinischen Tafeln zu Grunde gelegt hatte und den z. B. **Rost** noch 1726 anwandte; die Verfertiger von Globen und Karten legten dagegen den ersten Meridian bald durch eine der kanarischen Inseln (wie Ferro oder Teneriffa), — bald, wie z. B. Martin **Behaim** (Nürnberg 1459 — Lissabon 1507; erst Tuchhändler, dann Steuermann und Kosmograph), durch Madeira, — bald durch eine der Azoren, wie z. B. Robert **Hues** (Harford 1553? — ? 1632; Pensionär des Grafen von Northumberland; vgl. seinen „Tractatus de globis. Lugd. 1594 in 8.") durch San Miguel, — bald, wie der berühmte **Mercator**, durch eine der Kap Verde'schen Inseln oder wohl auch durch den von ihm (154) bestimmten magnetischen Pol, — etc., — ja manche hielten sich sogar an die ziemlich unbestimmte Demarkationslinie, welche eine päpstliche Bulle von 1493 und verschiedene spätere Staatsverträge durch einen etwas westlich von den Azoren

liegenden Meridian dargestellt hatte, um die Besitzergreifungen der Portugiesen im Osten und der Spanier im Westen von einander abzugrenzen. — *c.* Um der Verwirrung, so weit möglich, ein Ende zu machen, berief 1634 der Kardinal **Richelieu** (Richelieu in Poitou 1585 — Paris 1642; franz. Staatsminister) eine Anzahl der berühmtesten Kosmographen Europas zu einem Kongresse nach Paris, und infolge der gepflogenen Verhandlungen erschien sodann 1634 IV 25 jene berühmte königliche Ordonnanz, welche den Meridian der Westspitze von Ferro für alle französischen Kartenzeichner als obligatorischen Ausgangsmeridian bezeichnete und zur Folge hatte, dass derselbe auch ausserhalb Frankreich bei den Geographen ebenfalls fast allgemein in Gebrauch kam. — Fatal war allerdings dabei, dass damals der Längenunterschied zwischen dem dekretierten Meridiane und einem Punkte des Kontinentes, wie z. B. Paris, noch fast unbekannt war, — ja diese Unkenntnis noch lange fortdauerte, da die verschiedenen Bestimmungen stark von einander variierten: So erhielt Louis **Feuillée** (Mane in Provence 1660 — Marseille 1732; Minorit; später Dir. Marseille) 1724 durch Beobachtung der Jupitersmonde als Pariser-Länge von Ferro 20° 1′ 45″, während andere Angaben zwischen 19° 53′ und 20° 30′ schwankten, und jetzt 20° 23′ 9″ als bester Wert gilt. — *d.* Dass **Picard**, als er auf 1679 den ersten Jahrgang der jetzt noch bestehenden „Connaissance des tems" herausgab, sich auf den Meridian der kurz zuvor entstandenen Pariser Sternwarte bezog, ist selbstverständlich; aber schon 1682 stützte er sich für seine neue Karte von Frankreich auf ebendenselben, — und auch andere Astronomen wollten von Ferro nichts wissen. Es hätte so leicht eine neue Verwirrung eintreten können, wenn nicht der Geograph Guillaume **Delisle** (Paris 1675 — ebenda 1726; Akad. Paris; älterer Bruder von Joseph Nicolas und Louis) den klugen Einfall gehabt hätte, den schon oben erwähnten fingierten Meridian von Ferro zu belieben, wodurch allerdings der neutrale Charakter verloren ging und eigentlich der Pariser-Meridian eingeführt war, aber die Geographen ohne Schaden wesentlich ihre beiden Hemisphären beibehalten konnten, in welchen die alte und neue Welt so schön abgeschieden waren. Der von den Engländern durch ihre Sternwarte in Greenwich gelegte und auch ihrem von 1767 hinweg ausgegebenen „Nautical Almanac" als Basis dienende Meridian wurde davon natürlich nicht berührt, sondern behauptete im Gegenteil, wenigstens auf dem Meere, immer mehr den ersten Rang. — *e.* Schon im Anfange des 17. Jahrhunderts hatten Simon **Stevin** (vgl. Oeuvres par Girard II 105) und Nicolas **Bergier** (Rheims 1567 — Grignon 1623; Prof. jur. Rheims; vgl. seinen „Archimeron ou Traité du commencement des jours. Paris 1612 in 8.") an die Einführung einer Universalzeit gedacht, und ebenso war später die damit zusammenhängende Unifizierung der Längen wiederholt angeregt worden, aber jeweilen ohne praktische Folgen. Einen neuen Anstoss gaben die 1879 von dem Kanadier Sandford **Fleming** ausgegebenen „Papers on the time-reckoning and the selection of a Prime Meridian to be common to all nations", und sein Vorschlag, letztern in 180° Greenwich zu legen, fand anfänglich vielen Beifall, zumal dieser Meridian sozusagen keinen Kontinent durchschnitt, zu der von den Seefahrern (217) bereits angenommenen Übung für Änderung des Tagesdatums gut passte und mit dem meist benutzten Meridiane von Greenwich in ganz einfacher Relation stand. Später ergaben jedoch die in Sachen, teils 1883 auf dem Geodäten-Kongresse in Rom, teils 1884 auf der speciell dafür einberufenen internationalen Konferenz in Washington, gepflogenen Besprechungen eine überwiegende Mehrheit für den Meridian von

Greenwich selbst, und nur in Beziehung auf die Zählung der Längen und den Tagesanfang blieben noch Differenzen übrig: Während nämlich in Rom (vgl. die von Hirsch und Oppolzer redigierten Verhandlungen) die Mehrheit erstere von Greenwich aus nach Osten bis 360° zählen und letztern auf den Greenwicher Mittag legen wollte, wurde in Washington (vgl. „O. Struve, Die Beschlüsse der Washingtoner Meridiankonferenz. St. Petersburg 1885 in 8.") beschlossen, die Längen von Greenwich aus nach Osten und Westen bis ± 180° zu zählen und die Greenwicher Mitternacht als Tagesanfang zu benutzen. Ohne Zweifel wird sich übrigens auch über diese beiden Punkte, sowie über die ebenfalls noch streitige Einteilung des Tages, eine Verständigung erzielen lassen; dagegen dürfte die Ordnung des Verhältnisses zwischen der neuen Universalzeit und den jetzt gebräuchlichen Lokalzeiten noch vielen praktischen Schwierigkeiten begegnen.

219. Begriff einer Erdmessung. — Unter der Annahme, dass die Erde eine Kugel sei, genügt es offenbar, um ihre Grösse zu erhalten, die Länge irgend eines bestimmten Teiles eines grössten Kreises derselben, etwa eines Meridianes, in einem der üblichen Längenmasse zu ermitteln, so z. B. die Länge eines Grades [a]. — Kennt man die Länge eines Grades und definiert die **geographische Meile** als $^1/_{15}$ eines Equatorgrades, oder den **Meter** als den zehnmillionsten Teil eines Meridianquadranten, so sind auch diese bestimmt und können ebenfalls als Masse dienen: Wählt man z. B. erstere als Einheit, so ist

$$1^\circ = 15 \qquad 2r\pi = 15 \times 360 = 5400 \qquad r = \frac{5400}{2\pi} \risingdotseq 859^1/_2$$

Führt man dagegen $1000^m = 1$ Kilometer ein, so ist

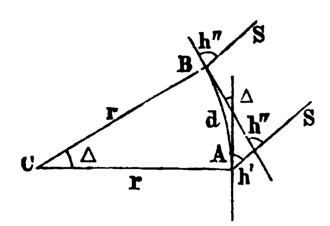
$$1^d = 100^{km} \qquad 2r\pi = 100 \cdot 400 = 40000^{km} \qquad r = \frac{40000}{2\pi} \risingdotseq 6366^1/_5{}^{km}$$

und zugleich ergiebt sich, dass

$$40000^{km} = 5400 \qquad 1^{km} = 0{,}135 \qquad 7^1/_2{}^{km} \risingdotseq 1$$

sind.

Zu 219: *a.* Die Messung eines Grades kann in folgender Weise ausgeführt werden: Man bestimmt vorerst (165) in einem Punkte A die Richtung des Meridianes, — wählt alsdann in dieser Richtung einen beliebigen zweiten Punkt B, — bestimmt nunmehr die Distanz dieser beiden Punkte entweder durch unmittelbare Messung, oder indirekt (416) durch eine sog. Triangulation, — und misst endlich an beiden Stationen die Mittagshöhen h' und h'' irgend eines Gestirnes S, z. B. des Polarsternes. Bezeichnet sodann Δ den Winkel der beiden Erdradien r, d die erhaltene Distanz, und l die Länge eines Grades, so hat man



$$\Delta = h'' - h' \qquad \text{und} \qquad l : d = 1^\circ : \Delta$$

womit das Problem offenbar vollständig gelöst ist. — *b.* Die alte Minute entspricht der sog. **Seemeile**, — die neue aber einem Kilometer, für welchen ursprünglich der Name „Millaire" gewählt worden war.

220. Ergebnisse der ausgeführten Erdmessungen. — Die genauere Beschreibung der verschiedenen, wirklich in Anwendung gekommenen Messungsverfahren dem Abschnitte XVI vorbehaltend, mögen hier vorläufig noch einige Hauptergebnisse mitgeteilt werden: Die erste etwas zuverlässige Gradmessung war die 1671 in Frankreich durch **Picard** nach der Methode von **Snellius** (416) ausgeführte, welche $1^0 = 57060^t$ oder also $3804^t = 1$ ergab. Sie stützte sich noch auf die Annahme der **Kugelgestalt** der Erde, während bald darauf **Huygens** und **Newton** durch theoretische Betrachtungen fanden, dass unter Voraussetzung der allgemeinen Anziehung die Normale auf einer rotierenden Kugel unmöglich mit der Resultierenden aus der Centrifugalkraft und der Anziehung nach dem Mittelpunkte der Masse zusammenfallen könne: Man müsse der Kugelgestalt, um diesen Widerspruch zu heben, notwendig ein sich um seine kleinere Axe drehendes Rotationsellipsoid oder ein an den Polen merklich **abgeplattetes Sphäroid** substituieren, und zwar werde die Rotationsaxe mindestens um $^1/_{587}$ und höchstens um $^1/_{229}$ kleiner als der Durchmesser des Equators sein. Wenn aber die Meridiane elliptisch sind, so giebt die frühere Weise der Erdmessung offenbar nicht mehr den Erdradius, sondern den Krümmungsradius an der Messungsstelle, und da die Krümmung der Ellipse gegen den Scheitel der kleinen Axe hin abnimmt, so wird der Krümmungshalbmesser und mit ihm 1^0 des Krümmungskreises vom Equator gegen die Pole hin zunehmen: Man kann nun durch zwei, unter wesentlich verschiedenen Breiten angestellte Messungen diesen Unterschied und damit die Zulässigkeit der neuen Hypothese konstatieren, — ja sogar aus ihnen nach geometrischen Regeln die Halbaxen a und b, folglich auch die sog. **Abplattung** $\alpha = (a - b) : a$ bestimmen. Zu diesem gedoppelten Zwecke wurde nun 1735 unter Leitung von **Bouguer** und **La Condamine** eine Expedition nach Peru, und 1736 unter Führung von **Maupertuis** eine ebensolche nach Lappland abgeordnet, und es ergab sich sowohl aus diesen beiden, als aus den zahlreichen seither an den verschiedensten Stellen der Erde ausgeführten Messungen, dass, wie namentlich **Bessel** durch eingehende Rechnungen gezeigt hat, die Erde wirklich sehr nahe einem Rotationsellipsoide entspricht, — dass

$$a = 3\,272\,077^t \qquad b = 3\,261\,339^t \qquad \alpha = {}^1/_{299} \qquad 3807\,^1/_4{}^t = 1$$

gesetzt werden darf, — und dass der 1799 in Frankreich zu $443''',296$ P. $= 0^t,51307$ eingeführte **Meter** in dem Meridianquadranten der Erde 10000856 mal enthalten ist, somit nach Definition etwa $443''',334 = 0^t,51312$ betragen sollte.

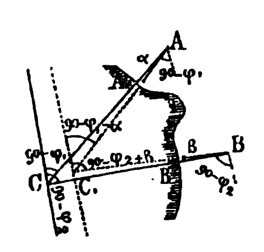
221. Urzustand und Bau der Erde. — Wahrscheinlich befand sich unsere Erde vor ungezählten Jahrtausenden in feurigflüssigem Zustande, — besass somit eine Temperatur von einigen tausend Graden, während der umgebende Weltraum kalt war, — und rotierte bereits mit einer gewissen Geschwindigkeit, welcher eine angemessene Abplattung entsprach, um ihre jetzige Axe. Als sie sich sodann im Laufe der Jahrtausende langsam abkühlte, nahm auch ihr Volumen nach und nach etwas ab, während Winkelgeschwindigkeit und Abplattung sich gegenteils vermehrten, — und gleichzeitig bildete sich alsgemach eine feste Kruste, die jedoch wohl anfänglich noch von Zeit zu Zeit durchbrochen wurde, wobei sich einzelne Teile mit Trümmern und feurigen Massen bedeckten, so dass sich die Gestaltung der Oberfläche veränderte; zugleich entstand eine Lufthülle, aus der sich Wasser niederschlug. Sobald das Innere durch die immer mehr erstarkende Erdrinde von dem umgebenden Weltraume hinlänglich abgeschlossen war, verlangsamerte sich der Abkühlungsprozess und dafür machte sich nach und nach der Einfluss der Sonnenwärme geltend; doch war dieser letztere zur Zeit, als die Oberflächentemperatur auf den etwa bei 70° anzunehmenden Gerinnungspunkt des Eiweisses gesunken war und somit organisches Leben auftreten konnte, noch so unbedeutend, dass letzteres sich auf der ganzen Erde so ziemlich gleichzeitig entwickeln musste. Erst als bei weiterer Abkühlung die Erwärmung durch die Sonne gegenüber dem Wärmeverlust durch Ausstrahlung mehr und mehr in Betracht kam und schliesslich eine Art Gleichgewicht zwischen beiden eintrat, bildeten sich die gegenwärtigen klimatischen Verhältnisse und Differenzen aus, welche sich nun aber seit mindestens drei Jahrtausenden kaum mehr merklich verändert haben dürften [a]. — So plausibel aber diese Anschauungen erscheinen, so ist damit natürlich die gegenwärtige innere Konstitution des Erdballs noch keineswegs klar gelegt und es ist wohl noch immer der vor einem vollen Jahrhundert von **Lichtenberg** aufgestellte Vergleich zutreffend, dass wir von der Beschaffenheit des Erdinnern nur wenig mehr wissen als eine Büchermilbe, welche sich in ein Kleisterflötz eines Buchdeckels eingefressen hat, von dem Inhalte des Buches: Die Forschungen der Geologen können sich natürlich nur auf die äusserste Erdrinde und deren Geschichte beziehen, — und auch den Astronomen, Geodäten und Physikern gelang es bis jetzt nur einige wenige sichere Anhaltspunkte für allfällige Spekulationen über die Beschaffenheit des Erdinnern beizubringen, so dass auch noch hier von einem „dunkeln“ Erdteile gesprochen werden kann [b].

Zu 221: *a.* Wie schon zur Zeit von Moses in Palästina die Dattelpalme reife Früchte brachte (Min. der mittl. Jahrestemperatur 21° C.) und doch auch noch der Weinstock gedieh (Max. 22° C.), so hält sich dort noch heute die mittlere Jahrestemperatur auf circa $21\frac{1}{2}$°, — und eine ähnliche Beständigkeit würde sich wohl auch für andere Stellen der Erde ergeben, wenn wir die nötigen Anhaltspunkte aus früherer Zeit besitzen würden. — Auch folgende Rechnung nötigt uns, von einer noch gegenwärtig vor sich gehenden merklichen Abkühlung zu abstrahieren: Bezeichnen r und t Radius und Rotationszeit der Erde, v aber die Geschwindigkeit eines Equatorpunktes, so ist $2r\pi = t \cdot v$, und somit, wenn man annimmt, dass v infolge der Trägheit unverändert bleibe, $2\pi \cdot dr = v \cdot dt$ oder $dt = 2\pi \cdot dr : v = t \cdot dr : r$. Würde nun r für 1° Abkühlung um dr abnehmen, und wäre α die Ausdehnung der Längeneinheit für 1°, so hätte man $dr = r \cdot \alpha$, also $dt = t \cdot \alpha$. Setzt man nun α, wie es etwa dem Gesamtmaterial der Erde entsprechen dürfte, etwas grösser als $\frac{1}{100000}$ und (192) die Rotationszeit der Erde gleich 100000 Decimalsekunden, so kömmt dt, und damit die durch Abkühlung um 1° bewirkte Verkürzung des Tages, auf etwas mehr als eine Decimalsekunde, während **Laplace** (508) aus andern astronomischen Daten fand, dass sich der Tag seit Hipparch nicht um $\frac{1}{100}$ einer solchen Sekunde verändert haben könne. — *b.* Auf die geologischen Untersuchungen kann ich natürlich hier nicht eintreten, und auch für die mathematischen Spekulationen, die bei allem Interesse noch nicht zu abschliessenden Resultaten führen konnten, muss ich mich auf Angabe einiger betreffender Schriften beschränken. Ich erwähne „A. **Clairaut**, Théorie de la figure de la terre. Paris 1743 in 8. (2 éd. 1808), — A. M. **Legendre**, Recherches sur la figure de la terre (Mém. Par. 1784), — P. S. **Laplace**, Mécanique céleste (Livre XI in Tome V von 1825), — J. F. **Saigey**, Physique du globe. Paris 1832, 2 Vol. in 16., — E. **Roche**, Mémoire sur l'état intérieur du globe terrestre (Mém. Montpellier 1881), — E. **Tissérand**, Sur la constitution intérieure de la terre (Bull. astr. 1884), — **Faye**, Sur la constitution de la croûte terrestre (Compt. rend. 1886), — etc.", und verweise zum Schlusse für den gegenwärtigen Stand der ganzen Frage auf „S. **Günther**, Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie. Stuttgart 1884—85, 2 Bde. in 8. (I 314—29)".

222. Dichte der Erde. Während man in ältern Zeiten an die Ermittlung der Masse der Erde kaum denken konnte, und noch **Newton** nur als Vermutung aussprach, es möchte die mittlere Dichte zwischen 5 und 6 fallen, so sind dagegen, von der Mitte des 18. Jahrhunderts hinweg bis auf die neueste Zeit mehrfach, und nach wesentlich verschiedenen Methoden, gelungene Versuche gemacht worden, diese Grössen durch wirkliche Messungen zu bestimmen: Nach dem dafür durch **Maskelyne** und **Hutton** inaugurierten Verfahren, bei welchem Lot-Ablenkungen benutzt wurden, ergaben sich für die mittlere Erddichte Werte, welche zwischen 4,48 und 5,32 schwankten [a], — bei dem von **Michell** ausgedachten und von **Cavendish** zuerst angewandten Verfahren, bei welchem ein Horizontalpendel unter dem Einflusse von schweren Bleimassen zu schwingen hat, wurden Werte erhalten, welche zwischen 5,44 und 5,88 variieren [b],

— und durch einige andere Verfahren ergaben sich 4,39 und 6,57 als äusserste Werte [c], — so dass man wohl mit ziemlicher Sicherheit annehmen kann, es werde die mittlere Erddichte wenigstens nahezu $5^1/_2$ betragen [d]. — Hält man hiemit zusammen, dass nach **Studer** die mittlere Dichte der bekannten Erdkruste etwa 3, nach **Humboldt** bei Einrechnung des Meeres sogar nur $1^1/_2$ beträgt, so darf man wohl den Schluss ziehen, dass die Schichten der Erde im allgemeinen nach Innen an Dichte zunehmen; nach welchen Gesetzen aber diese Zunahme statt hat und ob sie bis zum Centrum fortdauert oder später wieder in Abnahme übergeht, sogar zuletzt entsprechend naturphilosophischen Ideen ein hohler Raum folgt, lässt sich wohl kaum definitiv bestimmen [e].

Zu 222: *a.* Die ältesten Versuche zu einer Bestimmung der mittlern Erddichte scheinen diejenigen gewesen zu sein, welche 1774 N. **Maskelyne** (vgl. seinen „Account of observations made on the mountain Shehallien for finding its attraction" in Ph. Tr. 1775) und Ch. **Hutton** (vgl. seine „Survey of the Shehallien to ascertain the earth's mean density" in Ph. Tr. 1778) zu beiden Seiten des von E nach W streichenden Gebirges Shehallien in der schottischen Grafschaft Perthshire in der Weise machten, dass sie einerseits in zwei Punkten A und B die, durch die Ablenkung des Lotes nach dem Berge hin, verdorbenen Polhöhen $\varphi_1 + \alpha$ und $\varphi_2 + \beta$ massen, und so den Winkel



$$\angle AC_1B = (90^0 - \varphi_2 + \beta) - (90^0 - \varphi_1 - \alpha) =$$
$$= (\varphi_1 - \varphi_2) + (\alpha + \beta) = 54'',6$$

erhielten. Anderseits fanden sie durch trigonometrische Operationen A′B′ = 4364′,4 E., folglich, da nach Bouguer unter der für den Berg gefundenen Breite 56° 40′ auf eine Sekunde des Meridianes 101′,64 E. gingen, $\angle ACB = \varphi_1 - \varphi_2 = 42'',9$. Es musste also $\alpha + \beta = 11'',7$ sein. Hierauf suchten sie so gut als möglich die anziehende Masse des Berges, seine mittlere Dichte und die Lage seines Schwerpunktes zu bestimmen, und sodann die Dichte der Erde so festzusetzen, dass die Resultierenden der Anziehungen von Erde und Berg möglichst mit den beobachteten Richtungen zusammenfielen, was bei Annahme von 4,48 in befriedigender Weise der Fall war. Als später John **Playfair** (Benvie in Schottland 1748 — Edinburgh 1819; zuerst Pfarrer, dann Prof. math. et phys. Edinburgh) die geologischen Daten revidierte, erhielt er (vgl. seinen „Account of a lithological survey of Shehallien" in Ph. Tr. 1811) 4,71, — und seither H. **James** (vgl. „On the mean specific gravity of the earth" in Ph. Tr. 1856) bei Wiederholung der ganzen Operation sogar 5,32. — *b.* Schon etwa 1768, also 6 Jahre vor den Versuchen am Shehallien und 9 Jahre ehe Charles Augustin **Coulomb** (Angoulême 1736 — Paris 1806; Ingenieur und Akad. Paris) seine Drehwage erfand, hatte sich John **Michell** (? 1730? — Thornhill in Yorkshire 1793; Pfarrer in Thornhill), wie ihm 1772 sein Freund Priestley in der „History of vision (Übersetzung Klügel pag. 282)" bezeugte und schon oben erwähnt wurde, ein Horizontalpendel konstruiert, mit welchem er unter anderm auch beabsichtigte, die Erddichte auf rein physikalischem Wege zu bestimmen, — war aber vor vollständiger

Ausführung seines Planes gestorben. Sein Apparat ging an Fr. Wollaston über, wurde von diesem an **Cavendish** verschenkt, der ihn noch etwas umgestaltete, und bestand schliesslich (vgl. des letztern „Experiments to determine the density of the earth" in Ph. Tr. 1798, oder in franz. Übersetzung durch Chompré in Cah. 17 des Journ. de l'école polyt.) aus einem Holzstabe der Länge 21, der an einem feinen Metalldrahte der Torsion h hing und zwei Metallkugeln trug, denen die Schwungzeit

$$T = \pi \cdot \sqrt{l : h} \qquad \text{anstatt} \qquad t = \pi \cdot \sqrt{l : g} = T \cdot \sqrt{h : g} \qquad 1$$

entsprach. Den Kugeln dieses Pendels wurden sodann in der Distanz d Bleimassen des Gewichtes K gegenübergesetzt, welche das Pendel um α ablenkten, so dass die Attraktion gleich $h \cdot \mathrm{Si}\,\alpha = g \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot t^2 : T^2$ gesetzt werden konnte, also in der g zu Grunde liegenden Entfernung des Erdradius R noch $d^2 : R^2$ mal so viel betragen haben würde. Bezeichnet man somit die Masse der Erde mit M, so ist

$$M : K = g : \frac{g \cdot d^2 \cdot t^2 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}{R^2 \cdot T^2} \qquad \text{oder} \qquad M = \frac{R^2 \cdot T^2 \cdot K}{d^2 \cdot t^2 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha} \qquad 2$$

und aus M kann sodann mit Hilfe der Erddimensionen die gesuchte Dichte berechnet werden. **Cavendish** erhielt so aus verschiedenen 1797/8 angestellten Versuchsreihen im Mittel die Erddichte 5,48, — und seither fanden auf demselben Wege: Ferdinand **Reich** (Bernburg 1799 — Freiberg. 1882; erst Hüttengehilfe, dann Prof. phys. Freiberg), vgl. dessen „Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwaage. Freiberg 1838 in 8., und: Neue Versuche mit der Drehwaage (Sächs. Abh. I von 1852)" 5,44—5,88, — „Fr. **Baily**, Experiments with the torsion rod for determining the mean density of the earth. London 1843 in 4. (auch Mem. Astr. Soc. 14)" 5,67, — und: „Marie-Alfred **Cornu** (1841 geb.; Prof. Polyt. Paris) et Jean-Baptiste-Alexandre **Baille** (Aix-en-Provence 1841 geb.; Repet. Polyt. Paris), Détermination nouvelle de la constante de l'attraction et de la densité moyenne de la terre (Comptes rendus 1873)" 5,50—5,56. Vgl. auch: „C. V. **Boys**, On the Cavendish Experiment (Proceed. Roy. Soc. 283 von 1889)". — *c.* Für einige andere, zum Teil auf Transformation oder Kombination beruhende Methoden vgl. „**Carlini**, Osservazioni della lunghezza dell pendolo semplice fatte al monte Cenisio (Eff. Milan. 1824; es ergab sich 4,39, oder nach Neuberechnung durch Schmidt 4,84), — **Airy**, Account of pendulum experiments undertaken in the Harton Colliery for the purpose of determining the mean density of the earth. London 1856 in 4. (auch Ph. Tr. 1856; er fand 6,57), — Philipp **v. Jolly** (Mannheim 1809 — München 1884; Prof. phys. Heidelberg und München; vgl. G. Böhm „München 1886 in 8.), Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation (Abh. München 1878—81; durch Tod unterbrochene, aber sehr interessante Arbeit), — Rob. **v. Sterneck**, Untersuchungen über die Schwere im Innern der Erde, ausgeführt 1882/3 in dem 1000^m tiefen Adalbert-Schachte des Silberbergwerkes zu Pribram in Böhmen (Mitth. des österr. milit. geogr. Inst. II—III), — etc. — *d.* Da $5\frac{1}{2}$ dem Mittel zwischen den Dichten der Gesteine und der gemeinen Metalle entspricht und erstere in der Erdrinde vorherrschen, so ist anzunehmen, dass letztere in grösserer Tiefe massenhaft auftreten. — Als Kuriosum ist anzuführen, dass **Bartoli** (vgl. Cosmos 1885 XI 9) fand, es würde einem Körper, der von jedem bekannten Elemente eine seinem Atomgewichte proportionale Menge in festem Zustande enthielte, die mittlere Dichte 5,776 zukommen, — also gerade die Dichte, welche **Sterneck** der Erde geben will. —

c. Die Lehre, dass die Erde eine Hohlkugel sei, findet sich z. B. in „Otto **Volger** (Lüneberg 1822 geb.; Prof. miner. und geol. Zürich und Frankfurt), Erde und Ewigkeit. Frankfurt 1857 in 8." vertreten.

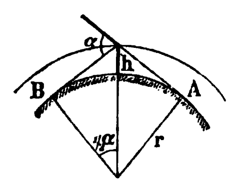
223. Dämmerungserscheinungen und Höhe der Atmosphäre. — Die den Übergang von Tag zu Nacht vermittelnde sog. **Dämmerung** (crépuscule, twilight) liefert uns nicht nur durch ihre blosse Existenz den Beweis für das Vorhandensein einer die Erde umgebenden Lufthülle oder **Atmosphäre** [a], sondern giebt uns sogar ein Mittel, wenigstens annähernd, deren Höhe zu bestimmen: Nachdem nämlich die Sonne untergegangen ist und verschiedene damit zusammenhängende Beleuchtungserscheinungen abgelaufen sind [b], trifft dann bald auch, und zwar nach **Brandes** etwa bei $6^1/_2{}^0$ Depression der Sonne, das Ende der sog. **bürgerlichen** Dämmerung ein, d. h. es wird uns künstliche Beleuchtung notwendig; aber noch lange nachher sehen wir am Westhimmel ein helles, oft ziemlich scharf begrenztes Segment, — können beobachten, wie dessen Höhe und Basis fortwährend abnehmen, — ja durch eine Art Interpolation den Moment des Verschwindens des Segmentes oder des Abschlusses der sog. **astronomischen** Dämmerung ermitteln, — und durch eine leichte Rechnung die letzterm entsprechende Depression α der Sonne finden, welche nach den neuern Beobachtungen etwa 16^0 beträgt [c]. Bezeichnet nun aber r den Radius der Erde und h die Höhe der obersten Schichte der Atmosphäre, welche noch Licht zu reflektieren vermag, so ist offenbar [d]

$$\frac{r}{r+h} = \text{Co}\,\frac{\alpha}{2} \qquad \text{oder} \qquad h = r \cdot \text{Sv}\,\frac{\alpha}{2} \cdot \text{Se}\,\frac{\alpha}{2} \qquad 1$$

und hieraus findet man für $r = 859{,}5$ M und $\alpha = 16^0$ sofort $h = 9{,}2$ M $= 68^{km}$, womit ein unterer Grenzwert für die Höhe der Atmosphäre erhalten ist. Man wird also der Atmosphäre wohl eine Höhe von 12 M oder 90^{km} geben dürfen, — viel weiter aber auch nicht zu gehen haben, da schon in dieser Höhe nach den hypsometrischen Formeln (127) der Barometer nur noch auf etwa $0{,}03^{mm}$ stehen würde.

Zu 223: *a.* Atmosphäre ist aus ἀτμός = Dunst und σφαῖρα = Kugel abgeleitet. Ohne sie und ihre passende Zusammensetzung aus 77 Gewichtsteilen Stickstoff auf 23 Sauerstoff, neben ganz kleinen Mengen von Kohlensäure, Wasserdampf, Ozon, etc., wäre das gegenwärtige organische Leben nicht möglich. — *b.* Vgl. für dieselben meine „Beobachtungen über das Alpenglühen (Bern. Mitth. 1852 und Pogg. Annal. 1853)", wo z. B. nachgewiesen ist, dass (wenigstens für Bern) bei 85^0 Zenitdistanz der Sonne das Röten der Alpen beginnt, — bei $88—92^0$ das eigentliche **Glühen** stattfindet, — bei 93^0 der Erdschatten sich von den Alpen ablöst und diese durch Kontrast die sog. Leichenfarbe annehmen, — bei 94^0 durch Reflex vom Abendhimmel eine neue Färbung entsteht, welche sich bisweilen, wenn das Rot von Westen bis zum Zenit auf-

steigt, bis zu einem zweiten Glühen, dem sog. **Nachglühen**, steigert, — bei 95° endlich die Alpen in der Regel ganz verschwinden. — *c.* Während **Alhazen** $\alpha = 19°$ annahm, findet sich in „**Nonius**, De crepusculis. Olyssipone 1542 in 4." nach Beobachtungen in Lissabon $\alpha = 16° 2'$ angegeben, womit auch die neuere Zeit übereinstimmt: So erhielt **Bravais** (vgl. Ann. mèt. 1850) aus Beobachtungen auf dem Faulhorn $\alpha = 16°,0$, — J. **Schmidt** (vgl. A. N. 1495 von 1865) aus Beobachtungen in Athen im Mittel $\alpha = 15°,9$, dabei aber konstatierend, dass α bedeutend variiere, namentlich im Sommer Minimalwerte und im Winter Maximalwerte annehme, — und auch G. **Hellmann** fand solche Variationen bestätigt (vgl. Österr. Z. f. Met. 1884), setzte für das mittlere Europa und die Morgendämmerung $\alpha = 18°$, für die Abenddämmerung aber nur $\alpha = 15°,6$, und glaubt, dass α teils mit der geographischen Breite, teils mit der Feuchtigkeit zunehme. — *d.* Da die Luftschichte in der Höhe h dem Beobachter in A gerade noch den letzten Strahl der im Horizonte von B angelangten Sonne zuzuwerfen vermag, so bestehen offenbar die Beziehungen 1, welche schon **Alhazen** benutzt zu haben scheint. Für $\alpha = 19°$ ergeben sie, den obigen Wert von r beibehaltend, $h = 12 \text{ M} = 90^{km}$, während **Alhazen**, den Erdumfang zu 24000 Milliarien à 1000 geometrische Schritte annehmend, h = 52000 Schritte erhalten haben soll.



224. Das Problem der kürzesten Dämmerung. — Der Bogen des Deklinationskreises der Sonne, welcher zwischen den Horizont und den Almucantarat der Depression α, den sog. **Dämmerungskreis** (terminus crepusculorum) fällt, variiert offenbar mit Sonnendeklination und Polhöhe, und es wechselt somit auch die Dauer der Dämmerung mit der Jahreszeit, sowie von Ort zu Ort. So leicht man nun seit Bekanntschaft mit der sphärischen Trigonometrie diese Dauer für gegebene Werte von α, $d = 90 - p$ und φ berechnen kann, indem man nach den Formeln

$$\text{Co}\, s_1 = -\text{Tg}\,\varphi \cdot \text{Tg}\, d \quad \text{und} \quad \text{Co}\, s_2 = \text{Co}\, s_1 - \text{Si}\,\alpha \cdot \text{Se}\,\varphi \cdot \text{Se}\, d \qquad 1$$

die mit der wahren Zeit übereinstimmenden Stundenwinkel s_1 und s_2 sucht, welche der Sonne an den beiden Endpunkten jenes Bogens zukommen [a], und sodann deren Differenz nimmt, — so schwierig erschien früher die Lösung des sog. **Problemes der kürzesten Dämmerung**, und erst die neuere Zeit wusste die bequemen Formeln

$$\text{Si}\,\frac{s_2 - s_1}{2} = \text{Se}\,\varphi \cdot \text{Si}\,\frac{\alpha}{2} \qquad \text{Si}\, d = -\text{Si}\,\varphi \cdot \text{Tg}\,\frac{\alpha}{2} \qquad 2$$

zu finden, nach welchen für einen gegebenen Ort die Dauer der kürzesten Dämmerung und die ihr entsprechende Deklination der Sonne, somit auch jedes der beiden Daten gefunden werden kann, zu welchen erstere statt hat [b].

Zu 224: *a.* Aus 177 ergeben sich für $z = 90°$ und $z = 90° + \alpha$

$$\text{Si}\, s_1 : \text{Si}\, w_1 : \text{Si}\, v_1 :: 1 : \text{Si}\, p : \text{Co}\,\varphi \qquad \text{Si}\, s_2 : \text{Si}\, w_2 : \text{Si}\, v_2 :: \text{Co}\,\alpha : \text{Si}\, p : \text{Co}\,\varphi \qquad 3$$

$$\mathrm{Co}\,v_1 = \mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Si}\,p - \mathrm{Co}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}\,p\cdot\mathrm{Co}\,s_1 \qquad \mathrm{Co}\,\alpha\cdot\mathrm{Co}\,v_2 = \mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Si}\,p - \mathrm{Co}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}\,p\cdot\mathrm{Co}\,s_2 \quad \mathbf{4}$$

$$0 = \mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}\,p + \mathrm{Co}\,\varphi\cdot\mathrm{Si}\,p\cdot\mathrm{Co}\,s_1 \qquad -\mathrm{Si}\,\alpha = \mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}\,p + \mathrm{Co}\,\varphi\cdot\mathrm{Si}\,p\cdot\mathrm{Co}\,s_2 \quad \mathbf{5}$$

$$\mathrm{Si}\,\varphi = \mathrm{Si}\,p\cdot\mathrm{Co}\,v_1 \qquad \mathrm{Si}\,\varphi = -\mathrm{Co}\,p\cdot\mathrm{Si}\,\alpha + \mathrm{Si}\,p\cdot\mathrm{Co}\,\alpha\cdot\mathrm{Co}\,v_2 \quad \mathbf{6}$$

und aus den 5 gehen unmittelbar die 1 hervor, nach welchen sich z. B. für $\alpha = 18^0$ und $\varphi = 47^0\, 28'$, je nachdem $d = 23^0\, 27'$, 15^0, 0 oder $-23^0\, 27'$, die Dämmerungsdauer $3^h\, 11^m$, $2^h\, 8^m$, $1^h\, 49^m$ oder $1^h\, 58^m$ ergiebt. — *b.* Aus den 1 erhält man mit Hilfe der 3 und 6 durch Differentiation

$$\frac{d s_1}{d p} = -\frac{\mathrm{Ct}\,v_1}{\mathrm{Si}\,p} \quad \text{und} \quad \frac{d s_2}{d p} = -\frac{\mathrm{Ct}\,v_2}{\mathrm{Si}\,p} \quad \text{so dass} \quad \frac{d(s_2 - s_1)}{d p} = \frac{\mathrm{Ct}\,v_1 - \mathrm{Ct}\,v_2}{\mathrm{Si}\,p}$$

wird, folglich für $v_1 = v_2$ das Minimum der Dämmerungsdauer eintritt. Setzt man aber die aus den 6 folgenden Werte von $\mathrm{Co}\,v_1$ und $\mathrm{Co}\,v_2$ einander gleich, so erhält man die 2″, und, wenn man mit Hilfe der 3 und 4 den Wert von $\frac{1}{2}[1 - \mathrm{Co}\,(s_2 - s_1)]$ berechnet, dann $v_1 = v_2$ setzt, und schliesslich mit Hilfe von 6′ die v_1 eliminiert, auch noch 2′. Nach den 2 ergeben sich aber für unser Beispiel $s_2 - s_1 = 1^h\, 40^m$ und $d = -6^0\, 41'$, welche Deklination der Sonne etwa III 3 und X 9 zukömmt. Natürlich würden für ein etwas anderes α auch andere Werte erhalten, und wenn α sogar (223) an demselben Orte für Morgen und Abend, sowie während des Jahres merklich variieren sollte, so würde dadurch natürlich das ganze Problem auf eine wesentlich andere Basis gestellt. Anhangsweise ist zu erwähnen, dass für $v_1 = v_2$ aus den 3 auch

$$\mathrm{Si}\,s_2 = \mathrm{Si}\,s_1\cdot\mathrm{Co}\,\alpha \quad \text{und} \quad \mathrm{Si}\,w_1 = \mathrm{Si}\,w_2 \quad \text{oder} \quad w_1 + w_2 = 180^0 \qquad \mathbf{7}$$

folgen. — Die Dämmerungsverhältnisse wurden schon durch Pedro Nunnez oder **Nonius** (Alcazar de Sal 1492 — Coimbra 1577; Prof. math. Coimbra) in der bereits (223) erwähnten Schrift von 1542 ins Auge gefasst und auch speciell das eben behandelte Problem durch geometrische Betrachtungen bis zu einem gewissen Grade absolviert, — während dagegen die elegante 2′ erst 1693 durch Joh. **Bernoulli** gefunden wurde, und zwar, wie er selbst (Opera I 64) eingestand, erst nachdem sich er und sein Bruder Jakob „depuis plus de cinq ans, sans en pouvoir venir à bout“ mit der Lösung dieser Aufgabe befasst hatten. Noch seither haben viele Mathematiker dieselbe Aufgabe an die Hand genommen, so z. B. **Lambert** (Photometria 1760, wo die 7 zuerst vorkommen), **Euler** (Nov. Comm. XX von 1776), **Cagnoli** (Encyclop. méth. 1786), **Fuss** (Berl. Jahrb. 1787), **Monge** (vgl. Note von Hachette in Corresp. sur l'école polyt. Nro. 5 von 1806, und Zelbr in A. N. 2575 und 2602 von 1884; konstruktive Lösung), E. **Schmidt** (Math. Geogr. 1829), **d'Arrest** (A. N. 1085 von 1857; wesentlich mit der oben gegebenen Lösung übereinstimmend), **Stoll** (Z. f. M. Ph. 1883, wo die Aufgabe etwas allgemeiner gestellt und rein trigonometrisch gelöst ist), etc.

225. Die Witterungserscheinungen im allgemeinen. — Jede Stelle unserer Erde erhält beständig Wärme, sei es durch direkte Einwirkung der Sonne, sei es durch Mitteilung der umgebenden Luft, — giebt aber auch beständig Wärme ab, teils an die auf ihr liegende Luftschichte, teils durch Strahlung an den Weltraum. Je nach dem Wechsel der Tages- und Jahreszeit und der Beschaffenheit der Atmosphäre ist bald der Wärmegewinn, bald der Wärmeverlust grösser, und da dieses Verhältnis gleichzeitig für verschiedene Stellen der Erde teils wegen der Verschiedenheit

jener bedingenden Ursachen, teils wegen lokalen Verhältnissen, in der Regel ein anderes ist, so ändert sich auch die Verteilung der Wärme auf der Erde fast immerfort. Mit diesen Veränderungen stehen aber notwendig Luftströmungen und Variationen im Dampfgehalte der Luft im Zusammenhange, und damit wieder Änderungen im Luftdrucke, wässerige Niederschläge, wohl auch elektrische und optische Erscheinungen, etc., überhaupt die sog. **Witterung.** Letztere ist somit offenbar das Produkt sehr mannigfaltiger Wechselwirkungen, und der einzig sichere Weg zur Auffindung betreffender Gesetze oder zur Begründung der sog. **Meteorologie** ist, nach und nach für eine grosse Anzahl möglichst über die Erde verbreiteter Stationen gewisse fundamentale, ihr sog. **Klima** bedingende Konstante, wie z. B. mittlere Temperaturen, Barometerstände, Regenmengen, etc., zu ermitteln, und sodann, wohl am besten durch Konstruktion sog. **synoptischer Karten,** die Differenzen zwischen den mittlern und wirklichen Werten über grössere Teile der Erde zu verfolgen. Letztere Vergleichungen ergeben einige Anhaltspunkte für sog. **Prognosen,** doch sind diese gegenwärtig sogar auf kürzere Zeit noch ziemlich unsicher, und von solchen auf längere Zeit kann, wenigstens einstweilen, ernstlich gar nicht die Rede sein [a].

Zu 225: *a.* Die **Meteorologie** hat sich in der neuern Zeit zu einer selbstständigen und bereits sehr umfangreichen Wissenschaft ausgebildet, so dass ich nicht daran denken kann, auch nur einen Abriss von derselben zu geben, sondern mich darauf beschränken muss, hier einige historisch-litterarische Notizen und unter den folgenden Nummern noch einige wenige, uns näher berührende Einzelheiten folgen zu lassen. — Zunächst ist zu bemerken, dass, wenn auch schon **Aristoteles** die Meteorologie einigermassen begründete, dieselbe doch eigentlich erst lebensfähig wurde, als sie sich auf Beobachtungsreihen stützen konnte, und dass in Beziehung auf letztere mit G. **Hellmann** drei Perioden zu unterscheiden sind: I. **Regelmässige Aufzeichnungen der Witterungserscheinungen ohne Zuhilfenahme von Instrumenten.** Da ein von **Columbus** 1492 begonnenes „Witterungsjournal“ wohl nur ein nicht hieher gehörendes „Schiffsjournal“ mit Witterungsnotizen war, so dürften die ältesten auf uns gekommenen Aufzeichnungen diejenigen sein, welche Wolfgang **Haller** (Thun 1525 — Zürich 1601; Domprobst in Zürich) von 1545—76 in Zürich machte und ich nach der Bearbeitung von Heinrich **Denzler** (Nänikon bei Zürich 1814 — Bern 1876; Ingenieur) in den schweiz. meteorolog. Beobachtungen publizierte; sodann soll in Dresden 1576 auf Anordnung von Kurfürst **August** ein Witterungstagebuch begonnen worden sein; ferner machte **Kepler** von 1593 hinweg tägliche Aufzeichnungen und befasste sich überhaupt vielfach mit meteorologischen Fragen, wie dies namentlich in „H. **Brocard, Essai** sur la météorologie de Kepler. Grenoble 1879 in 8.“ dargelegt ist; und so mögen noch manche andere im 16. und im Anfange des 17. Jahrhunderts diese erste Stufe kultiviert haben. II. **Beginn der Beobachtungen mit zweckdienlichen Instrumenten und erste Versuche von Privaten oder Korporationen, korrespondierende Beobachtungen auf grössern Ländergebieten zu erhalten.** Schon bald

nach Erstellung der ersten Barometer (125) und Thermoskope (150) dachten **Pascal** und seine Zeitgenossen daran, diese neuen Hilfsmittel auch für die Witterungskunde nutzbar zu machen; aber die ersten längern Beobachtungsreihen dürften doch erst diejenigen gewesen sein, welche Ph. de **La Hire** 1689 in Paris, Rudolf Jakob **Camerarius** (Tübingen 1665 — ebenda 1721; Prof. bot. Tübingen) 1691 in Tübingen, und wenig später J. J. **Scheuchzer** in Zürich begannen. Letzterer forderte sodann 1697 in seiner „Charta invitatoria" öffentlich zu solchen Beobachtungen auf und bestimmte z. B. 1705 den Prior des Gotthard-Hospizes, P. Joseph de **Seissa**, mit ihm, wenn auch allerdings zunächst zu hypsometrischen Zwecken, korrespondierende Barometer-Beobachtungen zu machen. Auch David **Algöwer** (Ulm 1678 — ebenda 1737; Prof. math. und Prediger in Ulm) war, wie seine „Meteorologia parallela. Ulm 1711—14" und ein „Specimen Hyetometriæ, oder Abmessung der jährlichen Regen- und Schneewässer. Ulm 1721" beweisen sollen, ein eifriger und zu vergleichenden Beobachtungen anregender Meteorologe, und überhaupt gewann im 18. Jahrhundert diese zweite Stufe immer mehr Boden, ja es unternahm schon 1759 die ökonomische Gesellschaft in Bern, eine Auswahl von Stationen mit übereinstimmenden Instrumenten auszurüsten. Von weit grösserer Bedeutung war es dann allerdings, als 1780 der einsichtige Joh. Jakob **Hemmer** (Horbach 1733 — Mannheim 1790; geistl. Rat und Aufseher der kurf. Kunstkammer in Mannheim), mit Unterstützung des Kurfürsten Karl Theodor von der Pfalz, die „Societas meteorologica Palatina" gründete, welche sich die Aufgabe stellte, ein möglichst grosses Gebiet mit Stationen zu besetzen, bei welchen Instrumente, Beobachtungsstunden und Schema übereinstimmen: Es kamen 37 Stationen (unter ihnen Genf und St. Gotthard) in Gang und es waren schon nach wenigen Jahren ganz bedeutende Leistungen zu verzeichnen; aber dennoch zerfiel leider diese Societas nach dem Tode von Hemmer in wenigen Jahren wieder gänzlich, und ein 1812 von Heinrich **Zschokke** (Magdeburg 1771 — Aarau 1848; Schriftsteller) und Joh. Rudolf **Meyer** (Aarau 1768 — ebenda 1825; Sohn des durch seinen Schweizer-Atlas hochverdienten, gleichnamigen Fabrikanten in Aarau und erster Besteiger der Jungfrau; vgl. Biogr. II) ausgearbeiteter, ganz hübscher Plan, von Aarau aus zwei Reihen übereinstimmend ausgerüsteter Stationen ins Leben zu rufen, von welchen die eine ungefähr längs einem Meridiane von Kiel bis Neapel, die andere längs einem Parallel von Glasgow bis Charkow führen sollte, kam gar nicht zur Ausführung. Dagegen gelang es Marc-Auguste **Pictet** (Genf 1752 — ebenda 1825; Prof. phys. und Dir. Obs. Genf; vgl. Biogr. III), 1817 die wichtige Höhenstation auf dem grossen St. Bernhard ins Leben zu rufen und 1823 mit **Horner** ein erstes Beobachtungsnetz für die Schweiz zu organisieren, das zwar damals nur kurze Zeit funktionierte, aber dann 1863 in erweiterter Gestalt neu auflebte.

III. Sorge des Staates für Einrichtung und Unterhalt von meteorologischen Beobachtungsnetzen. Als man sich im gegenwärtigen Jahrhundert mehr und mehr von dem Nutzen der Meteorologie, zugleich aber auch von der Notwendigkeit überzeugte, einheitlich organisierte und in ihrer Existenz nicht bloss von dem guten Willen oder Leben einzelner Personen abhängige Beobachtungsnetze zu besitzen, wurden nach und nach in den verschiedenen Ländern von Staats wegen eigentliche Centralanstalten für Meteorologie subventioniert oder sogar gegründet, ja dieselben durch internationale Vereinigungen mit einander in Fühlung gebracht, während telegraphische Verbindungen ein rasches Einsammeln und Austauschen der Beobachtungen und damit z. B. die Anfertigung

von täglichen Wetter-Berichten und -Karten ermöglichten. — Für weitern Detail aus allen drei Perioden auf Specialarbeiten verweisend, wie z. B. für die Schweiz auf meine „Geschichte der Vermessungen", hebe ich zum Schlusse aus der bereits reichen meteorologischen Litteratur neben dem schon früher erwähnten Fundamentalwerke von **Deluc** noch folgende Schriften hervor: „Louis **Cotte** (Laon 1740 — Montmorency 1815; Prof. philos. et theol. Montmorency), Traité de météorologie. Paris 1774 in 4., und: Mémoires sur la météorologie. Paris 1788, 2 Vol. in 4., — Ludwig Friedrich **Kämtz** (Treptow in Pommern 1801 — Petersburg 1867; Prof. phys. Halle und Dorpat; zuletzt Dir. phys. Centralobs. Petersburg), Lehrbuch der Meteorologie. Leipzig 1831, 3 Vol. in 8., und: Vorlesungen über Meteorologie. Halle 1840 in 8. (franz. durch Martins, Paris 1843), — **Dove**, Meteorologische Untersuchungen. Berlin 1837 in 8.), — Heinrich Karl Wilhelm **Berghaus** (Cleve 1797 — Stettin 1884; Geograph und Prof. math. Berlin), Physikalischer Atlas. Gotha 1838—48, 90 Bl. in fol. (2. A. 1849—51), — Matthew Fontaine **Maury** (County Spottsylvania in Virginien 1806 — Levington 1873; Dir. Naval Observ. Washington, dann Dir. des 1843 gegründeten nautisch meteorol. Instit.), Sailing Directions. Washington 1840 in 4., Atl. in fol. (viele spätere Auflagen), und: The physical geography of the sea. New-York 1855 (deutsch von Böttger, Leipzig 1855), — Ernst Erhard **Schmid** (Hildburghausen 1815 geb.; Prof. Naturg. Jena), Lehrbuch der Meteorologie. Leipzig 1860 in 8., — Henri **Guyot** (Bondevilliers bei Neuenburg 1807 — Princeton in New-Yersey 1884; Gymnasialprof. Neuenburg, dann Prof. phys. geogr. Princeton), Meteorological and physical Tables (3. ed. Washington 1859 in 8.), — Adolf **Mühry** (Hannover 1810 — Göttingen 1888; Privatgel. Göttingen), Allgemeine geographische Meteorologie. Heidelberg 1860 in 8., — Edme-Hippolyte **Marié Davy** (Clamecy in Nièvre 1820 geb.; Dir. Obs. Montsouris), Météorologie: Les mouvements de l'atmosphère et des mers considérés au point de vue de la prévision du temps. Paris 1866 in 8., — Alex. **Buchan**, Handy Book of Meteorology. Edinburgh 1867 in 8. (2. ed. 1868), — Karl **Jelinek** (Brünn 1822 — Wien 1876; Prof. math. Prag, dann Dir. meteorol. Centralanstalt Wien), Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen und Sammlung von Hülfstafeln. Wien 1860 in 8. (2. A. durch Hann 1884), — Henrik **Mohn** (Bergen 1835 geb.; Dir. met. Inst. Christiania), Vind og Veyr. Christiania 1872 in 8., und: Grundzüge der Meteorologie. Berlin 1875 in 8., — Wilh. **Sidler**, Zur Entwicklungsgeschichte der modernen Meteorologie (Jahresb. Einsiedeln 1876/7), — G. **Hellmann**, Die Organisation des meteorologischen Dienstes in den Hauptstaaten Europa's (1878), in fol., und: Repertorium der deutschen Meteorologie. Leipzig 1883 in 8., auch: Die Anfänge der meteorologischen Beobachtungen und Instrumente (Himmel und Erde II von 1889/90), — Julius **Hann** (Linz 1839 geb.; Dir. met. Centralanstalt Wien), Handbuch der Klimatologie. Stuttgart 1883 in 8., — R. H. **Scott**, Elementary Meteorology. London 1883 in 8., — A. **Sprung**, Lehrbuch der Meteorologie. Hamburg 1885 in 8., — W. J. van **Bebber**, Handbuch der ausübenden Witterungskunde. Stuttgart 1885—86, 2 Bde. in 8., — S. **Günther**, Die Meteorologie ihrem neuesten Standpunkte gemäss dargestellt. München 1889 in 8., — etc."

226. Insolation und Wärmeverhältnisse. — Jedem Orte der Erde kömmt bei reinem Himmel von der Sonne, so lange sie über seinem Horizonte steht, in jedem Momente eine gewisse Wärmemenge, eine sog. **Insolation**, zu, und zwar ist für einen Ort der

Breite φ an dem Tage, wo die Sonne die mittlere Deklination d hat, (abgesehen von der Absorption) die Tagessumme dieser Insolationen

$$J = {}^2/_{15} \cdot \alpha \cdot \Delta^2 (\text{Si}\,\varphi \cdot \text{Si}\,d \cdot s + \text{Co}\,\varphi \cdot \text{Co}\,d \cdot \text{Si}\,s) \qquad 1$$

wo α eine Konstante ist, Δ aber den scheinbaren Radius der Sonne und s ihren halben Tagbogen bezeichnet [a], — während die Wärmemenge, welche die ganze Erde im Jahresdurchschnitte täglich erhält

$$W = \alpha : (a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2}) \qquad 2$$

ist, wo α wieder eine Konstante bezeichnet, a und e aber halbe grosse Axe und Excentricität der Erdbahn sind [b]. — Auf den im grossen Ganzen von Stundenwinkel und Deklination der Sonne abhängigen täglichen und jährlichen Gang der Lufttemperatur und die Versuche, denselben durch eine Sinusreihe darzustellen, kann ich hier nicht näher eintreten [c], und ebensowenig auf die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche, sowie auf die Bedeutung der die Punkte von gleicher Jahreswärme verbindenden **Isothermen** und analoger Kurvensysteme [d]. Ich muss mich auf die Bemerkung beschränken, dass die mittleren Tagestemperaturen sich annähernd aus den Kombinationen $^1/_2$(Max. + Min.), $^1/_2(16^h + 4^h)$, $^1/_2(21^h + 9^h)$, $^1/_3(18^h + 2^h + 10^h)$, $^1/_4(19^h + 1^h + 2 \times 9^h)$, etc. ergeben, die mittlere Jahrestemperatur aber nahe durch das Mittel aus deren Monatsmitteln dargestellt wird, — dass letztere im mittlern Europa etwa für eine Breitenzunahme von $1^1/_2{}^0$ oder eine Höhenzunahme von $100^t \doteq 200^m$ um 1^0 abnimmt [e], — dass die Wärme nur langsam in den Boden eindringt, — die Sommer- und Winter-Temperaturen schon in einer Tiefe von wenigen Metern um mehrere Monate verspätet eintreffen, — die Jahresoscillation bei zunehmender Tiefe abnimmt und nach Wild etwa in einer Tiefe von 33^m ganz verschwindet, — bei noch grösserer Tiefe aber die Erdwärme, wohl infolge des noch feurig-flüssigen Erdinnern, etwa für jede 30^m um 1^0 zunimmt, — etc. [f].

Zu 226: *a.* Da die Insolation offenbar dem Quadrate des scheinbaren Sonnenradius und dem Cosinus des Einfallswinkels (also für eine horizontale Fläche dem Sinus des Höhenwinkels h der Sonne) proportional ist, so ist ihr Betrag in einem Zeitelemente $^1/_{15} \cdot t$ mit Hilfe von 177

$$dJ = {}^1/_{15} \cdot \alpha \cdot \Delta^2 \cdot \text{Si}\,h \cdot dt = {}^{\alpha}/_{15} \cdot \Delta^2 (\text{Si}\,\varphi \cdot \text{Si}\,d + \text{Co}\,\varphi \cdot \text{Co}\,d \cdot \text{Co}\,t)\,dt$$

zu setzen, wo t den Stundenwinkel der Sonne bezeichnet, und hieraus ergiebt sich durch Integration zwischen den Grenzen $-s$ und $+s$ unmittelbar unsere 1, aus der sodann folgt, dass die Schwankung der Insolation von einer Sonnenwende bis zur andern dem Sinus, ihr ungefähr auf die Solstitien fallender mittlerer Wert dem Cosinus der Breite proportional ist. Für den Equator ist $\varphi = 0$ und $s = {}^1/_2 \cdot \pi$, für den Pol $\varphi = 90^0$ und $s = \pi$, also sind die entsprechenden Insolationen

$$J' = {}^{2\alpha}/_{15} \cdot \Delta^2 \cdot \text{Co}\,d \qquad J'' = {}^{2\alpha}/_{15} \cdot \Delta^2 \cdot \pi \cdot \text{Si}\,d$$

wobei erstere für $d = 0$, letztere für $d = 23^1/_2{}^0$ einen Maximalwert annimmt, so dass sich, abgesehen von der Schwankung von Δ, die beiden Maxima wie $1 : \pi \cdot \text{Si}\ 23^1/_2{}^0 \doteq 4 : 5$ verhalten. Vgl. „Ch. **Wiener**, Über die Stärke der Beleuchtung der Erde durch die Sonne. Karlsruhe 1876 in 8. (Neue Bearb. in Z. f. M. u. Ph. 1877) und: **Angot**, Recherches sur la distribution de la chaleur à la surface du globe (Annal. mét. 1883)". — *b.* Die während einem Zeitelemente dt für die ganze Erde statthabende Insolation ist offenbar dem Quadrate der Entfernung r der Sonne von der Erde umgekehrt proportional, und man kann daher, wenn α eine Konstante, a die halbe grosse Axe der Erdbahn und T die Umlaufszeit bezeichnet, dieselbe mit Hilfe von 482

$$dW = \frac{\alpha \cdot dt}{r^2} = \frac{\alpha}{k} \cdot dv \qquad \text{wo} \qquad k = \frac{2ab\pi}{T} = \frac{2a^2\sqrt{1-e^2}\cdot\pi}{T} \qquad 3$$

ist, setzen, so dass

$$W = \frac{\alpha}{k} \cdot v + \text{Const.} \qquad 4$$

wird, womit das bereits von **Lambert** in seiner 1779 posthum erschienenen „Pyrometrie (149)" aufgestellte Gesetz erwiesen ist, dass die Menge der Wärme, welche die Erde in irgend einem Teile des Jahres erhält, dem Winkel proportional ist, den ihr Radius vector in dieser Zeit beschreibt, so z. B., ganz abgesehen von der Lage der Apsidenlinie (203), die vom Frühlings- bis zum Herbst-Equinoktium erhaltene Wärme gleich der vom Herbst- bis zum Frühlings-Equinoktium erhaltenen ist. Soll W die von der Erde während einem ganzen Jahre erhaltene Wärme bezeichnen, so ist das Integral 4 zwischen den Grenzen 0 und 2π zu nehmen, so dass

$$W = \frac{2\alpha\pi}{k} = \frac{a}{b} \cdot w = w\left(1 + \frac{1}{2}e^2 + \cdots\right) \qquad \text{wo} \qquad w = \frac{\alpha T}{a^2} \qquad 5$$

wird. Es ist somit der Jahresertrag mit der Excentricität veränderlich; jedoch ist diese Variation viel zu gering, um dadurch die geologischen Perioden oder **Eiszeiten** erklären zu können, und letztere dürften eher mit dem grossen Sonnenjahre (292), sowie mit einer etwelchen Ungleichheit in der Verteilung der Wärme im Weltraume zusammenhängen, — d. h. mit gegenwärtig noch unbekannten, also auch kaum mit Erfolg diskutierbaren Verhältnissen. — *c.* Ich verweise auf „**Bessel**, Über die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung (A. N. 136 von 1828), — **Plantamour**, Du climat de Genève. Genève 1863 in 4., und: Nouvelles études sur le climat de Genève. Genève 1876 in 4., — K. **Weihrauch**, Über die Anwendung der Bessel'schen Formel in der Meteorologie (Österr. met. Zeitschr. 1883), — etc." — Als wärmster Ort auf der Erde gilt Massaua in Abessinien mit 30°,2 mittlerer Jahrestemperatur, — als kältester die Lady-Franklinsbay mit — 20°,0: Differenz 50°,2. Als Extreme von wirklich beobachteten Lufttemperaturen citiert man 55° (arabische Wüste) und — 64° (Werchojansk in Sibirien): Differenz 119°. — *d.* Die **Isothermen** wurden nach dem Vorgange von „**Humboldt**, Des lignes isothermes et de la distribution de la chaleur sur le globe (Mém. d'Arcueil 1817)" in der neuern Zeit einlässlich studiert, — ja **Dove** hat sogar, vgl. seinen Atlas „Die Monats- und Jahresisothermen in der Polarprojection. Berlin 1864 in fol.", die Isothermen für jeden Monat ermittelt, sodann mit ihrer Hilfe die jedem Parallel zukommende mittlere Temperatur, sowie die jedem Orte zukommende Abweichung von letzterer, die **Anomalie**, bestimmt, und, indem er die Orte gleicher Anomalie verband, noch sog. **Isanomalen** konstruiert. — *e.* Vgl. „W. **Köppen**, Tafeln zur Ableitung der Mitteltemperatur aus den gebräuchlichsten Kombinationen von zwei und drei Beobachtungsstunden am Tage

(Repert. f. Met. III von 1874), — E. **Stahlberger**, Über die Berechnung der mittlern Tagestemperatur aus der höchsten und tiefsten Temperatur (Z. f. M. u. Ph. 1870), — etc." — Über die Abnahme der Temperatur bei Zunahme von Breite und Meereshöhe geben folgende Zusammenstellungen Aufschluss:

I		II					III			
h	t	Ort	φ	h	t'	t''	St.	h'	Mt.	h''
0^m	30^0,8	Athen	38^0,0	120^m	17^0,1	17^0,8	0^h	148^m	I	259^m
3032	12,5	Neapel	40,9	55	16,4	16,7	2	140	II	223
3412	10,9	Rom	41,9	53	15,4	15,7	4	142	III	182
3816	10,4	Mailand	45,5	146	12,8	13,6	6	141	IV	176
4512	8,8	Genf	46,2	407	9,2	11,4	8	143	V	178
4708	7,2	Bern	47,0	572	7,8	10,9	10	157	VI	176
5135	1,0	Zürich	47,4	470	8,9	11,5	12	171	VII	181
5519	2,5	Paris	48,8	64	10,8	11,1	14	189	VIII	197
5675	0,6	Brüssel	50,9	58	10,2	10,5	16	210	IX	197
6040	— 3,1	Berlin	52,5	39	8,6	8,8	18	195	X	196
6143	— 3,4	Königsberg	54,7	22	6,2	6,3	20	180	XI	242
6977	— 9,4	Christiania	59,9	24	5,2	5,3	22	160	XII	218

Die erste derselben gründet sich auf die Barometer- und Thermometer-Ablesungen, welche Louis-Joseph **Gay-Lussac** (St-Léonard in Limousin 1778 — Paris 1850; Prof. chem. und Akad. Paris; vgl. Arago, Oeuvres) bei der berühmten Luftschiffahrt machte, welche er 1804 IX 16 (vgl. Journ. phys. 1804) mit J. Bapt. **Biot** unternahm, und zwar wurden die den Lufttemperaturen t entsprechenden Höhen h nach der sog. Laplace'schen Formel (127) aus den möglichst gleichzeitigen Barometerangaben abgeleitet. Setzt man $a = t + b \cdot h$ und schreibt diese Gleichung, in welcher a und b zu bestimmende Konstante bezeichnen, für alle 12 Wertepaare von t und h auf, so erhält man (52) $a = 30{,}70$ und $b = 0{,}00545 \risingdotseq 1/_{182}$. Setzt man sodann entsprechend $t = 30{,}70 - 0{,}00545 \cdot h$ oder $h = (30{,}70 - t)\,182$, und berechnet rückwärts aus den h die t oder aus den t die h, so ergiebt sich zwischen den beobachteten und berechneten Werten ein mittlerer Unterschied von $\pm\,1^0{,}67$ oder $\pm\,286^m$, der, da sich in der Folge der Differenzen kein systematischer Gang zeigt, wohl zunächst mit der Unsicherheit der Höhenbestimmung zusammenhängen dürfte. **Die zweite** gibt für eine Folge von Orten die Polhöhe φ, die Meereshöhe h, die aus den Beobachtungen geschlossene mittlere Jahrestemperatur t', und deren mit Hilfe des obigen b ausgeführte Reduktion t'' auf $h = 0$. Setzt man sodann $t'' = \alpha + \beta\,(47^0 - \varphi)$, so erhält man, wie oben vorgehend, $\alpha = 12^0{,}24$ und $\beta = 0{,}762 \risingdotseq 3/_4$, und, hiemit rückwärts die t'' berechnend, den mittlern Unterschied $\pm\,1^0{,}18$ oder (mit Ausschluss von Christiania) $\pm\,0^0{,}87$. **Die dritte** endlich zeigt, dass die oben zu 182^m bestimmte Höhe, welche einer Temperaturabnahme von 1^0 entspricht, im Laufe eines Tages oder Jahres bedeutenden Variationen unterliegt, und zwar im grossen Ganzen so, dass sie in der wärmern Tages- oder Jahreszeit kleiner wird: Die h' sind nämlich die Werte, welche aus den Beobachtungen hervorgingen, die **Saussure** im Juli 1788 auf dem Col de Géant zweistündlich machte und mit den in Genf (3400^m tiefer) erhaltenen korrespondierenden Bestimmungen vergleichen konnte, — während die den Monaten

entsprechenden h'' aus sechsjährigen Beobachtungen in Genf und auf dem (2065^m höhern) St. Bernhard folgten. Der mittlere Wert der h' ist 165, derjenige der h'' aber 202. Vgl. auch die betreffenden Untersuchungen von **Sohncke** (Jena Sitz. 1885); ferner „A. **Woeikof**, Temperaturänderungen mit der Höhe in Bergländern und in der freien Atmosphäre (Met. Zeitschr. 1885), — R. **Radau**, Sur la variation de la température avec l'altitude (Bull. astr. 1889), — etc. — *f*. Sog. **Bodentemperaturen** in verschiedener Tiefe scheint nach dem Wunsche von **Lambert** (vgl. Bd. 2 des Briefwechsels und Pyrometrie) zuerst Joh. Jakob **Ott** (Zürich 1715 — ebenda 1769; Kaufmann und Dendrologe in Zürich; vgl. Biogr. II) gemessen zu haben, während **Fourier** und **Poisson** in ihren Wärmetheorien (149) die Fortpflanzung der Wärme in der Erde theoretisch untersuchten und unter anderm die Formel

$$\text{Lg}\,\Delta p = a - b \cdot p \qquad 6$$

zur Berechnung der jährlichen Oscillation Δp der Wärme in der Tiefe p aufstellten. Nach dieser Formel erhielt ich z. B. für Bern (vgl. Bern. Mitth. 1854) aus zweijährigen Messungen, welche in 3 und 6' Tiefe die Oscillationen 16°,49 und 11°,61 ergeben hatten, $\text{Lg}\,\Delta p = 1{,}36935 - 0{,}05075 \cdot p$, und hieraus die korrespondierenden Werte $\Delta p = 0°{,}01$ und $p = 66'{,}39 \doteq 20^m$. Andere, zum Teil viel ausgedehntere Versuchsreihen, wie z. B. die von **Quetelet** (Mém. Brux. X u. f.) und **Wild** (Repert. VI) bearbeiteten, führten zu entsprechenden und noch manchen andern wertvollen Resultaten. So fand erstgenannter, dass bei $7^m{,}8$ Tiefe die tiefste Temperatur erst im Juni, die höchste im December eintreffe. — In dem 4042' rheinl. = $1268^m{,}6$ erreichenden, bis jetzt tiefsten Bohrloche zu Sperenberg (2½ Meilen südlich von Berlin) erhielt E. **Dunker** bei 700' die Temperatur 15°,654 R., — bei 1500' aber 23°,830, — bei 2100' bereits 28°,906, — bei 3390' sogar 36°,756, — und bei 4042' endlich volle 38°,500, — also durchschnittlich für $100' \doteq 30^m$ eine Wärmezunahme von 0°,684 R. = 0°,855 C.

227. Luftdruck und Winde. — Jede Störung des Gleichgewichtszustandes in unserer Atmosphäre ruft einer Ausgleichung, somit jede Barometerschwankung einer Luftbewegung oder einem Winde. Bei den Winden unterscheidet man die **Polarströme** und die **Wirbelwinde**, sodann eine Menge mit örtlichen Verhältnissen zusammenhängende **Lokalwinde**, zu denen auch der Föhn gerechnet werden muss, und auf welche hier nicht näher eingetreten werden kann. Die Polarströme oder **Passate** unterliegen dem sog. **Gesetze von Dove** [a], — die Wirbelstürme oder **Cyklonen** aber demjenigen von **Buijs-Ballot** [b]. — Der zur Messung des Luftdruckes bestimmte **Barometer** ist früher (125—28) einlässlich behandelt worden, während dagegen hier die zur Bestimmung der Windrichtung und Windstärke dienenden **Anemometer** zu erwähnen bleiben [c], aus deren Angaben man häufig nach einer von **Lambert** eingeführten Methode die in einem gewissen Zeitraume herrschende **mittlere Windrichtung** bestimmt [d], wohl auch sog. **Windrosen** ableitet [e]. Für weitern Detail muss auf Specialwerke verwiesen werden [f].

Zu 227: *a*. Die Ursache der **Passate** ist die starke Erwärmung der Erde unter dem Equator, in deren Folge ein erst vertikal aufsteigender, dann gegen

beide Pole abfliessender Luftstrom, der sog. **obere** Passat, entsteht, der zugleich veranlasst, dass unten von den Polen nach dem Equator kalte Luft, der sog. **untere** Passat, zurückfliesst. Fängt nun an einer Stelle der nördlichen Halbkugel der obere Passat an sich geltend zu machen, so tritt anfänglich der Wind aus S ein; je länger aber die Strömung anhält, von desto weiter südlich gelegenen Parallelen stammt die durchfliessende Luft her, desto mehr macht sich also auch die von ihr mitgebrachte grössere Rotationsgeschwindigkeit geltend, und es geht so nach und nach der Wind aus S in SW und W über. Aus analogen Gründen wird der untere Passat aus N zu NE und E, — d. h. es hat in beiden Fällen ein Drehen des Windes im Sinne des Uhrzeigers statt. Dieses **Drehungsgesetz**, das natürlich auf der südlichen Halbkugel eine Umkehrung erfährt, wurde nach **Ideler** (vgl. p. 58 von dessen „Meteorologia veterum. Berolini 1832 in 8.") schon von **Aristoteles**, auch später wiederholt von andern bemerkt, sodann von **Sturm** in seiner „Physica electiva. Norimbergæ 1697—1721, 2 Vol. in 4. (II 1206—7)" deutlich ausgesprochen und endlich von **Dove**, dessen Namen man ihm beigelegt hat, in seinen „Meteorologischen Untersuchungen. Berlin 1837 in 8. (p. 121)" strenger begründet. — *b.* Trägt man in eine Karte die gleichzeitig an verschiedenen Stationen beobachteten und auf Meereshöhe reduzierten Barometerstände ein und verbindet die Punkte gleicher Höhe, so erhält man Systeme sog. **Isobaren.** Jedes solche System zeigt einen Centralpunkt, der entweder ein Minimum oder ein Maximum des Druckes repräsentiert: In ersterm Falle hat man eine **Cyklone**, im zweiten eine **Anticyklone.** Die einer gewissen Distanz (einer Meile oder einem Kilometer) entsprechende Abnahme des Druckes in einer zu den Isobaren normalen Richtung heisst **Gradient.** Im allgemeinen hat die Gegend der Anticyklonen **gute,** die der Cyklonen **schlechte** Witterung. Der Wind kreist um die Centra, und zwar im Sinne des Uhrzeigers um die Maxima, im entgegengesetzten Sinne um die Minima; er weht im allgemeinen den Isobaren parallel und dabei um so heftiger, je grösser der Gradient ist. Die Anticyklonen bewegen sich oft kaum, während die Cyklonen sich **immer,** und oft sehr rasch, von West nach Ost bewegen und besonders häufig über dem stillen Ocean entstehen. — Diese ganze, ein Fundament der neuern Meteorologie bildende, nach und nach aus den Untersuchungen von **Galton, Buijs-Ballot, Stevenson,** etc., hervorgegangene Lehre, wird gewöhnlich unter dem Namen von Ch. H. Diedrich **Buijs-Ballot** (Klötingen in Seeland 1817 — Utrecht 1890; Prof. math. und Dir. met. Inst. in Utrecht) zusammengefasst. — *c.* Die zur Bestimmung der Windrichtung dienende **Windfahne** (girouette, weatherflag) war ohne Zweifel schon bei den Alten in Gebrauch, soll ja der um 100 v. Chr. zu Athen erbaute „Thurm der Winde" bereits eine solche getragen haben, — während dagegen Apparate, welche auch die Windstärke zu messen erlauben, sog. **Anemometer** (von ἄνεμος = Wind), erst der neuern Zeit angehören; immerhin soll schon 1650 J. B. **Cysat** eine in diese Kategorie gehörende Fahne mit Getriebe und Zeiger beschrieben und Jakob **Leupold** (Planitz bei Zwickau 1674 — Leipzig 1727; Mechaniker in Leipzig) schon 1717 damit einen primitiven Registrierapparat verbunden haben. Etwa 1708 machte ferner Christian **Wolf** den Vorschlag, dem Stosse des Windes einen um eine Axe drehbaren Körper auszusetzen und aus dessen Rotationsgeschwindigkeit auf die Stärke des Windes zu schliessen, und in weiterer Ausführung dieses Gedankens durch **Edgeworth** entstand sodann das jetzt so beliebte „Schalen-Anemometer", welches jedoch allerdings erst etwas später durch die von **Robinson** aus-

gegebene „Description of an improved Anemometer for registering the direction of the wind and the space which it traverses in given interval of time (Tr. Irish Acad. 1852)" allgemeiner bekannt und darum mit dessen Namen verbunden wurde, wie dies z. B. in „M. **Thiesen,** Die Theorie des Robinson'schen Schalen-Anemometers (Repert. für Meteorol. V)" der Fall ist. — *d.* In „**Lambert,** Sur les observations du vent (Mém. Berl. 1777) ist dargethan, dass anemometrische Mittel nicht in arithmetischem Sinne, sondern phoronomisch zu nehmen sind, und nach dieser Auffassung wird der Winkel φ, um welchen die mittlere Windrichtung von N in der Richtung über E abweicht, bei der achtteiligen Windrose durch

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{E - W + (NE + SE - SW - NW) \cdot \mathrm{Co}\,45^{\circ}}{N - S + (NE + NW - SE - SW) \cdot \mathrm{Co}\,45^{\circ}} \qquad 1$$

gegeben, wobei an die Stelle jedes Windes eigentlich die Summe der Produkte aus der Dauer desselben in die Geschwindigkeit einzusetzen ist, wofür aber zur Not auch die Anzahl der ihn aufweisenden Beobachtungstermine genommen werden kann. — *e.* Von hohem Interesse ist die Berechnung der jeder Windrichtung zukommenden mittleren Temperaturen, Barometerstände, etc., oder der sog. **Windrosen,** von denen folgende zum Muster dienen mögen:

Nro.	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	Ort und Berechner
1	9,81	9,92	9,03	10,06	11,55	11,88	11,87	10,87	Paris
2	7,90	9,51	9,25	6,81	3,74	2,29	3,19	5,47	Dove
3	3,06	2,98	2,91	3,06	3,24	3,47	3,31	3,22	Halle
4	765	783	775	730	748	736	748	744	Kämtz
5	49	62	48	38	108	68	339	233	Bern
6	38	81	64	47	142	83	433	243	Wolf
7	257	226	175	158	206	269	273	257	Karlsruhe
8	28	66	98	106	32	20	31	27	Eisenlohr

wo Nro. 1 die jeder Windrichtung zukommende Temperatur in Centesimalgraden oder die **thermische** Windrose giebt, — die 2 den Überschuss des Barometerstandes über 750^{mm} oder die **barische** Windrose; die 3 und 4 enthalten die absolute und relative Feuchtigkeit in Pariserlinien und Promillen, oder die **atmischen** Windrosen, — die 5 und 6 den mittlern jährlichen Niederschlag in Millimetern und die Anzahl der Regenstunden; die 7 giebt die Bewölkung, 400 als ganz bedeckt angenommen, oder die **nephische** Windrose, — und endlich die 8, unter wievieltägigem Wehen eines bestimmten Windes einmal ein Gewitter vorkömmt. — *f.* Vgl. ausser den früher erwähnten Schriften „**Dove**, Das Gesetz der Stürme (Pogg. Ann. von 1841; 4. A. Berlin 1873), — **Reye**, Die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen in der Erd- und die Stürme in der Sonnen-Atmosphäre. Hannover 1872 in 8., — W. **Ferrel,** Meteorological researches. Washington 1877—80, und: Recent advances in meteorology (Report of the chief Signal Officer 1885), — etc."

228. Feuchtigkeitsgehalt und Niederschläge. — Über die Feuchtigkeit der Luft und die verschiedenen Verfahren, dieselbe zu messen, ist schon früher (152) das Notwendigste so ziemlich mitgeteilt worden [a], doch bleibt noch folgendes nachzutragen:

Wenn zwei mit Feuchtigkeit gesättigte Luftmassen von ungleichen Temperaturen t_1 und t_2, also auch von ungleichen Spannkräften s_1 und s_2, zusammentreffen, so entspricht (Tab. V[c]) ihrer Mischungstemperatur $T = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ eine Spannkraft $S < \frac{1}{2}(s_1 + s_2)$, und es findet daher ein Niederschlag statt, — sei es in Form einer Wolke oder als Nebel, — sei es als Regen, Schnee, Hagel, etc.; sind sie nicht gesättigt, so werden sie durch die Mischung zum mindesten feuchter [b]. — Auf den Detail des durch Niederschlag und darauf folgende Verdunstung beruhenden Kreislaufes des Wassers kann ich hier im allgemeinen nicht eintreten, und ebensowenig auf die sämtlichen Formen der Niederschläge oder deren specielle Veranlassung: Ich beschränke mich darauf, anzuführen, dass man so ziemlich allgemein übereingekommen ist, bei den Wolken **Federwolke** (Cirrus), **Haufenwolke** (Cumulus), **Schichtwolke** (Stratus) und **Regenwolke** (Nimbus) zu unterscheiden [c], — und dass man für Bestimmung der zur Erdoberfläche gelangenden Niederschlagsmengen eigene **Ombrometer** konstruiert hat, von welchen wohl diejenigen, welche die Menge aus dem Gewichte ableiten, den Vorzug verdienen [d].

Zu 228: *a.* Vgl. auch die in 227: e mitgeteilten Windrosen. — Mit der Feuchtigkeit der Luft scheint auch ihre **Durchsichtigkeit** zuzunehmen; jedoch fehlen bis jetzt genauere Versuchsreihen und dafür taugliche Instrumente, ja es scheint überhaupt in dieser Richtung seit „H. B. de **Saussure**, Description d'un diaphanomètre (Mém. Tur. 1790)" wenig geschehen zu sein. — Auf das wohl auch in einer gewissen Relation zum Feuchtigkeitszustande der Luft stehende **Funkeln** (Scintillation, Twinkling) der Sterne kann ich hier nicht wohl näher eintreten, — und ebensowenig auf die Bedeutung der Intensität des im Spektrum sich etwas vor D zeigenden atmosphärischen Streifens, des sog. **Regenbandes**, für die Witterungsprognose. Für ersteres verweise ich auf „**Arago**, Mémoire sur la scintillation des étoiles (Oeuvres VII), Charles **Montigny** (Namur 1819 — Brüssel 1890; Prof. phys. Namur, Anvers, Brüssel), Sur la scintillation (Mém. cour. Brux. 1855—56), Charles **Dufour** (Veytaux 1827 geb.; Prof. math. et astr. Morges und Lausanne), Sur la scintillation des étoiles (Bull. Vaud. 1856), etc.", — für letztere namentlich auf „C. Piazzi **Smyth**, Meteorological spectroscopy (Edinb. Observ. 13—14 von 1871—77)". — *b.* Dieser sehr wichtige Satz wurde zuerst durch Jam. **Hutton** in seiner „Theory of Rain (Edinb. Tr. 1788)" ausgesprochen, ist jedoch zur Erklärung starker Regen unzureichend. Vgl. **Hann** und **Pernter** in Zeitschr. für Met. Bd. 9 und 17. — *c.* Diese teils auf Höhe, teils auf Gestaltung basierende Klassifikation wurde durch Luke **Howard** (London 1772 — Tottenham 1864; Quäker und Pharmaceut) in seinem „Essay on the modification of clouds. London 1802 in 8." vorgeschlagen. — Um die Höhe einer Wolke zu bestimmen, sind von Dav. **Fabricius** hinweg bis auf die neueste Zeit eine Menge, jedoch ihrer Mehrzahl nach sehr unvollkommene Verfahren ausgedacht worden: Fast am besten dürfte es noch sein, an den beiden Enden einer in die Vertikalebene des gewählten Wolkenpunktes fallenden Basis die gleichzeitigen Höhenwinkel desselben zu messen, — wobei allfällig nach dem Vorschlage von Friedrich **Prestel** (Göttingen 1809 — Emden 1880; Prof. math.

Emden) als eines Ende der Schatten jenes Punktes gewählt, somit die eine Höhe durch die aus der Beobachtungszeit berechnete Sonnenhöhe ersetzt, folglich ein zweiter Beobachter erspart werden könnte. — *d.* Als **Ombrometer** (von ὄμβρος = Regen) dient am besten ein cylindrisches Auffangsgefäss von etwa 1' Durchmesser, dessen Inhalt entweder abgewogen oder in ein Massgefäss mit Volumenscale umgeleert wird, wobei in letzterm Falle feste Niederschläge (z. B. Schnee, von welchem durchschnittlich 10^{mm} etwa $^1/_2{}^{mm}$ Wasser entsprechen) zuerst geschmolzen werden müssen; in beiden Fällen ist aus der Quantität die Höhe des Niederschlages zu berechnen. — Die ältesten bekannten Regenmessungen sind, wenn von einer vereinzelten, welche Benedetto **Castelli** (Brescia 1577 — Rom 1644; Prof. math. Rom) 1639 mit Hilfe eines cylindrischen Gefässes machte, Umgang genommen wird, diejenigen, welche 1677 Rich. **Townley** in Manchester begann, dabei bereits das Princip der Wägung benutzend. — In Zürich waren in neuerer Zeit 1866 III 10 mit $34,7^{mm}$ Wasser aus 30^{cm} Schnee, und 1878 VI 3 mit 137^{mm} Regen die grössten täglichen Niederschläge in Schnee und Regen[*], — in Genf schwankte nach **Plantamour** von 1826 bis 1861 die Anzahl der jährlichen Regentage zwischen 88 und 153, die jährliche Regenmenge zwischen $553,5^{mm}$ und $1084,1^{mm}$, und zwar kamen durchschnittlich einem Regentage $6,86^{mm}$ zu, während im Maximum 1827 V 20 in circa 3^h volle $162,4^{mm}$ fielen. Der stärkste bekannte Regenfall ist der zu Catskill am Hudson beobachtete von 1819 III 26, bei dem in $7^1/_2{}^h$ nicht weniger als 488^{mm} fielen.

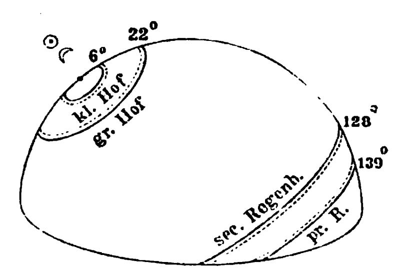
229. Elektrische und optische Erscheinungen. — Dass unsere Atmosphäre beständig eine bald grössere, bald geringere elektrische Spannung besitzt, — dass sich eine Wolke zuweilen stark genug ladet, um das Überschlagen von Funken nach einer andern Wolke oder der Erde zu ermöglichen, somit einen Blitz mit nachfolgendem Donner, oder ein sog. **Gewitter**, zu erzeugen, — dass dadurch einzelne Male noch andere Erscheinungen, wie z. B. sog. **Wettersäulen**, veranlasst werden, — etc., ist durch Versuche und Beobachtungen längst dargethan, wenn auch noch nicht vollständig erklärt [a]. — Etwas genauer hat man gewisse Lichterscheinungen ergründen können, welche sich, abgesehen von den bereits (223) besprochenen Dämmerungserscheinungen, zuweilen in unserer Atmosphäre präsentieren, wie z. B. die kleinen und grossen **Höfe**, die **Regenbogen**, die **Nebensonnen**, etc.; jedoch bleibt auch da noch manches näher zu erforschen [b]. — Das sog. **Polarlicht** (Nord- und Südlicht) endlich kennt man zwar seiner Erscheinung nach ebenfalls so ziemlich: Man weiss nämlich, dass es gewöhnlich mit der Bildung eines dunkeln Segmentes beginnt, über welchem ein bläulich-weisser Lichtsaum wallt, dessen Scheitel immer nahe in den magnetischen Meridian fällt, — dass dann Strahlen schiessen, welche in allen Farben spielen, verschwinden und wieder erscheinen, sich nach E. oder W. bewegen, etc., — und dass nur da, wo das Südende der Inklinationsnadel hinweist, eine in ruhigem, mattem Lichte glänzende Stelle, die sog.

Krone, bemerkt wird, sonst überall Bewegung herrscht; man weiss ferner, dass es gewissen Perioden unterworfen ist, — in einem innigen Zusammenhange mit den früher (156) behandelten magnetischen Variationen und Störungen steht, — etc.; aber seine eigentliche Natur ist noch so unbekannt, dass gegenwärtig nicht einmal entschieden werden kann, ob es als eine tellurische Erscheinung betrachtet werden darf oder ob dasselbe mit kosmischen Verhältnissen im Zusammenhange steht °.

Zu 229: *a.* Die ersten Nachweise der atmosphärischen Elektricität und der Identität des Blitzes mit dem elektrischen Funken verdankt man, ausser **Franklin** (117) und dem französischen Landrichter de **Romas** (Nérac in der Gascogne 1710? — ebenda 1776), namentlich auch Georg Wilhelm **Richmann** (Pernau in Livland 1711 — Petersburg 1753; Akad. Petersburg), der als Opfer seiner Versuche vom Blitze erschlagen wurde. — Die Reihe

2 11 32 131 350 427 483 443 162 39 14 5

giebt an, wie viele Gewitter sich in einem Jahrhundert zu Zürich in den 12 Monaten Januar-December ereigneten. Vgl. auch Windrose 8 in 227. — Die **Wettersäulen** (Tromben, Land- und Wasserhosen) sind einem aus einer Wolke herabsteigenden, umgestürzten Kegel zu vergleichen, der meist wie ein Kreisel rotiert und langsam fortschreitet. Zum Glücke sind diese immer noch rätselhaften, aber oft verheerenden Erscheinungen, bei welchen mutmasslich die Elektricität eine Hauptrolle spielt, wenigstens in Mittel-Europa ziemlich selten, so dass z. B. die Wasserhose, welche 1884 VII 20 (vgl. Zürch. Viert. 1884) auf dem Zürcher-See beobachtet wurde, für diesen aus neuerer Zeit ein Unicum bilden dürfte. — *b.* Von den um Sonne und Mond zuweilen entstehenden **Höfen** und den ihnen gegenüber sich bildenden **Regenbogen** giebt die beistehende Figur, in welcher die ganzen Linien dem Violet, die punktierten dem Rot entsprechen, eine Lagen-Übersicht: Die kleinen Höfe lassen sich als eine durch Nebelbläschen veranlasste Beugungserscheinung darstellen, die grossen durch Brechung in Eisnadeln, — die primären Regenbogen durch einfache, die sekundären durch doppelte Reflexion im Innern der Wasserkügelchen einer gegenüberstehenden Regenwand. Die Regenbogen erklärte schon der sächsische Mönch **Theodorich** in einer zwischen 1304 und 1311 verfassten Schrift „De radialibus impressionibus (abgedruckt in Venturis Commentari von 1814)", und dann wieder Marco Antonio de **Dominis** (Insel Arbo bei Dalmatien 1566 — Rom 1624, wo er vergiftet und verbrannt wurde; früher Erzbischof von Spalatro) in der Schrift „De radiis visus et lucis in vitris, perspectivis et in iride. Venet. 1611 in 4." Aus neuerer Zeit vgl. für solche optische Erscheinungen „**Fraunhofer,** Theorie der Höfe, Nebensonnen und verwandter Phänomene (Schumachers astron. Abh., Heft 3 von 1825), — **Clausius,** Die Lichterscheinungen der Atmosphäre (Grunerts Beiträge, Heft 4 von 1850), — etc. Anhangsweise sind auch „Albert **Riggenbach** (Basel 1854 geb.; Observ. Basel), Beobachtungen über



die Dämmerung. Basel 1886 in 8., — und: J. **Kiessling**, Untersuchungen über Dämmerungserscheinungen. Hamburg 1888 in 4." zu erwähnen. — *c*. Für weitern Detail muss ich im allgemeinen auf die betreffende Speciallitteratur verweisen, von welcher ich aus älterer Zeit die klassische Schrift „Jean-Jacques Dortous de **Mairan** (Béziers 1678 — Paris 1771; Sekretär der Par. Akad.), Traité physique et historique de l'aurore boréale. Paris 1731 in 4. (2 éd. 1754)" citieren will, — aus neuerer Zeit aber die Schriften „Hermann **Fritz** (Bingen 1830 geb.; Prof. mech. Zürich), Verzeichnis beobachteter Polarlichter, Wien 1873 in 4., — und: Das Polarlicht. Leipzig 1881 in 8." Ich beschränke mich darauf, noch kurz anzuführen, dass die Beschreibung, welche Konr. **Gessner** in seiner pseudonymen Schrift „Historia et interpretatio prodigii, quo coelum ardere visum est per plurimas Germaniæ regiones. Conrado Boloveso Fridemontano authore (s. l. e. a.) in 12." von dem Nordlichte 1560 XII 27 a. St. gab (vgl. Biogr. I 28/9), so ziemlich die erste etwas zutreffende war, — dass **Gassendi** bei Anlass desjenigen von 1621 IX 12 die Bezeichnung „Aurora borealis" vorschlug, — dass **Halley** 1714 (vgl. Ph. Tr. 29) hervorhob, dass die Corona in den magnetischen Meridian falle, — dass **Cook** und seine Begleiter 1773 II 20 ein erstes Südlicht beobachteten, — und dass bereits **Mairan** bemerkte, dass sich in der Häufigkeit des Nordlichtes ein bestimmter jährlicher Gang zeigt. Letzterer geht denn auch allerdings schon aus dem (vgl. Mitth. 5 von 1857) von mir angelegten Nordlichtkataloge mit aller wünschbaren Sicherheit hervor, da von den 5764 Nordlichtern desselben auf die 12 Monate

543 519 690 505 278 168 221 388 604 696 598 524

fallen, — und in der That hat **Fritz** nicht nur seither diese Verteilung bestätigen können, sondern auch aus den 147 von ihm katalogisierten Südlichtern die analoge Reihe

12 20 30 9 4 4 5 14 16 15 5 13

erhalten. Von einer beim Nordlichte aufgefundenen merkwürdigen Periode wird später (522) die Rede sein, und ich schliesse mit dem Geständnis, dass dagegen die Theorie desselben noch ziemlich im Argen liegt; denn so gut z. B. **Delarive** seine Ansicht, es entstehe das Nordlicht bei Ausgleichung der negativen Elektricität der Erde mit der positiven der Luft, durch Raisonnement und Versuch zu stützen glaubte, so steht ihr eben unerbittlich das von **Donati** (vgl. Mem. Arcetri I) bei dem Nordlichte von 1872 II 4 erwiesene Faktum entgegen, dass dasselbe an verschiedenen Orten nicht in demselben physischen Momente, sondern zu derselben Lokalzeit beobachtet wurde, also an der Erdrotation **nicht** Teil nahm.

230. Frühere Ansichten über die Distanzen der Gestirne. — In den ältesten Zeiten wurden alle Gestirne ohne Ausnahme an das scheinbare Himmelsgewölbe, also in gleiche Distanz von der Erde versetzt; aber bald nachdem man die Wandelsterne ausgeschieden hatte, wurde auch wahrgenommen, dass einzelne derselben zuweilen vor andere und vor Fixsterne treten, also uns näher sein müssen als die von ihnen bedeckten Gestirne[a]. — Ja nicht einmal die Distanz jedes einzelnen Wandelsternes von der Erde erschien unveränderlich, da wenigstens beim Monde die scheinbare Grösse bemerkbar wechselte[b]. — Wenn aber auch so in doppelter

Weise Distanzunterschiede erkannt wurden, so blieb noch ein grosser Schritt bis zur wirklichen Distanzbestimmung zu machen übrig, ja man begnügte sich längere Zeit, durch philosophische Tüfteleien oder durch **Spekulation** dasjenige zu ersetzen, was man durch **Messung** nicht zu erhalten wusste [c], und es gelang erst **Aristarch** (437) und **Hipparch** (438), solchen Willkürlichkeiten **geometrische Methoden** zu substituieren, welche sich auf den Begriff der sog. **Parallaxe** (231) stützten und wenigstens für Mond und Sonne anwendbar waren [d].

Zu 230: *a.* So beobachtete z. B. **Aristoteles** (vgl. De coelo II 12, wo zugleich gesagt wird, dass die Egypter und Babylonier schon früher entsprechende Wahrnehmungen gemacht haben) eine Bedeckung des Mars durch den Mond und die Bedeckung eines Sternes in den Zwillingen durch Jupiter, — so wurden vielfach Bedeckungen von Sternen durch den Mond wahrgenommen, — ja bald auch in den Sonnenfinsternissen eine teilweise oder gänzliche Bedeckung der Sonne durch den Mond erkannt. — *b.* Schon **Aristoteles** wusste, „dass ein Diskus, bei unveränderter Entfernung vom Auge, den Mond bald bedeckt und bald nicht". — *c.* Es kann wohl nur auf solcher Spekulation beruhen, wenn nach Plinius Erzählung die Egypter dem Grade der Mondbahn eine Länge von 33 Stadien, demjenigen der Sonnenbahn aber $1\frac{1}{2}$fache und dem der Saturnbahn 2fache Länge geben wollten, — oder wenn **Pythagoras** und seine Schule den Mond in eine Distanz von 126000 Stadien von der Erde setzten und von ihm bis zur Sonne eine doppelte, von dieser aber bis zum Fixsternhimmel eine dreifache Distanz annahmen, — oder wenn **Plato** in seinem Timæus den 7 Wandelsternen ☾, ⊙, ♀, ☿, ♂, ♃, ♄ der Reihe nach die Distanzen 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 beilegte, — etc., und auch die bereits (211) erwähnte, allerdings ziemlich plausible Annahme, dass die 7 Wandelsterne sich nach ihren Umlaufszeiten ordnen, gehört eigentlich in diese Kategorie. Vgl. übrigens für letztere die folgende Note. — *d.* **Ptolemäus** musste noch in seiner Syntaxis eingestehen, es gebe „kein Mittel, zu beweisen, welches die wahre Stellung der Planeten sei, da keiner derselben eine merkliche Parallaxe zeige, die das einzige Mittel zur Bestimmung der Distanz geben würde", und dass er Merkur und Venus nur darum zwischen Mond und Sonne gesetzt habe, weil er die Planeten mit beschränkter Elongation von den übrigen abscheiden wollte.

231. Begriff und Einfluss der Parallaxe. — Unter **Parallaxe** versteht man im allgemeinen den Winkelunterschied, welcher sich ergiebt, wenn man ein Objekt von zwei verschiedenen Standpunkten aus betrachtet, oder auch den mit ihm gleichen Winkel, unter welchem vom Objekte aus die Distanz der beiden Standpunkte gesehen wird, und es ist somit die Parallaxe angenähert der Länge der Basis direkt, dem Abstande des Objektes umgekehrt proportional [a]. — Wählt man als Basis den Halbmesser der Erde, d. h. giebt man dem wirklichen Beobachter einen fingierten Beobachter am Erdmittelpunkte bei, so nennt man die Parallaxe **tägliche**, — ist dagegen die Basis gleich der Distanz Erde-Sonne, so nennt man

sie **jährliche**. Auf letztere werden wir erst später (263) näher eintreten und uns hier auf die tägliche Parallaxe beschränken. — Versteht man unter z' die sog. **scheinbare** Zenitdistanz, unter welcher ein Gestirn einem Beobachter erscheint, — unter z dagegen die sog. **wahre** Zenitdistanz, unter welcher es ihm bei kugelförmiger Erde von ihrem Centrum aus erscheinen würde, so nennt man den Unterschied $\pi' = z' - z$ die **Höhenparallaxe**, und deren für $z' = 90°$ eintretenden Maximalwert π die **Horizontalparallaxe** des Gestirnes, wobei die Beziehungen

$$\text{Si}\,\pi' = \text{Si}\,\pi \cdot \text{Si}\,z' \qquad \text{Si}\,\pi = \frac{r}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \pi' \doteq \pi \cdot \text{Si}\,z' \qquad \pi \doteq \frac{r}{\varrho \cdot \text{Si}\,1''} \qquad \mathbf{1}$$

bestehen, falls r den Radius der Erde und ϱ die Distanz des Gestirnes von deren Centrum bezeichnet[b]. — Bei Berücksichtigung der Abplattung der Erde bezieht man die Horizontalparallaxe meistens auf den als Einheit gewählten Radius des Equators und giebt diese schlechtweg als **Parallaxe** des Gestirnes.

Zu 231: *a.* Der Ausdruck Parallaxe kömmt von παράλλαξις = Richtungsverschiedenheit. — Sind A_1 und A_2 die beiden Standpunkte und O das Objekt, so ist die Parallaxe $\pi = \alpha_2 - \alpha_1$, und man hat

$$\text{Si}\,\pi = \frac{b}{r_1} \cdot \text{Si}\,\alpha_2 \qquad \mathbf{2}$$

so dass π nahe $\cdot$ b **direkt** und r_1 **umgekehrt** proportional ist, ferner für $\alpha_2 = 90°$ einen Maximalwert annimmt. Ferner erhält man nach 2 für $\alpha_2 = 90°$ und b = 1 die korrespondierenden Werte

π =	1°	1'	10''	1''	...
r_1 =	57	3438	20626	206265	...

— *b.* Aus der beistehenden Figur ergeben sich ohne weiteres unsere 1, aus denen z. B. hervorgeht, dass die Höhenparallaxe dem Sinus der Zenitdistanz proportional ist. Ferner folgt



$$\varrho'^2 = \varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cdot \text{Co}\,z$$

oder

$$\frac{\varrho'^2}{\varrho^2} = 1 - 2\frac{r}{\varrho}\,\text{Co}\,z + \frac{r^2}{\varrho^2} \qquad \mathbf{3}$$

oder, da für alle Gestirne $r:\varrho$ so klein ist, dass für Annäherungsrechnungen schon die zweite Potenz dieses Bruches vernachlässigt werden darf,

$$\frac{\varrho^2}{\varrho'^2} = 1 + 2 \cdot \frac{r}{\varrho} \cdot \text{Co}\,z \qquad \text{und somit} \qquad \frac{\text{Si}\,z'}{\text{Si}\,z} = \frac{\varrho}{\varrho'} \doteq 1 + \frac{r}{\varrho}\,\text{Co}\,z \qquad \mathbf{4}$$

$$\text{Co}\,z' = (1 - \text{Si}^2 z')^{1/2} = \left[1 - \text{Si}^2 z\,(1 + \frac{r}{\varrho}\,\text{Co}\,z)^2\right]^{1/2} \doteq \text{Co}\,z - \frac{r}{\varrho}\,\text{Si}^2 z$$

drei Näherungsformeln, welche uns wiederholt gute Dienste leisten werden.

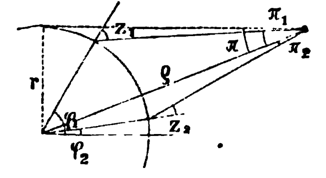
232. Bestimmung der Entfernung und Grösse des Mondes. — Die verschiedenen Methoden, welche im Laufe der

Zeiten für die Distanzbestimmung zur Anwendung kamen, werden später (437—52) einlässlich abgehandelt werden; hier mag vorläufig nur Eine, und auch diese nur unter den einfachsten Voraussetzungen, zur Behandlung kommen. Sie besteht darin, dass man an zwei möglichst von einander entfernten Punkten eines Meridianes bei Culmination des als Vorwurf genommenen Gestirnes dessen Zenitdistanzen misst, und aus dem teils durch letztere, teils durch die als bekannt angenommenen Polhöhen und Erdradien bestimmten Vierecke erst trigonometrisch die Diagonale dieses letztern, sodann aus dieser (231:1) die Horizontalparallaxe berechnet[a]. — Nach dieser Methode wurden z. B. um die Mitte des vorigen Jahrhunderts (444) durch **Lacaille**, indem er seine Beobachtungen am Kap mit denjenigen verschiedener europäischer Beobachter zusammenstellte, die Parallaxen des Mondes und der Sonne zu 57′ 13″ und 10″,2 bestimmt, und die neuere Zeit hat diese Werte nur wenig abgeändert, indem man gegenwärtig dafür 57′ 2″ und 8″,9 annimmt, welchen die Distanzen 51805 und 19917000 g. M. entsprechen[b]. — Da nun (209) der Radius des Mondes bei seiner mittlern Entfernung von der Erde, auf welche sich auch die soeben gegebenen Werte für Parallaxe und Distanz beziehen, unter einem Winkel von 933″,5 = 15′ 33″,5 gesehen wird, so folgt hieraus, dass der wirkliche Radius des Mond

$$r' = 51805 \cdot \mathrm{Si}\ 15'\ 33'',5 = 234{,}45 \text{ g. M.} = 1737^{\mathrm{km}} = {}^3/_{11} \cdot r$$

ist, und aus letzterer Näherungszahl ergiebt sich, dass das Volumen des Mondes gleich $^1/_{49}$ des Erdvolumens gesetzt werden kann.

Zu 232: *a.* Bezeichnen φ_1 und φ_2 die Polhöhen der beiden Beobachter, z_1 und z_2 die von ihnen gemessenen und für die Refraktion verbesserten Zenitdistanzen, so hat man, unter Voraussetzung, die Erde sei eine Kugel des Radius r,



$$\pi_1 + \pi_2 = z_1 + z_2 - (\varphi_1 - \varphi_2) \qquad 1$$

$$\varrho : r = \mathrm{Si}\, z_1 : \mathrm{Si}\, \pi_1 = \mathrm{Si}\, z_2 : \mathrm{Si}\, \pi_2 = 1 : \mathrm{Si}\, \pi \qquad 2$$

also auch

$$\mathrm{Si}\, \pi_1 : \mathrm{Si}\, \pi_2 = \mathrm{Si}\, z_1 : \mathrm{Si}\, z_2 = \mathrm{Tg}\, \alpha \qquad 3$$

wo α aus z_1 und z_2 berechnet, folglich als bekannte Grösse angesehen werden kann, und endlich

$$\mathrm{Tg}\frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = \frac{\mathrm{Si}\, \pi_1 - \mathrm{Si}\, \pi_2}{\mathrm{Si}\, \pi_1 + \mathrm{Si}\, \pi_2} \cdot \mathrm{Tg}\frac{\pi_1 + \pi_2}{2} = \mathrm{Tg}\,(\alpha - 45^0) \cdot \mathrm{Tg}\frac{\pi_1 + \pi_2}{2} \qquad 4$$

Man kann somit successive nach 1 die Summe $\pi_1 + \pi_2$, nach 4 die Differenz $\pi_1 - \pi_2$, also auch π_1 und π_2 selbst berechnen, — dann nach der ersten 2 die Distanz ϱ, — und endlich nach der letzten 2 auch noch die Horizontalparallaxe π finden. — ***b.*** Für das Verhältnis des scheinbaren Radius des Mondes zu seiner Parallaxe erhielt **Lacaille** den Wert 0,2743, während neuerlich **Küstner** (209) dafür 0,272 577 ± 0,000 012 fand.

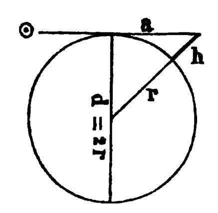
233. Die frühesten, die Beschaffenheit des Mondes betreffenden Kenntnisse. — Aus der bereits (208) ins Auge gefassten Folge der Lichtgestalten des Mondes und den demnächst (243 u. f.) zu besprechenden Erscheinungen bei den Finsternissen und Bedeckungen schloss spätestens **Pythagoras**, dass unser Nachbargestirn eine freischwebende, eigenen Lichtes entbehrende und nur durch die Sonne erleuchtete Kugel sei. Dagegen blieben die weitern Kenntnisse über dasselbe, so lange man das Auge nicht zu bewaffnen wusste, natürlich sehr dürftig, ja reduzierten sich so ziemlich darauf, dass bei Vollmond schon im Altertume auf der Scheibe einige dunklere Flecken bemerkt wurden [a], und dass das Sichtbarwerden der Nachtseite vor und nach Neumond nicht nur auffiel, sondern auch bald eine angemessene Erklärung fand [b]. Weiteres blieb der Spekulation anheimgestellt, welche dann allerdings nicht ganz ohne Erfolg thätig war [c].

Zu 233: *a.* Aus diesen dunkeln Flecken konstruierte in unbekannter Zeit eine kühne Phantasie das sog. „Gesicht des Mannes im Monde", während andere, wie **Plutarch** (Chäronea in Böotien 40? — ebenda 120?; Schriftsteller und Priester des Apollo) in einer „Von dem Gesichte im Monde" betitelten Schrift erzählen soll, bereits annahmen, dass sie mit Bodenverschiedenheiten zusammenhängen möchten, und **Aristoteles** dieselben als Spiegelbilder der Länder und Meere der Erde ansehen wollte. — *b.* Das Sichtbarwerden der Nachtseite wurde mutmasslich schon durch **Leonardo** da Vinci, und jedenfalls spätestens durch **Mästlin**, einem Gegenscheine der Erde, dem sog. „Lumen secundarium" zugeschrieben. Dass dasselbe in der nächsten Nähe der Konjunktion und während einer totalen Sonnenfinsternis nicht stattfindet, hängt wohl in ersterm Falle mit den Stellungsverhältnissen, im zweiten Falle mit dem Auftreten der Corona zusammen. — *c.* So findet sich z. B. in der erwähnten Schrift von **Plutarch** die Stelle: „Doch den Mond sichert vor dem Fallen schon seine eigene Bewegung und die reissende Geschwindigkeit seines Umlaufes, wie das, was auf eine Schleuder gelegt wird, durch den raschen Umschwung gehindert wird herabzufallen; denn jeden Körper trägt seine natürliche Bewegung, so lange er nicht durch eine andere Kraft aus seiner Richtung gebracht wird". Ferner liest man ebendaselbst bei Diskussion der von manchen wegen mutmasslichem Mangel von Luft und Wasser bezweifelten Bewohnbarkeit des Mondes: „Wer verlangt, dass für die Geschöpfe im Monde dieselben Mittel zu ihrer Erhaltung vorhanden sein müssten wie auf der Erde, der scheint die grossen Ungleichheiten in der Natur ganz übersehen zu haben, wonach sich noch grössere und zahlreichere Unterschiede zwischen den lebenden Wesen unter einander, als zwischen dem Lebenden und Leblosen finden". Etc.

234. Die ersten Entdeckungen mit dem Fernrohr. — Sobald das Fernrohr vorhanden war, musste sich jeder Freund der Astronomie vorab veranlasst sehen, mit demselben den Mond zu betrachten, wobei sich ihm ohne weiteres ein bisdahin unbekannter Detail zeigte, und so ist es gar nichts auffallendes, dass **Galilei**

schon 1610 in seinem „Sydereus Nuncius“ recht manches darüber zu berichten wusste, sowie ein erstes, wenn auch allerdings noch höchst dürftiges Mondbild geben konnte; dagegen gereicht es ihm zur höchsten Ehre, dass er das Gesehene sofort richtig deutete, ja nicht nur das Vorhandensein von Bergen und Thälern auf unserm Begleiter erkannte, sondern aus dem Umstande, dass sich auf der Nachtseite des Mondes zuweilen leuchtende Punkte (Bergspitzen) finden, welche bis auf $^1/_{20}$ des Monddurchmessers von der Lichtgrenze abstehen, sich von der bedeutenden Höhe einzelner Mondberge zu überzeugen, ja wenigstens deren Maximalhöhe zu berechnen wusste [a]. — Die weitere Bearbeitung der Topographie des Mondes überliess Galilei, der sich überhaupt nur wenig mit praktischer Astronomie befasste, seinen Zeitgenossen **Sarpi** und **Lagalla** [b], sowie den etwas spätern **Langren**, **Fontana**, **Mellan**, **Divini**, etc. [c], deren sehr verdienstliche Arbeiten jedoch alsbald durch **Hevel** weit überholt wurden: Das von letzterm unter dem Titel „Selenographia. Gedani 1647 in fol.“ ausgegebene, für die Zeit seines Erscheinens epochemachende und noch jetzt höchst schätzbare Werk zeigt nämlich nicht nur in saubern, von ihm eigenhändig gestochenen Kupfertafeln, Abbildungen des Mondes für jeden Tag seines Alters und eine daraus zusammengetragene Vollmondskarte, sondern giebt auch im Texte einlässlichen Bericht über seine Beobachtungen und die angewandten Methoden, so dass es der Folgezeit in allen Hauptrichtungen als Grundlage und Muster dienen konnte [d]. Einzig in betreff der dann doch mehr nebensächlichen Nomenklatur hörte die spätere Zeit nicht auf **Hevel**, sondern adoptierte diejenige, welche **Riccioli** bald darauf in eine von seinem Freunde **Grimaldi** entworfene Vollmondskarte eintrug und 1651 in seinem schon früher erwähnten „Almagestum novum“ publizierte.

Zu 234: *a.* Damit nämlich eine Bergspitze noch in der Distanz a von der Lichtgrenze beleuchtet werden kann, muss ihre Höhe h der Bedingung $(r + h)^2 = r^2 + a^2$ genügen, wo r den Radius der Mondkugel bezeichnet. Da nun **Galilei** den Monddurchmesser zu $^2/_7$ des Erddurchmessers annahm und diesem 7000 Milliaria (à 1000 Schritte à $1^m,479$) gab, so war für ihn $r = 1000$ und $a = 100$, so dass $h = \sqrt{1000^2 + 100^2} - 1000 > 4$ wurde, während nach seiner Meinung die höchsten Berge der Erde kaum auf Eine solche Meile ansteigen. In letzterer Beziehung irrte sich nun allerdings Galilei gewaltig, da schon der Montblanc eine Höhe von $4810^m > 3^1/_5$, der Dhawalagiri sogar eine solche von $8176^m = 5^2/_5$ italienische Meilen besitzt; dagegen ist das Hauptresultat, dass auf dem Monde Berge von mehr als $4.1000.1,479 = 5916^m$ vorkommen, gar nicht übel, da **Mädler** (237) unter 1095 gemessenen Mondbergen sogar Einen (Newton) fand, der volle $3727^t = 7263^m$ erreicht. — *b.* Von



Galileis Freund Pietro **Sarpi** (Venedig 1552 — ebenda 1623; Provinzial der Serviten, namentlich als Geschichtschreiber des Konzils von Trient bekannt) weiss man wenigstens, dass er sich lebhaft für die nähere Kenntnis des Mondes interessierte, und von Cesare **Lagalla** (Padulla bei Neapel 1571 — Rom 1624; Jesuit; Arzt und Prof. philos. Rom) soll eine „Disputatio physica de phænomenis in orbe lunæ, novi telescopii usu a Galileo nunc iterum suscitatis. Venetiis 1612 in 4." existieren, welche ein Bild des Mondes enthält. — *c.* Sich lebhaft mit dem Längenprobleme (406 u. f.) beschäftigend, kam **Langren** (vgl. die von L. Niesten in „Ciel et terre 1883", mit Benutzung der Vorarbeiten von Marchal und Houzeau in „Bull. Brux. 1852", gegebene Notiz) auf den Gedanken, es möchte die Beobachtung des Erlöschens der von Galilei zur Messung der Mondberge benutzten leuchtenden Punkte ein gutes Mittel für Uhrvergleichungen abgeben. Um nun die hiefür nötige Verständigung zu erzielen, entwarf Langren eine für jene Zeit gar nicht üble (von Niesten seiner Notiz in halber Grösse beigelegte) Mondkarte von $0^m,35$ Durchmesser, in welche er bei 270 der vornehmsten, von ihm mit biblischen Namen bezeichneten Objekte eintrug, — legte dieselbe schon 1628 der Infantin Isabella vor, — und publizierte sie sodann „a seipso incisis", vielleicht schon gleichzeitig mit seinem „Tractatus de verâ longitudine terrâ marique per observationum macularum lunarium, quando observantur, vel illuminantur, inveniendâ. Antwerpiæ 1644 in 4.", jedenfalls spätestens 1645, unter dem Titel „Selenographia Langrenia, sive Lumina Austriaca Philippica". Der die zu Grunde liegenden Beobachtungen enthaltende Text, für welchen er, auf ein Gutachten von G. **Wendelin** gestützt, ein k. Privilegium erhalten hatte, scheint dagegen ungedruckt geblieben zu sein, — mutmasslich weil **Langren** „destitutus fere Mecoenatibus" die nötigen Mittel nicht aufzutreiben wusste. — Francesco **Fontana** (Neapel 1585 — ebenda 1656; Rechtsgelehrter) gab in seinen „Novæ coelestium terrestriumque rerum observationes. Neapoli 1646 in 4." ebenfalls eine nicht ganz üble Darstellung des Mondes, für welche er sich auf Zeichnungen stützte, die er in den Jahren 1630—46 aufgenommen hatte. — Auch die „Phasium Lunæ Icones, quas annis salutis 1634 et 1635 pingebat ac scultebat Claude **Mellan** Gallus, præsentibus ac flagitantibus illustris viris Gassendo et Peyreschio (Aix 1635 in plano)" waren nach Lalande eine für ihre Zeit tüchtige Leistung. — Endlich entwarf Eustachio **Divini** (Sanseverino 1610 — Rom 1695?; Konkurrent von Campani) eine ebenfalls ganz hübsche Mondkarte, welche er mit selbstkonstruierten Fernröhren aufnahm und 1649 in Kupfer stach. Vgl. „G. **Govi**, Della invenzione del micrometro per gli strumenti astronomici (Bull. Boncomp. 1887)", wo diese Karte, welche am Rande auch bemerkenswerte Darstellungen von Venus, Jupiter und Saturn zeigt, reproduziert ist. — *d.* **Hevel** schrieb 1661 (vgl. Mon. Corr. VIII 36) an einen Freund: „Die Figuren alle miteinander, welche in meiner Selenographia, Epistola und Dissertatione de nativa Saturni facie vorhanden, sind gar nicht geetzet, sondern habe sie alle mit meiner Hand geschnitten, gehet zwar viel langsamer zu, ist auch viel mühsamer, aber man kann alles viel reinlicher zu wege bringen". Dem entsprechend war auch der Erfolg, und Papst Innocenz X. soll, als ihm Zucchius die Selenographie vorwies, ausgerufen haben: „Sarebbe questo libro senze pari, se non fosse scritto da un eretico". Leider wurden die schönen Kupfertafeln durch einen Erben verkümmelt und es soll sich nur die in ein Kaffeebrett umgewandelte Vollmondskarte erhalten haben. — *e.* **Hevel** hatte zuerst daran gedacht, die Berge und Flecken auf dem Monde nach berühmten Gelehrten zu benennen, war dann

aber aus Furcht, Jalousien zu erregen, davon abgekommen und benutzte nun dafür die unverfänglichen Namen von Gebirgen, Ländern und Meeren der Erde, ohne jedoch dadurch Ähnlichkeiten bezeichnen zu wollen; so findet man auf seiner Karte die Apenninen, den Vesuv, das Mare serenitatis (den stillen Ocean), etc. Dagegen nahm **Riccioli** den ursprünglichen Plan Hevels wieder auf und trug damit, dank der menschlichen Eitelkeit, den Sieg davon.

235. Die spätern Arbeiten. — Die gegen Ende des 17. Jahrhunderts durch **Cassini** und **Lahire** bearbeiteten grossen Mondkarten gingen durch die Ungunst der Zeiten für die Wissenschaft fast ganz verloren [a], und ebenso die circa $3^1/_2$ Hundert hübschen Zeichnungen, welche Clara **Eimmart** ungefähr gleichzeitig bei den verschiedenen Mondphasen aufnahm [b]. Dagegen machte die Mondtopographie, als sich gegen die Mitte des 18. Jahrhunderts der unvergleichliche Tobias **Mayer** mit derselben zu befassen begann, erhebliche Fortschritte und würde ohne dessen frühen Tod wohl noch viel grössere erreicht haben [c]. Endlich fallen auf das Ende des 18. Jahrhunderts die ausgedehnten Arbeiten des fleissigen **Schröter**, welche jedoch eine Aufgabe lösen sollten, die für den damaligen Stand unserer Kenntnis des Mondes noch verfrüht war, so dass seine Bemühungen nicht den gewünschten Erfolg hatten und auch nicht haben konnten [d].

Zu 235: *a.* In den Jahren 1671—79 liess Dom. **Cassini** durch einen geschickten Zeichner, Namens **Patigny**, den Mond unter Anwendung eines 34-füssigen Fernrohrs und mit einiger Beihilfe des ebenfalls kunsterfahrnen Sébastien **Leclerc** (Metz 1637 — Paris 1714; Ingénieur-géographe und Prof. perspect. Paris), wiederholt in allen Phasen detailliert mit schwarzer und weisser Kreide auf blaues Papier zeichnen, — benutzte sodann diese Zeichnungen in Verbindung mit eigenen Messungen, um eine Vollmondskarte von 12′ Durchmesser zu erstellen, — und liess diese letztere nach Reduktion auf 20″ Durchmesser durch den bereits erwähnten **Mellan** in Kupfer stechen, jedoch vorläufig nur wenige Exemplare abziehen, — wahrscheinlich beabsichtigend, die eigentliche Publikation erst nach Redaktion und Abdruck der zu Grunde liegenden Beobachtungen stattfinden zu lassen. Nachdem die Kupferplatte fast ein Jahrhundert in der k. Druckerei gelegen, und die Karte selbst nur dazu gedient hatte, kleinere und grösstenteils schlechte Mondbilder für die Connais. des tems und verschiedene Abhandlungen zu erstellen, brachte endlich (vgl. Journ. d. Sav. 1787) **Dufourney** 1787 Abdrücke der erstern zum Preise von 6 Livres in den Handel, und zugleich liess Dom. II **Cassini** durch **Janinet** noch eine Reduktion auf 10″ Durchmesser stechen. Was aus den Originalzeichnungen, welche **Cassini** damals noch besass, seither geworden ist, weiss ich nicht. — Ungefähr gleichzeitig bearbeitete auch Ph. de **Lahire** eine Mondkarte von gleicher Grösse und ebenfalls in Kreidemanier, wobei derselbe, da er zugleich Künstler und Astronom war, den grossen Vorteil hatte „de pouvoir tenir d'une main la lunette et de l'autre le crayon". Leider kam jedoch diese 1686 nach zehnjähriger Arbeit vollendete Karte von künstlerischer Vollendung, abgesehen von einer 1703 durch Lahire seinen „Tabulæ astronomicæ" beigegebenen, ganz netten

Reduktion auf $5^1/_2$", nie in die Öffentlichkeit, — ging nach dem Tode des Autors durch verschiedene Hände, — wurde bald verdorben, bald wieder sorgfältig restauriert, — und soll noch zu Anfang unsers Jahrhunderts im Treppenhause von Ste Geneviève in Paris gehangen haben. Über den seitherigen Verbleib und das Schicksal eines von **Lahire** verfertigten Mondglobus fehlen die Nachrichten. — *b.* Maria Clara **Eimmart** (Nürnberg 1676 — Altorf 1707) war mit allen Wissenschaften und Künsten vertraut und unterstützte sowohl ihren Vater, Georg Christoph **Eimmart** (Regensburg 1638 — Nürnberg 1705; Kupferstecher und Besitzer eines Observat. in Nürnberg), als später ihren Gatten Joh. Heinrich **Müller** (Wörth bei Nürnberg 1671 — Altorf 1731; Schüler von Eimmart, sodann Prof. math. et phys. Altorf) im Beobachten und Rechnen. Ihre Mondzeichnungen stammten aus den Jahren 1693—98, kamen wahrscheinlich mit den übrigen Eimmart'schen Manuskripten (57 Foliobände) an das Jesuitenkollegium zu Polozk in Weissrussland und gingen dort etwa im ersten Viertel unsers Jahrhunderts bei einer Feuersbrunst zu Grunde. — *c.* Auf die durch Tob. **Mayer** in die „Kosmographischen Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr 1748. Nürnberg 1750 in 4." eingerückte, höchst wichtige „Abhandlung über die Umwälzung des Mondes um seine Axe und die scheinbare Bewegung der Mondflecke" wird erst später (240) näher einzutreten sein; dagegen ist hier sein „Bericht von den Mondskugeln, welche bei der kosmographischen Gesellschaft in Nürnberg aus neuen Beobachtungen verfertigt werden. Nürnberg 1750 in 4." hervorzuheben, zumal demselben einige Muster der von ihm entworfenen Zeichnungen beigefügt sind: **Mayer** hatte nämlich in den Jahren 1748—50 eine grössere Anzahl von solchen Skizzen aufgenommen und mit ihrer Hilfe teils eine Vollmondskarte hergestellt, teils Streifen gezeichnet, welche in Kupfer gestochen und zur Herstellung von Mondgloben verwendet werden sollten; seine Übersiedlung nach Göttingen und sein früher Tod liessen jedoch die Ausführung seines Planes nicht zum Abschlusse kommen, so dass ausser den erwähnten Proben und einem Stiche der auf $19^1/_2{}^{cm}$ verjüngten Vollmondkarte, welchen **Lichtenberg** dem von ihm ausgegebenen ersten und leider einzig gebliebenen Bande der „Tobiæ Mayeri Opera inedita. Tom. I. Gottingæ 1775 in 4." beilegte, von diesen Arbeiten nichts in die Öffentlichkeit gelangte, bis 1881 **Klinkerfues** aus Pietät für seinen grossen Vorgänger unter dem Titel „Tob. Mayers grössere Mondkarte nebst Detailzeichnungen" photolithographische Nachbildungen von der Mondkarte (45^{cm}) und von 40 Specialkarten verschiedener Grösse herausgab und damit zeigte, was **Mayer**, dessen fragmentarische Mitteilungen schon höchst beachtenswert gewesen waren, eigentlich leisten wollte. — Was aus den etwas später von **Lichtenberg** aufgenommenen und von ihm „mit künstlerischer Hand sauber getuschten" Mondzeichnungen geworden ist, welche zur Zeit Kästner besass, weiss ich nicht; dagegen bleibt noch hervorzuheben, dass Lalande in seiner Bibliographie der Anzeige von „John **Russel**, A description of the Selenographia, an apparatus for exhibiting the phænomena of the Moon. London 1797 in 4." die Bemerkung beifügte, es habe der Verfasser zugleich „des fuseaux" für einen einfüssigen Globus gravieren lassen, auf welchen alle Mondflecken dargestellt seien, — sowie dass im Berliner Jahrbuch für 1811 „eine Mondkugel von Russel in London" aus dem Nachlasse von Hahn in Remplin zum Preise von 60 Reichsthaler angeboten wurde, — somit Russel das Mayer'sche Projekt wirklich zur Ausführung brachte. — *d.* Es hatte sich nämlich **Schröter** die Aufgabe gestellt, eine Reihe von Mondlandschaften mit allem Detail so darzustellen, dass

man in späterer Zeit durch Vergleichung mit seinen Zeichnungen allfällige Veränderungen konstatieren könne, und dann wirklich unter dem Titel „Selenotopographische Fragmente. Lilienthal 1791 — Göttingen 1802, 2 Bde. in 4.“ seinen Versuch einer Lösung derselben publiziert. Obschon nun allerdings der Erfolg seiner grossen Mühe nicht voll entsprach, so giebt immerhin sein Werk, auch abgesehen von andern noch später zu erwähnenden Untersuchungen, bei kritischer Benutzung dem Mond-Specialisten manchen wertvollen Anhaltspunkt.

236. Die neuesten Arbeiten. — Eine neue Aera für die Mondtopographie leiteten Wilh. **Beer** [a] und Heinr. **Mädler** ein, als sie 1834 zu Berlin, gestützt auf ein in etwa 600 Nachtwachen gesammeltes reiches Material, eine „Mappa selenographica“ von drei Fuss Durchmesser herausgaben, welche den Mond bei 300-facher Vergrösserung zeigt und nach Bessel ungefähr ebensoviel Detail giebt, als eine auf einem Quartblatte entworfene Karte von Frankreich enthalten könnte. Sie zeichnet sich vor allen frühern Arbeiten nicht nur durch Reichhaltigkeit, sondern namentlich auch durch Präcision aus, und ein ihr unter dem Titel „Der Mond nach seinen kosmischen und individuellen Verhältnissen. Berlin 1837 in 4.“ nachgesandter Text giebt überdies alle wünschbaren Belege für die Karte, sowie eine Menge Detail über alle die eigentümlichen, uns im folgenden noch vielfach beschäftigenden Bildungen und Verhältnisse, an welchen unser Begleiter so reich ist. — An diese kapitale Arbeit schloss sich seither noch eine ganze Reihe von grössern und kleinern Specialarbeiten über den Mond an, von welchen besonders diejenigen von **Lohrmann**, **Schmidt** und **Nasmyth**, sowie die in der allerneuesten Zeit von **Weinek** publizierten „Zeichnungen von Mondkratern und Mondlandschaften“ hervorzuheben sind [b], und da auch die plastischen Darstellungen nicht vernachlässigt wurden [c], namentlich aber die Photographie mit immer schönerm Erfolge dieses dankbare Gebiet bearbeitete [d], so darf man gegenwärtig wohl behaupten, dass man die topographischen Verhältnisse der uns zugewandten Seite des Mondes weit besser kenne, als diejenigen eines grossen Teiles unsers eigenen Wohnplatzes.

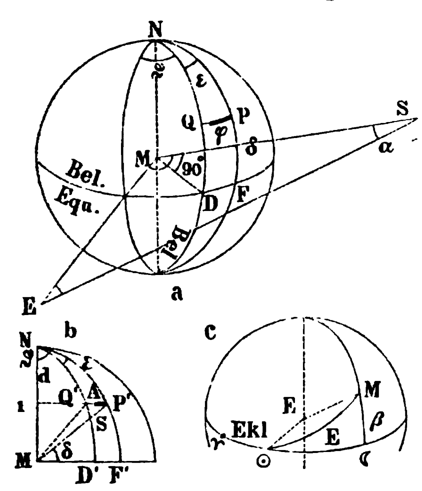
Zu 236: *a.* Wilhelm **Beer** (Berlin 1797 — ebenda 1850) war ein reicher Banquier, der sich nach Ankauf der von Pastorff hinterlassenen Instrumente in Berlin eine eigene Sternwarte einrichtete, für welche er Mädler als Observator engagierte. — *b.* Schon vor Beer und Mädler hatte Wilhelm Gotthelf **Lohrmann** (Dresden 1796 — ebenda 1840; Inspektor des mathem. Salons in Dresden) eine ähnliche Arbeit begonnen und sogar einen Teil derselben unter dem Titel „Topographie der sichtbaren Mondoberfläche. I. Dresden 1824 in 4.“ publiziert; dann aber war er von der Fortsetzung seiner Veröffentlichung, welche damals Epoche gemacht hätte, abgehalten worden, und erst lange Jahre nach seinem Tode gelang es Julius **Schmidt** unter Benutzung des hinterlassenen, durch F. W. und M. Opelt etwas ergänzten Materiales, dem Verstorbenen

durch Ausgabe von „G. **Lohrmann**, Mondcharte in 25 Sectionen und zwei Erläuterungstafeln. Leipzig 1878 in 4., Atl. in fol." ein Denkmal zu setzen, — im gleichen Jahre, wo auch seine eigene Arbeit „Julius **Schmidt**, Charte der Gebirge des Mondes, nach eigenen Beobachtungen in den Jahren 1840—74 entworfen. Berlin 1878 in 4., Atl. in fol." erschien, ein Werk, zu welchem seine frühere Schrift „Der Mond. Ein Überblick über den gegenwärtigen Umfang und Standpunkt unserer Kenntnisse von der Oberflächengestaltung und Physik dieses Weltkörpers. Leipzig 1856 in 8." gewissermassen den Prodromus bildete. Auch „James **Nasmyth** (Edinburgh 1808 — London 1890; Ingenieur in Manchester) und James **Carpenter** (Greenwich 1840 geb.; früher Assist. Greenwich), „The Moon as a Planet, a World and a Satellite. London 1874 in 4. (3. ed. 1885; deutsch von H. J. Klein, Leipzig 1876)" ist sehr bemerkenswert; ferner „Rich. **Proctor,** The Moon. London 1873 in 8., — E. **Neison,** The Moon. London 1876 in 8. (deutsch, Braunschweig 1881), — Heinrich Wilhelm **Thiersch** (München 1817 — Basel 1885; früher Prof. theol. Marburg), Asterios: Die Physiognomie des Mondes. Nördlingen 1879 in 4., — etc." Die Zeichnungen von **Weinek** finden sich in dem 1890 erschienenen „Appendix" zu den Jahrgängen 46—48 der Prager-Beobachtungen. — *c.* Wilhelmine **Böttcher** (Hannover 1777 — ebenda 1854; spätere Hofrätin Witte und Schwiegermutter von Mädler) erstellte mit Hilfe der Mädler'schen Karte ein ganz vorzügliches Relief des Mondes; ferner konstruierte **Dickert** in Bonn, unter Anleitung von Schmidt, eine kolossale drehbare Mondkugel, um den Einfluss der wechselnden Beleuchtung zu demonstrieren; S. **Mognetti** in Genf führte 1859 nach einer Zeichnung von Secchi auf einer Quadrattafel von 90^{cm} Seite ein Relief des Ringgebirges Coppernicus in Gyps aus; etc. — *d.* Während **Daguerre** 1839 noch ohne befriedigenden Erfolg ein Bild des Mondes zu erhalten suchte, gelang dies schon im folgenden Jahre J. W. **Draper** wenigstens einigermassen, und nun folgten sich die Fortschritte rasch: So erhielt W. **Bond** 1850 ein ganz ordentliches Daguerreotyp und etwa 1857 eine schöne Photographie des Mondes, — so gelang es Lewis **Rutherford** in New-York, von 1857 hinweg nicht nur treffliche Photographien, sondern auch befriedigende Stereoskopbilder des Mondes zu produzieren, — und was seither die **Delarue, Secchi, Janssen,** etc., sowie in der allerneuesten Zeit die Photographen des Lick Observatory in dieser Richtung geleistet haben, übersteigt alle frühern Erwartungen.

237. Die Mondberge, Rillen und Strahlensysteme. — In betreff der Mondberge wurden nicht nur die Methoden zur Bestimmung ihrer Höhe nach und nach wesentlich verbessert [a], sondern auch deren Konfiguration ins Auge gefasst. Hiebei ergab sich, dass eigentliche **Bergketten** auf dem Monde nur in verhältnismässig geringer Anzahl vorkommen, während dagegen **Ringgebirge**, d. h. von einem Walle umschlossene Ebenen, in deren Mitte sich meistens ein Bergkegel erhebt, zu Tausenden vorhanden sind [b]. — Von einzelnen Bergen sieht man, wie schon **Langren** und **Hevel** bemerkten, zur Zeit des Vollmondes förmliche **Strahlensysteme** auslaufen, über deren Natur man jedoch noch nicht ganz im Klaren ist, wenn auch die wohl von **Valz** [c] zuerst ausgesprochene Ansicht, dass sie mit bei Hebung der Berge entstandenen Rissen zusammenhängen möchten,

viel für sich hat [d]. Ähnlichen Ursprung dürften auch die sog. **Rillen** haben, d. h. die zuerst von **Schröter** aufgefundenen, jetzt an $3^1/_2$ Hundert zählenden tiefen Spalten, welche an verschiedenen Stellen des Mondes über Berg und Thal weglaufen, — doch sind wohl auch da weitere Studien mit den starken Instrumenten der Neuzeit notwendig, ehe ein etwas sicherer Entscheid getroffen werden kann [e].

Zu 237: *a.* Schon **Hevel** gelang es (vgl. Selenographia 267 u. f.), Galileis Höhenmethode etwas zu verbessern und in einzelnen Fällen die obere Grenze durch wirkliche Werte zu ersetzen; aber eigentlich befriedigende Resultate wurden erst erzielt, als man die Länge des von einem Berge geworfenen Schattens zu messen und in die Rechnung einzuführen begann. Die für letzteres durch **Olbers** zu Gunsten seines Freundes Schröter (vgl. dessen Selenot. Fragm. I 89 u. f.) ausgedachte und später durch **Mädler** noch etwas modifizierte Methode besteht wesentlich in folgendem: Die durch Sonne S, Erde E und Mondcentrum M gelegte Ebene schneidet den Mond in dem sog. **Beleuchtungsequator,** zu welchem Hörnerlinie NM und Lichtgrenze NQ senkrecht stehen, während die Schatten parallel zu demselben oder also senkrecht zur Lichtgrenze geworfen werden. Die von der Erde aus gesehenen Verhältnisse entsprechen der orthographischen Projektion (Fig. b) in Beziehung auf die Mondscheibe, und der gewöhnlichen Himmelskugel (Fig. c) in Beziehung auf die Richtungen. Bezeichnet nun S die scheinbare Länge des von einem Berge P geworfenen Schattens, A die scheinbare Entfernung des Berges von der Lichtgrenze, und d die auf der Hörnerlinie NM gemessene Entfernung des Berges von der Hornspitze N, und sind ferner zur Zeit der Messung ☉ und π Länge und Parallaxe der Sonne, ☽, β und p aber Länge, Breite und Parallaxe des Mondes, so besteht somit die Aufgabe, die Höhe h des Berges P in derselben Einheit zu finden, in welcher S, A und d ausgedrückt sind. Wählen wir als solche Einheit den scheinbaren Mondradius, so ergiebt sich aus den Figuren



$$\mathrm{Si}\,\delta = 1 - \mathrm{d} \qquad \mathrm{Co}\,E = \mathrm{Co}\,\beta \cdot \mathrm{Co}\,(☾ - ☉) \qquad \mathbf{1}$$

$$(SE + ME) : (SE - ME) = \mathrm{Tg}\,{}^1/_2\,(M + \alpha) : \mathrm{Tg}\,{}^1/_2\,(M - \alpha) \qquad \mathbf{2}$$

während $SE : ME = \mathrm{Tg}\,p : \mathrm{Tg}\,\pi$ ist, ferner $M + \alpha = 180^0 - E$, und $M - \alpha = 180^0 - E - 2\alpha$. Man hat daher nach 2

$$\mathrm{Tg}\,({}^1/_2 E + \alpha) = C \cdot \mathrm{Tg}\,{}^1/_2 E \quad \text{wo} \quad C = \mathrm{Tg}\,(45^0 + x) \quad \text{und} \quad \mathrm{Tg}\,x = \mathrm{Tg}\,\pi : \mathrm{Tg}\,p \qquad \mathbf{3}$$

so dass man α leicht berechnen kann. Nichts destoweniger giebt **Mädler** statt 3 eine Näherungsformel, die auf folgende Weise erhalten wird: Aus 3 folgt leicht

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{(C-1)\cdot \mathrm{Tg}\,{}^1/_2 E}{1 + C \cdot \mathrm{Tg}^2\,{}^1/_2 E} = \frac{\mathrm{Si}\,E \cdot \mathrm{Tg}\,x}{1 - \mathrm{Co}\,E \cdot \mathrm{Tg}\,x} \qquad \mathbf{4}$$

oder, wenn man die kleine Grösse $\text{Co E} \cdot \text{Tg x}$ gegen 1 vernachlässigt,

$$\text{Tg}\,\alpha = \text{Si E} \cdot \text{Tg x} = \text{Tg}\,\pi \cdot \text{Si E} : \text{Tg p} \quad \text{so dass} \quad \alpha \fallingdotseq \pi \cdot \text{Si E} : \text{Tg p} \qquad \mathbf{5}$$

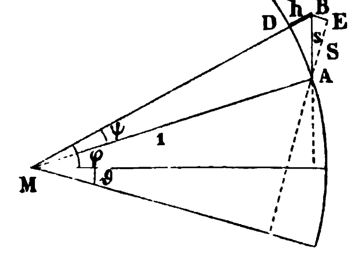
Hat man nach 3 oder 5 den Winkel α gefunden, so ergiebt sich nach

$$90^0 + \vartheta = \text{M} = 180^0 - \text{E} - \alpha \qquad \mathbf{6}$$

auch ϑ und, da nach den Eigenschaften der orthographischen Projektion (104) einerseits $\text{D'F'} = \text{A} \cdot \text{Se}\,\delta$ und anderseits $\text{D'F'} = \text{MF'} - \text{MD'} = \text{Si}\,(\vartheta + \varepsilon) - \text{Si}\,\vartheta$, also

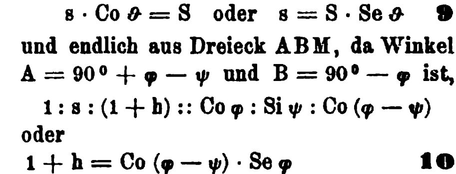
$$\text{Si}\,(\vartheta + \varepsilon) = \text{Si}\,\vartheta + \text{A} \cdot \text{Se}\,\delta \qquad \mathbf{7}$$

ist, der Winkel ε des Bergmeridianes mit der Lichtgrenze. Da nun die Sonne im Horizonte der Lichtgrenze steht, so ist die Sonnenhöhe für den Horizont des Berges (Fig. a) gleich dem Abstande $\varphi = \text{PQ}$ des Berges von der Lichtgrenze, und aus dem bei Q rechtwinkligen Dreiecke PQN folgt somit



$$\text{Si}\,\varphi = \text{Si}\,\varepsilon \cdot \text{Co}\,\delta \qquad \mathbf{8}$$

Aus Dreieck ABE erhält man aber, da Winkel A gleich ϑ ist,



$$\text{s} \cdot \text{Co}\,\vartheta = \text{S} \quad \text{oder} \quad \text{s} = \text{S} \cdot \text{Se}\,\vartheta \qquad \mathbf{9}$$

und endlich aus Dreieck ABM, da Winkel $\text{A} = 90^0 + \varphi - \psi$ und $\text{B} = 90^0 - \varphi$ ist,

$$1 : \text{s} : (1 + \text{h}) :: \text{Co}\,\varphi : \text{Si}\,\psi : \text{Co}\,(\varphi - \psi)$$

oder

$$\text{Si}\,\psi = \text{s} \cdot \text{Co}\,\varphi \qquad 1 + \text{h} = \text{Co}\,(\varphi - \psi) \cdot \text{Se}\,\varphi \qquad \mathbf{10}$$

so dass successive nach 8—10 die Hilfsgrössen φ, s, ψ und die Gesuchte h erhalten werden können. — **Mädler** vermass unter anderm 1839 III 15, $6^h\ 40^m$ m. Z. Berl., wo nach dem Berl. Jahrb. $\odot = 354^0\ 41'\ 44''$, ☾ $= 52^0\ 22'\ 51''$, $\beta = -2^0\ 46'\ 2''$, $\text{p} = 54'\ 57'',3$ und $\pi = 8'',62$ war, den Berg **Littrow** (selen. Länge 32^0 und Breite 22^0; vgl. 240) und fand für ihn in Mikrometerteilen $\text{A} = 1{,}149$, $\text{S} = 0{,}424$ und $\text{d} = 13{,}594$, während der Mondradius 20,587 solcher Teile fasste. Man hat daher in Teilen des Radius $\text{A} = 0{,}055812$, $\text{S} = 0{,}020596$, $\text{d} = 0{,}660320$ und somit successive nach 1 und 5—10: $\delta = 19^0\ 51'\ 27''$, $\text{E} = 57^0\ 43'\ 39''$, $\alpha = 7'\ 35'',89$, $\vartheta = 32^0\ 8'\ 45''$, $\varepsilon = 4^0\ 6'\ 42''$, $\varphi = 3^0\ 52'\ 0''$, $\text{s} = 0{,}024325$, $\psi = 1^0\ 33'\ 26''$ und $\text{h} = 0{,}024325$ oder, mit Mädler den Mondradius zu 890847^t annehmend, $\text{h} \fallingdotseq 1200^t$. — *b.* Die Plateau's der Ringgebirge scheinen bald beträchtlich höher und bald beträchtlich tiefer als die benachbarten Teile der Mondoberfläche zu liegen, dagegen soll der Centralberg nie die Höhe des Walles erreichen. — *c.* Jean-Elix-Benjamin **Valz** (Nîmes 1787 — Marseille 1867) war erst Privatastronom in Nîmes, dann Dir. Obs. Marseille. — *d.* Die **Strahlensysteme**, von welchen namentlich das vom Berge Tycho auslaufende sehr auffällig ist und daher auch zuerst bemerkt wurde, erklärte man sich früher einfach durch Annahme von Stellen grösserer Reflexionsfähigkeit, während sie sodann **Schwabe** einem, durch eine Art Vegetation zur Zeit des Vollmondes (Mond-Sommers) hervorgerufenen Dunklerwerden der Umgebung zuschreiben wollte. Wesentlich anders fasste dagegen **Valz** diese Strahlen auf, indem er 1842 VIII 19 (vgl. Notiz 387) an Gautier über dieselben schrieb: „Leur disposition rayonnante autour des principaux craters, surtout de celui de Tycho, doit faire penser que ce sont bien des **crevasses de soulèvement**, dont le remplissage d'une nature différente, indiquée par un éclat particulier, est survenu postérieurement, puis qu'on n'apperçoit pas de dépression". Dieser letztern Ansicht sind, wenn auch wahrscheinlich ohne sie

zu kennen, **Nasmyth** und **Carpenter** ebenfalls beigetreten, ja haben dieselbe durch Versuche mit Glaskugeln sogar zu begründen versucht. — *e.* Die erste **Rille** wurde 1788 durch **Schröter** bei Hyginus aufgefunden und seither sind solche Gebilde, in welchen der originelle **Gruithuisen** Kanalanlagen zu erkennen glaubte, vielfach, namentlich auch durch Jul. **Schmidt**, aufgesucht worden.

238. Masse, Dichte und Atmosphäre des Mondes. — Da der Radius des Mondes (232) etwa $^3/_{11}$ desjenigen der Erde, sein Volumen somit circa $^1/_{49}$ des Erdvolumens ist, die Masse dagegen, wie wir alsbald (241) finden werden, nur etwa $^1/_{80}$ der Erdmasse beträgt, und endlich die Dichte der Erde (222) zu 5,6 anzunehmen ist, so kann man die Dichte des Mondes gleich $5{,}6 \times {}^{49}/_{80} \risingdotseq 3{,}4$ setzen [a]. — Über die Existenz einer merklichen Mondatmosphäre ist von jeher viel verhandelt worden, ohne dass man bis jetzt zu einem abschliessenden Resultate gelangen konnte: Allerdings geht aus verschiedenen Erscheinungen hervor, dass eine solche Atmosphäre nur geringe Höhe und Dichte besitzen kann [b]; aber dadurch ist ein gänzliches Fehlen nicht erwiesen, zumal gerade in der neuesten Zeit einige Spuren aufgefunden worden sind [c]. Überdies haben ältere und neuere Untersuchungen sehr wahrscheinlich gemacht, dass der Mond keineswegs sphärisch ist und sein Schwerpunkt weiter von der Erde abliegt, als der Mittelpunkt der Gestalt [d]: Letzteres erklärt aber nicht nur die alsbald (240) näher zu besprechende Übereinstimmung zwischen Rotation und Revolution, sondern macht auch die Annahme zulässig, dass die von uns abgewandte Seite des Mondes niedriger als die uns zugewandte sei, folglich eine beträchtlichere Atmosphäre als diese besitze [e].

Zu 238: *a.* Haben zwei Gestirne der Distanz a die Massen M und m, so wird ihre Wirkung auf einen zwischenliegenden, von M um x abstehenden Punkt nach dem Gravitationsgesetze (268) gleich gross sein, wenn

$$M : x^2 = m : (a - x)^2 \qquad \text{oder} \qquad x = a\left[M - \sqrt{M \cdot m}\right] : (M - m) \qquad \mathbf{1}$$

ist. Setzt man nun für Erde und Mond (232) a = 50000 g. M. und wie oben $m = {}^1/_{80} \cdot M$, so wird $x \risingdotseq 45000$ g. M.; es liegt also der sog. **neutrale Punkt**, in welchem die Gesetze der Schwere suspendiert erscheinen und welchen Jul. **Verne** in seiner „Reise nach dem Monde" so köstlich benutzte, nur etwa 5000 Meilen herwärts vom Monde. Setzt man ferner für Sonne und Erde (270—71) a = 19917000 g. M., M = 354936 und m = 1, so wird x = 19883600 g. M., und es ist somit der neutrale Punkt zwischen Sonne und Erde nur etwa 33400 = 50000 — 16600 g. M. von der Erde entfernt, so dass der Mond, wenn er auch Vasall der Erde ist, doch mit derselben dem Oberbefehl der Sonne gehorchen muss. — *b.* Was manche am Monde an der Lichtgrenze als Dämmerungslicht ansehen und als Beweismittel für die Existenz einer merklichen Mondatmosphäre benutzen wollten, kann auch, wie schon **Bessel** hervorhob, durch die noch nicht volle Beleuchtung der erst teilweise aufgegangenen Sonne erklärt werden; auch beim Vorübergange des Mondes vor andern Gestirnen hat man weder Refraktionserscheinungen, noch ein allmäliges Bedecken

wahrnehmen können. — *c.* Nach Günther stellte Joh. Heinr. **Müller** in seiner Dissertation „Quæstio curiosa physico-astronomica, an Luna cingatur atmosphæra. Altdorfii 1710 in 4." die Gründe für und wider recht gut zusammen und kam zu dem Schlusssatze „Atmosphæra circa Lunam penitus negari non potest", dem auch die neueste Zeit um so mehr zustimmen kann, als F. Louis **Thollon** (Ambronay in Ain 1829 — Lyon 1887; Obs. Paris und Nizza) und **Trépied** bei Beobachtung der für Oberegypten totalen Sonnenfinsternis von 1882 V 17 mit Hilfe der Spektralanalyse Spuren einer Mondatmosphäre gefunden zu haben glauben, an welche **Résal** in seiner „Mécanique céleste (2 éd. p. 324) bereits einige Betrachtungen angeknüpft hat. — *d.* Die schon von **Newton** in seinen „Principien (Ed. 1686 p. 467)" und dann wieder durch **Lagrange** in seiner „Théorie de la libration de la lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète (Mém. Berl. 1780)" ausgesprochene Ansicht, dass der Mond nicht sphärisch und seine grösste Axe nach der Erde gerichtet sei, ist nämlich durch **Hansen** in seiner Abhandlung „Sur la figure de la lune (Mem. A. S. 24 von 1856)" noch dahin ergänzt worden, dass nach seinen Rechnungen der Schwerpunkt des Mondes bei $59000^{m} = 8$ g. M. weiter von der Erde abstehe als der Mittelpunkt der Gestalt. — *e.* Wilhelm **Valentiner** (Eckernförde in Schleswig-Holstein 1845 geb.; Prof. astr. Karlsruhe) macht (vgl. „Gestirnter Himmel. Stuttgart 1887 in 8.") darauf aufmerksam, dass also die Mitte der uns zugewandten Hemisphäre des Mondes bei 59^{km} über dem mittlern Niveau liege, und sagt: „Denken wir uns nun Erhebungen auf der Erde, die in gleichem Verhältnisse zum Erdhalbmesser stehen, wie jene 59^{km} zum Mondhalbmesser, so würden diese etwa 216^{km} entsprechen, und in solchen Höhen kennen auch wir keine Atmosphäre mehr, wenigstens nur von solcher Feinheit, dass sie (223) nicht mehr im stande ist, Sonnenstrahlen zu reflektieren".

239. Die Lebenserscheinungen. — Unsern Mond als einen gegenwärtig jeder Lebensthätigkeit und aller Organismen entbehrenden, also gewissermassen abgestorbenen Weltkörper betrachten zu wollen, müsste ich für Unsinn halten, auch wenn keine einzige Beobachtung vorhanden wäre, welche das Gegenteil beweisen würde. Dies ist jedoch keineswegs der Fall; denn wenn auch viele das zu verschiedenen Zeiten auf dem Monde bemerkte und mit noch gegenwärtig auf demselben thätigen Vulkanen in Verbindung gebrachte Aufleuchten als eine Täuschung bezeichnen oder wenigstens in anderer Weise erklären wollten [a], so ist damit noch keineswegs der Beweis geleistet, dass sie wirklich das Richtige getroffen haben [b], und überdies würden auch in diesem Falle mehrere, von den gewiegtesten Beobachtern des Mondes in neuerer Zeit bemerkte Bodenveränderungen übrig bleiben, welche sich kaum wegdisputieren lassen dürften [c]. Allerdings sind dann aber auch andere wieder viel zu weit gegangen, wenn sie dem Monde ähnliche Organismen und Kulturen zuteilen wollten, wie wir sie auf unserer Erde zu sehen gewohnt sind [d], da solche in der That bei dem mutmasslichen Mangel einer für unsere Athmungswerkzeuge ausreichenden Atmosphäre und

damit wohl auch genügenden Wassers, kaum gedenkbar sind. Wir müssen uns schlechterdings bescheiden, unsere Unwissenheit einzugestehen [e].

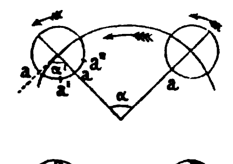
Zu 239: *a.* Die zahlreichen Ringgebirge des Mondes lassen auf eine vorherrschend vulkanische Natur unsers Begleiters schliessen; ob aber einzelne dieser Vulkane zuweilen noch thätig sind, steht allerdings in Frage, wenn es auch nicht an Andeutungen dafür fehlt: So wird z. B. berichtet (vgl. Math. Lexikon von 1747), es haben **Halley** und Jacques-Eugène **Louville** (Allonville 1671 — Carré 1732; Oberst und Akad. Paris) „bei der gäntzlichen Sonnenfinsterniss 1715 Blitze im Monde fahren sehen". Ferner sah **Herschel** (vgl. seinen „Account of three Volcans in the Moon" in Phil. Tr. 1787; auch Brief von Christoph Girtanner in Journ. de phys. 1787 und verschiedene Mitteilungen im Berl. Jahrb. auf 1788 und 1790) 1783 V 4, sowie 1787 IV 20 und V 17 auf der Nachtseite des Mondes ein Aufleuchten, ja unter letzterm Datum nach Bericht des Grafen Moritz **v. Brühl** (Wiederau bei Liebenwerda 1736 — London 1809; sächs. Gesandter in London und Privatastronom), der 1787 V 19 und 20 ebenfalls Zeuge solcher Erscheinungen war, wie einen Lavastrom, und dachte dabei an vulkanische Thätigkeit, wenn er auch den Ausdruck „Volcanos" mehr zum „bezeichnen" als zum „erklären" gebraucht haben will, — und ebenso glaubten J. **Perny** de Villeneuve (Paris 1765 — ebenda 1810?; Geodäte und Astronom der Pariser Sternwarte) und Antoine **Nouet** (Pompei bei Nantes 1740 — Chambéry 1811; Astronom der Pariser Sternwarte und der Expedition nach Egypten), als sie, der erstere 1787 V 22, der zweite 1788 III 13 in Gegenwart von **Méchain**, analoges Aufleuchten bemerkten, Zeugen von Eruptionen zu sein, und letzterer verglich dasselbe (Journ. d. Sav. 1788 p. 317) „à une petite nèbuleuse dont la lumière augmentait de tems à autre comme par éclats". Die meisten Neuern sind nun allerdings der von **Olbers** (Berl. Jahrb. 1824) aufgestellten Ansicht beigetreten, dass diese Erscheinungen, zumal der Mangel einer Atmosphäre für Vulkanausbrüche nicht günstig sei, eher mit irgendwelchen Beleuchtungsverhältnissen zusammenhängen und dem zuweilen bei Aristarch bemerkten Nachglühen verwandt sein dürften; aber zu einem allseitig befriedigenden Abschlusse ist man noch nicht gelangt. — *b.* Ohne hierauf eine Hypothese stützen zu wollen, mache ich darauf aufmerksam, dass 1787 IV 20, V 17 und 19 Nordlichttage waren, — überhaupt die meisten der obigen Daten auf das grosse Sonnenflecken- und Nordlicht-Maximum der Jahre 1787/8 fallen. Wir dürfen die Wahrheit des Ausspruches „Nous n'avons point d'idée des élémens et des combinaisons de la matière dans des parties de l'univers si éloignées et si différentes des nôtres" nie vergessen und haben uns daher in vielen Fällen darauf zu beschränken, Thatsachen und Parallelen behufs späterer Diskussion zu sammeln, aber ja nicht à la Busäus (278) dieselben, wenn sie unbequem sind, wegzudekretieren. — *c.* So konnte Jul. **Schmidt** 1866 den von Lohrmann und Mädler als Fixpunkt gebrauchten und auch von ihm selbst mehrfach beobachteten Krater Linné im sog. Mare serenitatis kaum wieder finden, — so entdeckte Herm. **Klein** 1877 auf seiner, vorzugsweise für Selenographie bestimmten Privatsternwarte, in der Nähe des Hyginus einen bei Mädler fehlenden kleinen Krater, welchen sodann auch Schmidt als eine „muldenförmige Vertiefung" anerkannte, welche man bei früherer Existenz kaum hätte übersehen können, jedoch später wieder schwer sichtbar fand, — etc." — *d.* Noch **Schröter** sprach sich entschieden für die Bewohnbarkeit des Mondes

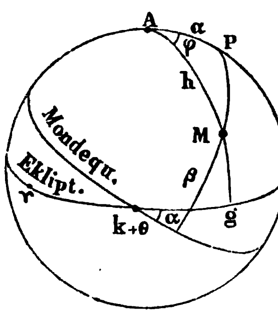
aus, und der originelle **Gruithuisen** wollte sogar Kulturen, Städte, Kanäle, etc. auf demselben sehen, ja machte den Vorschlag, auf der Erde, zur Einleitung einer Korrespondenz mit den Mondbewohnern, den pythagoräischen Lehrsatz durch grosse Runkelrübenfelder darzustellen. Solche Extravaganzen schufen natürlich im grössern Publikum für das mutmasslich von Jean **Nicollet** (Sluse in Savoyen 1786 — Washington 1843; früher ein sehr tüchtiger Astronom der Pariser Sternwarte, dann als Börsenspieler verkommen) verfasste, jedenfalls 1836 von Amerika aus verbreitete Pamphlet „Herschel's höchst merkwürdige Entdeckungen am Cap. Hamburg 1836 in 8. (auch franz. u. engl.)" einen sehr günstigen Boden, so dass es trotz seines monstrueusen Inhalts sogar bei sog. Gebildeten vielen Glauben fand, — und da kaum je mehr in der Kunst geleistet worden ist, auf wenigen Seiten allen erdenklichen Unsinn über Konstruktion von Instrumenten, Entdeckung von Büffelherden und geflügelten Menschen, etc., in einer den Halbwisser irreführenden Art zusammenzustellen, so ist diesem Machwerk eine gewisse kulturhistorische Bedeutung nicht abzusprechen, da es den Beweis geleistet hat, wie leicht auch in unserer „hochgebildeten" Zeit die Gimpel auf den Leim gehen. — *e.* Durch ein etwas absprechendes Urteil von Bessel (vgl. Pop. Vorl. 81/2) wurde **Gauss** veranlasst, 1854 V 21 an Humboldt folgende an Plutarch (233 : c) erinnernde Worte zu schreiben: „Jeder, der die Thatsachen kennt, wird Mondbewohner, falls es solche gibt, für gänzlich anders gebaut halten müssen als die Erdbewohner; aber es wäre voreilig desshalb dem Mond mir nichts dir nichts alle Einwohner abzusprechen: **Die Natur hat mehr Mittel als der arme Mensch ahnen kann.**"

240. Die Libration. — Mit dem Fernrohr wurde sofort bemerkt, dass auf dem Monde alle Objekte wesentlich immer dieselbe Lage gegen den scheinbaren Rand beibehalten, und wenn auch anfänglich einzelne hieraus schliessen wollten, dass der Mond nicht rotiere, so brach sich doch bald allgemein die richtige Ansicht Bahn, man habe somit gegenteils anzunehmen, dass der Mond in derselben Zeit, welcher er für eine Rotation um die Erde bedürfe, auch eine Rotation um seine Axe vollende. Da aber die Rotation ihrer Natur nach eine gleichförmige, die Revolution dagegen (210) eine ungleichförmige ist, — da ferner die Mondaxe sich parallel bleibt, aber mit der Bahnebene nur einen Winkel von etwa $83^1/_2{}^0$ bildet, — und da endlich die Grösse der Erde gegen ihre Distanz vom Monde nicht verschwindet, so ist der scheinbare Mondrand etwas variierend, wie wenn der Mond schwanken würde oder sog. **Librationen** vorhanden wären [a]. Diese letztern, welche schon von **Galilei** und seinen nächsten Nachfolgern bemerkt, dann aber namentlich durch und seit Tobias **Mayer** eingehend studiert wurden [b], bewirken nach einer Überschlagsrechnung von **Mädler**, dass wir von der Mondoberfläche nur $^3/_7$ beständig, aber auch $^3/_7$ nie, den Rest dagegen zuweilen sehen: Sie sind sämtlich nur von der Stellung des Beobachters gegen den Mond, nicht von diesem selbst abhängig, und heissen darum **optische** Librationen, während wir später (513)

im Gegensatze dazu auch wirkliche oder **physische** Librationen zu besprechen haben werden [e].

Zu 240: *a.* Infolge der wechselnden Geschwindigkeit in der Bahn wird offenbar die Winkelbewegung α bald etwas grösser, bald etwas kleiner als die der mittlern Geschwindigkeit entsprechende Rotationsbewegung α' sein, also wird der Punkt a, welcher bei einer ersten Stellung des Mondes seine Mitte bildete, bei einer zweiten Stellung bald in a', bald in a'' erscheinen, so dass am rechten oder linken Rande des Mondes Stellen sichtbar werden, die man früher nicht sah, gerade wie wenn der Mond etwas schwanken würde. Ausser dieser sog. **Libration in Länge** bewirkt die erwähnte Stellung der Mondaxe, wie aus der zweiten Figur hervorgeht, auch eine **Libration in Breite,** und dass die Veränderung der Stellung des Beobachters ebenfalls eine Libration, die sog. **parallaktische,** zur Folge haben muss, ist wohl selbstverständlich. — *b.* Aus einem 1637 II 20 von **Galilei** an Antonini geschriebenen Briefe geht hervor, dass ersterer schon frühe auf die Libration aufmerksam wurde, und auch **Langren** und **Hevel** studierten dieselbe, sowie etwas später **Newton** (vgl. Princ. ed. 1687, p. 421). Ferner beschäftigten sich die **Cassini** eifrig mit dem Monde (vgl. „Jacques Cassini, De la libration apparente de la lune“ in Mém. Par. 1721, und pag. 255 bis 271 seiner Elemente), und abstrahierten aus ihren Messungen unter anderm das nach ihnen benannte Gesetz: „Die Neigung des Mondequators gegen die Ekliptik ist konstant, und sein aufsteigender Knoten in derselben fällt mit dem niedersteigenden Knoten der Mondbahn zusammen“. Auch Gottfried **Heinsius** (Naumburg 1709 — Leipzig 1769; Prof. math. et astron. Petersburg und Leipzig) verdankt man eine bemerkenswerte Abhandlung „De apparentia æquatoris lunaris in disco Lunæ. Lipsiæ 1745 in 4.“; aber unsere gegenwärtige Theorie der Libration wurde doch erst durch die Untersuchung begründet, welche Tob. **Mayer** in seiner bereits (235 : c) erwähnten Abhandlung von 1748 anstellte, auf welche wir nun im Detail eintreten wollen: Sie enthält zunächst eine von Mayer ausgedachte und sehr bemerkenswerte Methode, um aus wiederholten Positionsbestimmungen eines Fleckens (des etwas nordwestlich von der Mitte liegenden Manilius) die Lage des Mondequators zu bestimmen. Bezeichnet nämlich A den Pol der durch den Mondmittelpunkt zur Ekliptik gelegten Parallelebene, P dagegen den von ihm um α abstehenden Pol des Mondequators, M den ausgewählten Flecken, β dessen Breite, h seine Ekliptikpoldistanz, g seine Länge, k die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn, und $k + \theta$ endlich (wo θ nach dem Cassini'schen Gesetze eine kleine Grösse ist) die Länge des absteigenden Knotens des Mondequators, so hat man, da $\varphi = 90^0 - (g - k - \theta)$ ist, aus Dreieck AMP





$$\mathrm{Si}\,\beta = \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,h + \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,h \cdot \mathrm{Si}\,(g - k - \theta) \quad 1$$

woraus durch Differentiation nach h und g

$$\frac{dh}{dg} = \frac{\mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,h \cdot \mathrm{Co}\,(g - k - \theta)}{\mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,h - \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,h \cdot \mathrm{Si}\,(g - k - \theta)}$$

folgt, so dass h ein Max. oder Min. wird, wenn $\mathrm{Co}\,(g - k - \theta) = 0$ oder $\mathrm{Si}\,(g - k - \theta) = \pm 1$ ist.

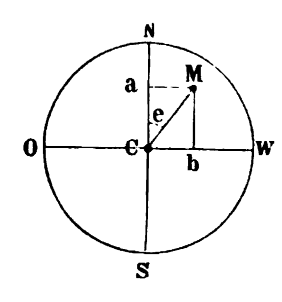
Hiefür giebt aber 1

$$\text{Si}\,\beta = \text{Co}\,(\alpha \mp \text{h}) \qquad \text{oder} \qquad \text{h} = 90^{\circ} - \beta + \text{n} \qquad \mathbf{2}$$

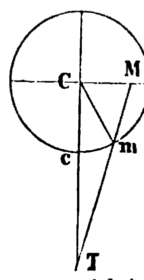
wo n zwischen $+\alpha$ und $-\alpha$ variiert. Nimmt man somit an, man kenne g, h, k für drei Zeiten, so kann man 1 oder die aus ihr, mit Hilfe von 2 und unter Annahme, es seien ausser θ auch α und somit n klein, hervorgehende Näherungsgleichung

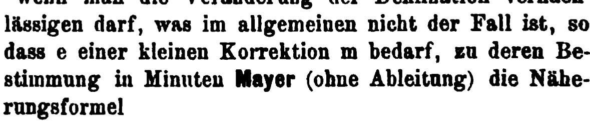
$$\alpha \cdot \text{Si}\,(\text{g} - \text{k}) - \alpha\,\text{Si}\,\theta \cdot \text{Co}\,(\text{g} - \text{k}) = \beta - (90 - \text{h}) \qquad \mathbf{3}$$

dreimal aufschreiben, und sodann α, β, θ berechnen, — nach den 1 etwas genauer, nach den 3 etwas bequemer. — Was nun die Bestimmung der g, h und k anbelangt, so konnte schon zur Zeit von **Mayer** der Wert von k mit hinlänglicher Sicherheit den Mondtafeln entnommen werden, während dagegen g und h in der Art wie folgendes Beispiel zeigt, aus Beobachtungen zu ermitteln waren: **Mayer** fand 1749 III 4, $11^h\ 30^m$, dass Manilius 18′ 20″ über dem südlichen Mondrand stand und $69^s,1$ früher als der östliche Mondrand durch denselben Deklinationskreis ging. Da nun damals der scheinbare Halbmesser des Mondes 15′ 1″ betrug und $61^s,2$ brauchte, um durch den Deklinationskreis zu gehen, so war in Teilen des Halbmessers $\text{Ca} = (18'\,20'' - 15'\,1'') : 15'\,1'' = \overline{9,34413}$, $\text{Cb} = (69^s,1 - 61^s,2) : 61^s,2 = \overline{9,11088}$, somit $\text{Tg}\,\text{e} = \text{Cb} : \text{Ca} = \overline{9,76675}$ oder $\text{e} = 30^{\circ}\,18'$ und $\text{CM} = \text{Cb} : \text{Si}\,\text{e} = \overline{9,40799} = 0,2558$.



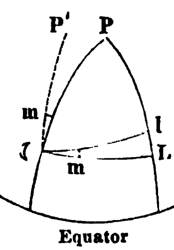
Da aber für den auf der Erde in T stehenden Beobachter, welcher den Flecken m nach M projiciert, $\angle\,\text{mMC} \doteq 90^{\circ}$ ist, so hat man $\text{Si}\,\text{CmM} \doteq \text{CM}$ oder $\angle\,\text{CmM} \doteq 14^{\circ}\,49\tfrac{1}{2}'$, während nach oben (im Mittel aus den frühern $\text{Ca} \doteq 15'\,1''$ und $\text{CM} \doteq 15'\,1''$) $\angle\,\text{CTm} \doteq 3\tfrac{1}{2}'$ ist. Man hat somit den Bogenabstand des Fleckens von der Mondmitte $\text{cm} = \angle\,\text{CmM} - \angle\,\text{CTm} = 14^{\circ}\,46'$. — Bei der zu Grunde gelegten mikrometrischen Messung wurde der scheinbare Weg ☾ l des Mondes dem Parallel ☾ L substituiert, und entsprechend die zu ihm Senkrechte ☾ P′ dem Deklinationskreise ☾ P, was offenbar nur richtig ist, wenn man die Veränderung der Deklination vernachlässigen darf, was im allgemeinen nicht der Fall ist, so dass e einer kleinen Korrektion m bedarf, zu deren Bestimmung in Minuten **Mayer** (ohne Ableitung) die Näherungsformel



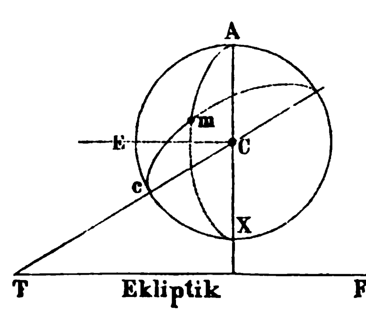


$$\text{m} = -\tfrac{1}{6}\,\text{n} \cdot \text{Se}\,\delta - \pi\,\text{Co}\,\varphi \cdot \text{Si}\,\varepsilon\,\text{Tg}\,\delta \qquad \mathbf{4}$$

giebt, wo δ die Deklination des Mondes zur Zeit der Beobachtung, n ihre in Minuten gezählte Zunahme in einem Tage, π die Parallaxe des Mondes, φ die Breite des Beobachters, und ε der Bogen ist, welchen der Mond vom Momente der Beobachtung an bis zur Culmination noch zurückzulegen hat. Für die Beobachtung von 1749 III 4 fand er nach dieser Formel unter Benutzung der Angaben des Berliner-Kalenders $\text{m} = 53'$ und somit $\text{e}' = \text{e} + \text{m} = 31^{\circ}\,11'$. Sodann berechnete er in gewohnter Weise für jede Beobachtungszeit die sog. Position, d. h. den Winkel u des Breitenkreises des Mondes mit



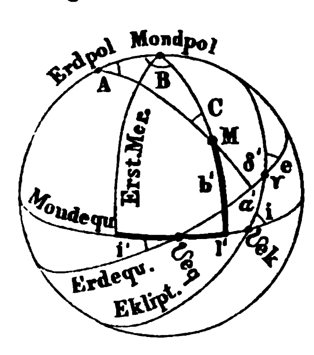
seinem Deklinationskreise, was ihm z. B. für 1749 III 4 den Wert u = 23° 15′ ergab, so dass, wenn ACX den Durchschnitt des Mondes mit der Ebene des durch sein Centrum gelegten Breitenkreises darstellt, ∠ Acm = e′ + u = 54° 26′ wird, während nach oben cm = 14° 46′ und, nach Berechnung von **Mayer** für seinen Beobachtungsort Nürnberg die scheinbare Breite des Mondes ∠ CTF = Ec = — 4° 42′, folglich Ac = 85° 18′ war. Hieraus folgt aber durch trigonometrische Rechnung h = Am = 76° 53′ und ∠ cAm = 12° 17′, oder endlich, da die scheinbare Länge des Mondes 1749 III 4 für Nürnberg 5ˢ 22° 9′, also vom Monde aus gesehen die Länge von Nürnberg 11ˢ 22° 9′ betrug, und **Mayer** k = 9ˢ 26° 15′ anzunehmen hatte, g = 11ˢ 22° 9′ + 12° 17′ = 12ˢ 4° 26′ und g — k = 12ˢ 4° 26′ — 9ˢ 26° 15′ = 68° 11′. Hiefür ergiebt sich aber für 1749 III 4 nach 3 die Bedingungsgleichung



$$\beta = 13^\circ\ 7' + 0{,}9284 \cdot \alpha - 0{,}3716 \cdot \alpha \cdot \text{Si}\ \theta$$

und ähnliche Gleichungen erhielt **Mayer** auch für die andern 26 Beobachtungen des Manilius, die er von 1748 IV 11 an bis zu dem mehrerwähnten Datum erhalten hatte. Er ordnete nun diese 27 Gleichungen nach den Koeffizienten von α (vom grössten + bis zum grössten — fortschreitend), addierte sodann die 1—9, 10—18, 19—27, erhielt so gewissermassen drei Normalgleichungen und fand nun aus diesen $\alpha = 1^\circ\ 30'$, $\beta = 14^\circ\ 33'$ und $\theta = -3^\circ\ 45'$. Es war so die Lage des Mondequators und die Distanz des Fleckens von demselben bestimmt, somit die Aufgabe gelöst. — *c*. Es würde zu weit führen, auch die neuern Methoden zur Lösung der Mayer'schen Aufgabe hier im Detail zu behandeln, und es muss sowohl hiefür, als für das ganze Gebiet, auf Specialschriften, wie, ausser den schon angeführten, auf „**Lalande**, Observations des taches et de la libration de la lune pour prouver le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire (Mém. Par. 1788), — Jean **Nicollet**, Mémoire sur la libration de la lune (Lû à l'Acad. 1818, publ. Conn. d. t. 1822), — **Poisson**, Sur la libration de la lune (Conn. d. t. 1821/2), — Ch. Th. **Kramp** (Sohn von Christ. K. in 33?), Libration de la Lune. Strasbourg 1830 in 4., — **Bessel**, Bestimmung der Libration des Mondes durch Beobachtungen (A. N. 376—77 von 1839), — Moritz Ludwig Georg **Wichmann** (Celle 1821 — Königsberg 1859; Obs. Königsberg), Heliometer-Beobachtungen zur Bestimmung der physischen Libration des Mondes (A. N. 619 u. f. von 1847/8, und 907 von 1854), — Al. **Beck**, Über die Gestalt des Mondes (Zürch. Viert. 1877), — A. **Giesen**, Oscillatorische Bewegung eines verlängerten Rotationsellipsoides in Folge der Anziehung eines weit entfernten Punktes (Z. f. M. u. Ph. 23 von 1878; mit Anwendung auf den Mond), — E. **Hartwig**, Beitrag zur Bestimmung der physischen Libration des Mondes aus Beobachtungen am Strassburger-Heliometer. Karlsruhe 1880 in 4., — Jul. **Franz**, Neue Berechnung von Hartwigs Beobachtungen der physischen Libration des Mondes (A. N. 2761 von 1886), — etc." verwiesen werden, womit zugleich auch für später (511) vorgesorgt ist; dagegen ist noch anzudeuten, wie, wenn man einmal die Länge ☊ des aufsteigenden Knotens des Mondequators in der Ekliptik und den Winkel i dieser beiden Ebenen als bekannt voraussetzen darf, weiter zu progredieren ist:

Man kennt alsdann in dem Dreiecke zwischen dem Frühlingspunkte und den absteigenden Knoten des Mondequators in Ekliptik und Erdequator eine Seite und die anliegenden Winkel und kann daher, z. B. mit Hilfe der Gauss'schen Formeln, die drei übrigen Elemente berechnen, nämlich: i' oder die Neigung des Mondequators gegen den Erdequator, $\Delta = ☋eq - ☋ek$ oder die Distanz der beiden Knoten, und $180° - ☊' = ☋eq - ♈$, wo $☊'$ die AR des Mondequatorknotens bezeichnet. Kennt man ferner aus den Tafeln die Equatorcoordinaten α' und δ' der scheinbaren Mondmitte M, und damit auch den Winkel $A = 90° - [\alpha' - (☊' + 180°)] = 270° + ☊' - \alpha'$, sowie die ihn einschliessenden Seiten $AB = i'$ und $AC = 90° - \delta'$ des Dreieckes ABC, so kann man, z. B. wieder mit Hilfe der sog. Gauss'schen Formeln, auch B, C und BC berechnen. Letztere giebt ohne weiteres die Libration b' in Breite, und mit Hilfe von B erhält man, da, wenn L die im Mondequator gemessene Distanz des Punktes M vom aufsteigenden Knoten in der Ekliptik bezeichnet, $L - B + 90° + \Delta = 180°$ sein muss, $L = B - \Delta + 90°$. Um endlich noch die Libration l' in Länge bestimmen zu können, hat man allgemein als ersten Meridian denjenigen angenommen, „der durch den mittlern Ort des Mondes geht, welcher also, wenn der Mond sich in einem Kreise mit stets gleicher Geschwindigkeit um die Erde als Centrum bewegen würde, und seine Rotationsaxe auf seiner Bahn senkrecht stünde, die sichtbare Mondscheibe immer genau in zwei gleiche Teile teilen würde", oder dessen im Mondequator gemessene Distanz vom aufsteigenden Knoten in der Ekliptik $L' = l - ☊$ ist, wo l die mittlere Länge des Mondes bezeichnet: Es ist also $l' = L - L'$.



241. Die Ebbe und Flut. — Der Einfluss der Erde auf den Mond ist wohl nie bezweifelt worden, und die Rückwirkung des letztern auf die Erde liegt wenigstens der neuern Zeit in dem höchst auffälligen Vorgange der sog. **Ebbe und Flut** fast noch klarer vor Augen: Denkt man sich die Erdkugel von einer konzentrischen Wasserschichte umgeben, so wird letztere infolge der Anziehung des Mondes, welche auf den Punkt, in dessen Scheitel der Mond steht, grösser ist als auf den Mittelpunkt, auf letztern aber grösser als auf den Gegenpunkt, die Form eines Sphäroides anzunehmen suchen, dessen grosse Axe durch den Mond geht [a], — jedoch wegen der Rotation der Erde nie zur Ruhe kommen, sondern in Gestalt einer breiten Welle dem Monde in seiner täglichen Bewegung von Ost nach West zu folgen scheinen und dadurch an jedem Orte während einem Mondtage zweimal Flut und zweimal Ebbe veranlassen. Diese Bewegungen erleiden jedoch nicht nur durch eine analoge, wenn auch etwas schwächere Differentialwirkung der Sonne [b], sondern namentlich auch durch die Veränderungen der Deklinationen und Entfernungen der beiden Gestirne, durch den Wechsel ihres

Culminations-Unterschiedes, durch die Zerteilung des Oceanes, etc., nach Fortpflanzung und Höhe grosse Modifikationen, und es hat jahrhundertelange Anstrengungen der grössten Mathematiker bedurft, um dieses Phänomen, gestützt auf Theorie und Erfahrung, bis ins Detail zu bewältigen [a]. Es würde hier natürlich viel zu weit führen, diese Untersuchungen in allen ihren Teilen verfolgen zu wollen, und ich muss mich darauf beschränken, in den beigefügten Noten einige fundamentale Beziehungen aufzustellen, deren Anwendung auf Bestimmung der Mondmasse zu zeigen und zum Schlusse einige historisch-litterarische Notizen beizufügen.

Zu 241: *a.* Bezeichnet R die Entfernung eines Gestirnes der Masse m vom Centrum der Erde, r den Radius dieser letztern, und f^2 die Anziehung der Masseneinheit in der Distanz 1, so ist nach dem Gravitationsgesetze (10, 268 und 481) der Unterschied seiner Wirkung auf Oberfläche und Centrum

$$W = \frac{f^2 \cdot m}{(R \mp r)^2} - \frac{f^2 \cdot m}{R^2} \fallingdotseq \pm 2 f^2 \cdot \frac{m \cdot r}{R^3} \qquad 1$$

— *b.* Bezeichnet ferner α das Verhältnis der Anziehungswirkungen der Mondmasse M_1 und der Sonnenmasse M_2 auf die Meere der von ihnen (232 und 271) etwa um $R_1 = 51805$ und $R_2 = 19\,917\,000$ g. M. abstehenden Erde, so hat man offenbar

$$\frac{M_1}{R_1^3} : \frac{M_2}{R_2^3} = \alpha : 1 \qquad \text{oder} \qquad \frac{M_1}{M_2} = \overline{2{,}245\,4434} \cdot \alpha \qquad 2$$

Führt man somit (270) die Erdmasse m durch $M_2 = 354936 \cdot m = \overline{5{,}550\,1500} \cdot m$ ein, so wird nach 2

$$M_1 : m = \overline{2{,}795\,5934} \cdot \alpha \fallingdotseq {}^1/_{160} \cdot \alpha \qquad 3$$

Ist nun die Fluthöhe, welche durchschnittlich im freien Ocean etwa 6′ beträgt, dagegen in St. Malo durch gleichzeitiges Anlangen verschiedener Flutwellen bis auf 50′ ansteigt, während sie im mittelländischen Meere fast unmerklich ist, an einem bestimmten Orte zur Zeit der Syzygien (Vollmond und Neumond) oder der sog. **Springflut** gleich H, zur Zeit der Quadraturen (der Viertel) oder der sog. **Nippflut** gleich h, und bezeichnet man die betreffenden Einzelwirkungen von Mond und Sonne mit ☾ und ⊙, so hat man

$$H = ☾ + ⊙ \qquad h = ☾ - ⊙ \qquad \text{also} \qquad \alpha = ☾ : ⊙ = (H + h) : (H - h) \qquad 4$$

Nun erfuhr **Dan. Bernoulli** aus St. Malo, dass dort H = 50′ und h = 15′ sei, woraus er $\alpha = 65 : 35 = 1{,}86$ erhielt, — **Lalande** dagegen aus Brest, dass H = 18′ 3″, h = 8′ 5″, folglich $\alpha = 160 : 59 = 2{,}71$ angenommen werden könne, wobei aber letzterer sein α in Vergleichung mit der die Nutation veranlassenden Mondwirkung für etwas zu gross hielt. Man kann also füglich $\alpha = 2$ setzen, womit nach 3 die Mondmasse $M_1 = {}^1/_{80} \cdot m$ erhalten wird, d. h. ein Wert, den die in neuerer Zeit auf verschiedene Weise erhaltenen Kontrolbestimmungen vollständig bewährt haben. — *c.* Nach „Julius **Klaproth** (Berlin 1783 — Paris 1835; Adjunkt der Petersb. Akad., dann Reisender), Lettre sur l'invention de la boussole. Paris 1834 in 8. (p. 128)" erkannten die Chinesen schon um 1000 v. Chr. den Einfluss des Mondes auf die Flutwellen, und auch in Europa waren wenigstens ziemlich frühe einige Kenntnisse über das Phänomen der Ebbe und Flut vorhanden, da dasselbe nicht nur von **Strabo** (4:n), zum Teil nach Mitteilungen von **Posidonius**, ganz richtig beschrieben wurde, sondern sich sogar

bei **Cicero** und **Plinius** Stellen finden, aus welchen deutlich hervorgeht, dass auch der Einfluss der Sonne bereits ziemlich allgemein bekannt war. Aber eigentliche Rechenschaft über die Ursachen dieser Vorgänge konnte sich jene ältere Zeit noch nicht geben, und es gehört zu den vielen Verdiensten von **Stevin** und **Kepler**, sich die Sache etwas näher angesehen und (vgl. des erstern „Oeuvres par Girard II 177“, und die Einleitung des letztern zu seiner „Astronomia nova“) angedeutet zu haben, dass in der Ebbe und Flut mutmasslich eine Attraktionserscheinung, ja ein Beweis dafür vorliege, dass sich die Anziehungssphäre des Mondes bis zur Erde erstrecke. Nachdem sonderbarer Weise **Galilei** die Ideen Keplers mit einer gewissen Ostentation verworfen und (vgl. Ed. 1632 der Dialogen, p. 409) die sog. **Gezeiten** mit der Axendrehung der Erde in Verbindung gebracht hatte, gewann die Anziehungstheorie bald wieder die Oberhand und feierte ihren entschiedenen Sieg, als es **Newton** in seinen „Principien“ gelang, auf Grund derselben wenigstens die allgemeinen Gesetze dieser Erscheinung zu begründen. In weiterer Ausführung von Newtons Theorie konnten sodann 1740 Dan. **Bernoulli**, Leonh. **Euler** und Colin **Maclaurin** in ihren gekrönten Preisschriften (Mém. Par. 1740, wo noch eine 4. Preisschrift von Ant. Cavalleri abgedruckt ist, welche wohl nur gekrönt wurde, um auch die Cartesianer zu befriedigen, — und Bd. 3 der Genfer-Ausg. von Newtons Principien) neue Fortschritte erzielen, und die von dem erstgenannten damals zur Berechnung der sog. **Hafenzeit**, d. h. der (für Brest $3^h\ 47^m$, für St. Malo $6^h\ 5^m$, für Havre $9^h\ 51^m$, etc., betragenden) Zeit, welche von der Culmination des Mondes bis zum nächsten Hochwasser verfliesst, gegebene Hilfstafel wird noch gegenwärtig vielfach benutzt. Immerhin blieb noch mancher Punkt im Unklaren und es gelang erst **Laplace** in seiner „Mécanique céleste“, unter Anwendung der Hydrodynamik und der aus langjährigen Beobachtungen in Brest abgeleiteten Erfahrungsresultate, die theoretische Untersuchung zu einem gewissen Abschlusse zu bringen und sogar den Detail soweit zu bewältigen, um z. B. Linien gleicher Flutzeit, sog. **Isorachien**, zu ermitteln. Dass jedoch auch Laplace seinen Nachfolgern noch Arbeit überliess, ist wohl selbstverständlich, und so haben z. B. **Lubbock** und **Whewell** (vgl. die Ph. Tr. 1830—50, und des erstern Schrift „An elementary treatise on the tides. London 1839 in 8.“) eine Reihe betreffender Untersuchungen ausgeführt.

242. Einige andere Wirkungen des Mondes. — Dass der Mond auch auf unsere Erdatmosphäre eine ähnliche Wirkung wie auf die Meere ausübt, ist theoretisch nicht zu bezweifeln, aber bei dem schwachen Einflusse auf den Barometerstand und dem Fehlen anderer Beobachtungsmittel höchstens unter niedrigen Breiten, wo sich die übrigen Variationen vermindern, wirklich zu konstatieren [a]. — Dass derselbe ferner, wenn das Erdinnere (221) wirklich noch feuerflüssig ist, auch auf dieses eine entsprechende Wirkung ausüben muss und dadurch Spannungen hervorrufen kann, die sich zeitweise in Erdbeben und Vulkanausbrüchen zeigen, muss man ebenfalls zugeben; jedoch sind wohl bei diesen letztern auch noch ganz andere und zum Teil sogar mächtigere Faktoren thätig, die mit Veränderungen auf der Erde selbst zusammenhängen und den Einfluss der Gestirne in einer Weise modifizieren, dass jede auf

diesen gestützte Prognose illusorisch wird [b]. — Die Wärmestrahlung des Mondes ist so gering, dass sie erst mit den feinsten Mitteln der Gegenwart erkannt werden konnte, und wenn daher der Mondschein auf sensitive Menschen oder zarte Pflänzchen einen unzweifelhaften Einfluss ausübt, so müssen noch andere, uns bis jetzt unbekannt gebliebene Momente in Betracht kommen [c]. — Etwas kräftiger äussert sich eine Wirkung des Mondes in den Bewegungen der Magnetnadel, indem in denselben eine dem Mondtage entsprechende Periode mit aller Sicherheit nachgewiesen werden konnte [d]. — Um so fraglicher ist dagegen ein allfälliger Einfluss der Mondstellungen auf die Witterung: Nachdem Jahrhunderte lang der Mond als der eigentliche „Wettermacher“ angesehen worden war und die Wetterpropheten sich zunächst an die Mondphasen hielten, wollte man in der neuern Zeit vielfach dem Monde jede betreffende Wirkung absprechen, und gegenwärtig lässt sich mit Sicherheit nur sagen, dass früher der Einfluss des Mondes jedenfalls weit überschätzt wurde, aber derselbe sich doch kaum auf Null reduzieren dürfte [e]. — Auf gewisse Anziehungswirkungen des Mondes werden wir in spätern Abschnitten zurückzukommen haben.

Zu 242: *a.* Schon **d'Alembert** zeigte in seinen „Recherches sur la cause générale des vents. Paris 1747 in 4.“, dass die Attraktionswirkung von Sonne und Mond nur einen geringen Einfluss auf den Barometerstand haben könne; aber während er doch noch eine Variation von etwa $3''' \risingdotseq 7^{mm}$ zugeben wollte, wurde diese von Giuseppe **Toaldo** (Pianezzo bei Vicenza 1719 — Padua 1797; Prof. astr. Padua) in seiner Abhandlung „De l'impulsion de la lune sur le baromètre (Mém. Berl. 1779)“ auf $^1/_{16}''' \risingdotseq 0{,}14^{mm}$ herabgesetzt, d. h. auf eine so geringe Grösse, dass sie unter mittlern Breiten gegen die übrigen Anomalien verschwindet und somit auch aus langjährigen Beobachtungen nicht mit Sicherheit eruiert werden kann: So erhielt z. B. **Laplace** (vgl. Mécanique céleste V 241) unter Benutzung von Barometerablesungen, welche Alexis **Bouvard** (Haut-Faucigny bei Chamounix 1767 — Paris 1843; Obs. und Akad. Paris) während 8 Jahren dreimal täglich gemacht hatte, zwar für die Syzygien und Quadraturen einen mittlern Unterschied von $0{,}05443^{mm}$, jedoch zugleich, dass die Unsicherheit der Bestimmung nahe ebensoviel betrage, — **Bouvard** selbst aber (Mém. Par. 1827) nach derselben Methode unter Verlängerung der Serie auf 12 Jahre den davon in der That wohl stark abweichenden Wert $0{,}01763^{mm}$, — und wahrscheinlich würde dessen Neffe Eugène **Bouvard** (1834—46 Elève-astronome Obs. Par., nachher verschollen), wenn er seine (vgl. Briefe an Gautier von 1833 u. f. in Notiz 387) nach Wunsch von Arago auf 23 Jahre ausgedehnte Studie auch nach dieser Richtung hätte vollenden können, wieder ein anderes Resultat erhalten haben. Besser erging es J. **Liznar** (Met. Zeitschr. 1886), indem er aus Beobachtungen in dem für solche Untersuchungen günstigern Batavia die korrespondierenden Werte

Mondstunde	Δb	Mondstunde	Δb	Mondstunde	Δb	Mondstunde	Δb
0	46	6	—48	12	59	18	—57
1	56	7	—53	13	62	19	—60
2	49	8	—42	14	49	20	—54
3	26	9	—20	15	20	21	—32
4	— 3	10	11	16	—11	22	1
5	—31	11	41	17	—42	23	29

fand, wo Δb die in Mikrons ausgedrückten Unterschiede von dem mittlern Barometerstande giebt: Der Gang dieser Reihe ist so schön, als man es nur immer wünschen kann, und die Differenz 0,122^{mm} der Extreme kömmt dem von Toaldo bestimmten Werte sogar sehr nahe. — *b.* Als Alexis **Perrey** (Sexfontaines in Haute-Marne 1807 — Dijon 1872?; Prof. Dijon) seinen reichen Erdbebenregistern die Thatsache entnahm, dass die Erdbeben zur Zeit der Syzygien und des Mondperigeums häufiger werden, glaubte er darin eine Einwirkung von Sonne und Mond auf das weiche Erdinnere zu erkennen, und seither hat Rudolf **Falb** (Obdach in Steyermark 1838 geb.; erst Schneider, dann Priester, seither Mathematiker und Astronom) in seinen „Grundzügen zu einer Theorie der Erdbeben und Vulkanausbrüche. Graz 1869—71 in 8." verwandte Ideen veröffentlicht, ja seither wiederholt versucht, diese Erscheinungen zu prognostizieren. Anderseits haben die Geologen, und so z. B. Albert **Heim** (Zürich 1849 geb.; Prof. geol. Zürich), versucht, die Erdbeben mit Veränderungen auf der Erde selbst und namentlich mit ihren, bei allmäliger Erkaltung entstehenden Runzeln in Verbindung zu bringen. Ich möchte nun glauben, dass die Erdbebenkunde oder **Seismologie** einstweilen am besten fährt, wenn ihre Vertreter, ohne sich einseitig in kosmische oder tellurische Hypothesen und Theorien zu verrennen und zu bekämpfen, möglichst viele und genaue Daten sammeln. — *c.* Die Wärmestrahlung des Mondes suchte Graf Ehrenfried Walter **v. Tschirnhausen** (Kieslingswalde bei Görlitz 1651 — Dresden 1708; auswärt. Mitgl. Akad. Par., viel auf Reisen) vergeblich dadurch nachzuweisen, dass er mit einer Linse von 33 Zoll Öffnung die Mondstrahlen auf ein Thermometer konzentrierte, — dagegen gelang es Macedonio **Melloni** (Parma 1798 — Portici 1854; Prof. phys. Parma, später Dir. Obs. Vesuv) mit Hilfe eines Thermomultiplikators (Compt. rend. 1846), und seither auch andern. — Während Jean-Philippe de **Limbourg** (Theux bei Lüttich 1726 — Spaa 1811; Arzt in Theux und Spaa) in seinem „Mémoire sur l'influence des astres et en particulier de la lune sur les végétaux (Mém. Lausanne 1789)" jeden solchen Einfluss verneinte, sprach **Secchi** aus, dass die Vollmondstrahlen, deren photogenische Kraft hinreiche, in 6^s Spuren eines Mondbildes zu erzeugen, gar wohl einen Einfluss auf zarte Pflänzchen ausüben könnten. — *d.* Nachdem **Hansteen** schon 1823 in den „Recherches sur le magnétisme terrestre" den Einfluss des Mondes auf die Bewegungen der Magnetnadel nachgewiesen, fand Karl **Kreil** (Ried im Innviertel 1798 — Wien 1862; Prof. astr. Prag, dann Prof. phys. und Dir. met. Centr. Wien) in den magnetischen Variationen (Wien. Denkschr. 1852/3) eine Mondperiode, bei welcher den Mondstunden 0 und 12 östlichste, den 6 und 18 aber westlichste Stände der Deklinationsnadel entsprechen, und die **Sabine** (Ph. Tr. 1853 und 1857), **Lamont** (Münchn. Sitz. 1864), etc., haben dieses Ergebnis bestätigt. — *e.* Während ich mit Joseph **Ineichen** (Hochdorf 1792 —

Luzern 1881; Prof. phys. Luzern) denjenigen, welche sich vor dem Stierennen (208) fürchten, zurufen möchte: „Der Mond ist nicht Acteur, sondern nur Zuschauer", so könnte ich es gegenüber dem Einflusse des Mondes auf die Witterung denn doch nicht thun, sondern mich noch eher mit dem Ausspruche von **Lichtenberg** befreunden: „Der Mond soll zwar keinen Einfluss auf die Witterung haben, aber er hat doch einen". — Für weitern Detail über die vielfachen betreffenden Untersuchungen verweise ich auf die Specialschriften: „**Olbers**, Über den Einfluss des Mondes auf die Witterung (Z. f. Astr. V von 1818), — Gustav **Schübler** (Heilbronn 1787 — Tübingen 1834; Lehrer Naturg. Hofwyl und Tübingen), Untersuchungen über den Einfluss des Mondes auf die Veränderungen unserer Atmosphäre. Leipzig 1830 in 8., — **Arago**, La lune exerce-t-elle sur notre atmosphère une influence appréciable? (Annuaire 1833), — Otto **Eisenlohr** (Karlsruhe 1806 — Bad Antogast 1853; Privatgel. in Karlsruhe), Einfluss des Mondes auf die Witterung (Pogg. Ann. 1833 und später), — François **Marcet** (London 1803 — London 1883; Prof. phys. Genf), Notice sur l'influence supposée de la lune sur le temps. Genève 1860 in 8., — etc."

243. Begriff der Finsternisse. — Jede zwei Kugeln A und B bestimmen zwei Berührungskegel, von deren Spitzen die eine zwischen A und B, die andere, wenn $A > B$ ist, hinter B fällt. Ist A ein leuchtender, B ein dunkler Körper, so nennt man von den hinter B liegenden Teilen der beiden Kegel den des erstern **Halbschatten**, den des zweiten **Kernschatten**. Tritt ein anderer dunkler Körper in den Halbschatten von B ein, so erhält er zwar nicht mehr volles Licht, aber bei kräftiger Lichtquelle immer noch so viel, dass man die Abnahme der Beleuchtung kaum bemerkt; wie er dagegen teilweise oder ganz in den Kernschatten eintritt, so erleidet er eine **partiale** oder **totale Verfinsterung**. Diese Verfinsterung ist dabei notwendig nach ihren sämtlichen Phasen von allen Punkten des Weltraumes aus, von welchen man nach dem verfinsterten Körper sehen kann, im gleichen Momente und genau in gleicher Weise sichtbar: So z. B. sind also die beim Eintritte des Mondes in den Kernschatten der Erde entstehenden Erscheinungen für alle Orte der Erde, über deren Horizont der Mond steht, genau dieselben und können höchstens durch den Zustand unserer Atmosphäre etwas modifiziert werden. Analoge Verhältnisse werden sich auch beim Eintreten der Erde in den Schatten ihres Mondes für alle äussern Beobachter ergeben, — sie werden alle in demselben Momente denselben Teil der Erde verfinstert, also eine **Erdverfinsterung** sehen. Dagegen tritt für einen auf der verfinsterten Erde befindlichen Beobachter keine Verfinsterung der Sonne ein, sondern nur eine nach Zeit und Erscheinung von seiner Stellung abhängige, mit seinem Eintritte in den Halbschatten oder Kernschatten beginnende **partiale** oder **totale Bedeckung**, auf die wir später (248) speciell eintreten werden und für die missbräuchlich allerdings

meistens, statt sie als **Erdfinsternis** oder **Sonnenbedeckung** zu bezeichnen, der Name **Sonnenfinsternis** gewählt wird.

244. Die Finsternisse als Zeichen. — Die meisten der ältesten Völkerschaften sahen die Mondfinsternisse und die sog. Sonnenfinsternisse als übernatürliche Erscheinungen oder sog. **Zeichen** an und fürchteten sich vor denselben [a], — ja es wurde sogar in früherer Zeit ein Versuch, die Finsternisse natürlich erklären zu wollen, als ein strafbares Eingreifen in die Befugnisse der Götter angesehen [b]. Dass solche irrige Ansichten bei einem primitiven Zustande entstehen konnten, ist begreiflich, und schädlich waren sie am Ende nicht, sondern hatten sogar einige Male gute Folgen [c]; dagegen ist es allerdings beschämend, noch in verhältnismässig später Zeit und bei sog. Kulturvölkern ähnlichem, ja fast noch krasserem Aberglauben zu begegnen [d].

Zu 244: *a.* In „**Fontenelle,** Entretiens (éd. 1761 p. 57)" liest man, dass in ganz Ostindien der Glaube herrsche, es bedrohe zur Zeit einer Finsternis ein bösartiges Ungeheuer das betreffende Gestirn; man sehe zu solcher Zeit die Flüsse voll Inder, die bis an den Hals im Wasser stehen, weil sie diese Stellung für sehr andächtig und für geeignet halten, um die Gestirne zu veranlassen, sich tapfer zu verteidigen. — Bei andern Völkern war es Übung, einen Höllenspektakel zu machen, um das Ungetüm zu verscheuchen, — oder auch die Brunnen zu bedecken, um sie vor Vergiftung zu schützen. — *b.* So soll **Anaxagoras** (Klazomenæ 500 — Lampsakos 428; jonischer Philosoph und Lehrer von Perikles; vgl. „Fragmenta, coll. Ed. Schaubach. Lipsiæ 1827 in 8.") wegen einer Schrift über die Ursachen der Mondfinsternisse mit dem Tode bedroht worden sein. Doch wird schon von **Pythagoras** angenommen, dass er diese Ursachen gekannt habe, — und dann allerdings wieder von dem viel spätern **Posidonius** (Apamea in Syrien 135 — Rom 50; Mathematiker, Astronom und Staatsmann auf Rhodus und in Rom; Lehrer von Cicero) behauptet, dass er einer der ersten Griechen gewesen sei, welche sich darüber klar wurden. — *c.* In „H. J. **Klein,** Die Sonnen- und Mondfinsternisse. Kreuznach 1870 in 8." wird erzählt: „Im Jahre 584 v. Chr. traf für einen Teil Kleinasiens eine totale Sonnenfinsternis ein, als sich eben die Lydier und Medier eine Schlacht lieferten. Die erschreckten Heere liessen vom Kampfe ab und die Fürsten schlossen Frieden. Zum Andenken an diese Begebenheit wurde eine grosse Darstellung der Finsternis in den benachbarten Felsen eingemeisselt. Diese Felsenskulpturen hat in neuerer Zeit **Texier** bei dem Dorfe Boghaskoci im nordwestlichen Kappadocien wieder aufgefunden, doch wurden sie erst von **Barth,** der sie später besuchte, als mit der genannten Finsternis in Verbindung stehend, erkannt". Es hat so der Aberglaube nicht nur einem Blutvergiessen Einhalt gethan, sondern eine noch für die heutige Theorie der Mondbewegung nicht unwichtige Thatsache auf uns gebracht. — Anhangsweise mag daran erinnert werden, dass **Columbus** durch Ankündigung einer Mondfinsternis auf 1504 III 1 den Bewohnern von Jamaika hinlänglich zu imponieren wusste, um sie zur Lieferung von Proviant zu veranlassen. — *d.* So erzählt **Arago,** dass noch im 17. Jahrhundert (wahrscheinlich 1654, wo sich nach Fontenelle viele Leute in

den Kellern versteckten) die Ankündigung einer Sonnenfinsternis in Paris und Umgebung solchen Schrecken verbreitet habe, dass die Geistlichen dem Andrange zum Beichtstuhl fast erlagen und sich ein Landpfarrer nicht mehr anders zu helfen wusste, als indem er von der Kanzel aus seine Beichtkinder aufforderte, sich nicht so zu beeilen, da die Finsternis um vierzehn Tage verschoben worden sei. — Und wie viele giebt es noch im 19. Jahrhundert, namentlich unter den jedes moralischen Haltes entbehrenden sog. starken Geistern, welche ein Interesse für gewisse Naturerscheinungen nur heucheln, sich aber eigentlich vor ihnen fürchten.

245. Die Registrierung der Finsternisse und die sog. Saros. — Einzelne Völker, wie namentlich die Chinesen, Babylonier (Chaldäer) und Egypter, zeichneten sich dadurch vorteilhaft aus, dass sie schon frühe die Gewohnheit annahmen, die eingetretenen Himmelsbegebenheiten, und so namentlich die Finsternisse, zu registrieren [a]. Sie bemerkten so nicht nur bald, dass die Mondfinsternisse nur bei Vollmond (Opposition), aber nicht bei jedem Vollmond, — und die Sonnenfinsternisse nur bei Neumond (Konjunktion), aber nicht bei jedem Neumonde, und auch nicht an jedem Orte in gleicher Weise eintreffen, — sondern die Chaldäer, und vielleicht auch die beiden andern Völker, fanden sogar, dass jeder Finsternis nach einer bestimmten Periode, der sog. **Saros** von 223 Monden oder $18^a\ 11^d$, wieder eine entsprechende Finsternis folge [b], so dass solche Erscheinungen in bestimmter Reihenfolge wiederkehren, somit vorausgesagt werden können [c].

Zu 245: *a.* Die Chinesen sollen schon 2697 v. Chr. eine Finsternis notiert haben und entsprechend besass **Aristoteles** (vgl. seine Schrift „De coelo", Ausg. Prantl p. 49) im 4. Jahrhundert v. Chr. bereits zahlreiche betreffende Notizen, welche die Chaldäer auf Backsteinen eingegraben hatten, und zwar soll die älteste derselben damals schon bei 2000 Jahre alt gewesen sein. — *b.* Da die Finsternisse nur entstehen können, wenn sich der Mond bei einer Opposition oder Konjunktion zugleich nahe an einem der Knoten in der Ekliptik befindet, so wird einer solchen Erscheinung nur eine entsprechende folgen, wenn der Mond sowohl wieder in dieselbe Lage zu Sonne-Erde (synodischer Monat von $29^d{,}53059$) als zum Knoten (draconitischer Monat von $27^d{,}21222$) zurückkehrt. Da nun einerseits

$$\frac{27{,}21222}{29{,}53059} = 1 : [1,\ 11,\ 1,\ 2,\ 1,\ 4,\ 3\ldots] = \frac{1}{1},\ \frac{11}{12},\ \frac{12}{13},\ \frac{35}{38},\ \frac{47}{51},\ \frac{223}{242},\ \frac{716}{777},\ldots$$

und anderseits

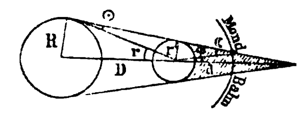
$$223 \times 29{,}53059 = 6585{,}32157 = 242 \times 27{,}21207$$

ist, so wird dies wirklich jeweilen nach Ablauf einer Saros von 223 Monaten sehr nahe statthaben, — oder also nach $6585\,{}^1/_3 : 365\,{}^1/_4 = 18^a{,}03 = 18^a\ 11^d$, und somit in 1803 Jahren gerade 100 mal. Auch eine solche grössere Periode scheinen schon die Alten wirklich gekannt zu haben; aber wenn **Oppert** diese letztere nach assyrischen Inschriften auf 1805^a feststellen will, so hat er sich entweder um 2 Jahre verrechnet, oder es haben seine Gewährsmänner die Saros mit $18^a{,}05 = 18^a\ 18^d$ um 7^d zu gross angenommen. — *c.* Wenn **Thales**, wie gewöhnlich nach „**Des Vignoles**, Chronologie de l'histoire sainte. Berlin

1738, 2 Vol. in 4. (II 245)" angenommen wird, wirklich den Joniern für 585 V 28 v. Chr. (also — 584, wie mutmasslich Klein in oben reproduzierter Notiz sagen wollte) eine grosse Sonnenfinsternis verkündete, so wäre es wohl auf Grund der ihm bekannt gewordenen Saros geschehen. Wahrscheinlich diente die Saros sogar schon den Chinesen, bei welchen angeblich etwa 2000 v. Chr. zwei Beamte **Hi** und **Ho** Todesstrafe erhielten, weil sie über einem Saufgelage versäumten, eine Sonnenfinsternis rechtzeitig anzukündigen, was nach chinesischem Ritual immer einige Tage vor Eintritt geschehen musste, damit der Kaiser und die Grossen des Reiches sich durch Fasten, etc., darauf vorbereiten und dann der Erscheinung selbst, über welche ein förmliches Protokoll aufzunehmen war, vorschriftsgemäss beiwohnen können.

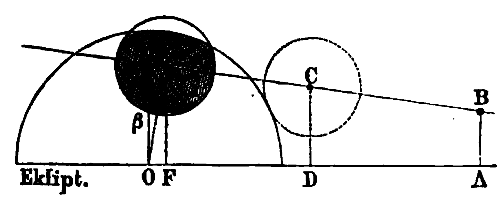
246. Die konstruktive Vorausbestimmung der Mondfinsternisse. — Die spätern Griechen, wahrscheinlich schon **Hipparch** und, wie der Almagest zeigt, jedenfalls **Ptolemäus**, wandten bereits ihre Tafeln der Wandelsterne und geometrische Betrachtungen zur Vorausbestimmung der Finsternisse an. Wir werden auf solche Methoden älterer und neuerer Zeit später (461—80) einlässlich eintreten und uns dagegen hier auf die Bemerkung beschränken, dass schon ein höchst einfaches konstruktives Verfahren genügt, sich über den Verlauf einer Mondfinsternis ganz ordentlich zu orientieren [a].

Zu 246: *a.* Man hat hiefür aus irgend einer Ephemeride oder auch nur aus einem astronomischen Kalender für eine dem Knoten nahe Opposition angenähert die Breite β des Mondes zu entnehmen, ferner die scheinbaren Radien r und ϱ von Sonne und Mond, deren Parallaxen $\odot$ und ☾, und die stündlichen Bewegungen $\Delta\lambda$ und $\Delta\beta$ des Mondes in Länge und Breite, sowie diejenige Δl der Sonne in Länge, — und sodann in folgender Weise vorzugehen: Zunächst kann man, da aus beistehender Figur, wo φ offenbar den scheinbaren Halbmesser des Schattenkegels in der Distanz des Mondes bezeichnet, unmittelbar ☾ $+ \odot = \varphi + r$ folgt, diese Grösse φ nach der Formel



$$\varphi = \frac{61}{60} (☾ + \odot - r) \qquad 1$$

berechnen, wo $^{61}/_{60}$ (461) ein nach Tob. **Mayer** zur Berücksichtigung des Einflusses der Erdatmosphäre angenommener Erfahrungsfaktor ist. Trägt man sodann in irgend einer Einheit (z. B. 1^{mm} für die Minute) β als Ordinate auf und beschreibt aus O mit φ, aus M mit ϱ Kreise, so sieht man bereits, ob und wie der Mond bei dieser Opposition in den Erdschatten eintaucht. Ist sodann $OA = 2(\Delta\lambda - \Delta l)$ und $AB = \beta - 2 \cdot \Delta\beta$, so stellt B den relativen Stand des Mondes 2^h vor der Opposition, also BM angenähert die Bahn des Mondes vor. Teilt man somit OA in 120 Teile, so hat man eine Zeitminuten-Scale, an welcher man leicht die Zeiten ablesen kann, zu denen die einzelnen Phasen



der Finsternis zu erwarten sind: So z. B. erhält man den Anfang der Finsternis, wenn man mit $\varphi + \varrho$ von O aus denjenigen Punkt C der Mondbahn aufsucht, von welchem mit dem Radius ϱ ein den Erdschatten tangierender Kreis gezogen werden kann, und diesen nach D auf die Zeitscale projiciert; ist ferner $OE \perp MB$ und $EF \perp AO$, so giebt F den Moment der Mitte der Finsternis; etc.

247. Die Erscheinungen bei Mondfinsternissen. — Bei partialen Mondfinsternissen ist wenig zu sehen und zu notieren: Man kann, soweit es der unscharfe Schattenrand ermöglicht, die Momente des Anfanges und Endes beobachten und diese mit den vorausbestimmten Zeiten vergleichen, — allfällig das Zudecken und Abdecken einzelner Mondobjekte behufs Uhrvergleichungen (406) registrieren, — und dergleichen; das ist aber auch so ziemlich alles. — Bei den totalen Finsternissen kömmt dagegen zu den Momenten von Anfang und Ende wenigstens noch einiges andere hinzu: Sobald die Totalität begonnen hat, erscheint der Mond meist in schmutzigrotem Lichte, das nach Erscheinung und Ursache dem Saume der sog. Gegendämmerung zu entsprechen und mit dem lokalen Zustande der Erdatmosphäre für verschieden situierte Beobachter zu variieren scheint. Gleichzeitig werden die vorher in dem bereits verdunkelten Teile nicht mehr erkennbaren Details auf dem Monde wieder sichtbar. Wie der Mond tiefer in den Schatten eintritt, nehmen Färbung und Sichtbarkeit ab, um erst nach der Mitte der Finsternis wieder zuzunehmen. Einzelne Male geht sogar die Abnahme so weit, dass der Mond für einige Zeit, auch beim klarsten Himmel, vollständig verschwindet [a].

Zu 247: *a.* So verschwand der Mond nach Bericht von Cysat an Kepler (vgl. Epist. Kepl. 693—94) bei der Finsternis von 1620 XII 9 gänzlich, — dann wieder nach Hevel (vgl. Selenogr. 117) bei derjenigen von 1642 IV 25, — und auch nach Beobachtung von Steph. Lee in London (vgl. Berl. Jahrb. 1819) bei derjenigen von 1816 VI 6.

248. Die Bedeckungen. — Wenn ein dunkler Körper zwischen einen Beobachter und eine Lichtquelle tritt, so wird letztere dadurch offenbar nicht modifiziert, sondern nur für diesen Beobachter in einer von dessen Lage abhängigen Weise zum Teil oder ganz bedeckt (vgl. 243). Es ist somit die partiale, oder annulare, oder totale Bedeckung der Lichtquelle, und die dadurch bewirkte Verfinsterung des Beobachters, etwas wesentlich lokales, für verschiedene Standpunkte nach Zeit und Verlauf möglicher Weise ganz verschiedenes: Es unterscheiden sich daher die sog. Sonnenfinsternisse, die Sternbedeckungen und die sog. Durchgänge der untern Planeten durch die Sonne, principiell von den bisdahin behandelten eigentlichen Finsternissen. Wir werden uns später (446—51 und 468—80) ein-

lässlich mit der Voraussage dieser Bedeckungen, der Bestimmung ihrer verschiedenen Phasen und der Verwendung der bei ihrer Beobachtung erhältlichen Daten beschäftigen, und wollen hier vorläufig nur die merkwürdigen Vorkommnisse bei den sog. Sonnenfinsternissen etwas näher ins Auge fassen.

249. Die Erscheinungen bei sog. partialen und ringförmigen Sonnenfinsternissen. — Schon eine partiale Sonnenfinsternis hat ein gewisses Interesse, da die Phasen scharf beobachtet werden können und da, wenn sie nur etwas bedeutend wird, von eigentümlichen Färbungen begleitete Lichtverminderungen eintreten, sowie eine Abkühlung bemerkbar wird [a]. Bei ringförmigen Finsternissen zeigen sich sodann noch bei Bildung und Brechung des Ringes sonderbare optische Erscheinungen ähnlicher Art wie diejenigen, welche wir als sog. „Tropfenbildung" später (446) bei den Durchgängen der untern Planeten zu besprechen haben werden [b].

Zu 249: *a.* So zeigte mir z. B. 1851 VII 28 zu Bern ein Thermometer zur Zeit der Mitte der Finsternis bei 4° weniger, als die Interpolation aus den Beobachtungen vor und nach der Finsternis für denselben Zeitmoment ergab, — und in Stuttgart fiel bei derselben Finsternis, trotz ganz klarem Himmel, also bloss infolge der Abkühlung, ein feiner Regen. — *b.* Über die in der Schweiz während der ringförmigen Finsternis von 1820 IX 7, welche eine meiner ersten Jugenderinnerungen bildet, gemachten Beobachtungen vergleiche die durch Adrian v. **Scherer** (Schloss Belles-Truches bei Vevey 1783 — Düsseldorf 1835; Kaufmann und Besitzer zweier Privatsternwarten in St. Gallen und auf dem Schloss Ober-Castell; vgl. Biogr. III) 1820 X 24 und 1821 I 12, durch Johannes **Feer** (Zürich 1763 — ebenda 1823; Ingenieur in Meiningen und Zürich; vgl. Biogr. I) 1820 XI 12 und durch Joh. Kasp. **Horner** 1820 XI 24 an Gautier gerichteten Briefe in Nro. 336 und 369 meiner Notizen.

250. Die Erscheinungen bei totalen Sonnenfinsternissen. — Wenn schon die partiale Bedeckung der Sonne ein gewisses Interesse erregt, so macht nach allen Berichten von Augenzeugen das leider für einen bestimmten Ort seltene, durchschnittlich erst nach zwei Jahrhunderten für ihn wiederkehrende Schauspiel einer totalen Sonnenfinsternis auf alle Zuschauer (ja sogar auf Tiere) einen förmlich überwältigenden Eindruck, der sich z. B. darin zeigt, dass während den paar (höchstens acht) Minuten ihrer Dauer eine lautlose Stille herrscht, und dem Wiederaufblitzen des ersten Sonnenpunktes ein hörbares Aufathmen der versammelten Menge folgt: Die bei hohem Sonnenstande unter ungewohnten Verhältnissen entstehende, bis zum Erscheinen einzelner Sterne und Planeten fortschreitende Dunkelheit [a], — die natürlich noch mehr als bei partiellen Bedeckungen fühlbare, sich bis zum Fallen von Thau steigernde Abkühlung [b], — der sofort näher zu besprechende, während

der Totalität scheinbar den Mond umgebende, einem Heiligenschein verglichene Lichtkranz, — etc. vereinigen sich offenbar, um die hiefür notwendige Stimmung hervorzurufen [e].

Zu 250: *a.* Die Anzahl der sichtbaren Sterne wird gewöhnlich überschätzt und so ist wohl auch die von Joh. Heinrich **Fries** (Zürich 1639 — ebenda 1718; Prof. philol. Zürich) in dem Manuskripte „Weltliche, meist vaterländische Geschichten von A. 1675 an" bei Anlass der für Zürich totalen Sonnenfinsternis von 1706 V 12 gemachte Angabe: „Sternen sind gesehen worden wie bey der nacht, allermassen nicht nur die irrsternen Venus, Mercurius, Jupiter und Saturnus, sondern auch vil von Fixsternen gewahret worden". erheblich zu reducieren. — Bei der 1715 IV 22 zu London 3^m 23^s dauernden Totalität wurden nach **Halley** (Ph. Tr. 1715) die Planeten Jupiter, Merkur und Venus sichtbar, von Fixsternen nur Capella und Aldebaran. — **Bruhns** sah (A. N. 1292 von 1861) zu Tarazono in Spanien 1860 VII 18 während der Totalität Jupiter, Venus, Castor und Pollux, und konnte eine vorher in 125^{cm} Distanz lesbare Schrift erst bei Näherung auf. 35^{cm} lesen. — *b.* So erzählt **Fries** von 1706: „Reisende fanden sich wegen einsmahliger kälte bemüssiget die handschue anzuzeuhen; das thau fieng an zu fallen". — *c.* Ferner erzählt Fries von 1706: „Auch die unvernünftigen thier erschroken ob dieser Finsternus; dauben und schwalben schossen wie verscheuchet hin und her; die nachtvögel liessen sich herfür; die singvögel stellten ein ihr gesang; die fische kamen in grosser menge auf die obere fläche des wassers, dass man sie gleichsam mit händen fangen können. — Menschen mussten von ihrer arbeit ablassen wegen der dünkle; arbeitende sind veranlasst worden liechter zu begehren die arbeit fortzusetzen; leute auf dem feld, weil sie im jetten (gäten) nicht mehr fortkommen konnten, sassen nieder oder giengen heim; leute, so auf der gasse bei einanderen in Gesellschaft gesponnen, könten vor dunkle im spinnen nicht mehr fortkommen, sondern mussten davon ablassen; die läute in häuseren kam ein schrecken an, dass sie auf die gassen giengen und einanderen blosshin in der nähe kenneten; kinder bezeugten den davon empfangenen schrecken mit Weinen; alte schlugen die hände zusammen, und vermutheten viel, es würde der jüngst tag einbrechen".

251. Die sog. Corona. — Der ebenerwähnte Lichtkranz, welchen man jetzt wohl allgemein als **Corona** bezeichnet, wurde früher zuweilen mit dem bei ringförmigen Finsternissen übrigbleibenden Teile der Sonne verwechselt [a], — sonst meistens in Verbindung mit dem Monde gebracht [b], — und nur von wenigen, wie z. B. von **Kepler**, Joh. Jak. **Scheuchzer** und J. Ph. **Maraldi**, der Sonne selbst zugeteilt [c], — ja letztere Ansicht hat eigentlich erst seit 1860, wo **Bruhns** dieselbe durch unanfechtbare Messungen stützte, die Oberhand gewonnen [d]. — Über die seitherigen, mit der Sonnenphysik im Zusammenhange stehenden und noch gegenwärtig nicht abgeschlossenen Untersuchungen, werden wir erst später (533) eintreten können [e].

Zu 251: *a.* Die Corona scheint zum ersten Mal bei einer grossen Sonnenfinsternis im Jahre 1567 beachtet worden zu sein, wo sie zu der irrtümlichen

Meinung Veranlassung gab, es sei jene Finsternis nicht wirklich total gewesen. — *b.* Die meisten Astronomen glaubten entweder in der Corona die Mondatmosphäre zu sehen, oder dann eine am Mondrande durch Diffraktion entstehende optische Erscheinung, — ja letztere Ansicht wurde von vielen noch nach der Mitte des gegenwärtigen Jahrhunderts fast leidenschaftlich festgehalten. — *c.* Dagegen wurde, als 1598 bei einer in Torgau beobachteten totalen Sonnenfinsternis eine sehr helle Corona gesehen wurde, von **Kepler** die Ansicht ausgesprochen, es sei der äusserste Teil der leuchtenden Sonnenatmosphäre in Sicht gekommen. — Ferner sagte **Scheuchzer** in seiner „Beschreibung der Naturgeschichten des Schweizerlandes" bei Anlass der mehrerwähnten totalen Finsternis von 1706 (welche nach ihm in Zürich 4^m, nach Landschreiber Franz Hegglin in Zug „etwan fünf Vatter unser lang" andauerte), es sei „klärlich dass der um den Mond in währender völliger Finsternuss gesehene bleiche (durch die Ferngläser aber feuerrote, und so auch von Clara Eimmart gemalte) Ring anders nichts gewesen als ein von der Sonnen seitwärts geworfener, und durch unsere Luft zu uns in gebrochenen Strahlen fortgesetzter Glanz". — Am deutlichsten aber sprach sich (Mém. Par. 1724) J. Ph. **Maraldi** aus, indem er nicht nur im allgemeinen die Corona der Sonne zuteilte, sondern speciell hervorhob, **dass ihre beiden Mittelpunkte zusammenfallen.** — Bei der grossen Mehrzahl verfingen jedoch solche Ansichten nicht und noch als weit später Joh. Heinrich **Voigt** (Gotha 1751 — Jena 1823; Prof. math. et phys. Jena) in der Note „Neues System über die Sonne und Fixsterne (Lichtenbergs Magaz. von 1781)" die Corona unbedingt der Sonne zuteilte und durch „entzündliche Luftschichten, welche die Sonne umgeben und durch ihr Brennen erleuchten" zu erklären suchte, wurde er von vielen verlacht. — *d.* Als **Halley**, der bei der (vgl. 250 : a) von ihm 1715 beobachteten Finsternis in der Corona anfänglich auch die Mondatmosphäre zu sehen glaubte, die charakteristische Wahrnehmung machte, **dass die Breite des Ringes gegen das Ende der Totalität auf der Westseite des Mondes zunahm**, wurde er zwar stutzig, wagte aber doch nicht, für die Sonne zu entscheiden, — und so mochte es auch andern gehen, bis es endlich, wie schon angedeutet, 1860 **Bruhns** gelang, durch scharfe Messungen die Richtigkeit der sich ergänzenden Angaben von **Halley** und **Maraldi** zu belegen und dadurch die Zugehörigkeit der Corona zur Sonne definitiv festzustellen. — *e.* Vorläufig mag noch erwähnt werden, dass die Corona 1860 nach A. **Prazmowski** (Warschau 1821 geb.; Obs. Warschau) und 1868 nach John II. **Herschel** eine durch das Sonnencentrum und den anvisierten Punkt gehende Polarisationsebene zeigte, so dass ihr Licht als reflektiertes anzusehen wäre, — während dagegen **Pickering** 1869 keine Spur von Polarisation wahrnehmen konnte. Für die neuern Beobachtungen mit dem Spektroskope wird dagegen auf 533 verwiesen.

252. Die sog. Protuberanzen. — Bei der 1842 VII 7 in Südfrankreich, Oberitalien, etc., sichtbaren totalen Sonnenfinsternis sahen **Arago, Schumacher, Airy,** etc., während der Totalität an einzelnen Stellen des Mondrandes rötliche, wolkenartige Gebilde in die Corona hineinragen, und nachher zeigte sich, dass schon bei frühern Finsternissen ähnliche Beobachtungen gemacht, aber nicht weiter beachtet worden waren [a]. — Begreiflicher Weise bildeten sodann diese sog. **Protuberanzen** einen Hauptteil des Programmes

für die namentlich in Ostpreussen als total zu erwartende Sonnenfinsternis von 1851 VII 28, und wirklich wurden bei derselben zahlreiche Beobachtungen über diese eigentümlichen Bildungen erhalten, ohne dass man sich jedoch über deren Natur verständigen konnte: Während die einen die Protuberanzen als reell, sublunarisch und als wahrscheinlich mit den Flecken und Fackeln der Sonne im Zusammenhange stehend betrachteten [b], glaubten die andern dafür genügende optische Erklärungen geben zu können [c], und jede der beiden, zum Teil etwas scharf aneinander geratenen Parteien rüstete sich nun möglichst, um bei der 1860 VII 18 für Spanien totalen Finsternis den Gegner aus dem Felde schlagen zu können. Merkwürdiger Weise glaubte unmittelbar nach der Beobachtung jede Partie gesiegt zu haben [d]; als dann aber **Secchi**, Warren **De la Rue**, etc., aus den während der Finsternis erhaltenen Photographien mit aller Sicherheit nachweisen konnten, dass die Protuberanzen ihre Lage gegen die Sonne nicht ändern, wohl aber der Mond über dieselben weggleitet, und als auch **Bruhns** aus Messungen an einer Protuberanz, welche er von 2^m vor der Totalität bis 6^m nach derselben verfolgen konnte, ein entsprechendes Resultat erhielt, war natürlich der Entscheid nicht mehr zweifelhaft, und die Beobachtungen bei spätern Finsternissen haben nicht nur denselben gutgeheissen, sondern sogar (533) die Möglichkeit herbeigeführt, diese merkwürdigen Gebilde nicht nur während den wenigen Minuten einer totalen Finsternis, sondern zu jeder Zeit und in vollständiger Abwesenheit des Mondes studieren zu können [e].

Zu 252: *a.* Namentlich hatte Birger **Vassenius** (Wassända Socken 1687 — Gothenburg 1771; Gymnasiallehrer Gothenburg) in seiner „Observatio eclipsis Solis totalis (1733 V 2/13) cum mora facta Gothoburgi Sueciæ (Ph. Tr. 1733)" ganz deutlich solche Protuberanzen beschrieben, und auch in den Beschreibungen der mehrerwähnten Finsternis von 1706 (vgl. ausser dem 251 mitgeteilten die Ph. Tr. 1706 und meine Notiz in den Bern. Mitth. von 1852) finden sich einige unverkennbare Spuren solcher Erscheinungen. Wenn ferner **Halley** bei Anlass der bereits citierten Finsternis von 1715 sagt: „About two or three seconds before the Emission on the western Side where the Sun was just coming out, a long and very narrow Streak of a **dusky but strong red Light** seemed to colour the dark Edge of the Moon; tho nothing like it had been seen immediately after the Immersion", — und wenn, wie in „**Ranyard**, Observations made during Total Solar Eclipses (Mem. Astr. Soc. 41 von 1879)" mitgeteilt wird, Don José Joaquin de **Ferrer** (1770? — Bilbao 1818; spanischer Marine-Offizier) bei der totalen Sonnenfinsternis zu Kinderhook im Staate New-York kurz vor Ende der Totalität „a zone to issue concentric with the Sun, similar to the appearance of a cloud illuminated by the rays of the Sun", so wird man wohl auch an Protuberanzen zu denken haben. Ob der (vgl. Ph. Tr. 1779 und Berl. Mem. 1778) von **Ulloa** bei der totalen Finsternis von 1778 VI 24 bemerkte glänzende und wie rotierende Lichtkreis, oder der von ihm $1\frac{1}{4}^m$ vor

dem Ende durch das Fernrohr innerhalb des Mondrandes, wie eine Öffnung im Monde, erblickte rötliche Lichtpunkt ebendahin zu rechnen sind, scheint mir zweifelhaft; immerhin glaubte **Mädler** (Gesch. I 493), es möchte letzterer eine Protuberanz gewesen sein, welche durch die Irradiation des Fernrohrs gewissermassen auf den Mond projiziert wurde. Für verwandte Beobachtungen von **Valz** vgl. dessen Brief an Gautier von 1842 VIII 19 in Notiz 387. — *b.* Für diese Ansicht ist z. B. „Jul. **Schmidt**, Beobachtungen der totalen Sonnenfinsternis vom 28. Juli 1851 zu Rastenburg in Ostpreussen. Bonn 1852 in 4." zu vergleichen. — *c.* Für die zweite Ansicht stand namentlich Ottokar **v. Feilitzsch** (Langensalza 1817 — Bayreuth 1885; Prof. phys. Greifswalde) in seinen Bemerkungen „Über physikalische Erscheinungen bei totalen Finsternissen (Zeitschr. Peters 4—5)" entschieden ein. — *d.* So sprach z. B. Emil **Plantamour** in seiner Note „Observations de l'éclipse totale de Soleil du 18 juillet 1860 à Castelon de la Plana (Arch. 1860)" als Resultat seiner Beobachtung die Überzeugung aus „que tous ces phénomènes, tels que la couronne, les faisceaux de rayons et les protubérances **ne sont pas des phénomènes existant réellement autour du soleil, mais des phénomènes lumineux produits par l'écran qui s'interpose dans la direction des rayons solaires**", während sein Vetter und späterer Nachfolger Emil **Gautier** (Genf 1822 geb.; Neffe von Alfred in 13 : t und Vater von Raoul, Genf 1854 geb. und Prof. astr. Genf), welcher einer Einladung seines Freundes Leverrier nach Tarazona gefolgt war, sofort nach der Beobachtung (Arch. 1860) ebenso überzeugt war „**que les protubérances sont un phénomène réel, appartenant au soleil**". — *e.* Die Ergebnisse dieser Studien werden in 533 mitgeteilt werden.

X. Das Sonnensystem.

Wenn ich's recht betrachten will, — Und es ernst gewahre, — Steht vielleicht das alles still, — Und ich selber fahre. (Göthe.)

---

253. Die ältesten Weltsysteme. — Während die Babylonier, Chinesen und Egypter sich zunächst damit begnügten, einzelne Erfahrungen zu sammeln, gewisse Perioden festzustellen, etc., und sich bei ihnen kaum noch Spuren von einem wissenschaftlichen Systeme finden, so schlugen dagegen die Griechen einen ganz entgegengesetzten Weg ein: Sie waren anfänglich mit dem wenigen Thatsächlichen zufrieden, das sie gelegentlich aus der Ferne zu sich herüberholen konnten, und suchten dann sofort diese dürftigen Bausteine zu einem ihren übrigen Anschauungen entsprechenden Ganzen zu vereinigen, ohne sich allzusehr um die Übereinstimmung desselben mit der Wirklichkeit zu bekümmern, geschweige zu versuchen, durch Anstellung geeigneter Beobachtungen und Verwertung derselben mit Hilfe der von ihnen so erfolgreich gepflegten reinen Mathematik, sich die Mittel zu verschaffen, um den Beweis der Wahrheit antreten zu können [a]. — Es würde sich kaum lohnen, auf die bizarren, durch Überlieferung und unwissende Kommentatoren noch ungereimter gewordenen, schon früher (215) kurz angedeuteten Ideen über die Gestalt der Erde und die scheinbare Bewegung der Gestirne nochmals zurückzukommen, welche **Thales** und dessen Schule zugeschrieben werden, und ich ziehe vor, mit **Pythagoras** als demjenigen zu beginnen, welchem man mutmasslich die eigentliche Lehre verdankt, dass **die Erde als eine freischwebende Kugel** betrachtet werden muss, wenn auch (216) schon einige frühere sich ähnliche Begriffe zurechtgelegt haben mochten [b]. Diese Lehre, welche der Genannte zum mindesten zu der seinigen machte [c] und welche in Verbindung mit der Annahme, dass die **Erde in der Mitte des**

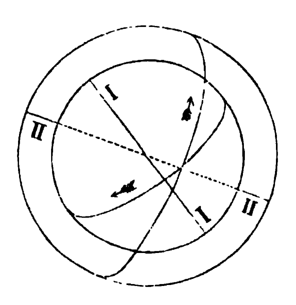
Weltgebäudes ruhe, fortan das Fundament der griechischen Astronomie oder des sog. **geocentrischen Systemes** bildete, war ein so gewaltiger Fortschritt in der Erkenntnis, wie seither kaum wieder ein zweiter in Einem Schlage gemacht wurde, denn durch ihn erhob sich sein Autor zum erstenmal über die Ergebnisse unmittelbarer Anschauung und löste sich damit von der ganzen Vergangenheit vollständig ab. Alles übrige war für den Augenblick nebensächlich, ja konnte erst eine gewisse Ausbildung erhalten, nachdem dieser Grundgedanke gewissermassen in Fleisch und Blut übergegangen war[d]. Ich will darum auch unter gegenwärtiger Nummer nicht auf weitern Detail eintreten und einzig noch anführen, dass man **Pythagoras** überdies die ebenfalls wichtige Lehre von der **Mehrheit der Welten** zuschreibt.

Zu 253: *a.* Vgl. das von mir nach „Sophie **Germain** (Paris 1776 — ebenda 1831; ein math. Talent ersten Ranges), Considérations générales sur l'état des sciences et des lettres aux différentes époques de leur culture. Paris 1823 in 8." dem Abschnitte VII vorgesetzte Motto. — *b.* Der Gedankengang, durch welchen **Pythagoras** auf seine Lehre geführt wurde, ist nicht bekannt, dürfte aber, wie schon Otto Friedrich **Gruppe** (Danzig 1804 — Berlin 1876; Prof. philos. und Akad. Berlin) in seiner Schrift „Die kosmischen Systeme der Griechen. Berlin 1851 in 8." in ähnlicher Weise auseinandersetzte, in folgendem bestanden haben: Die Lichtgestalten des Mondes lassen denselben als eine **Kugel** erkennen, und diese kann nicht an den Himmel angeheftet, sondern sie muss **freischwebend** sein, da sie nicht nur ihre Lage gegen die übrigen Gestirne verändert, sondern dieselben zuweilen bedeckt, so z. B. die sog. Sonnenfinsternisse veranlasst und sich bei ihrem Vorübergange vor der Sonne förmlich auf derselben abzeichnet. Eine entsprechende kreisrunde Abzeichnung sehen wir aber auch bei den Verfinsterungen des Mondes sich über denselben fortbewegen; jedoch kann dieselbe nicht direkt von einem Körper herrühren, sondern muss der Schatten eines solchen sein, da der Mond während einer totalen Finsternis sichtbar bleibt; es muss sich also ein kugelförmiger Körper zwischen Sonne und Mond stellen. Diese letztern Körper stehen aber zur Zeit des Vollmondes, wo ausschliesslich solche Finsternisse entstehen, für die Erdbewohner in Opposition, — also muss es der Schattenkegel der Erde sein, in welchen der Mond eintaucht, — also ist auch **die Erde eine freischwebende Kugel.** — *c.* Der über gute Quellen verfügende, etwa zu Anfang des 3. Jahrhunderts n. Chr. zu Laërte in Kleinasien geborne **Diogenes Laertius** sagt in seiner Schrift „De vitis, dogmatibus etc. clarorum virorum" ganz unzweideutig: „**Pythagoras** nimmt die Welt kugelförmig an, in ihrer Mitte die **Erde** enthaltend, welche gleichfalls **kugelförmig** und rund umher bewohnt ist". — *d.* Als ein verfrühter und darum auch ziemlich misslungener Versuch, die Ideen des grossen Meisters weiter auszuführen, ist derjenige zu bezeichnen, welcher durch einen Schüler von ihm, den um 500 v. Chr. in Theben lehrenden **Philolaus**, unternommen wurde. Allerdings ist uns derselbe nur durch Bruchstücke seiner drei Bücher „Über die Natur" bekannt, welche namentlich durch August **Boeckh** (Karlsruhe 1785 — Berlin 1868; Prof. Eloqu. Heidelberg und Berlin) in seiner Schrift „Philolaus, des Pythagoräers, Lehren. Berlin 1819

in 8." bearbeitet worden sind; aber wenn man auch von den höchst unklaren Ideen über die Existenz eines von der Sonne wohl zu unterscheidenden Centralfeuers, einer die Erde vor demselben schützenden Gegenerde (dem Antichthon), etc., Umgang nimmt und alles in möglichst günstiger Weise deutet, so bleibt höchstens die Vermutung übrig, es habe **Philolaus** die tägliche Bewegung durch eine Drehung der Erde erklären wollen, — dass er, wie die frühere Zeit annahm, die Bewegung der Erde um die Sonne gelehrt habe und somit ein Vorläufer von Coppernicus gewesen sei, ist eine total falsche Annahme.

254. Die Sphären des Eudoxus. — Das von Pythagoras inaugurierte geocentrische Weltsystem ging ziemlich unverändert auf **Plato** und dessen Schüler, die sog. Akademiker, über; auch sie nahmen anfänglich mit dem alten Meister nicht nur an, dass sich das den Abschluss des Alls bildende und die Fixsterne tragende Firmament gleichförmig um die Erde bewege, sondern auch dass sich die innerhalb desselben stehenden Planeten in konzentrischen Bahnen entgegengesetzt der täglichen Bewegung langsam gegen die Fixsterne verschieben [a]. Da sich jedoch **einerseits** aus den Beobachtungen bald ergab, dass diese Verschiebungen nichts weniger als gleichförmig sind, ja die Planeten zuweilen wie stille zu stehen, oder sogar während einiger Zeit im Vergleiche zu ihrer gewöhnlichen Bewegungsrichtung rückwärts zu gehen scheinen, — und man **anderseits** dennoch an der Kreisbewegung festhalten wollte [b], so entstand die Aufgabe, diese **Stationen** und **Retrogradationen** durch Kombinationen von verschiedenen Kreisbewegungen darzustellen. Dieses Problem wurde nun durch **Eudoxus** in höchst scharfsinniger Weise so an die Hand genommen, dass er die scheinbare Bewegung jedes Wandelsternes in eine Anzahl gleichförmiger Elementarbewegungen zu zerlegen suchte, deren jede durch eine um zwei Pole rotierende Sphäre darstellbar war, — sodann diese Sphären in der Weise verband, dass er die Axe jeder folgenden Sphäre durch die vorhergehende tragen liess, — und den Wandelstern selbst in den Equator der letzten Sphäre versetzte [c]. Wenn nun auch in dieser Weise keine genügende Darstellung erreicht wurde, so war doch damit einer solchen in trefflichster Weise vorgearbeitet, und es ist ein Verdienst der neuern Zeit, den Wert dieser Leistung ins rechte Licht gesetzt zu haben [d].

Zu 254: *a.* **Pythagoras** hatte angenommen, dass die Entfernungen der 7 Wandelsterne in bestimmten harmonischen Verhältnissen stehen und infolge davon durch den Gesamtumschwung ein Wohlklang, die sog. **Sphärenmusik**, hervorgerufen werde, welche wir nur darum nicht hören, weil wir sie immer hören. — *b.* Die Kreisbewegung wurde wohl weniger darum festgehalten, weil man sie als die einzige der Natur würdige betrachtete, sondern eher weil sie die einzige damals zu bewältigende war. — *c.* Jeder Wandelstern erhielt zunächst eine **erste Sphäre**, welche sich in einem Tage im Sinne der



täglichen Bewegung um eine zum Equator senkrechte Axe I umdrehte, und diese trug nun die zur Ekliptik senkrechte Axe II einer **zweiten Sphäre**, welche sich in entgegengesetztem Sinne drehte, und zwar so, dass ihr Umlauf bei

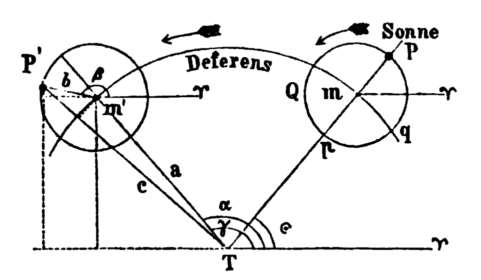
☽	☉ ☿ ♀	♂	♃	♄
$^1/_{12}$	1	2	12	30

Jahre in Anspruch nahm. **Weitere Sphären** wurden dann bei jedem einzelnen Wandelsterne je nach Bedarf zur Darstellung der ihm eigentümlichen Ungleichheiten in seiner Bewegung beigegeben, und es kamen von **Eudoxus** im ganzen für die 7 Wandelsterne 27 Sphären zur Verwendung, — eine Anzahl, welche durch den um die Mitte des 4. Jahrhunderts v. Chr. lebenden **Kalippus** auf 34 erhöht wurde. — *d.* Dass diese Sphären für **Eudoxus** nur mathematische Hilfsmittel ähnlicher Art waren, wie wir sie jetzt in gewissen Reihenentwicklungen besitzen, ist ziemlich sicher; dagegen erwarben sich einzelne sog. Physiker, zu welchen auch der sonst so weitsehende **Aristoteles** zählte, das zweifelhafte Verdienst, die wirkliche Existenz solcher Sphären, der sog. **Krystallsphären**, zu lehren, und es war zunächst dieser Ballast, der andere für das System von Eudoxus ungünstig stimmte. — Leider haben sich von der betreffenden Schrift des **Eudoxus**, seinem Buche „*Περὶ τῶν ταχυτήτων*“ (Über die Geschwindigkeiten)“, nur einzelne Fragmente bei **Aristoteles** und dessen Kommentatoren erhalten, und es kostete die **Ideler** und **Schiaparelli** keine geringe Mühe, in ihren Abhandlungen „Über Eudoxus (Berl. Abh. 1828 und 1830), — und: Le Sfere omocentriche di Eudosso, di Calippo e di Aristotele (Pubbl. Brera IX, und deutsch von W. Horn in Zeitschr. f. M. u. Ph. 22 von 1877)“ das System des alten Meisters wieder einigermassen herzustellen.

255. Die Arbeiten von Hipparch und Ptolemäus. — Wir haben bereits früher (204 und 210) gesehen, in welch' geschickter Weise **Hipparch** und **Ptolemäus** erste Theorien der Sonne und des Mondes aufzustellen wussten und haben uns daher nicht zu verwundern, dass sie auch die Theorien der eigentlichen Planeten mit einem Eudoxus weit überholenden Erfolge an die Hand nehmen konnten, obschon dieselben noch bedeutend grössere Schwierigkeiten als die Theorie des Mondes darboten: Bei dem Monde blieb doch immer die Grundbewegung eine wirkliche Bewegung um die Erde, und es handelte sich also nur darum, eine Reihe kleinerer periodischer Ungleichheiten annähernd darzustellen, — bei den Planeten dagegen hatte schon die Grundbewegung ein ausser der Erde (wie wir jetzt wissen, in der Sonne) liegendes Centrum, und war daher bereits im geocentrischen Systeme eine excentrisch-epicyklische, deren Übersicht noch durch andere Anomalien und den Mangel eines genügenden Beobachtungsmateriales erschwert wurde. Erst nachdem **Hipparch** letzteres geschaffen hatte, konnte er die Ungleichheiten in der Bewegung der Planeten genauer studieren, wobei sich

ihm zeigte, dass sich die hauptsächlichsten derselben in zwei Kategorien abscheiden lassen: Eine **erste Ungleichheit**, welche die veränderliche Geschwindigkeit umfasste und den siderischen Umlauf zur Periode hatte, — und eine **zweite Ungleichheit**, welche sich in den Stationen und Retrogradationen zeigte und, wie schon **Eudoxus** vermutete, dem synodischen Umlaufe entsprach. Die Aufstellung eigentlicher Theorien konnte jedoch **Hipparch** nicht mehr vollenden und da sich lange niemand getraute, sein Erbe anzutreten, so blieb diese Aufgabe ungelöst, bis sich endlich, wie schon angedeutet, **Ptolemäus** an dieselbe wagte. Dieser entschloss sich nun alsbald, die beiden Hilfsmittel, welche ihm schon für die Mondtheorie so gute Dienste geleistet hatten, nämlich den excentrischen Kreis und die epicyklische Bewegung [a], auch für die Darstellung der Planetenbewegungen zu verwenden, zumal ihm letzteres Hilfsmittel den in der zweiten Ungleichheit zu Tage tretenden, ihn ausschliesslich beschäftigenden **mathematischen** Verhältnissen ganz vorzüglich zu entsprechen schien, und er hatte auch wirklich die Genugthuung, auf diesem Wege das gewünschte Ziel in befriedigender Weise zu erreichen.

Zu 255: *a.* Es mag hier nachgetragen werden, dass wahrscheinlich der grosse Geometer **Apollonius** Pergäus, der sich überhaupt für die Astronomie interessiert und auch selbst beobachtet haben soll, sowohl die excentrischen Kreise als die Epicykel zur Darstellung der Ungleichheiten empfahl, falls es nicht etwa schon **Apollonius** Myndius (279 : a) war. — *b.* Die Anwendung des Epicykels und des denselben tragenden, sog. **deferierenden** Kreises beruht auf folgendem: Die Geschwindigkeit im Epicykel addiert sich bei P zu derjenigen im deferierenden Kreise, während sie sich bei p subtrahiert, bei Q und q aber in Beziehung auf die Erde T verschwindet, so dass bei P ein Maximum, bei p dagegen ein Minimum der scheinbaren Geschwindigkeit eintritt, und dem letztern sogar eine retrograde Bewegung entspricht, sobald die Geschwindigkeit im Epicykel grösser als diejenige im deferierenden Kreise angenommen wird. Überdies ist



Bogen qPQ > Qpq, also braucht bei gleichförmiger Bewegung der Planet mehr Zeit, um von q nach Q zu kommen, als von Q nach q zurückzukehren, namentlich also auch mehr Zeit, um von der grössten Geschwindigkeit zur mittlern, als von dieser zur kleinsten zu gelangen, — ein Verhältnis, das der Wirklichkeit entspricht und durch den excentrischen Kreis allein ebensowenig darstellbar war, als die Stationen und Retrogradationen es überhaupt gewesen wären. — Bezeichnet nun P die Lage des Planeten zur Zeit seiner Konjunktion mit der Sonne, P' eine spätere Lage, — sind ferner a, b, c der Reihe nach

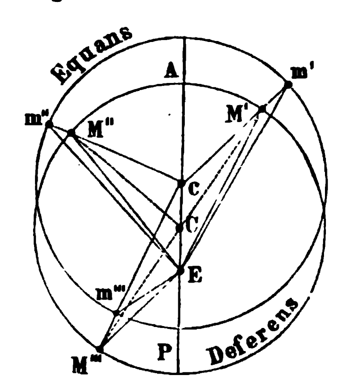
die Halbmesser des deferierenden Kreises, des Epicykels und die Distanz P' T, — endlich ⊙, α, β, γ die Längen von M, M', P' in Beziehung auf T und M', so kann man aus der Figur die Beziehungen

$$c \cdot \mathrm{Co}\, \gamma = a \cdot \mathrm{Co}\, \alpha + b \cdot \mathrm{Co}\, \beta \qquad c \cdot \mathrm{Si}\, \gamma = a \cdot \mathrm{Si}\, \alpha + b \cdot \mathrm{Si}\, \beta$$
$$c = a \cdot \mathrm{Co}\,(\gamma - \alpha) + b \cdot \mathrm{Co}\,(\beta - \gamma) \qquad \mathbf{1}$$

ablesen, welche gewissermassen der analytische Ausdruck der epicyklischen Bewegung sind, — und überdies erhält man, wenn A die Umlaufszeit im deferierenden Kreise und B diejenige im Epicykel ist, da sich die Umlaufszeiten umgekehrt wie die in gleichen Zeiten beschriebenen Winkel verhalten, die Proportion

$$A : B = (\beta - \alpha) : (\alpha - \odot) \qquad \mathbf{2}$$

Es werden uns diese Beziehungen später (259) höchst wichtige Vergleichungen erlauben, — vorläufig bleibt nur anzuführen, dass die durch sie repräsentierten Hilfsmittel sich in ihrer Anwendung auf die einzelnen Planeten ganz gut bewährten, besonders nachdem sich **Ptolemäus** noch entschlossen hatte, den bisherigen excentrischen Kreis zwar als **Equans** beizubehalten und sich einen Punkt in demselben gleichförmig bewegen zu lassen, — dagegen als **Deferens**, oder Träger des Epicykels, einen zweiten, jenem gleichen Kreis einzuführen, dessen Centrum die Mitte zwischen Erde und Centrum des Equans einnahm und von welchem aus er je die für eine gewisse Zeit im Equans erhaltene Lage m nach M auf den Deferens übertrug. Er scheint allerdings nicht bemerkt zu haben, dass er durch diese Konstruktion das bisdahin so ängstlich festgehaltene Grundprincip verletzte; denn wenn auch die Winkel m' c m'' und m'' c m''' den Zwischenzeiten proportional angenommen werden, so sind es eben die



Winkel M' C M'' und M'' C M''' nicht mehr, und es ist also die Bewegung im Deferens nicht mehr eine gleichförmige. Es ist ganz merkwürdig, wie **Ptolemäus** unbewusst durch die Strömung der Thatsachen ergriffen und von der Kreisbewegung so gegen die elliptische Bewegung hingetrieben wurde, dass er den blinden Anhängern der erstern nur noch im Centrum des Equans, aus dem die Bewegung gleichförmig erschien, ein Asyl übrig liess, um dort ruhig sterben zu können. — Um noch etwas genauer auf den durch **Ptolemäus** eingeschlagenen Weg einzutreten, ist vorerst zu bemerken, dass die drei obern Planeten Mars, Jupiter und Saturn zunächst in ihren Oppositionen mit der Sonne, — die zwei untern, Venus und Merkur, dagegen zunächst in ihren Elongationen beobachtet wurden. So verwendete **Ptolemäus** (vgl. Alm. Halma II 214 f) für Mars zunächst drei Beobachtungen von Oppositionen, welche ihm am 26./7. Tybi des 15. Jahres von Adrian eine Stunde nach Mitternacht (130 XII 12, 13^h), am 6./7. Pharmouti des 19. Jahres von Adrian drei Stunden vor Mitternacht (135 II 20, 9^h) und am 12./3. Epiphi des 2. Jahres von Antonin zwei Stunden vor Mitternacht (139 V 27, 10^h) die Marslängen $2^s\,21^\circ\,0'$, $4^s\,28^\circ\,50'$ und $8^s\,2^\circ\,34'$, oder als Bewegungen des Mars in Länge M' E M'' = $67^\circ\,50'$ in $1529^d,8333$ und M'' E M''' = $93^\circ\,44'$ in $1556^d,0417$ ergeben hatten, während denselben Zwischenzeiten, unter Voraussetzung eines Marsjahres von $1^a,8808$ oder einer mittlern täglichen Bewegung $0^\circ,52406$, die davon wesentlich

differierenden mittlern Bewegungen in Länge m′ c m″ = 81° 44′ und m″ c m‴ = 95° 28′ zukommen würden. Diesen Differenzen entsprach aber, wie sich **Ptolemäus** durch eine längere Näherungsrechnung überzeugte, bei welcher er in erster Linie die unbekannten Winkel m′ E m″ und m″ E m‴ durch die bekannten M′ E M″ und M″ E M‴ ersetzte, die Excentricität E C = $6^p : 60^p$ = 0,1 und die Lage des Apogeums A in 3^s 11° 45′. — Um sodann endlich die Grösse des Epicykels zu bestimmen, zog **Ptolemäus** noch eine Marsbeobachtung bei, welche er drei Tage nach der dritten Opposition drei Stunden nach Mitternacht (139 V 30, 15^h) gemacht und die ihm die Länge 8^s 1° 36′ ergeben hatte, so dass Mars seit der Opposition um volle 58′ zurückgegangen war. Unter der dem frühern entsprechenden Annahme, dass Mars seinen Epicykel während eines synodischen Umlaufes von 2^a $49^1/_3{}^d$ zu durchwandern habe, folgte aber aus dieser retrograden Bewegung ohne Schwierigkeit, dass der Radius des Epicykels sich zu dem des excentrischen Kreises wie 39^p 30′ : 60^p verhalte oder der erstere in dem letztern nahe 1,52 mal enthalten sei, — dass also, was Ptolemäus natürlich nicht ahnte, Epicykel und Deferens des Mars sich gerade wie Erdbahn und Marsbahn verhalten. — Auf ähnliche Weise fand **Ptolemäus**, den Radius von 60^p für den excentrischen Kreis beibehaltend, für Jupiter 2^p 45′ als Excentricität und 11^p 30′ als Radius des Epicykels, für Saturn aber 3^p 25′ und 6^p 30′. Auch für die untern Planeten ging er analog vor, nur stützte er sich für sie, wie schon gesagt, zunächst auf Elongationsbeobachtungen: Den Mittelpunkt des Epicykels liess er den excentrischen Kreis je in einem Jahre durchlaufen oder beständig der Sonne folgen, war dann aber noch genötigt, dem Centrum des Deferens überdies eine Kreisbewegung um das Centrum des Equans zu geben. Den Radius des excentrischen Kreises wieder zu 60^p annehmend, erhielt er für Merkur die Excentricität 6^p 0′, den Radius des Epicykels 22^p 30′, für Venus aber 2^p 30′ und 43^p 10′.

256. Das ptolemäische Weltsystem und der Almagest. — Sehr häufig sieht man das **geocentrische** oder **ptolemäische Weltsystem** in der Weise bildlich dargestellt, dass einem der Erde entsprechenden centralen Punkte eilf konzentrische Kreise umschrieben sind, von welchen die sieben innersten der Reihe nach die Sphären der sieben Wandelsterne Mond, Merkur, Venus, Sonne, Mars, Jupiter und Saturn repräsentieren sollen, während die durch den 8. Kreis dargestellte Sphäre die sämtlichen Fixsterne trägt, die 9. und 10. Sphäre die Erscheinungen der Präcession zu besorgen haben, und die 11. Sphäre als **Primum mobile** die tägliche Bewegung des Ganzen bewirkt. Es ist dies eine schematische Darstellung, welche absolut wertlos, ja überdies schädlich ist, indem sie das unwesentliche und zum Teil (230 : d) sogar zweifelhafte an die Spitze stellt und das wirklich geleistete, nämlich die aufgestellten Theorien der Wandelsterne und die darauf gegründeten Tafeln, gar nicht berührt. Wir wollen uns daher bei derselben nicht weiter aufhalten, sondern lieber noch zur Ergänzung des früher (4—6) mitgeteilten eine kurze Übersicht von dem Inhalte der 13 Bücher des von **Ptolemäus** unter dem Titel **Syntaxis** verfassten, gewöhnlicher

aber als **Almagest** bezeichneten Kapitalwerkes geben [a]: **Das erste Buch** enthält die nötigsten Vorbegriffe und schliesst mit der Sehnenrechnung (61) ab. **Das zweite Buch** giebt die Elemente der sog. mathematischen Geographie (216 u. f.). **Das dritte Buch** handelt von der Länge des Jahres und von der Theorie der Sonne (204), — **das vierte Buch** von der Länge des Monats und von der Theorie des Mondes (210). **Das fünfte Buch** bespricht die Konstruktion des Astrolabiums, dessen Gebrauch und die Bestimmung der Mondparallaxe (386, 438), — **das sechste Buch** die Konjunktionen und Oppositionen von Sonne und Mond, die Bedingungen der Finsternisse und die Möglichkeit ihrer Vorausbestimmung (243 u. f.). **Das siebente und achte Buch** beschäftigen sich mit den Fixsternen, der Präcession der Nachtgleichen und enthalten namentlich den schon mehrfach besprochenen Sternkatalog (181 u. f., 200, etc.). **Das neunte bis dreizehnte Buch** endlich sind den fünf Planeten und ihren Theorien gewidmet (255) [b]. — Das ganze Werk erfüllt den Leser mit Staunen über den Fleiss, die Gelehrsamkeit und den Scharfsinn seines Verfassers, und er begreift, dass dasselbe von jeher den höchsten wissenschaftlichen Leistungen des Altertums beigezählt wurde, ja im Mittelalter wie ein astronomisches Evangelium verehrt werden konnte, von dem abzuweichen beinahe ein Verbrechen war [c].

Zu 256: *a.* Der Almagest muss (vgl. 4 : g) zwischen 150 und 160 n. Chr. vollendet worden sein. Dem in 4 über die drei verschiedenen Bezeichnungen beigebrachten ist beizufügen, dass sie (wegen μέγας = gross, μέγιστος = grösster und συντάξις = Zusammenordnung) im wesentlichen übereinstimmen. — *b.* Wie der Almagest zu den Arabern und nach dem Abendland kam, ist schon in 5 und 6 auseinandergesetzt worden; dagegen mögen hier noch die wichtigsten Ausgaben desselben namhaft gemacht werden: Zuerst erschien der Almagest nach der (6) von **Gherardo** Cremonese aus dem Arabischen gemachten Übersetzung unter dem Titel „Almagestum Cl. Ptolemei Pheludiensis Alexandrini Astronomorum principis: Opus ingens ac nobile omnes Celorum motus continens. Felicibus Astris eat in lucem: Ductu Petri Liechtenstein Coloniensis Germani. Anno Virginei Partus. 1515. Die. 10. Ja. Venetiis ex officina eiusdem litteraria (152 Bl. in fol.)“, eine Ausgabe, in welche sich bei der Doppelübersetzung einer vielleicht schon mangelhaften Abschrift begreiflich viele Fehler einschlichen, während sie dagegen einen musterhaften Druck und gute Figuren zeigt, — letztere allerdings ausschliesslich auf dem breiten Rande und noch nicht, wie etwas später (z. B. 1543 bei Coppernicus) wirklich im Texte. — Eine zweite Ausgabe des Almagest, welche „Venetiis 1525 in fol.“ erschien, beruhte auf einer Übersetzung, welche **Georg** von Trapezunt (Chandace auf Kreta 1396 — Rom 1485?; Prof. philos. und Secretarius apostolicus) mit gutem Willen, aber ohne das nötige Verständnis, nach einer Abschrift des griechischen Originales machte, die (vgl. 6) **Bessarion** etwa 1438 nach Rom brachte. Ein „Venetiis 1528 in fol.“ ausgegebener Neuabdruck dieser Übersetzung enthält eine Reihe von Verbesserungen, welche Lukas **Gauricus** (Giffoni bei Neapel 1476 — Rom 1558; Prof. math. Bologna, Ferrara, Venedig und Rom) an derselben anbrachte,

ist aber doch nicht als etwas eigentlich Neues zu betrachten, — und auch die beiden Ausgaben der sog. „Opera omnia Ptolemæi praeter geographiam", welche zwei Schüler von Seb. **Münster**, der selbst „Basileæ 1540 in fol." die Geographie herausgab, nämlich Hieronymus **Gemusäus** (Mülhausen 1505 — Basel 1543?; Prof. phys. Basel) 1541 und Oswald **Schreckenfuchs** (5:n) 1551 zu Basel im Einverständnisse mit ihm zum Drucke besorgten, stützten sich für den Almagest wesentlich auf die Übersetzung Georgs von Trapezunt. — Einer ersten Originalausgabe, welche Simon **Grynäus** „Basileæ 1538 in fol." zum Drucke besorgte, lag ebenfalls das Manuskript Bessarions zu Grunde, das inzwischen durch **Purbach** und **Regiomontan** für ihre „Epitoma (vgl. 6)" benutzt und namentlich von letzterm mit Rücksicht auf Theons Kommentar möglichst bereinigt und zum beabsichtigten, aber dann wegen frühem Tode nicht wirklich ausgeführten Abdrucke vorbereitet worden war. Überdies fügte Grynäus dieser Ausgabe mit Hilfe von Joachim Liebhard oder (als Nachkomme der Kämmerer des Bischofs von Bamberg) **Camerarius** (Bamberg 1500 — Leipzig 1574; Prof. philol. Tübingen und Leipzig) auch den ebenerwähnten Kommentar bei, der damit zum erstenmal an die Öffentlichkeit gelangte. — Nachdem sodann fast zwei Jahrhunderte lang in Sachen nichts wesentliches geschehen war, erwarb sich der Abbé **Halma** das Verdienst, den von ihm kritisch bearbeiteten griechischen Text des Almagest „Paris 1813—16, 2 Vol. in 4." unter Beigabe französischer Übersetzung aufzulegen, und es ist diese treffliche Ausgabe, welche jetzt fast ausschliesslich benutzt wird und auf welche sich auch meine Citate beziehen. Leider sind drei andere, den Kommentar von Theon und verschiedene Tafeln enthaltende Bände, welche Halma von 1822—25 folgen liess, um dann 1828 mit der „Géographie mathématique" abzuschliessen, fast nicht mehr zu beschaffen. — *c.* Nachdem **Coppernicus** und seine Nachfolger den Zauber gebrochen hatten, wies die Kritik manches, was bis dahin als Leistung des **Ptolemäus** angesehen worden war, seinen Vorgängern **Eudoxus** und **Hipparch** zu und hob namentlich tadelnd hervor, dass manche Zahlen, welche er sich den Anschein gebe durch eigene Beobachtungen erhalten zu haben, nur durch Rechnung aus frühern abgeleitet sein können, — ja einzelne scheuten sich nicht, gestützt auf mehrere allerdings etwas sonderbare Vorkommenheiten, aus dem Verfasser des Almagest einen simpeln Kompilator und Plagiarius zu machen. Erst in der neuern Zeit hat eine gerechtere, zwischen beiden Extremen die richtige Mitte zu halten suchende Würdigung Platz gefunden, welche zwar zugiebt, dass durch den Wunsch von **Ptolemäus**, auch als Beobachter zu glänzen, einiges Unlautere in seine Berichterstattung hineingekommen sein mag, aber darüber nicht vergisst, dass dieser kleine Schatten durch die unbestrittenen Verdienste hundertfach aufgewogen wird.

257. Die Lehre von Coppernicus. — Schon bei seinen ersten astronomischen Studien nahm **Coppernicus** an dem bisdahin üblichen Verfahren, die Bewegungen der Wandelsterne darzustellen, Anstand und empfand das Bedürfnis, nach einer naturgemässern Methode zu suchen[a]. Um neue Ausgangspunkte zu erhalten, studierte er verschiedene Schriften des klassischen Altertums, jedoch ohne davon befriedigt zu werden; immerhin las er bei Cicero dass ein gewisser **Hiketas**, bei Plutarch dass der Pythagoräer **Philolaus** und ebenso **Heraklides** aus Pontus, sei es an eine fortschreitende, sei es

wenigstens an eine drehende Bewegung der Erde gedacht haben, und stellte sich nun die Aufgabe, selbst zu untersuchen, wie sich jene Bewegungen unter der Annahme gestalten würden, dass alle Wandelsterne sich um die Sonne bewegen. Er fand dabei alsbald, dass sich wirklich unter einer solchen Annahme alle Verhältnisse ungemein vereinfachen und gewann etwa 1507 [b] die feste Überzeugung, dass **faktisch und nicht bloss hypothetisch** folgende vier Bewegungen statthaben: **1)** eine **tägliche Bewegung der Erde um ihre Axe in der Richtung von West nach Ost,** durch die sich in naturgemässer Weise die scheinbare gemeinschaftliche Bewegung aller Gestirne von Ost nach West ergiebt. — **2)** eine **jährliche Bewegung der Erde um die Sonne in der Richtung von West nach Ost,** die uns als jährliche Bewegung der Sonne in derselben Richtung erscheint. — **3)** eine der letztern entgegengesetzte **jährliche konische Bewegung der Erdaxe um eine Senkrechte zur Ekliptik** zur Paralysierung der konischen Bewegung, welche diese Axe wegen ihrer gemutmassten Verbindung mit dem Radius vector der Erde erhält [c]. — **4)** eine der Bewegung der Erde analoge **Bewegung der sämtlichen Planeten um die Sonne,** deren scheinbare, der sog. zweiten der Alten entsprechende Ungleichheit eine notwendige Folge der Bewegung des Beobachters sei. — Sein übriges Leben verwandte sodann **Coppernicus,** soweit es ihm seine Funktionen als Domherr und Arzt gestatteten, um die Konsequenzen dieser Bewegungen zu verfolgen, dieselben als mit der Wirklichkeit übereinstimmend zu erweisen und überhaupt durch Beobachtung und Rechnung sein System möglichst fest zu begründen und gegen alle Einwürfe sicher zu stellen, auf welche er sich gefasst machen musste; denn wenn man auch allenfalls seine Lehre, **dass sich die Planeten um die Sonne als gemeinschaftlichen Mittelpunkt bewegen,** bloss als eine, aber allerdings sehr wesentliche, Vereinfachung der alten epicyklischen Theorie bezeichnen konnte, indem er gewissermassen nur die fingierten Deferens der untern und die Epicykel der obern Planeten in seiner Erdbahn zu einer einzigen und reellen Hilfsbahn zusammenschmolz (259), — so war dagegen seine Lehre, **dass die Erde ein Planet, jeder Planet eine Erde und die Sonne das Centrum dieser ganzen Körperwelt sei,** so neu und den seit bald zweitausend Jahren unangefochtenen Anschauungen so total zuwider, dass sie entweder unbeachtet bleiben oder dann die ganze gebildete Welt in Aufregung bringen musste [d].

Zu 257: *a.* **Coppernicus** erzählt dies selbst in der seinem sofort zu besprechenden Werke vorgesetzten Zuschrift an Papst Paul III. — *b.* Rud. **Falb** berichtete im Sirius (1868 Nro. 4), dass **Coppernicus** schon A. 1500 in Rom

vor 2000 Zuhörern die Doppelbewegung der Erde gelehrt habe; es beruht wohl diese Erzählung, welche schon mit der Zurückhaltung in grellem Gegensatze steht, die der Schöpfer des heliocentrischen Systemes noch lange Jahre zeigte, auf einem groben Missverständnisse. — *c.* Schon **Rothmann** soll diese dritte Bewegung als **überflüssig**, und **Galilei** dieselbe bereits als **une erreur de mécanique** bezeichnet haben. — *d.* Schon Karl Gustav **Reuschle** (Mehrstetten 1811 — Stuttgart 1875; Prof. math. Stuttgart) hat dies in seiner Schrift „Kepler und die Astronomie. Frankfurt 1871 in 8.)" ganz gut auseinander gesetzt.

258. Die Vorläufer. — Es wurde bereits früher (4) erwähnt, dass schon zur Zeit der Ausbildung des geocentrischen Systemes Versuche gemacht worden seien, sich die scheinbaren Bewegungen der Wandelsterne auch in anderer Weise zurechtzulegen, — weniger im Gedanken an die vagen Andeutungen, welche **Coppernicus** (257) in den Schriften der Alten fand, als an die präcise, ihm aber unbekannt gebliebene Nachricht, welche uns **Archimedes** in seiner sog. „Sandrechnung" [a] überliefert hat: „Die Mehrzahl der Astronomen", erzählt er nämlich, „versteht unter **Welt** eine Kugel, deren Centrum mit dem der Erde zusammenfällt und deren Radius gleich der Entfernung der Sonne von der Erde ist. **Aristarch** von Samos berichtet diese Dinge und widerlegt sie in den Propositionen, welche er gegen die Astronomen veröffentlicht hat [b]. Nach seiner Meinung ist die Welt viel grösser als soeben gesagt wurde; denn er setzt voraus, dass die Sterne und die Sonne unbeweglich seien, — **dass die Erde sich um die Sonne als Centrum bewege**, — und dass die Fixsternsphäre, deren Centrum ebenfalls in der Sonne liege, so gross sei, dass sich [c] der Umfang des von der Erde beschriebenen Kreises zu der Distanz der Fixsterne verhalte wie das Centrum einer Kugel zu ihrer Oberfläche" [d]. — Es geht hieraus nämlich unzweifelhaft hervor, dass spätestens schon **Aristarch** ein ziemlich ausgebildetes **heliocentrisches** Weltsystem ausgedacht hatte, und man kann sich bloss fragen, wie derselbe auf solche Ideen gekommen sein möge. Eine sichere Antwort lässt sich jedoch auf diese Frage nicht geben [e], sondern nur konstatieren, dass damals der Boden für das ausgeworfene Samenkorn noch nicht tüchtig war, jedoch dasselbe successive von einzelnen Griechen, Arabern und Abendländern sorgsam gehütet wurde [f], bis es endlich zur Zeit von **Coppernicus** wirklich aufgehen konnte. Man wird somit zu allen Zeiten **Aristarch**, und allfällig einige seiner spätern Parteigänger, als Vorläufer von **Coppernicus** in Ehren zu halten, aber auch nie zu vergessen haben, dass erst letzterer die neue Lehre dadurch lebensfähig machte, dass er sie nicht bloss schärfer formulierte, sondern, was keiner von jenen auch nur von ferne versucht hatte,

dieselbe bis zu demjenigen Grade wissenschaftlicher Vollendung ausarbeitete, bis zu welchem früher **Hipparch** und **Ptolemäus** bei dem geocentrischen Systeme gekommen waren *g*.

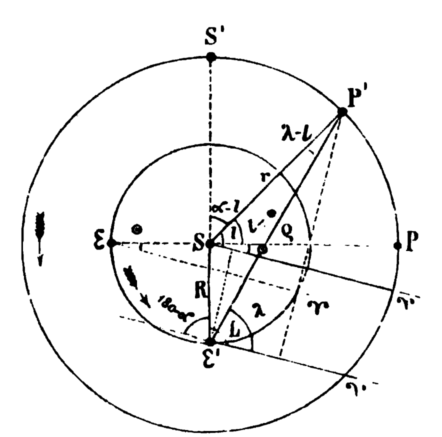
Zu 258: *a.* In seiner „Sandrechnung (Arenarius)“ stellte sich **Archimedes** (vgl. Oeuvres, éd. Peyrard 348 u. f.) die uns jetzt als „müssig“ erscheinende Aufgabe, zu zeigen, dass die Anzahl der Sandkörner fälschlich als unzählbar bezeichnet werde, indem man sogar die Anzahl derjenigen angeben könne, welche den ganzen Weltraum ausfüllen würden, selbst wenn er die von **Aristarch** gewollte grössere Ausdehnung hätte. Er fand dabei, dass jene Zahl kleiner sei als 1000 mit einem Gefolge von 60 Nullen oder als 1000 Quintillionen Quintillionen. — *b.* Die „Propositionen“ von **Aristarch** gingen leider verloren, und das Werk „Aristarchi Samii de mundi systemate libellum, cum notis A. de Roberval. Parisiis 1644 in 12.“, das sich angeblich auf ein arabisches Manuskript stützen sollte, ist, wie nach Lalande schon Ménage nachwies, einfach eine von **Roberval** zu Gunsten des coppernicanischen Systemes verfasste Schrift, welche er, um sich gegen Angriffe zu decken, Aristarch unterschob. — *c.* Wie sich **Aristarch** ausdrückte, um „unendlich“ zu umschreiben. — *d.* Zur Ergänzung des Berichtes von Archimedes ist zu erinnern, dass **Plutarch** in seiner Schrift „De facie in orbe lunæ“ erzählt, man habe daran gedacht, den Samier **Aristarch** als Religionsveräcbter vor Gericht zu stellen, da er den heiligen Weltherd verrücke, indem er, „um die Himmelserscheinungen richtig zu stellen den Himmel stille stehen, die Erde dagegen in einem schiefen Kreise fortwälzen und zugleich um ihre eigene Axe drehen liess“. — Während zur Zeit von Coppernicus die Schriften von Archimedes noch wenig bekannt waren, so wusste man dagegen (257), dass unser Reformator wenigstens einzelne Schriften von Plutarch gelesen hatte und es musste daher befremden, Aristarch durch ihn gar nicht genannt zu sehen. Erst neuerlich hat sich nun diese Sache aufgeklärt, indem M. Curtze bei Bearbeitung der Säkularausgabe des coppernicanischen Werkes (260) fand, dass das Originalmanuskript ursprünglich den Passus enthielt: „Und wenn wir auch zugeben, dass der Sonnen- und Mondlauf auch bei der Unbeweglichkeit der Erde erklärt werden kann, so trifft diess bei den andern Wandelsternen um so weniger zu. Es ist glaublich, dass **Philolaos** aus ähnlichen Gründen die Bewegung der Erde annahm, welche Annahme auch **Aristarch** von Samos gemacht haben soll, wie Einige berichten“; denn es geht aus dieser, bei den schliesslichen Kürzungen als unbedeutend wieder gestrichenen Stelle ziemlich sicher hervor, dass **Coppernicus** die oben ausgezogene Schrift von Plutarch nicht kannte und wirklich keine genauere Kenntnis von den Ideen seines Vorläufers besass. — *e.* Ob **Aristarch** auf seine Ansicht durch eigenes Nachdenken verfiel oder nur Ideen weiter verfolgte, die schon **Plato** teils in seinem „Timæus“, wo er die Axendrehung der Erde andeutete, teils in höherm Alter, wo er nach Plutarch „die Erde nicht mehr die Mitte des Ganzen einnehmen liess, sondern diesen Platz einem andern bessern Gestirn einräumte“, schüchtern aussprach, weiss man nicht. Jedenfalls ist letzteres wahrscheinlicher als dass **Aristarch** etwas davon wusste, dass schon die alten Mexikaner das Centrum der Planetenbewegungen in die Sonne gelegt haben sollen, wenn ihm auch nicht unbekannt gewesen sein mag, dass die alten Egypter die untern Planeten für Trabanten der Sonne hielten. — *f.* So docierte, um nur einige Beispiele aus dem Abendlande beizubringen, der im Anfange des 12. Jahrhunderts zu St-Autin in Frankreich lebende Priester **Honorius** Gallus, dessen Schrift „De imagine mundi“

schon um 1472 zu Nürnberg und später wiederholt (z. B. Spiræ 1583 in 8.) aufgelegt, auch in verschiedene Sprachen übersetzt worden sein soll, die Lehren Aristarchs, und auch der als „Fürst der Scholastiker" betrachtete **Thomas von Aquino** (Aquino im Neapolitanischen 1225? — Terracina 1274; Lehrer zu Köln, Paris und Rom) soll mit denselben vollständig vertraut gewesen sein. Dagegen beruhte es auf totalem Missverständnisse, wenn einige auch **Regiomontan** zu den Vorläufern von **Coppernicus** zählen wollten oder ihn wenigstens die Axendrehung der Erde lehren liessen; denn seine 1533 durch Schoner publizierte Disputation „An Terra moveatur an quiescat" zeigt, dass er sich noch ganz auf den Standpunkt von Ptolemäus stellte und, wie sein Herausgeber spöttisch beifügte, nichts von denjenigen wissen wollte, welche sich die Erde „wie an einem Bratenwender" drehen liessen, damit sie könne von der Sonne „gebraten" werden. Ebenso kann **Cusanus** nicht als Vorläufer von **Coppernicus** bezeichnet werden, — wohl aber als einer von denen, welche für ihn den Boden ebneten, indem er nicht nur die Erde unter die Sterne einreihte und damit die Scheidewand niederriss, welche bis dahin Himmel und Erde von einander trennte, — sondern auch die Bewegung als etwas der Materie immanentes bezeichnete und sich überhaupt nicht scheute, mit frühern Ansichten zu brechen, sobald ihm zwingende Gründe dafür vorhanden schienen. — *g.* Für weitern Detail vergleiche „**Schiaparelli**, I precursori di Copernico nell' antichità. Milano 1873 in 4. (Pubbl. di Brera; deutsch von Curtze, Leipzig 1876), — **Schanz**, Die astronomischen Anschauungen des Nicolaus von Cusa und seiner Zeit. Rottweil 1873 in 4., — Aloys **Sprenger** (Nassereut in Tyrol 1813 geb.; Prof. orient. Bern und Heidelberg), The Copernican System of Astronomy among the Arabs (Journ. Asiat. Soc. of Bengal 25), — Franz **Hipler**, Die Vorläufer von Nic. Coppernicus (Mitth. Cop. Ver. 4 von 1882), — etc."

259. Das Erbe. — Aus Vergleichung des heliocentrischen und geocentrischen Systemes ergiebt sich leicht, dass, wenn man bei ersterm den Radius der Erdbahn, bei letzterm denjenigen des Deferens als Einheit wählt, die Distanz eines Planeten von der Sonne dem Radius seines Epicykels gleich oder reciprok ist, je nachdem er (276) zu den untern oder obern Planeten gehört [a]. Hieraus folgt aber, dass **Coppernicus** aus der griechischen Verlassenschaft gerade deren **Juwel als Erbe** zufiel und ihm erlaubte, die Aufgabe der Distanzbestimmung, deren Lösung **Ptolemäus** noch unmöglich erschienen war, auf Grund seines neuen Systemes in leichter Weise zu absolvieren [b], — aber allerdings auch, dass durch dieses neue System für die Genauigkeit der Tafeln wenig gewonnen wurde, wie es sich eigentlich von selbst versteht, da sein Urheber noch an den Kreisbewegungen festhielt und strenge genommen nur eine, wenn auch noch so geschickte, Transformation der Coordinaten durchführte.

Zu 259: *a.* Lässt man, entsprechend der Lehre von Coppernicus, Planet und Erde sich um die Sonne bewegen und bezeichnen r, R und ϱ

ihre Distanzen von der Sonne und von einander, l die heliocentrische Länge des Planeten, L und λ aber die geocentrischen Längen von Sonne und Planet, $\odot$ endlich die gemeinschaftliche Länge von Sonne und Planet zur Zeit ihrer Konjunktion, so ergeben sich aus der beistehenden Figur offenbar die Beziehungen



$$\varrho \cdot \text{Co}\,\lambda = \text{r} \cdot \text{Co}\,\text{l} + \text{R} \cdot \text{Co}\,\text{L}$$
$$\varrho \cdot \text{Si}\,\lambda = \text{r} \cdot \text{Si}\,\text{l} + \text{R} \cdot \text{Si}\,\text{L} \qquad \mathbf{1}$$
$$\varrho = \text{r} \cdot \text{Co}(\lambda - \text{l}) + \text{R} \cdot \text{Co}(\text{L} - \lambda)$$

welche mit den 255 : 1 identisch werden, sobald man entweder

$$a = R \qquad b = r \qquad c = \varrho$$
$$\alpha = L \qquad \beta = l \qquad \gamma = \lambda$$

oder

$$a = r \qquad b = R \qquad c = \varrho$$
$$\alpha = l \qquad \beta = L \qquad \gamma = \lambda$$

setzt. Je nachdem man erstere oder letztere Annahmen macht, geht aber 255 : 2 in

$$A : B = \frac{360^0}{L - \odot} : \frac{360^0}{l - L} = T : \tau \qquad \text{oder} \qquad A : B = \frac{360^0}{l - \odot} : \frac{360^0}{L - l} = t : \tau \qquad \mathbf{2}$$

über, wo T und t die tropischen Umlaufszeiten von Sonne und Planet bezeichnen, τ aber die synodische Umlaufszeit des Planeten ist. Man hat daher für die untern Planeten, wo $l > L$ ist, die erstere, — für die obern Planeten, wo $l < L$ ist, die letztere Annahme zu wählen, so dass für jene oder diese

$$r : R = b : a \qquad \text{oder} \qquad r : R = a : b \qquad \mathbf{3}$$

zu setzen ist. — *b.* Führt man in die 3 die von **Ptolemäus** im Almagest (vgl. 255) erhaltenen Werte von a und b ein, so erhält man für r : R die Werte

☿	♀	♂	♃	♄
0,375	0,719	1,544	5,217	9,231

während **Coppernicus**, der offenbar noch einige neuere Beobachtungen zuzog, dieselben gleich

0,395	0,719	1,512	5,219	9,174

setzte, und die neueste Zeit dafür auf anderm Wege

0,387	0,723	1,542	5,203	9,539

fand, somit die von Coppernicus angestrebten Verbesserungen ohne grossen Erfolg waren.

260. Das Buch „De Revolutionibus". — Das von **Coppernicus** zur Darstellung und Begründung des heliocentrischen Systemes unter dem einfachen Titel „De Revolutionibus" verfasste Werk besteht aus sechs Büchern: **Das erste Buch** giebt namentlich einen Begriff von den durch den Verfasser der Erde zugeschriebenen drei Bewegungen und der neuen Anordnung des Sonnensystemes überhaupt, — enthält auch die bereits (88) besprochene Anleitung zur Trigonometrie, — und als Beigabe unter dem Titel „Canon subtensarum" eine Tafel, welcher für jede 10. Minute und den Radius

100000 direkt der Sinus entnommen werden kann. **Das zweite Buch** behandelt die sog. sphärische Astronomie und giebt einen Fixsternkatalog, der sich von demjenigen des Almagest namentlich dadurch unterscheidet, dass die Längen nicht auf das Equinoktium, sondern auf den demselben nahen Stern γ Arietis bezogen werden. **Das dritte Buch** hat die Präcession und die den neuen Principien accomodierte Theorie der jährlichen Bewegung zum Vorwurfe. **Das vierte Buch** giebt die Theorie des Mondes, welche er gegenüber dem Almagest, trotzdem hier der Boden unverändert blieb, wesentlich zu verbessern wusste. **Die zwei letzten Bücher** endlich enthalten, mit Einschluss der bereits besprochenen Distanzbestimmungen, die dem heliocentrischen Systeme entsprechenden Theorien der Planeten [a]. — Der erste Entwurf dieses Werkes wurde schon um 1530 fertig; jedoch konnte sich damals **Coppernicus**, obschon er nicht im mindesten Geheimniskrämerei trieb [b], noch nicht zur Veröffentlichung entschliessen, sondern gab dem Drängen seiner Freunde vorläufig nur insoweit nach, dass er etwa 1532 einen „Commentariolus de hypothesibus motuum cœlestium" verfasste, der sodann in verschiedenen Abschriften bei denselben zirkulierte [c] und veranlasste, dass nach und nach auch andere wenigstens gerüchtweise erfuhren, es wolle von Frauenburg aus ein neues Weltsystem eingeführt werden. Erst als auf ein solches Gerücht hin sich **Rhäticus** 1539 entschloss, an der Quelle selbst genauern Aufschluss zu holen, sodann über seinen Erfolg an **Schoner** Mitteilung machte und bald darauf diesen Brief auch als „Narratio prima de Libris Revolutionum Nic. Copernici. Gedani 1540 in 4." abdrucken liess [d], erhielten weitere Kreise wirkliche Kenntnis von dem heliocentrischen Systeme und dem dasselbe betreffenden Werke. Nunmehr konnte **Coppernicus** mit letzterm doch nicht wohl noch länger zurückhalten und dasselbe erschien nun wirklich 1543, also im Todesjahre des Verfassers, zu Nürnberg [e], jedoch von den ängstlichen Herausgebern mit dem Titel „Nicolai Copernici Torinensis, De revolutionibus orbium cœlestium, Libri VI" versehen, — auch so, dass zwar die Widmung an Papst Paul III. aufgenommen, dagegen das von dem Verfasser geschriebene Vorwort durch eine ihm unter dem Titel „De hypothesibus hujus operis" unterschobene Zuschrift an den Leser ersetzt wurde [f]. — Die erste Aufnahme dieses Werkes war nicht gerade unfreundlich, aber etwas kühl: Für die grosse Menge waren natürlich die gelehrten Untersuchungen, welche seinen Hauptinhalt bildeten, total unverständlich, — auf den hohen Schulen, wo damals noch keine Lehrfreiheit herrschte, **musste** nach wie vor das geocentrische System vorgetragen werden [g], — und sogar die meisten Fachgenossen liessen

sich von der Annahme des neuen Systemes dadurch abschrecken, dass ihnen dasselbe dem Zeugnisse der Sinne zu widersprechen schien, ohne dafür durch wesentlich genauere Darstellung der Bewegungen einen Ersatz zu bieten. So blieben einstweilen **Rhäticus** und sein Kollege Erasmus **Reinhold** [h] so ziemlich die einzigen bedeutendern Parteigänger des heliocentrischen Systemes, und da ersterer sich in seinen bereits (63) besprochenen „Thesaurus“ verrannte, welcher der Neuerung nur mittelbar dienen konnte [i], die vielversprechenden Arbeiten des letztern aber durch seinen frühen Tod unterbrochen wurden und zum Teil noch verloren gingen [k], so waren die ersten Erfolge der Lehre von **Coppernicus** nicht eben sehr grossartig und jedenfalls nichts weniger als durchschlagend.

Zu 260: *a.* Einer dem Original-Manuskripte beigefügten, dann aber wieder ausgestrichenen Stelle entnimmt man, dass **Coppernicus** auch elliptische Bahnen für möglich hielt. — *b.* Unter den Freunden von **Coppernicus**, welche schon frühe mit seinen Anschauungen bekannt waren, werden z. B. Bernhard **Scultetus** (etwa 1519 zu Rom als Hauskaplan Leo X. verstorben) und Johannes Flachsbinder, genannt **Dantiscus** (Danzig 1485 — Heilsberg 1548; Bischof von Kulm und Ermeland), erwähnt. Da Celio **Calcagnini** (Ferrara 1479 — ebenda 1541; Pronotarius apostolicus und Prof. lit. Ferrara) im Jahre 1518 bei Dantiscus auf Besuch war, so ist es nicht unwahrscheinlich, dass er durch Mitteilungen desselben zu seiner 1520 verfassten Schrift „Quod cœlum stet et terra moveatur (In Opera: Basileæ 1544 in fol.)“ veranlasst wurde. — *c.* Der „Commentariolus“ war der neuern Zeit unbekannt: Eine ihn betreffende Note von **Tycho** (Progymn. I 479) wurde übersehen, eine ebensolche von **Gemma** in einem Briefe an Dantiscus auf die „Narratio prima“ bezogen; Max. **Curtze** hat das Verdienst, ein erstes Exemplar desselben auf der Wiener Bibliothek entdeckt und ihn hierauf 1878 in den Mitth. des Copp. Ver. veröffentlicht zu haben. — Es ist notorisch, dass 1533 der Kanzler Joh. Albert **Widmanstad**, gestützt auf den Commentariolus, dem Papste Clemens VII. im Garten des Vatikans das heliocentrische System auseinandersetzte und dafür mit einer griechischen Handschrift beschenkt wurde, welche gegenwärtig auf der Hofbibliothek in München aufbewahrt wird. — *d.* Von **Coppernicus** freundlich aufgenommen und bereitwillig in seine Arbeiten eingeführt, war **Rhäticus** schon nach zehnwöchentlichem Studium im stande, den erwähnten, 1539 IX 23 aus Frauenburg datierten Brief zu schreiben, der übrigens (im Drucke 66 Quartseiten beschlagend) eher als Abhandlung denn als Brief zu bezeichnen ist, obschon er sich zunächst nur auf die erste Hälfte der „Libris revolutionum“ bezog und noch durch einen zweiten (Altera Narratio) ergänzt werden sollte, was aber nicht zur Ausführung gekommen zu sein scheint. — Eine zweite Ausgabe der „Prima Narratio“ besorgte „Basileæ 1541 in 8.“ ein Landsmann von Rhäticus, Achilles Pirminius **Gassarus** zu Lindau; ferner wurde sie den verschiedenen spätern Ausgaben des Hauptwerkes und auch Keplers Prodromus (265) beigedruckt. — **Rhäticus** blieb etwa zwei Jahre bei **Coppernicus**, war ihm bei der letzten Überarbeitung seines grossen Werkes behilflich, ja erhielt letzteres bald nach seiner Rückkehr nach Wittenberg durch den gemeinsamen Freund Tiedemann **Giese** (Danzig 1480 — Frauenburg 1549; Bischof von Kulm und Ermeland) zugesandt, um es zum Drucke zu besorgen. Er reiste bald darauf mit einer, verschiedene

redaktionelle Abänderungen zeigenden Kopie des erhaltenen Schatzes und mit Empfehlungsbriefen des offenbar erst später der neuen Lehre feindlich gegenüberstehenden **Melanchthon**, nach Nürnberg, leitete dort in der Offizin des selbst hochgebildeten Johannes **Petrejus** den Druck ein, gewann für die weitere Beaufsichtigung desselben den dortigen lutherischen Prediger Andreas Hossmann, genannt **Osiander** (Gunzenhausen 1498 — Königsberg 1552; später Prof. theol. Königsberg), folgte dann selbst einem Rufe nach Leipzig, wohin ihn, wie auch auf seinen spätern Irrfahrten, das Original-Manuskript begleitete, das sodann nach seinem Tode successive an Otho, Christmann, Comenius, etc., überging und endlich in der Bibliothek des Nostitz'schen Majorates in Prag eine sichere Ruhestätte fand. — *e.* **Coppernicus** soll noch auf dem Todbette die ersten Druckbogen gesehen haben. — *f.* Die durch **Osiander** aus Furchtsamkeit, aber mutmasslich in guten Treuen, dem durch **Coppernicus** geschriebenen Vorworte substituierte „Zuschrift an den Leser" will letztern glauben machen, es habe **Coppernicus** selbst seine Lehre als eine blosse Hypothese dargestellt, während schon aus der Zuschrift an den Papst, und allerdings noch mehr aus jener weggelassenen und erst den neuern Ausgaben beigefügten Vorrede gerade das Gegenteil hervorgeht. Allerdings musste sich **Coppernicus**, wie im folgenden (262—63) noch im Detail gezeigt werden wird, zunächst darauf beschränken, sein System durch Wahrscheinlichkeitsgründe zu stützen und zum voraus gegen die zu erwartenden Einwürfe sicher zu stellen, als eigentlich aktiv vorzugehen; aber er übersah die Konsequenzen seiner Annahmen, begann auch deren Vergleichung mit der Wirklichkeit, und es blieb daher sein System nur insoweit hypothetisch, als er diese Vergleichung noch nicht ganz vollenden konnte, — ja nicht in dem Sinne, dass er dasselbe, wie es Eudoxus mit seinen homocentrischen Sphären, Hipparch und Ptolemäus mit ihren excentrischen und epicyklischen Bewegungen gemacht hatten, als ein blosses Hilfsmittel der Darstellung ansah, — denn er war gegenteils von der Realität vollständig überzeugt. Und in der That hat denn auch diese Realität nicht nur begonnen, sich, wie Gruppe (253) sagte, „von Keplers und Newtons Zeiten an so glaubhaft zu machen, dass sich's jetzt wohl getrost darauf leben und sterben lässt", sondern sie darf sogar, wie uns die Folge zeigen wird, durch das Gelingen der Fall- und Pendel-Versuche, die Bestimmung von jährlichen Parallaxen, die Entdeckung der Aberration und die theoretische Auffindung eines äussern Planeten, mitsamt dem Ausbau des heliocentrischen Systemes durch **Kepler** und **Newton**, als **erwiesen** betrachtet werden. — Der Ausgabe von 1543 folgte 1566 zu Basel eine sich von ihr fast nur durch einige neu hinzugekommene Druckfehler unterscheidende zweite Ausgabe; eine dritte korrektere besorgte Nikolaus **Müller** (Brügge 1564 — Amsterdam? 1630; Prof. math. et med. Gröningen, später Direktor der holl. ostind. Ges.) 1617 zu Amsterdam unter Beigabe wertvoller Anmerkungen; eine vierte Ausgabe, welche zum erstenmal die Vorrede zum Abdrucke brachte und eine Übersetzung ins Polnische enthielt, leitete Johannes **Baranowski** (Warschau 1800 geb.; Dir. Obs. Warschau) und erschien 1854 zu Warschau; eine fünfte, die sog. Jubiläums-Ausgabe, der das Original-Manuskript zu Grunde gelegt wurde, verdankt man Max. **Curtze**, der sie 1873 zu Thorn zur Feier des 400jährigen Jubiläums der Geburt des Verfassers ausgehen liess; als eine sechste Ausgabe endlich kann man die deutsche Übersetzung betrachten, welche C. L. **Menzzer** in Halberstadt unternahm und der Coppernicus-Verein 1879 zu Thorn publizierte. — *g.* So waren z. B. **Reinhold** in Wittenberg, **Urstisius** in Basel und **Mästlin** in Tübingen ent-

schiedene Coppernicaner, mussten aber das ptolemäische System vortragen und konnten so ihre Schüler nur durch einzelne Anmerkungen oder Privatunterweisung mit der neuen Lehre bekannt machen. — *h.* Erasmus **Reinhold** (Saalfeld 1511 — ebenda 1553) war von 1536—53 Prof. math. Wittenberg, hoffte bei Ausbruch der Pest derselben durch Flucht nach Saalfeld zu entrinnen, wurde aber dennoch ihr Opfer. — *i.* Immerhin gab **Rhäticus** eine „Ephemeris ex fundamentis Copernici. Lipsiæ 1550 in 4." heraus. — *k.* **Reinhold** schrieb nicht nur einen damals höchst wünschenswerten Kommentar zu dem Werke des Coppernicus, sondern berechnete auch sich darauf stützende neue astronomische Tafeln, welche er zu Ehren eines hochherzigen Gönners, des Herzogs Albrecht von Preussen, unter dem Titel „Tabulæ prutenicæ cœlestium motuum. Wittebergæ 1551 in 4. (neue Ausgaben von Mich. **Mästlin**: Tubingæ 1571, — und von Casp. Strubius: Wittebergæ 1585)" herausgab, und die bis zum Erscheinen der Rudolphinischen Tafeln als beste galten, ja noch für unsere Zeit von Interesse sind, weil sie der Gregorianischen Kalenderreform zu Grunde gelegt wurden. Der Kommentar und die Erklärung der Tafeln gingen leider verloren, — wahrscheinlich bei der erwähnten Flucht.

261. Die Vermittlungssysteme und der Kampf mit der Kirche. — Denjenigen Fachgenossen von Coppernicus, welche bei aller Anerkennung seiner Arbeiten sich aus oben (260) angegebenen Gründen zwar nicht entschliessen konnten, seiner neuen Lehre beizupflichten, aber auch nicht um jeden Preis die alte unverändert beibehalten wollten, lag die Frage nahe, ob nicht beiden Systemen dasjenige der alten Egypter (258 : e) vorzuziehen wäre, falls man auch noch die obern Planeten zu Trabanten der Sonne machen und nur diese letztere mit dem Monde direkt um die Erde kreisen lassen würde, da sich sodann die Theorien der Planeten ebenfalls vereinfachen müssten, ohne dass man jene Schwierigkeiten mit in Kauf zu nehmen hätte. Es ist somit gar nicht unbegreiflich, dass zwei derselben, **Tycho Brahe** und Nikolaus **Reymers** [a], ungefähr gleichzeitig auf die Idee kamen, dieses letztere als ein Vermittlungssystem anzuempfehlen, jedoch allerdings mit dem wesentlichen Unterschiede, dass **Tycho** die ganze Erde, **Reymers** dagegen nur ihre Axe festhielt, d. h. ersterer die tägliche Bewegung der Fixsternsphäre, letzterer der Erde zuteilte [b]. Dass ein solches System, welches für die Zeit **vor** Kepler als Zwischenstufe wirklich gute Dienste leisten konnte, momentan von manchen begrüsst wurde [c], darf nicht verwundern, — eher, dass noch **nach** jener Zeit minderwertige Vermittlungssysteme eingeführt werden wollten [d]. — Die durch solche Versuche hervorgerufenen Kontroversen waren ziemlich harmloser Natur, während dagegen, je mehr sich im Sinne von **Coppernicus** die neue Lehre ihres ihr octroyierten hypothetischen Charakters entkleidete und in weitern Kreisen bekannt wurde, die Stellung ihrer Parteigänger zu den beiden Kirchen immer ungemütlicher wurde:

Die reformierte Kirche kehrte mehr und mehr zu ängstlichem Wortglauben zurück, und da ihr das heliocentrische System mit einzelnen Bibelstellen im Widerspruche zu stehen schien [e], so begann sie die Anhänger desselben als Irrlehrer oder Ketzer zu denunzieren und, soweit es ihr ihre Mittel erlaubten, zu verfolgen [f], — und auch die katholische Kirche, welche überdies damals jede Reform, die nicht von ihr selbst ausging, bekämpfen zu müssen glaubte, begann ebenfalls die neue Lehre zu verdammen und deren Verbreitung mit ihren grössern Mitteln auf disciplinarischem Wege entgegenzuarbeiten [g]. Während nun von den zwei bedeutendsten Coppernicanern aus dem Anfange des 17. Jahrhunderts der eine, **Kepler** [h], sich fast ausschliesslich auf wissenschaftlichem Gebiete bewegte und durch stille Geistesarbeit die Richtigkeit des heliocentrischen Systemes unumstösslich erwies [i], — liess sich der andere, **Galilei** [k], der bereits in offener Fehde die Peripatetiker zwar besiegt aber sich auch verfeindet hatte, verleiten jenen sichern Boden zu verlassen und einen Kampf mit der Kirche aufzunehmen, in dem Macht über Recht ging und sich so die bekannte Tragödie abspielen konnte [l], in welcher er unterlag, wenn auch allerdings nicht ohne dem Sieger Wunden beizubringen, an denen dieser langsam verblutete [m].

Zu 261: *a.* Nikolaus **Reymers** (Henstede in Dithmarschen 1550? — Prag 1600), wohl auch „Reymarus Ursus Dithmarsus" genannt, schwang sich successive vom Schweinhirten zum Feldmesser, Docenten in Strassburg und k. Mathematikus und Prof. math. in Prag auf. Vgl. Mitth. 68 von 1887. — *b.* Für den weitern Detail über die Entstehung und Veröffentlichung der beidseitigen Systeme, sowie über den heftigen Prioritätsstreit, der sich zwischen den beiden Autoren erhob, verweise ich auf meine soeben erwähnte Notiz und füge dem oben gesagten nur noch bei, dass, wenn **Tycho** sein System wirklich schon 1582 und **Reymers** das seinige erst 1586 ausgedacht haben sollte, letzterm somit zum mindesten eine wesentliche und von manchen ganz fälschlich erst **Longomontan** zugeschriebene Verbesserung zu verdanken ist. — *c.* So waren z. B. David Tost oder **Origanus** (Glatz 1558 — Frankfurt a. O. 1628; Prof. math. Frankfurt a. O.) und Francesco Patritio oder **Patricius** (Clisso in Istrien 1529 — Rom 1597; Prof. philos. Ferrara, Padua und Rom) namhafte Anhänger des sog. Tychonischen Systemes, — ob mit oder ohne Verbesserung wird nicht gesagt, sowie auch „Joseph **Eckert** (Dietheim in Baden 1791 — Basel 1871; Prof. math. Basel), Erinnerungen an Tycho Brahe und sein Planetensystem. Basel 1846 in 4., — Emil **Schinz** (Zürich 1817 — ebenda 1887; Prof. math. et phys. Aarau, Bern und Chur), Würdigung des Tychonischen Weltsystemes aus dem Standpunkte des 16. Jahrhunderts (Jahns Unterh. 1856), — etc." über diesen Kardinalunterschied einfach hinweggiengen. — *d.* So stellte Andrea **Argoli** (Tagliacozzo bei Neapel 1570 — Padua 1657; Prof. math. Padua), der Wallensteins Lehrer in der Astrologie gewesen sein soll, in seinem „Pandosium sphæricum. Patavii 1644 in 4." ein Gegensystem auf, in welchem die untern Planeten nach egyptischer Lehre Trabanten der Sonne waren, während sich die Sonne und die obern Planeten um die Erde bewegten, — und noch **Riccioli**

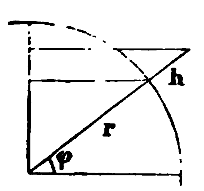
wollte 1651 in seinem „Almagestum novum" an diesem Systeme mit der Ausnahme festhalten, dass er auch Mars an die Sonne abtrat. — *e.* Die reformierte Kirche betrachtete die vulgäre Sprache der Bibel auch in astronomischen Dingen als massgebend und glaubte so in den Bibelstellen: „*Josua 10.* Und Sonne und Mond standen stille ...; *Psalm 93.* Nun ist der Erdboden stark befestiget, er wird nicht entwegt werden ...; *Jesus Sirach 46.* Ist nicht um seinetwillen die Sonne stille gestanden ...; etc." Zeugnisse gegen das Coppernicanische System zu besitzen. — *f.* Immerhin kam es dabei auf den momentan wehenden Wind an: Während z. B. zu Zürich noch im Anfange des 18. Jahrhunderts der berühmte Joh. Jak. **Scheuchzer** als Coppernicaner angefeindet wurde, nahm man früher keinen Anstand, das von seinem Amtsvorgänger Johannes **v. Muralt** (Zürich 1645 — ebenda 1733; Prof. math. et phys. und Stadtarzt) verfasste „Scientiæ naturalis Compendium. Tiguri 1694 in 12." als Schulbuch einzuführen, obschon darin (p. 32) das heliocentrische System gelehrt wurde. — Charakteristisch ist, wie lange noch Schriften wie „Peter **Megerlin** (Kempten 1623 — Basel 1686; Prof. math. Basel), Systema mundi Copernicanum argumentis invictis demonstratum et conciliatum Theologiæ. Amstelodami 1682 in 12., — Fr. **Bernd**, Beweis dass das Systema Copernici der heil. Schrift nicht zu nahe trete. Magdeburg 1742 in 4., — etc." für opportun gehalten wurden. — *g.* Der zuweilen als Opfer seiner Anhänglichkeit an das Coppernicanische System bezeichnete Filippo (als Noviz Giordano benannte) **Bruno** (Nola in Campanien 1550 — Rom 1600, wo er II 17 verbrannt wurde; erst Dominikaner, dann Lutheraner; vgl. „H. Brunnhofer: Bruno's Weltanschauung und Verhängniss. Leipzig 1882 in 8.") wurde schwerlich um derentwillen, noch eher wegen seiner als „Erzketzerei" betrachteten Lehre von der Mehrheit der Welten, zunächst wohl aber aus Furcht vor seiner alle Schranken durchbrechenden, nur die Naturgesetze anerkennenden Dogmatik, verdammt; vgl. für letztere seine früher mit Unrecht als eine blosse Satyre auf die römische Kirche betrachtete Schrift „Lo Spaccio della bestia trionfante. Paris 1584 (deutsch von Ludw. Kuhlenbeck, Leipzig 1889 in 8.)". — *h.* **Kepler** wurde schon als Student durch **Mästlin** in das coppernicanische System eingeführt. — *i.* Für **Keplers** Arbeiten vgl. 265—67. — *k.* Auch **Galilei** scheint frühe Coppernicaner geworden zu sein; aber über das wie ist man im unklaren, da der von ihm selbst in seinen Dialogen (p. 121) genannte **Urstisius** und noch viel weniger der von Vossius damit betraute **Mästlin**, laut ihren übrigen Lebensverhältnissen ernstlich in Betracht kommen können. — *l.* Als der den Peripatetikern längst verhasste **Galilei** 1610 die Unklugheit beging, seine sichere Stellung in Padua aufzugeben und dem Rufe des schwachen Grossherzogs Cosimo nach Florenz zu folgen, hatten seine Feinde gewonnenes Spiel: Schon 1614 kam es so weit, dass der Dominikaner **Caccini** wagen durfte, in einer Predigt über Apostelgesch. I 11: „Ihr galileischen Männer, was stehet ihr und sehet gen Himmel" gegen ihn und seine Anhänger loszuziehen, und als dann **Galilei** trotz der Abmahnung seiner Freunde den Handschuh aufhob, erreichte er bloss, dass er bei dem h. Stuhle als Ketzer und das heliocentrische System als Irrlehre denunziert wurde. Die Folge war, dass Papst Paul V. zur Untersuchung eine Kommission niedersetzte, welche 1616 II 24 das Gutachten abgab: „Behaupten die Sonne stehe unbeweglich im Centrum der Welt, ist absurd, philosophisch falsch und förmlich ketzerisch, weil ausdrücklich der heil. Schrift zuwider; behaupten die Erde stehe nicht im Centrum der Welt, sei nicht unbeweglich, sondern habe sogar eine tägliche Rotationsbewegung, ist absurd, philosophisch

falsch, und zum Mindesten ein irriger Glaube". Infolge davon wurde das Buch „De revolutionibus" für so lange auf den Index gesetzt, bis es verbessert, d. h. zum mindesten die hypothetische Form überall hergestellt sei, und als **Galilei** dagegen remonstrieren wollte, wurde das Verbot nur noch verschärft. Nachdem er sich sodann längere Zeit ruhig gehalten, trat er mit seinem „Dialogo sopra i due sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano. Firenze 1632 in 4. (lat. durch Bernegger: Argentorati 1635)" neuerdings auf den Kampfplatz; denn obschon er einem Ptolemäer (Simplicius) gegenüber zwei Coppernicanern (Salviati und Sagredo) immer das letzte Wort liess, so fühlte man doch leicht heraus, dass er den Leser durch die gewichtigeren Gründe, welche er letztern in den Mund legte, für die Lehre von Coppernicus gewinnen wollte. Das ging nun sehr übel an, ja veranlasste, dass **Galilei** nach Rom citiert und dort von der Inquisition ein scharfes Verfahren gegen ihn eingeleitet wurde, dessen Schlussakt darin bestand, dass er 1633 VI 22 gezwungen wurde, in der Minerva-Kirche zu Rom gegen Wissen und Gewissen öffentlich zu beschwören, „dass er die falsche und ketzerische Lehre von der Bewegung der Erde verwünsche und verabscheue". Ob der bedauernswerte Greis während des Verfahrens die übliche Tortur auszuhalten hatte und ob bei dem Processe Unlauteres unterlaufen oder nicht, wird man, obschon ganze Bände darüber geschrieben worden sind, kaum mehr mit voller Sicherheit ermitteln können; **dass er dagegen von seinen Richtern mit vollem Bewusstsein dazu verhalten wurde, einen Meineid zu leisten, liegt klar zu Tage und hat diesen für alle Zeiten ein Brandmal aufgedrückt.** — *m.* Dass **Galilei** nach Rückkehr aus der Kirche das berühmte „E pur si muove" ausgerufen habe, ist, wie Heis (Wochenschrift 1868 Nro. 30) nachwies, eine erst gegen Ende des vorigen Jahrhunderts entstandene Fabel; dagegen wurde dieser Ruf seinem Sinne nach bald immer stärker und allgemeiner hörbar, und wenn auch im 17. Jahrhundert noch einzelne zaghafte oder abhängige Schriftsteller nur schüchtern oder mit Vorbehalt von der neuen Lehre sprachen, so war später auch diese Vorsicht kaum mehr nötig, — ja manche neuere erfuhren erst 1821, als das Verbot offiziell aufgehoben wurde, dass dasselbe noch bestanden habe.

262. Die Beweise für die Rotation der Erde um ihre Axe. — Während es **Coppernicus** noch nicht gelang, die Rotation der Erde faktisch nachzuweisen, d. h. Erscheinungen aufzufinden, in welchen sich dieselbe abspiegelt, und er sich somit begnügen musste, ihre Wahrscheinlichkeit darzuthun, sowie einigen zu erwartenden Einwürfen zum voraus zu begegnen, so hat dagegen die Neuzeit diesen Beweis mehrfach erbracht: Zunächst dienten dazu **Fallversuche**, welche schon **Newton** proponiert hatte, aber dann allerdings erst 1791 **Guglielmini** mit Erfolg an die Hand nahm, ferner etwas später **Benzenberg** und namentlich **Reich** noch zutreffender ausführten [a]. Dann folgten von 1851 hinweg die durch Léon **Foucault** [b] inaugurierten und seither vielfach, namentlich auch in Rom zur Illustration der Macht der Wahrheit wiederholten **Pendelversuche** [c]. Und seither hat die Physik noch mehrere andere Apparate zur Demonstration der Erdbewegung konstruiert, sowie letztere in

verschiedenen Erscheinungen auf der Erde nachgewiesen[d], so dass es wohl gegenwärtig für Sehende keiner weitern Beweise mehr bedarf, während allerdings die mit Blindheit geschlagenen, auch wenn man sie auf einen festen Punkt ausserhalb der Erde führen könnte, deren Bewegung doch nicht bemerken würden[e].

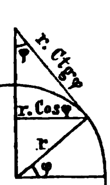
Zu 262: *a.* Unter den Scheingründen gegen das Coppernicanische System figurierte die Behauptung, es müsste bei nach Osten rotierender Erde ein frei fallender Körper nach Westen zurückbleiben. Nun zeigte aber **Newton**, dass ein Punkt an der Erdoberfläche unter der Breite φ in den $t = 86400^s$ Sternzeit $= 86164^s$ mittl. Zeit, welche die Erdrotation in Anspruch nehme, den Weg $2r\pi \cdot Co\varphi$ beschreibe, — ein in der Höhe h über ihm gelegener Punkt dagegen den Weg $2(r+h)\pi \cdot Co\varphi$, so dass sich per Sekunde eine Wegdifferenz von $2h\pi \cdot Co\varphi : t$ ergebe. Wenn nun eine Kugel in die Höhe gebracht und dort fallen gelassen werde, so behalte sie infolge des Beharrungsvermögens diese grössere Geschwindigkeit, werde somit etwas östlich von dem Fusspunkte auffallen, und es werde somit gerade durch Fallversuche möglich sein, die Rotation der Erde zu erweisen. Als **Newton** 1679 die Roy. Society auf diese Verhältnisse aufmerksam machte, beschloss diese, durch Rob. **Hooke**, ihren damaligen „Curator of Experiments", entsprechende Versuche ausführen zu lassen, welche aber, da dabei nur die geringe Fallhöhe von 27' zur Verwendung kam, keinen Erfolg hatten und auch wirklich keinen haben konnten; denn wenn f den Fallraum in der ersten Sekunde bezeichnet, so fällt ein Körper durch die Höhe h in der Zeit $\tau = \sqrt{h:f}$, und wird daher nach oben um



$$a = \frac{2h\pi \cdot Co\varphi}{t} \cdot \tau = \frac{2\pi \cdot Co\varphi}{t \cdot \sqrt{f}} \cdot h^{3/2} \qquad 1$$

nach Osten voreilen, folglich in jenem Falle, wo $\varphi = 51^0\ 29'$, $f = 15\frac{1}{3}' = 2208'''$ und $h = 27' = 3888'''$ d · d war, nur um $\frac{1}{4}''' \doteq \frac{1}{2}^{mm}$, wovon nach Rechnung von **Olbers** wegen Abplattung, Luftwiderstand, etc., noch ein guter Dritteil in Abzug zu bringen war. — Dieser Misserfolg bewirkte, dass lange keine weiteren Versuche dieser Art gemacht wurden, bis endlich im Sommer 1791 **Guglielmini** dieselben zu Bologna bei einer Fallhöhe von 240' wiederholte und in der Schrift „De diurno terræ motu, experimentis physico mathematicis confirmato, Opusculum. Bononiæ 1792 in 8." beschrieb: Nachdem er unten eine Wachstafel gelegt hatte, hing er successive 16 mal oben eine Bleikugel an einem Faden auf, brannte letztern jeweilen ab, und erhielt so auf der Tafel 16 Auffallspunkte, deren Schwerpunkt von dem, zwar leider erst im folgenden Winter bestimmten Lotpunkte um 8''',6 nach E $35\frac{1}{2}^0$ S abwich, während die Rechnungen von **Laplace** 5''' genau nach E erwarten liessen, so dass sich eine leidliche, aber doch nicht recht befriedigende Übereinstimmung ergab. — Schon wesentlich näher kam **Benzenberg** bei zwei Versuchsreihen, welche er (vgl. seine „Versuche über die Umdrehung der Erde. Dortmund 1804 in 8.") 1802 am Michaelis-Turme zu Hamburg und 1804 in einem Kohlenschachte zu Schlebusch bei Düsseldorf machte: Die erstere ergab nämlich für 235' Fallhöhe eine Abweichung von 4''',3 nach E $20^0,4$ S, während **Gauss** 4''',0 nach E berechnet hatte, — die zweite für 262' Fallhöhe 5''',1 nach E $8^0,1$ N anstatt nach **Gauss** 4''',6 nach E. — Noch gelungener aber waren dei Versuche, welche

Reich (vgl. seine „Fallversuche über die Umdrehung der Erde. Freiberg 1832 in 8.") im Jahre 1831 im Dreibrüderschachte bei Freiberg mit 488' Fallhöhe machte, indem sie ihm ganz entsprechend der Theorie eine rein östliche Abweichung von 12''',6 ergaben. — *b.* Léon **Foucault** (Paris 1819 — ebenda 1868) war physikalischer Assistent der Pariser Sternwarte. — Vgl. das von C. M. Gariel zu seinem Andenken ausgegebene „Recueil des travaux scientifiques. Paris 1878 in 4." — *c.* Während die subtilen Fallversuche auf das allfällig noch hilfsbedürftige Publikum keinen gar grossen Eindruck machten, da es ihnen doch nicht beiwohnen und sich mit eigenen Augen von der wirklichen Bewegung der Erde überzeugen konnte, so war dies dagegen in hohem Masse der Fall, als **Foucault** 1851 einen zur öffentlichen Demonstration geeigneten Versuch ausdachte, der auf folgender Überlegung beruht: Wenn die Erde, welche wir zu diesem Zwecke durch eine Kugel des Radius r ersetzen können, wirklich rotiert, so beschreibt offenbar die Mittagslinie jedes Ortes in einem Tage eine von dessen Breite φ abhängige Kegelfläche, deren Kante $r \cdot Ct\,\varphi$ und deren Grundlinie $2r\pi \cdot Co\,\varphi$ ist; denkt man sich dieselbe abgewickelt, so erhält man einen Kreisausschnitt des Mittelpunktswinkels ψ, so dass



$$\frac{2 \cdot r\,Ct\,\varphi \cdot \pi}{360} \cdot \psi = 2r\pi \cdot Co\,\varphi \qquad \text{oder} \qquad \psi = 360^0 \cdot Si\,\varphi \qquad 2$$

wird, und es muss sich also die Mittagslinie eines Ortes in jedem Tage nahe um $360^0 \cdot Si\,\varphi$, oder in einer Stunde um $15^0 \cdot Si\,\varphi$ nach Ost drehen, was z. B. für Paris den sehr bemerklichen Betrag von etwas mehr als 11° per Stunde ergiebt. Nun ist, wie schon in der Accademia del Cimento vermutet wurde und sodann spätestens **Poinsinet** in seiner Ausgabe von Plinius (vgl. 4 : n) deutlich aussprach, die Schwingungsebene eines Pendels unveränderlich, und **Foucault** brauchte somit nur ein so sorgfältig aufgehängtes, langes und schweres Pendel zu konstruieren, dass dasselbe, wenn es z. B. in einem gegebenen Augenblicke nach der Mittagslinie in Schwingung versetzt wurde, bei einer Stunde ohne neuen Anstoss seine Schwingungen fortsetzte, um durch dessen scheinbare Drehung nach Westen die Bewegung der auf der Erde gezogenen Mittagslinie, und damit der Erde selbst, nach Osten sichtbar zu machen. Die damals im Pantheon zu Paris öffentlich angestellten Versuche gelangen vortrefflich und wurden sodann alsbald nicht nur an vielen andern Orten wiederholt, sondern auch von Messungen begleitet, deren Resultate in beistehendem Tableau neben den Rechnungsresultaten eingetragen sind. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch ist überraschend, und überdies ist die Ausführung des Versuches in Rom von kulturhistorischer Bedeutung, indem sie zeigt, wie sich die Wahrheit schliesslich immer Bahn bricht: In derselben Stadt, wo 1633 **Galilei**

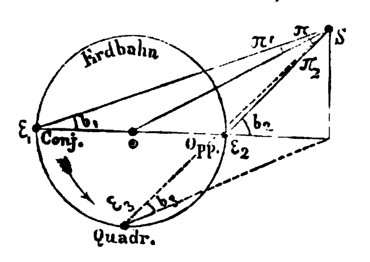
Ort	φ	Abweichung		Beobachter
		ber.	beob.	
Nordpol	90°,0	15°,00	—	—
Dublin	53,4	12,04	11,90	Galbraith
Köln	50,9	11,65	11,64	Garthe
Genf	46,2	10,83	10,18	Dufour
Rom	41,9	10,02	9,90	Secchi
New-York	40,7	9,78	9,73	Lyman
Ceylon	6,9	1,81	1,87	Lamprey
Equator	0,0	0,00	—	—
Rio	— 22,9	5,84	5,17	d'Oliveira
Südpol	— 90,0	15,00	—	—

von dem Inquisitionstribunal gezwungen worden war, die Bewegung der Erde abzuschwören, demonstrierte etwas mehr als zwei Jahrhunderte später der Jesuit **Secchi** deren Realität unbeanstandet in der St. Ignatius-Kirche vor allem Volke. — Die nach Bekanntwerden der Foucault'schen Versuche in der Augsburger Zeitung aufgestellte Behauptung, es habe schon weit früher Augustin **Stark** (Augsburg 1777 — ebenda 1839; Prof. math. und Domherr in Augsburg) ähnliche angestellt, nur beiläufig erwähnend, verweise ich für weitern Detail auf: „**Foucault**, Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule (Ann. Ch. et Ph. 1851), — **Secchi**, Sulle oscillazioni del pendolo avuto riguardo alla rotazione della terra (Tortolini Annali 1851), — Caspar **Garthe** (Frankenberg 1796 geb.; Prof. math. Köln), Foucault's Versuch als direkter Beweis von der Axendrehung der Erde angestellt im Dome zu Köln. Köln 1852 in 8., — Gangolf **Delabar** (Schelingen in Baden 1819 — St. Fiden bei St. Gallen 1884; Prof. math. St. Gallen), Der Foucault'sche Pendelversuch als direkter Beweis von der Axendrehung der Erde. St. Gallen 1855 in 8., — S. **Günther**, Vorgeschichte des Foucault'schen Pendelversuches (Sitz. Erlangen 1873), — etc." — *d.* Für neuere die Erdbewegung demonstrierende **Gyroskope** auf die Lehrbücher der Physik verweisend, erwähne ich noch einerseits, dass William **Ferrel** (Pennsylvanien 1817 geb.) schon 1860 im Math. Monthly den Satz aussprach, dass jeder auf der Erdoberfläche sich bewegende Körper eine von der Axendrehung der Erde herrührende Einwirkung erleidet, durch welche er auf der nördlichen Halbkugel nach rechts, auf der südlichen nach links von der Richtung seiner Bewegung abgelenkt wird, — und anderseits, dass sich nach **Martus** (Mathem. Geographie. Leipzig 1880 in 8.) bei dem nahe meridionalen Hamburg-Harburger Doppelgeleise eine diesem Gesetze entsprechende merkliche Verschiebung der beiden in Beziehung auf die Fahrrichtung **rechts** liegenden Schienen zeigen soll. — *e.* Mit dem 1878 zu Berlin im Alter von 72 Jahren verstorbenen Pastor Gustav **Knack** dürfte so ziemlich der letzte ehrliche Gegner des coppernicanischen Systemes abgegangen sein.

263. Die Beweise für die Revolution der Erde um die Sonne. — Schon **Coppernicus** begnügte sich nur ungerne damit, bloss gezeigt zu haben, dass die von ihm gelehrte Bewegung der Erde um die Sonne die Erscheinungen der jährlichen Bewegung genau ebensogut erkläre, als es durch Annahme der Bewegung der Sonne um die Erde geschehe, und dass durch sie überdies die sog. zweite Ungleichheit in der Bewegung der Planeten ihre natürlichste Erklärung finde, — er wünschte auch einen empirischen Beweis für deren wirkliche Existenz geben zu können und sah ganz gut ein, dass ein solcher geleistet wäre, wenn es ihm gelingen würde nachzuweisen, dass die Breite jedes Sternes zur Zeit seiner Konjunktion mit der Sonne einen kleinsten, zur Zeit seiner Opposition aber einen grössten Wert, folglich auch seine jährliche Parallaxe eine merkliche Grösse besitze [a]. Die ihm zur Disposition stehenden Instrumente erlaubten jedoch nicht, solche kleine Differenzen oder Werte zu ermitteln, und er konnte so aus seinen Beobachtungen bloss auf eine grosse Distanz der Sterne schliessen [b]. Auch nach

seiner Zeit hatten sowohl Anhänger als Gegner des heliocentrischen Systemes grosses Interesse, sich über die allfällige Fixsternparallaxe zu belehren, — die einen aus Überzeugung von deren Existenz, die andern, um aus deren Nichtexistenz die Irrtümlichkeit des neuen Systemes zu demonstrieren; aber alle Anstrengungen, welche zu diesem Zwecke successive durch die **Tycho, Hooke, Picard, Flamsteed, Wallis, Römer,** etc., gemacht wurden, blieben notwendig ohne Erfolg, da bis in den Anfang des 18. Jahrhunderts hinein solche kleine systematische Abweichungen durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler vollständig überdeckt wurden [c].

Zu 263: *a.* Bezeichnet nämlich b_1 die Breite eines Sternes S zur Zeit seiner Konjunktion mit der Sonne, b_2 aber zur Zeit der Opposition und b_3 zur Zeit der Quadratur, so ist unter Voraussetzung der jährlichen Bewegung der Erde notwendig



$$b_1 < b_3 < b_2 \qquad b_2 - b_1 = \pi = \pi_1 + \pi_2$$

Da nun offenbar

$$\mathrm{Si}\,\pi_1 = \frac{E\odot}{S\odot}\,\mathrm{Si}\,b_1 \qquad \mathrm{Si}\,\pi_2 = \frac{E\odot}{S\odot}\,\mathrm{Si}\,b_2$$

also

$$b_2 - b_1 = \frac{E\odot}{S\odot} \cdot \frac{\mathrm{Si}\,b_1 + \mathrm{Si}\,b_2}{\mathrm{Si}\,1''}$$

so könnte man somit, wenn es möglich sein sollte, $b_2 - b_1$ durch Beobachtung zu bestimmen, nicht nur in der Existenz dieser Differenz einen Beweis für die Bewegung der Erde geben, sondern sogar nach

$$S\odot = \frac{\mathrm{Si}\,b_1 + \mathrm{Si}\,b_2}{(b_2 - b_1)\,\mathrm{Si}\,1''} \cdot E\odot \qquad 1$$

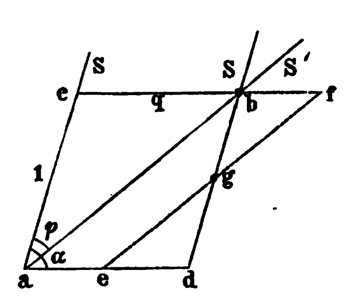
die Sterndistanz in Halbmessern der Erdbahn berechnen. — *b.* Da **Coppernicus** nur über ein Triquetrum (333) verfügte, das ihn höchstens Winkelunterschiede von 5' erkennen liess, während, wie wir jetzt wissen (607), die jährliche Parallaxe keines Sternes auf 1'' ansteigt, so war für ihn $b_2 - b_1 = 0$ und somit $S\odot = \infty$, aber sein Unendlich betrug allerdings nur etwa 1400 Erdbahnradien. — *c.* Schon **Tycho** beschäftigte sich fleissig mit solchen Untersuchungen und mass (vgl. seine Progymnasmata 233 und 246, sowie Keplers Epitome II 493) noch gegen das Ende seines Lebens von verschiedenen Sternen je zu entgegengesetzten Jahreszeiten grösste Höhen; aber da bei dem angewandten Quadranten nur die Minuten sicher waren, so war das ganze Ergebnis, dass sein Unendlich etwa auf 7000 Erdbahnradien anwuchs. — Etwa 1666 kamen sodann diese Fragen auch bei der Roy. Society zur Sprache und ihr Kurator **Hooke** liess sich damals den Auftrag geben, ein Fernrohr von 36' Brennweite im Gresham-College zur Beobachtung der Meridiandurchgänge des zenitalen Sternes γ Draconis einmauern zu lassen. Im Laufe der Beobachtungen schien ihm nun wirklich (vgl. seinen „Attempt to prove the motion of the earth. London 1674 in 4.") entsprechend seiner Erwartung die Höhe des Sternes von December bis Juni zu wachsen, dann bis zum December wieder abzunehmen; aber andere fanden, er habe sich durch vorgefasste Meinung beeinflussen lassen, so dass man schliesslich die Frage als ungelöst betrachtete. — Als ferner **Picard** (vgl. dessen „Ouvrages de mathématiques. A la Haye 1731 in 4: Voyage

d'Uranibourg, article VIII") und etwas später wieder **Flamsteed** während längerer Zeit den Polarstern beobachteten, glaubten sie eine nicht unbeträchtliche Parallaxe dieses Sternes gefunden zu haben; allein **Cassini** zeigte, dass die bemerkten Veränderungen nicht mit den aus der Theorie der Parallaxe folgenden übereinstimmen und daher ganz andere Ursachen haben müssen, welche er aber allerdings nicht anzugeben wusste. — Auch als **Wallis** ein Objektiv von sehr grosser Brennweite an der Spitze eines Turmes befestigte, das Okular aber in die Wand seines Hauses einmauerte und damit lange Jahre zu verschiedenen Jahreszeiten die Differenzen der Azimute gewisser Sterne beobachtete, erhielt er keine entscheidenden Resultate. — Nachdem endlich **Römer** klar geworden war, dass Rektascensionsbeobachtungen sich zur Bestimmung der Parallaxe besser als Höhenmessungen eignen, befolgte er diese Methode bei 18 Jahre lang, wurde aber während der Diskussion der erhaltenen Serie vom Tode überrascht; soweit man die Resultate derselben kennt, so hätte er übrigens auch bei längerm Leben, obschon sein Schüler Peter **Horrebow** darauf seine Schrift „Copernicus triomphans. Havniæ 1727 in 4." basierte, das erwünschte Ziel mutmasslich doch nicht erreicht.

264. Die sog. Aberration des Lichtes. — Glücklicherweise liess sich Samuel **Molyneux** [a] durch die Misserfolge seiner Vorgänger nicht abhalten, noch einen entsprechenden Versuch zu machen, bei welchem James **Bradley** erst als Gehilfe fungierte, um ihn dann selbständig fortzusetzen [b], ja aus den sich sicher ergebenden kleinen periodischen Veränderungen die jährliche Bewegung der Erde, wenn auch nicht auf dem ursprünglich verhofften Wege, sondern durch die sog. **Aberration des Lichtes**, zu erweisen [c]. Da nämlich die Geschwindigkeit des Lichtes, wenn sie auch (465—67) viel grösser als diejenige der Erde in ihrer Bahn ist, doch immer noch in einem endlichen Verhältnisse zu ihr steht, so wird man ein Fernrohr, um es nach einem Sterne zu richten, ein klein wenig (nach Bradley im Max. um 20",7) gegen die jeweilige Tangente an die Erdbahn zu neigen haben, und es lässt sich in der That leicht zeigen [d], dass sich dadurch Veränderungen in der scheinbaren Lage der Sterne ergeben, welche ganz mit den beobachteten übereinstimmen, somit die jährliche Bewegung der Erde wirklich erweisen. Die neuere Zeit hat die Richtigkeit dieser Beobachtungen und Deutungen vollständig anerkannt und nur teils die betreffende Konstante etwas genauer bestimmt, teils noch einige verwandte Verhältnisse in Betracht gezogen [e].

Zu 264: *a.* Samuel **Molyneux** (Chester 1689 — London? 1728), Sohn von William in 141 : c, war ein grosser Liebhaber der praktischen Optik und Astronomie, besass eine Privatsternwarte zu Kew bei London und wurde etwa 1726 zu einem der Kommissäre der Admiralität ernannt. — *b.* **Molyneux** liess sich durch **Graham** einen Zenitsector von 24 Fuss Radius, aber nur 25 Bogenminuten anfertigen, der mittelst eines Vernier einzelne Sekunden zeigte, und begann mit diesem 1725 XII 3 eine Reihe von Beobachtungen des zenitalen

Sternes γ Draconis, an denen sich dann alsbald auch **Bradley** beteiligte, der schon als junger Pfarrer durch seinen als vorzüglicher Beobachter bekannten Oheim James **Pound** (Bishop's Canning in Wiltshire 1669 — Wansted in Essex 1724, wo er als Rektor und Gutsbesitzer lebte) in die praktische Astronomie eingeführt und sodann 1721 zum Prof. astr. Oxford erwählt worden war. Die erhaltenen Bestimmungen zeigten nun bald kleine Unterschiede, welche sich nicht wohl als Beobachtungsfehler erklären liessen, — ja bis in den März 1726 ging der Stern nach und nach um volle 20" nach Süden; dann wurde er stationär, — kehrte bis in den Juni zur ersten Lage zurück, — setzte nachher seine Bewegung noch nach Norden fort, bis er etwa 20" nördlicher als anfänglich stand, und erhielt schliesslich im Dezember 1726 wieder die Anfangslage. Da **Bradley**, der die Beobachtungen später allein fortgeführt hatte, bei einem zweiten Sterne (35 Camelopardali) nicht ganz dieselben Veränderungen fand, so wünschte er noch andere Sterne beobachten zu können und liess hiefür durch **Graham** einen neuen Zenitsector von $12^1/_2{}'$ Radius konstruieren, der auf beiden Seiten des Zenites bis auf $6^1/_4{}^0$ Distanz zu gehen erlaubte. Er stellte denselben im August 1727 zu Wansted auf und erhielt mit ihm neue Serien, welche die Existenz einer systematischen jährlichen Schwankung auf das Entschiedenste bestätigten. — *c.* Anfänglich glaubte **Bradley** eine jährliche Parallaxe gefunden zu haben; aber, da die extremen Werte mit den Quadraturen zusammenfielen, so konnte dies (263) doch nicht sein. Er suchte sich nun die Sache anders zurechtzulegen und gelangte endlich, wie uns sein im Dezember 1728 an Halley adressierter „Account of a new discovered motion of the fixed Stars (Ph. Tr. 1728)" zeigt, zu der Überzeugung, dass da zwar eine von der jährlichen Bewegung der Erde abhängige, also dieselbe erweisende Thatsache vorliege, — aber nicht die Parallaxe, sondern eine **Aberration des Lichtes** dieselbe bedinge. — *d.* Wenn nämlich die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn zu derjenigen des Lichtes in einem endlichen Verhältnisse q steht, so wird man ein Fernrohr nach einem Sterne S gerichtet glauben, wenn die Richtung ab seiner Axe aus der wirklichen Richtung ac nach dem Sterne und der Bewegungsrichtung ad der Erde resultiert; denn wenn die Axe nach einiger Zeit infolge der Erdbewegung in die Lage ef || ab übergegangen ist, so verhält sich ae : bg = ad : bd = q : 1, und es wird daher der Punkt g, in dem das bei b eingetretene Licht zu jener Zeit angekommen ist, wirklich noch in die Axe fallen. Bezeichnen aber φ und α die Winkel, welche die wirkliche Richtung nach dem Sterne teils mit der Axe, teils mit der Bewegungsrichtung der Erde bildet, so hat man offenbar



$$\mathrm{Si}\,\varphi : \mathrm{Si}\,(\alpha - \varphi) = q : 1 \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Tg}\,\varphi = \frac{q \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}{1 + q \cdot \mathrm{Co}\,\alpha} \qquad \mathbf{1}$$

woraus durch Differentiation

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{q\,(q + \mathrm{Co}\,\alpha)}{1 + 2q \cdot \mathrm{Co}\,\alpha + q^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = -\frac{q \cdot \mathrm{Si}\,\alpha\,(1 - q^2)}{(1 + 2q \cdot \mathrm{Co}\,\alpha + q^2)^2} \qquad \mathbf{2}$$

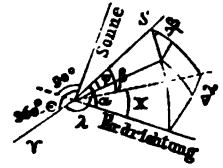
folgt, so dass, da $q < 1$ ist, φ ein Maximum k annimmt, wenn $q = -\mathrm{Co}\,\alpha$ ist, und somit nach 1

$$\mathrm{Tg}\,k = -\mathrm{Ct}\,\alpha \qquad k = \alpha - 90^0 \qquad \mathrm{Si}\,k = -\mathrm{Co}\,\alpha = q \qquad \mathbf{3}$$

wird, folglich

$$k = q : \text{Si } 1'' = 206265 \cdot q \qquad \varphi = q \cdot \text{Si } \alpha : \text{Si } 1'' = k \cdot \text{Si } \alpha \qquad 4$$

wo k die von **Bradley**, wie schon oben erwähnt, zu 20″,7 bestimmte sog. **Aberrationskonstante** ist. — Nimmt man die Sonnenbahn als Kreis an, so hat die Bewegungsrichtung der Erde die Länge $\odot - 90^\circ$ und letztere ist somit von derjenigen des Sternes um $x = \lambda - (\odot - 90^\circ)$ verschieden. Es folgt daher



$$\text{Co } \alpha = \text{Co } \beta \cdot \text{Co } x = \text{Co } \beta \cdot \text{Si } (\odot - \lambda) \qquad 5$$

so dass α zwischen β und $180^\circ - \beta$ schwankt, folglich für jeden Stern einmal gleich 90° wird oder die Aberration nach 4 das Maximum k erreicht. Ferner folgen aus der Figur unmittelbar

$$\text{Si } S = \frac{\text{Co } (\odot - \lambda)}{\text{Si } \alpha} \quad \text{also} \quad \triangle\lambda = -\varphi \cdot \text{Si } S \cdot \text{Se } \beta = -k \cdot \text{Co } (\odot - \lambda) \text{ Se } \beta$$

$$\text{Co } S = \frac{\text{Si } (\odot - \lambda) \cdot \text{Si } \beta}{\text{Si } \alpha} \qquad \triangle\beta = -\varphi \cdot \text{Co } S \qquad = -k \cdot \text{Si } (\odot - \lambda) \text{ Si } \beta \qquad 6$$

Es nimmt daher zwar $\triangle\lambda$ bei Konjunktion und Opposition, dagegen $\triangle\beta$ in der That in den Quadraturen extreme Werte an. — *e.* In neuerer Zeit wurde die Aberrationskonstante von **Lindenau** in seinem „Versuch einer neuen Bestimmung der Nutations- und Aberrationskonstanten (Berl. Abh. 1841)“ aus Rektascensionen des Polarsternes zu 20″,4486, — von August **Peters** (Hamburg 1806 — Kiel 1880; successive Obs. Hamburg und Pulkowa, Prof. astr. und Dir. Königsberg, Altona und Kiel) in seiner Abhandlung „Numerus constans nutationis ex ascensionibus rectis stellæ polaris deductus (Mém. Pet. 1842)“ aus ebensolchen zu 20″,4255, — von G. **Lundahl** in seiner Schrift „De numeris nutationis et aberrationis constantibus. Helsingfors 1842 in 4.“ aus Deklinationsbeobachtungen des Polarsternes zu 20″,5508, — und von W. **Struve** in seinem Memoire „Sur le coefficient constant dans l'aberration des étoiles fixes (Mém. Pet. 1843)“ aus Zenitalsternen zu 20″,4451 bestimmt. Die Struve'sche Zahl wurde sodann fast ausschliesslich gebraucht, bis Magnus **Nyrèn** (Provinz Wermland in Schweden 1837 geb., Obs. Pulkowa) in seiner Abhandlung „L'aberration des étoiles fixes (Mém. Pet. 1883)“ zeigte, dass aus drei durch **Peters**, **Gyldén** und ihn selbst am Vertikalkreise erhaltenen, von einander unabhängigen Beobachtungsreihen des Polarsternes im Mittel 20″,495, — aus zwei durch **Schweizer** und **Wagner** am Meridiankreise erhaltenen Reihen verschiedener Polsterne 20″,491, — und aus zwei durch W. **Struve** und ihn im ersten Vertikal erhaltenen Reihen 20″,490 folge, — dass also der Mittelwert **20″,492** wohl bis auf $^1/_{100}$″ sicher sei. Vgl. auch 369 : a für die Bestimmung von **Küstner.** — Der Einfluss der Aberration auf die Coordinaten wird später (611) einlässlich besprochen werden, und für gewisse andere, mehr theoretische Untersuchungen wird auf die Abhandlungen „Wilhelm **Klinkerfues** (Hofgeismar in Hessen 1827 — Göttingen 1884; successive Geometer, Assistent und Nachfolger von Gauss), Die Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie. Leipzig 1867 in 4., — E. **Ketteler**, Astronomische Undulationstheorie oder die Lehre von der Aberration des Lichtes. Bonn 1873 in 8., — Yvon **Villarceau**, Théorie de l'aberration, dans laquelle il est tenu compte du mouvement du système solaire (Conn. d. t. 1878), — François-Jacques-Philippe **Folie** (Venloo bei Limburg 1833 geb.; Prof. astr. und Dir. Liège et Bruxelles), Un chapitre inédit d'astronomie sphérique (A. N. 2607 von 1884), — etc.“ verwiesen, und nur kurz darauf aufmerksam gemacht, dass z. B. **Folie** (wenn v, t, s, e der Reihe nach die

Geschwindigkeiten des Lichtes, der Erde in ihrer Bahn, des Sonnensystemes und des Sternes bezeichnen) ausser t : v oder der bis jetzt ausschliesslich in Betracht gezogenen **jährlichen** Aberration, nicht nur s : v oder die **systematische** Aberration, sondern sogar e : v oder die (von Houzeau in A. N. 496 und 498 signalisierte, dagegen von John Herschel in A. N. 500 und 1878 auch von Villarceau in Zweifel gezogene) **objektive** Aberration in Betracht zieht und glaubt, dass es möglich sein dürfte, die zwei letztern ausscheiden, somit s und e bestimmen zu können. — Zum Schlusse bleibt noch zu erwähnen, dass neben der jährlichen, in T = 366,26 Sterntagen vollendeten Bewegung der Erde um die Sonne, noch die Einen Sterntag in Anspruch nehmende Rotation der Erde statt hat, welche ebenfalls eine Aberration bewirken muss: Bezeichnet man die Konstante dieser **täglichen** Aberration unter der Breite φ mit k', so verhält sich aber offenbar, wenn r und a die Radien von Erde und Erdbahn bezeichnen und p die Sonnenparallaxe ist,

$$k' : k = \frac{2 r \operatorname{Co} \varphi \cdot \pi}{1} : \frac{2 a \pi}{T} = p \operatorname{Si} 1'' \cdot \operatorname{Co} \varphi : 1 \qquad 7$$

und man kann daher mit grosser Annäherung $k' = 0'',3113 \cdot \operatorname{Co} \varphi$, so z. B. für Zürich $k'' = 0'',210 = 0^s,014$, setzen.

265. Keplers „Mysterium cosmographicum". — Als ein höchst folgewichtiges Ereignis ist zu verzeichnen, dass der junge Tübinger-Stiftler Johannes **Kepler** etwa 1590 durch seinen Lehrer **Mästlin** für das coppernicanische System gewonnen [a] und sodann 1594 durch ebendenselben bestimmt wurde, seine bis dahin bestehende Absicht aufzugeben, sich dem reformierten Kirchendienste zu widmen [b], und statt dessen die Stelle eines „Landschafts-Mathematicus von Steyermark" zu übernehmen, welche ihm die wünschbare Musse liess, um sich mit eingehenden astronomischen Studien befassen zu können. Die Hauptaufgabe, welche sich **Kepler** bei letztern von Anfang an stellte, war, den **Organismus unsers Planetensystemes** zu ergründen, und schon 1596 glaubte er, dass ihm wenigstens ein erster Schritt gelungen sei, ja teilte noch im gleichen Jahre in seinem sog. „Prodromus" [c] ein Hauptresultat, das sich ihm aus seinen Untersuchungen zu ergeben schien, als **Mysterium cosmographicum** [d] öffentlich mit, sich dadurch in der gelehrten Welt sofort in hervorragender Weise einbürgernd [e].

Zu 265: *a.* Nicht nur war **Kepler** schon 1591 im stande, die heliocentrische Lehre in den physikalischen Disputationen gegen seine Kommilitonen zu verteidigen, sondern er soll auch damals bereits eine Abhandlung über die Bewegung der Erde verfasst haben. — *b.* **Kepler** predigte sehr gerne, häufig und mit Erfolg, war dagegen allerdings von der damaligen Orthodoxie, die in dem „Dogma von der Ubiquität des Leibes Christi" gipfelte, wenig erbaut und wurde **um seiner freiern Ansichten willen** von einzelnen seiner Lehrer als „untauglich zum Kirchendienste" bezeichnet, nicht aber „um seiner Lebensweise" willen, wie der perfide Karl **Schöpfer** (mutmasslich selbst ein verkommener Theologe) in seiner Skandalschrift „Die Widersprüche in der Astronomie, wie sie bei der Annahme des Copernikanischen Systemes entstehen, bei

der entgegengesetzten aber verschwinden. Berlin 1869 in 8." seine Leser glauben machen möchte. — *c.* Der vollständige Titel lautet: „Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium cœlestium, deque causis cœlorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis et propriis, demonstratum per quinque regularia corpora geometrica. Tubingæ 1596 in 4." — *d.* Sein „Mysterium cosmographicum" resümierte **Kepler** selbst in der Einleitung zu seinem „Prodromus" in folgenden Worten: „Die Erdbahn liefert den Kreis (die Sphäre), der das Mass aller übrigen bildet; um denselben beschreibe ein Dodecaeder: der dieses umschliessende Kreis ist der Mars; die Marssphäre begrenze mit einem Tetraeder, der diesem umschriebene Kreis wird der des Jupiters sein. Die Sphäre des Jupiter umschliesse mit einem Würfel; der diesem umschriebene Kreis ist der des Saturn. Ferner schreibe der Erdsphäre ein Ikosaeder ein; der von diesem eingeschlossene Kreis wird der der Venus sein. Der Venus schreibe ein Octaeder ein, und der Kreis in diesem wird dem Merkur gehören. Und so erhältst Du den Grund für die Anzahl der Planeten". Bezeichnet man die Kugel, welche als regelmässiges Unendlichflach gedacht werden kann, mit ∞, so kann man somit offenbar das Mysterium schematisch durch

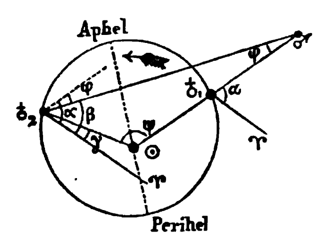
$$\begin{matrix} \infty & 6 & \infty & 4 & \infty & 12 & \infty & 20 & \infty & 8 & \infty \\ ♄ & & ♃ & & ♂ & & ♁ & & ♀ & & ☿ \end{matrix}$$

darstellen. — *e.* Man könnte geneigt sein, das „Mysterium" als eine Spielerei zu betrachten; aber einerseits waren die Studien, welche **Kepler** auf dasselbe führten, eine notwendige Vorbereitung zu seinen denkwürdigen spätern Arbeiten, und anderseits vermittelte diese Erstlingsarbeit seine folgewichtige Bekanntschaft mit **Tycho** und **Galilei**.

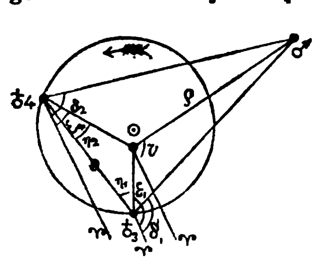
266. Keplers zwei erste Gesetze. — Durch Religionswirren aus Steyermark verdrängt, siedelte **Kepler** sich 1600 als Gehilfe von Tycho in Prag an, erhielt nach dessen bald darauf erfolgten Tode seine Nachfolge und nahm nun mit all' seiner Energie die ihm schon von dem Verstorbenen zugedachte Aufgabe an die Hand, auf Grund von dessen Beobachtungsregistern die immer noch mangelhafte Mars-Theorie zu bearbeiten. Nachdem er sich lange vergeblich abgemüht hatte, die Mars durch das coppernicanische System zugewiesene Kreisbahn mit seinen durch Tycho bestimmten Positionen in Einklang zu bringen, sann er sich eine Methode aus [a], welche ihn von allen bisherigen Voraussetzungen frei machte, ja fast mit Notwendigkeit ans Ziel führen musste und ihm auch wirklich schliesslich das sichere Resultat ergab, **dass Mars sich in einer Ellipse bewege, deren einen Brennpunkt die Sonne einnehme.** Nachdem er einmal diesen Kapitalfund gemacht hatte, der ihn von allen Vorgängern ablöste, fiel es **Kepler** relativ leicht, zu konstatieren, dass auch den übrigen Planeten analoge, wenn auch weniger excentrische Bahnen zukommen, d. h. für das ganze Sonnensystem sein sog. **erstes Gesetz** bestehe, und an dieses schloss sich sodann als **zweites** ein von ihm etwas früher unter der Annahme, dass der

Sitz der die Planeten bewegenden Kraft in der Sonne, „dem Herz der Welt“ liege, durch Spekulation gefundenes Gesetz an, nach welchem **die vom Radius vector eines Planeten in einer gewissen Zeit überstrichene Fläche dieser Zeit proportional** ist[b]. **Kepler** publizierte diese beiden Gesetze, unter ausführlicher Darlegung des von ihm eingeschlagenen Weges, in dem ersten seiner drei grossen Hauptwerke, der „Astronomia nova de motibus stellæ Martis ex observationibus Tychonis Brahe. Pragæ 1609 in fol.“ [c], in dessen Zueignung an Rudolf II. er dem Kaiser den Mars, als in den Fesseln der Rechnung gefangen, mit den charakteristischen, die Verdienste aller Mitwirkenden präcise bezeichnenden Worten überbrachte: „Die Astronomen wussten diesen Kriegsgott nicht zu überwältigen; aber der vortreffliche Heerführer Tycho hat in zwanzigjährigen Nachtwachen seine Kriegslisten erforscht, und ich umging mit Hilfe des Laufes der Mutter Erde alle seine Krümmungen“.

Zu 266: *a.* Der von **Kepler** eingeschlagene Weg bestand wesentlich in folgendem: Bezeichnet t_1 die Zeit einer Mars-Opposition, für welche nach



Tycho die geocentrische Länge α des Mars bekannt war, und kannte man auch für eine andere Zeit $t_2 = t_1 + a' \cdot T$, wo T die siderische und somit Mars je wieder an dieselbe Stelle des Himmels zurückführende Umlaufszeit desselben bezeichnet, direkt oder durch Interpolation die geocentrischen Längen β und γ von Mars und Sonne, so konnten aus dem Dreiecke $♁_2 \odot ♂$, in Beziehung auf $\odot ♂$ als Einheit der Distanzen, die heliocentrischen Coordinaten $♁_2 \odot$ und ψ der Erde berechnet werden. Auf diese Weise erhielt **Kepler** so viele Punkte der Erdbahn, als er a' verschiedene Werte beilegen konnte, und da zeigte sich, dass diese Erdörter einem Kreise angehörten, in welchem die Sonne etwas excentrisch stand, womit die Theorie der Erde den Beobachtungen gemäss erstellt und die Möglichkeit gegeben war, die gegenseitige Lage der irgend zwei Zeiten t_3 und t_4 entsprechenden Erdörter, namentlich auch ihre Distanz a in der angenommenen Einheit zu bestimmen. Entsprach nun t_3 irgend einer Zeit, zu welcher die Längen δ_1 und ε_1 von Mars und Sonne gemessen waren, und kannte man für eine zweite Zeit $t_4 = t_3 + a'' \cdot T$ ebenfalls die entsprechenden Längen δ_2 und ε_2, so konnte man aus diesen Grössen und den aus der Erdtheorie bekannten Werten von a, η_1 und η_2 die heliocentrischen Coordinaten ϱ und υ des Mars in der frühern Einheit berechnen, — erhielt also so viele Marsörter, als man t_3 und a'' abändern konnte.



Als nun **Kepler** diese Marsörter auftrug und verband, erhielt er ein sich vom Kreise sehr merklich unterscheidendes Oval, in welchem er zuerst die durch den Längendurchschnitt eines Eies entstehende „Ooide oder Ellipoide“ zu er-

kennen glaubte, während es sich ihm bei genauerer Untersuchung etwas später als Ellipse entpuppte, in deren einem Brennpunkte die Sonne stand. Dass auf den Gang dieser Arbeiten seine damalige lebhafte Korrespondenz mit David **Fabricius** einen erheblichen Einfluss ausübte, giebt **Kepler** (vgl. Astronomia nova IV 55) selbst zu, — jedoch ist derselbe von manchen weit überschätzt worden. — *b.* Für das zweite Kepler'sche Gesetz, dem jede Centralbewegung unterliegt, kann 111 verglichen werden. Es bildet, wie schon **Reuschle** (257 : d) betonte, gewissermassen den **physischen Kern** der elliptischen Theorie, indem es „die Ausgleichung der Ungleichheit der Abstände und der Ungleichheit der Geschwindigkeiten in der sich gleichbleibenden Flächengeschwindigkeit" involviert, und dadurch auf eine in der Sonne sitzende Kraft hinweist. Auch blieb es dem edeln **Schöpfer** (265 : b) vorbehalten, dasselbe als „Unsinn" zu bezeichnen, sowie die Behauptung aufzustellen, es habe **Kepler** diese Arbeiten nur aus „Hass gegen die Geistlichkeit" unternommen, um dem Christentum „einen empfindlichen Stoss" beizubringen. — *c.* Nach „Franz **Dvorsky**, Neues über Kepler. Prag 1880 in 8." legte **Kepler** sein Werk über Mars dem Kaiser schon 1604 mit der Bitte vor, dasselbe drucken zu lassen; aber erst, als er im Dezember 1606 die Bitte dringend wiederholte, liess **Rudolf** zu diesem Zwecke 400 fl. anweisen, und das Erscheinen selbst verzögerte sich dennoch bis 1609. An der Verzögerung mögen zum Teil auch die Streitigkeiten mit Tychos Erben über dessen wissenschaftlichen Nachlass Schuld gewesen sein; eine dem Vorworte vorangestellte kurze Erklärung **Tengnagels** beweist, dass die Familie schliesslich ihren Widerstand aufgab.

267. Keplers drittes Gesetz. — Nachdem **Kepler** durch seine „Astronomia nova" das coppernicanische System in der nötigen Weise umgearbeitet und gegen alle wissenschaftlichen Angriffe sichergestellt hatte, warf er sich trotz Verhältnissen, welche jeden minder kräftigen Geist zu Boden geworfen hätten [a], mit all' seiner Energie auf das Suchen nach einem die verschiedenen Planeten organisch mit einander verbindenden obersten Gesetze: Bald griff er auf seine frühere Idee zurück, die halben grossen Axen mit den regelmässigen Körpern in Verbindung zu bringen, — bald glaubte er harmonische Beziehungen aufzufinden, welche im Sinne der Pythagoräer die Distanzen und Umlaufszeiten beherrschen möchten [b], — etc., bis er endlich 1618 III 8 den glücklichen Einfall hatte, die Zahlen, welche die grossen Axen und Umlaufszeiten ausdrücken, in verschiedene Potenzen zu erheben und diese mit einander zu vergleichen und nun V 15, nach Beseitigung eines Rechnungsfehlers, wirklich sein **drittes Gesetz** fand, nach welchem sich **die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten wie die Würfel der grossen Axen ihrer Bahnen** verhalten. Mit gerechtem Stolze publizierte er sodann diesen kostbaren Fund in einem zweiten Hauptwerke, seinen „Harmonices mundi libri V. Lincii 1619 in fol." [c], und hatte noch die Genugthuung, demselben als drittes Hauptwerk die längst begonnenen und von den Astronomen sehnlichst erwarteten „Tabulæ

Rudolphinæ. Ulmæ 1627 in fol." folgen zu lassen, welche seine unsterbliche Arbeit in würdigster Weise krönten [d].

Zu 267: *a.* **Kepler** verfolgte nämlich seine Forschungen unentwegt, trotzdem ihn, infolge Nichtausbezahlung seines Gehaltes, drückender Mangel zwang, nebenbei „nichtswürdige Kalender und Prognostica" zu verfertigen und 1614 noch die Verpflichtung zu übernehmen, die Landmappe von Ober-Östreich zu revidieren, sowie am Gymnasium zu Linz Unterricht zu erteilen, — trotz andern unumgänglich notwendigen wissenschaftlichen Arbeiten, welche mit der Erfindung des Fernrohrs und den mit demselben gemachten Entdeckungen im Zusammenhange standen, — trotz der ihn von beiden Kirchen heimsuchenden Verfolgungen und einem gegen seine Mutter, das sog. „Kätherchen von Leonberg", angehobenen Hexenprocesse, in welchem er als guter Sohn mit bestem Erfolge die nicht ungefährliche Verteidigung selbst unternahm, — etc. — *b.* So fand **Kepler** z. B., dass sich die Apheldistanz Saturns zur Periheldistanz Jupiters nahe wie 2 : 1, letztere dagegen zur Apheldistanz des Mars nahe wie 3 : 1 verhalte, etc., — dass die Geschwindigkeit im Aphel sich zu derjenigen im Perihel bei Saturn wie 4 : 5 (gr. Terz), bei Mars wie 2 : 3 (Quinte), etc. verhalte, also gewissermassen jeder Planet vom Aphel zum Perihel ein musikalisches Interval durchlaufe, — und dergleichen mehr. — *c.* **Kepler** machte in seinem Werke den Leser mit all' seinen Fehlversuchen und Irrgängen bekannt, sprach aber auch mit vollem Selbstbewusstsein aus: „Nach langen vergeblichen Anstrengungen erleuchtete mich endlich das Licht der wunderbarsten Erkenntniss. Hier habt ihr das Resultat meiner Studien. Mag mein Werk von den Zeitgenossen oder von den spätern Geschlechtern gelesen werden oder nicht, mir gilt es gleich. Es wird nach hundert Jahren gewiss seine Leser finden". — *d.* Der durch **Kepler** ziemlich gleichzeitig mit seinen zwei letzten Hauptwerken verfassten „Epitome" ist schon früher (9 : m) einlässlich gedacht worden; dagegen bleibt noch zu erwähnen, dass er sich vorsetzte, zum Abschlusse seiner Arbeiten gewissermassen einen neuen Almagest zu schreiben, jedoch der langen Überanstrengung erlag, ehe er diesen Plan ausführen konnte.

268. Die Entdeckung des Gravitationsgesetzes. — Schon **Kepler** ahnte, wie bereits (266) angeführt wurde, dass die Bewegung der Planeten um die Sonne durch letztere geregelt werde, ja die **Bouillau** und **Borelli**, an welche sich vielleicht auch **Pascal** anschloss, glaubten entschieden, dass ein die drei Kepler'schen Gesetze bedingendes, allgemeines mechanisches Princip existiere [a]; aber dieses Princip zu formulieren, dessen Existenz nachzuweisen und dasselbe nach seinen Konsequenzen zu verfolgen, blieb dem unvergleichlichen Isaac **Newton** vorbehalten, der sich offenbar schon frühe eingehend mit diesen Fragen befasst hatte, so dass es 1666 nur noch eines kleinen äussern Anstosses, wie des Niederfallens eines Apfels, bedurfte, um ihn auf die richtige Fährte zu bringen [b]. Dies veranlasste ihn nämlich, sich die Frage vorzulegen, ob wohl dieselbe Kraft, welche dieses Niederfallen bewirkt habe, den Mond in seiner Bahn um die Erde, und eine ähnliche der Sonne innwohnende Kraft die Planeten in ihren Bahnen um die Sonne zurück-

halte. In Beziehung auf die Planeten war ihm nun (111) bereits bekannt, dass sich ihre Fliehkräfte umgekehrt wie die Quadrate ihrer Distanzen von der Sonne verhalten, dass also, wenn wirklich die Sonne diese Fliehkräfte bewältigen sollte, sie ihre Wirkung ebenfalls nach jenem Verhältnisse ausüben müsste; dann würde sich aber dieses Gesetz wohl auch auf die Wirkung der Erde übertragen und die ihr an der Erdoberfläche entsprechende Beschleunigung berechnen lassen [c], folglich sich in Vergleichung der letztern mit ihrem durch Versuch erhaltenen Werte ein Kriterium für die Richtigkeit des Gesetzes ergeben. Die Ausführung dieser Rechnung und Vergleichung ergab ihm jedoch eine zu geringe Übereinstimmung, als dass sie Beweiskraft besessen hätte [d], und wenn auch für ihn selbst die Sache dennoch kaum in Frage kam, so fehlte ihm doch der Mut, seine Ideen öffentlich bekannt zu machen oder auch nur weiter zu verfolgen, und er beschäftigte sich nunmehr zunächst mit andern, namentlich optischen Untersuchungen. Erst als ihm 1682 bessere Daten bekannt wurden und diese eine befriedigende Übereinstimmung herbeiführten [e], wurde **Newton** von der Richtigkeit seiner Voraussetzungen so vollständig überzeugt, dass er nun wagte, sein sog. **Gravitationsgesetz**: „Jeder Planet wird von der Sonne, und ebenso jeder Trabant von seinem Planeten, mit einer Kraft angezogen, welche der Masse des anziehenden Körpers direkt und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist“ definitiv zu formulieren, ja eine solche Anziehung als eine allgemeine Eigenschaft der Materie anzusehen [f].

Zu 268: *a.* **Bouillau** sprach schon 1645 in seiner „Astronomia philolaica“ die Vermutung aus, dass die Sonne eine im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Distanz stehende Wirkung ausüben möchte, und **Borelli** betonte ausserdem in seiner „Theoria planetarum medicearum. Florentiæ 1666 in 4.“, dass dies elliptische Bahnen zur Folge haben müsste, ja letzterer versuchte auch die Bewegung der Jupitersmonde durch Attraktion zu erklären. Dass auch **Pascal** sich an diese beiden zwischen Kepler und Newton vermittelnden Männer angeschlossen habe, betrachtete man früher als nicht unwahrscheinlich, jedoch ist man durch den kläglichen Handel, welcher sich 1867/69 vor der Pariser Akademie abspielte und in welchem sich der leichtgläubige **Chasles**, ja die Mehrheit dieser gelehrten Körperschaft, durch von einem Industrieritter Namens **Vrain-Lucas** fabrizierte Briefe in so unbegreiflicher Weise irre führen liess (vgl. ausser den Compt. rend. das treffliche Résumé „H. Hankel: Die Entdeckung der Gravitation — und Pascal“ in Z. f. M. u. Ph. 1869), eher von dieser Ansicht zurückgekommen. — *b.* Als nämlich **Newton** wegen der Pest von Cambridge, wo er damals noch seinen Studien oblag, für längere Zeit nach Hause zurückgekehrt war, soll er im Spätjahr 1666, als er sich unter einem Apfelbaume seinen Meditationen hingab, durch einen zu Boden fallenden Apfel auf die nachfolgenden Gedanken geführt worden sein. — Diese von manchen bezweifelte und natürlich durch keine Dokumente belegte, aber

von Newtons Nichte Catherine **Barton** (1680—1739; Tochter einer Halbschwester Newtons, spätere Frau Conduitt und Pflegerin ihres Oheims; vgl. „Newton, his friend and his niece. By the late Augustus de Morgan. Edited by his wife and by his pupil Arthur Cowper Ranyard. London 1885 in 8.") herrührende und auch durch seinen Freund Henry **Pemberton** (London 1694 — Oxford 1771; Arzt und Prof. med. London) bestätigte Erzählung erscheint mir ganz glaubwürdig; sie stimmt auch ganz gut damit zusammen, dass **Newton** einst auf die Frage, wie er auf sein Princip gekommen sei, geantwortet haben soll (vgl. Ciel et terre 1883): „En y pensant toujours". — *c.* Die an der Erdoberfläche oder in der Entfernung des Erdradius r statthabende Beschleunigung g würde nämlich in diesem Falle in der Distanz R des Mondes nur noch $g \cdot r^2 : R^2$ betragen, während die Fliehkraft des die Umlaufszeit T besitzenden Mondes nach den Gesetzen von **Huygens** zu $4\pi^2 \cdot R : T^2$ anzunehmen ist. Es müsste also notwendig

$$\frac{g \cdot r^2}{R^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{R}{T^2} \qquad \text{oder} \qquad g = 4\pi^2 \cdot \frac{R^3}{r^2 \cdot T^2} = \frac{4\pi}{T^2} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cdot 180 \cdot a \qquad 1$$

sein, falls a die Länge eines Equatorgrades bezeichnet. — *d.* **Newton** hatte nach den ihm bekannten Daten $T = 27^d\ 7^h\ 43^m\ 48^s = 2\,360628^s$, $R = 60{,}4 \cdot r$ und $a = 60$ engl. Meil. $= 297\,251' \cdot$ Par. zu setzen; nach 1 erhält man aber hiefür $g = 26',586$, während schon damals allgemein $g > 30'$ angenommen wurde. — *e.* Als **Newton** 1682 in einer Sitzung der Roy. Society beiläufig erfuhr, dass **Picard** 1671 den Erdgrad gleich 342360' Par. gefunden habe, mutmasste er sofort, dass dieser neue Wert für a ein viel besseres g ergeben möchte und kam dadurch in solche Aufregung, dass er die Revision seiner frühern Rechnung einem Freunde übergeben musste, der nun wirklich $g = 30',621$, also die schönste Übereinstimmung erhielt. — *f.* Sollte nach Ansicht der Anti-Coppernicaner die Sonne sich entsprechend dem Monde um die Erde bewegen, so müsste auch für sie die für den Mond bewährte 1 gelten. Setzt man aber in diese Formel neben den frühern Werten $g = 30{,}621$ und $a = 342360$ noch $T = 365^1/_4{}^d = 31\,557600^s$ und $r = 759$ geograph. Meilen ein, so erhält man $R = 340 \cdot r = 258254$ g. M. und $\odot = \text{Asi}\,(r:R) = 10'$, während schon **Hipparch** $R = 1200 \cdot r$ und $\odot = 3'$, ja **Kepler** $R = 14733 \cdot r$ und $\odot = 14''$ erhalten hatte; sie giebt also für die Sonne ganz unhaltbare Resultate, und es lässt sich somit deren scheinbare Bewegung um die Erde absolut nicht entsprechend wie diejenige des Mondes erklären.

269. Newtons Principien. — Nachdem sich **Newton** von der Richtigkeit seines Gravitationsgesetzes überzeugt hatte, begann er mit all' seinem Scharfsinne und all' seinen mathematischen Hilfsmitteln die Konsequenzen desselben aufzusuchen, und es gelang ihm wirklich in dem kurzen Zeitraume von zwei Jahren, aber allerdings bei erschöpfender Geistesanstrengung, welche ihn oft der physischen Welt förmlich zu entrücken schien [a], nicht nur die Kepler'schen Gesetze als notwendige Folgen der Gravitation zu erweisen [b], sowie eine Reihe bis dahin als unlösbar erschienener Aufgaben zu bewältigen [c], sondern überhaupt der theoretischen Astronomie in einem Fundamentalwerke, welches er als „Principia mathematica philosophiæ naturalis" betitelte, eine neue und breite Grundlage zu geben.

Dieses Werk, dessen wirkliche Ausgabe sich allerdings aus verschiedenen Ursachen bis 1687 verzögerte [d], besteht aus drei Büchern, von welchen die beiden ersten die allgemeinen Gesetze der Bewegung entwickeln, das dritte aber ihre specielle Anwendung auf das Weltsystem erläutert, und enthält eine Überfülle der scharfsinnigsten Untersuchungen, von welchen einzelne bereits im vorhergehenden berührt worden sind, eine andere als Beispiel unter der folgenden Nummer Platz finden wird, die grosse Mehrzahl aber erst später nach und nach besprochen werden kann [e]. Dennoch war der erste Erfolg der Principien nichts weniger als grossartig, da sie für weitere Kreise total unverständlich waren und ihr Studium sogar den Männern vom Fache schwer fiel [f], überdies die darin enthaltenen Grundsätze von den bisher angenommenen gar zu sehr verschieden waren, auch gewisse persönliche und nationale Jalousien ungünstig einwirkten [g]; aber nach und nach fassten sie doch Boden, besonders als die heranwachsende Generation mit grösserer Unbefangenheit an dieselben herantrat und in ihrem Geiste fortarbeitend die schönsten Erfolge erzielte [h], und seit etwa $1^1/_2$ Jahrhunderten bilden sie die alleinige Grundlage aller Untersuchungen auf einschlagenden Gebieten [i].

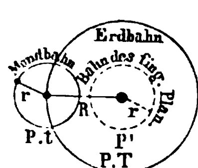
Zu 269: *a.* So geht z. B. aus den Erzählungen seiner Freunde hervor, dass **Newton** sehr häufig über Rechnungen die regelmässigen Mahlzeiten vergass. — *b.* Vgl. 482 bis 484. — *c.* So z. B. die theoretische Bestimmung der Gestalt der Erde, die Massenvergleichung, die Berechnung der sog. Ebbe und Flut, etc. Vgl. Note e. — *d.* Wahrscheinlich hätte **Newton**, nachdem etwa 1684 die Redaktion der Principien so ziemlich vollendet war, sein Manuskript noch lange in seinem Schreibtische behalten, teils aus Furcht vor dem Raubritter **Hooke**, teils auch, um noch da und dort etwas zu verbessern oder zu ergänzen; aber **Halley** liess ihm, nachdem er von einem Teil desselben Kenntnis genommen hatte, keine Ruhe mehr und konnte ihn endlich 1686 dazu bewegen, ihm den kostbaren Schatz zur Vorlage bei der Roy. Society anzuvertrauen, ja zu erlauben, denselben unter seiner Aufsicht dem Drucke zu übergeben. So erschienen endlich wie obgemeldt die „Philosophiæ naturalis principia mathematica. Londini 1687 in 4.“, welche sodann noch in 2 A. durch **Cotes** 1713, in 3 A. durch **Pemberton** 1726 besorgt wurden. Ferner wurden sie ausgegeben mit Kommentar von Thomas **Le Seur** (Rethel in den Ardennen 1703 — Rom 1770; Minorit; Prof. theol. et math. Rom), François **Jacquier** (Vitri-le-François 1711 — Rom 1788; Minorit; Prof. theol. et phys. Rom) und Jean-Louis **Calandrini** (Genf 1703 — ebenda 1758; Prof. math. et philos. Genf; vgl. Biogr. III) „Genevæ 1739—42, 3 Vol. in 4. (Ed. nova, Glasguæ 1822, 4 Vol. in 8.)“, — ebenfalls mit Kommentar durch Samuel **Horsley** (London 1733 — ebenda 1806; später Bischof von Rochester) in den „Opera omnia (vgl. 10)“, — englisch durch Andrew **Motte** mit Zusätzen von John **Machin** „London 1729, 2 Vol. in 8.“, und mit Kommentar von R. **Thorpe** „London 1802 in 4.“, — französisch durch Gabriele-Emilie de **Breteuil** (Paris 1706 — Luneville 1749; damals bereits Marquise du Chastelet) mit Kommentar von **Clairaut** „Paris 1759, 2 Vol. in 4.“, —

deutsch (aber von Fehlern wimmelnd) durch J. Ph. **Wolfers** „Berlin 1872 in 8.“. Ausserdem sind zu vergleichen: „W. **Whiston**, Newton's Mathematic Philosophy more easily demonstrated. London 1716 in 8., — François-Marie Arouet de **Voltaire** (Châtenay 1694 — Paris 1678; Litterat in Berlin, Ferney bei Genf, etc.; vgl. E. Saveney, La physique de Voltaire, in Revue des deux mondes 1860), Eléments de la philosophie de Newton, mis à la portée de tout le monde. Amsterdam 1738 in 8. (auch Neuchâtel 1772, Lausanne 1782 und ital. Venezia 1785; der Abdruck dieser Schrift, welche sehr viel zur Einführung der Principien in Frankreich beitrug, wurde in Paris nicht gestattet), — Fortunatus de **Felice** (Rom 1723 — Yverdon 1789; erst Prof. math. et phys. Neapel, konvertierte er in Bern und errichtete sodann zu Yverdon eine Offizin, aus der z. B. von 1770—76 eine von ihm annotierte neue Ausgabe der Encyclopédie hervorging), De Newtoniana attractione unica cohærentia naturis causa. Bernæ 1757 in 4. (eine Art Kommentar zu den Principien, welchen Dan. Bernoulli sehr geschätzt haben soll), — J. M. F. **Wright**, A Commentary on Newton's Principia. London 1833, 2 Vol. in 8., — etc.“ — *e.* Für diese drei Kategorien verweise ich auf 201 und 241, — auf 270, — auf 419 und namentlich auf den ganzen Abschnitt XIX. — *f.* Sogar ein **Euler** bezeichnete die Principien als eine sehr schwierige Lektüre. Es hängt dies wohl grossenteils, wie schon **Marie** andeutete, damit zusammen, dass **Newton**, obschon er ohne Zweifel bei seinen grundlegenden Arbeiten reichlichen Gebrauch von der Trigonometrie und den neuen Rechnungen gemacht hatte, bei der letzten Redaktion der Principien dieselben allen solchen Hilfsapparaten entkleidete und sich ausschliesslich der Methoden der Alten bediente. — *g.* Der rascheren Aufnahme der Principien trat namentlich die in Frankreich dominierende Herrschaft des Cartesianismus (298) entgegen, und ebenso die in Deutschland herrschende Animosität gegen Newton, welcher sich auch **Huygens** und **Joh. Bernoulli** mehr oder weniger anschlossen, — letzterer allerdings zunächst aus berechnender Klugheit; denn als die Pariser Akademie für 1730 die Preisfrage stellte: „Quelle est la cause physique de la figure elliptique des orbites des planètes et de la mobilité de leurs aphélies“, und er den Preis gewann, während Gabr. **Cramer** für seine auf den Principien basierende Arbeit nur ein Accessit erhielt, schrieb er letzterm unumwunden: „qu'il ne croyait ne devoir sa victoire qu'au ménagement qu'il avait mieux su garder que lui pour les tourbillons de Descartes, encore révérés de ses juges“. — *h.* Wir werden in Abschnitt XIX auf diese Erfolge näher einzutreten haben, von welchen allerdings der edle Dr. **Schöpfer** nichts wissen wollte, als er auf pag. 61 seines mehrerwähnten Pamphletes mit seiner fabelhaften Wahrheitsliebe schrieb: „Auch **Newton** ist einer von denen, welche man hochgefeiert hat, und die der Menschheit nichts genutzt, ihr vielmehr geschadet und den Fortschritt gehemmt haben. Von allem was Newton lehrte, hat sich nichts bewährt. Alles was er erdachte, war Produkt eines kranken Geistes und sein Ende erfolgte in wirklichem Irrsinn“. — *i.* Wie gefährlich es ist, aus Figuren oder Apparaten, welche den wirklichen Verhältnissen nicht entsprechen, Schlüsse ziehen zu wollen, hat Phil. **Gérigny** (vgl. l'Astronomie 1882) an der Mondbewegung nachgewiesen, welche einigen mit der Gravitationstheorie unverträglich erschien, weil sie aus solchen Figuren herauszulesen glaubten, dass die auf die Sonne bezogene Mondbahn zeitweilig gegen dieselbe konvex werde.

270. Die Massenvergleichung. — Unter den vielen Aufgaben, welche früher als unlösbar erscheinen mussten und sich

dagegen mit Hilfe des Gravitationsgesetzes verhältnismässig leicht erledigen lassen, mag hier vorläufig als Beispiel für dessen Leistungsfähigkeit diejenige der Abwägung eines von Monden begleiteten Planeten gegen die Sonne speciell erwähnt werden [a].

Zu 270: *a.* Bezeichnet, unter der vereinfachenden Voraussetzung von Kreisbahnen, R den Abstand des Planeten von der Sonne, und nehmen wir einen fingierten Planeten zu Hilfe, dessen Abstand von der Sonne dem Abstande r des Planeten vom Monde gleich ist, so verhalten sich offenbar nach dem Gravitationsgesetze die Wirkungen der Sonne auf den fingierten und den wirklichen Planeten



$$P' : P = R^2 : r^2 \qquad 1$$

Anderseits verhalten sich nach demselben Gesetze, wenn M und m die Massen der Sonne und des Planeten bezeichnen, und p gleich der Wirkung des Planeten auf ein Element des Mondes ist,

$$p : P' = m : M \qquad 2$$

und endlich hat man nach den Gesetzen der Centralbewegung, wenn T und t die Umlaufszeiten des Planeten und des Mondes sind,

$$P : p = \frac{(4\pi^2 R)}{T^2} : \frac{4\pi^2 r}{t^2} = R \cdot t^2 : r \cdot T^2 \qquad 3$$

Durch Multiplikation dieser drei Proportionen erhält man aber

$$M : m = (R : r)^3 : (T : t)^2 \qquad 4$$

womit die gestellte Aufgabe gelöst ist. Setzt man beispielsweise, wie es für die Erde und ihren Mond nahe der Fall ist, $R = 400 \cdot r$ und $T = 13 \cdot t$, so erhält man nach 4

$$M : m = 400^3 : 13^2 = 378698 : 1$$

so dass man etwa 378698 Erdkügelchen brauchen würde, um der Sonne Gleichgewicht zu halten. — Nur beiläufig erwähnend, dass **Leverrier** aus den hiefür nicht nur grössere Genauigkeit gewährenden, sondern weder eine Kreisbahn voraussetzenden, noch an das Vorhandensein eines Mondes gebundenen Störungsrechnungen (505 u. f.) die von der unsrigen nicht sehr verschiedene Zahl 354936 erhielt, mag dagegen noch beigefügt werden, dass sich 4 speciell für die Erde auch auf eine andere, von **Newton** gewählte Form bringen lässt: Setzt man nämlich den von der Sonne aus gesehenen scheinbaren Halbmesser der Mondbahn gleich φ, den Halbmesser der Erde gleich ϱ und die Parallaxen von Sonne und Mond gleich $\odot$ und ☾, so ist offenbar $\mathrm{Si}\,\varphi = r : R$, $\mathrm{Si}\,\odot = \varrho : R$ und Si ☾ $= \varrho : r$, folglich nach 4, wenn $M = 1$ angenommen wird,

$$m = (T : t)^2 \cdot \mathrm{Si}^3 \varphi \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{Si}\,\varphi = \mathrm{Si}\,\odot : \mathrm{Si}\,☾ \qquad 5$$

Setzt man hier mit **Newton** $\odot = 10\tfrac{1}{2}''$, ☾ $= 57'$, $T = 365\tfrac{1}{4}^d$ und $t = 27\tfrac{1}{3}^d$, so wird $\varphi = 10'\ 33''$ und $m = \tfrac{1}{193758}$; aber es ist nicht zu übersehen, dass er selbst der Annahme $\odot = 10\tfrac{1}{2}''$ kein grosses Gewicht beilegte, indem er zufügte: „Findet man die Parallaxe der Sonne grösser oder kleiner als $10\tfrac{1}{2}''$, so muss man die Menge der Materie, welche die Erde enthält, in dreifachem Verhältnisse vermehren oder vermindern". Man überzeugte sich nun in der That (271), dass die Sonnenparallaxe nur etwa 8'',9 beträgt, hatte also nach dieser Vorschrift die $\tfrac{1}{193758}$ mit $(8{,}9 : 10{,}5)^3$ zu multiplizieren, und erhielt so $\tfrac{1}{318168}$ oder einen ganz ordentlichen Wert. — **Newton** bestimmte in entsprechender Weise auch das Massenverhältnis von Jupiter und Sonne: Aus

Trabanten-Beobachtungen von **Halley** erhielt er $^1/_{1033}$, — aus solchen von **Pound** $^1/_{1067}$, — also im Mittel $^1/_{1050}$. Er kam somit der Wahrheit sehr nahe, da von den beiden neuesten betreffenden Arbeiten „P. **Kempf**, Untersuchungen über die Masse des Jupiter (Publ. Potsdam III 2 von 1882), — und W. **Schur**, Bestimmung der Masse des Planeten Jupiter aus Heliometer-Beobachtungen der Abstände seiner Satelliten (A. N. 2478 von 1882)“ die erstere auf 1047,700, die zweite auf 1047,568 abstellt, so dass nach beiden Jupiter an Masse etwa 339 Erden gleichkömmt. — Für andere Massenbestimmungen auf Buch IV verweisend, mag schliesslich noch hervorgehoben werden, dass aus den oben gebrauchten Proportionen und Werten

$$P' = \frac{R^2}{r^2} \cdot P = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 R^3}{r^2 \cdot T^2} \qquad 6$$

folgt, — eine Formel, welche uns unter der folgenden Nummer zu einer interessanten Bestimmung verhelfen wird.

271. Entfernung, Grösse und Dichte der Sonne. — Nach derselben Methode, welche (232) zur Bestimmung der Parallaxe des Mondes diente, hatten schon 1672 **Richer** und **Cassini**, wie noch später (441) im Detail gezeigt werden soll, durch korrespondierende Beobachtungen in Cayenne und Paris diejenige des Mars bei seiner damaligen Opposition gleich $25^1/_3''$ gefunden und daraus, da die Theorie des Mars für jene Zeit auf die Distanz 0,372 schliessen liess, die Parallaxe der Sonne

$$\odot = 25^1/_3 \times 0{,}372 = 9^1/_2''$$

erhalten, — einen für jene Zeit gar nicht übeln Wert. Seither ist allerdings derselbe, wie schon erwähnt, durch neuere Messungen auf 8″,9 reduziert worden, was mit einer mittlern Sonnendistanz

$$a = \frac{5400}{2\pi} \cdot \frac{1}{\mathrm{Si}\,\odot} = 19\,918150 \text{ g. M.} = 147\,801000^{\mathrm{km}}$$

korrespondiert, so dass letztere für Überschlagsrechnungen zu 20 Millionen Meilen angenommen werden kann [a]. Setzt man den scheinbaren Radius der Sonne in dieser mittlern Distanz $\varrho = 16'$, so ergiebt sich ihr Durchmesser

$$d = 2 \cdot a \cdot \mathrm{Si}\,\varrho = 185406 \text{ g. M.} = 1\,375790^{\mathrm{km}} \fallingdotseq 108 \text{ Erddurchm.}$$

Unter Annahme dieser letztern Zahl ist aber das Volumen der Sonne $108^3 \fallingdotseq 1\,260000$ mal so gross als dasjenige der Erde, während nach dem Leverrier'schen Werte (270) ihre Masse nur etwa das 355000fache derjenigen der Erde ist. Hieraus folgt, dass die mittlere Dichte der Sonne nur etwa 0,21 der Erddichte, oder, letztere (222) zu $5^1/_2$ angenommen, kaum viel mehr als 1,15 ist, — wobei allerdings die hohe Temperatur der Sonne (529) nicht übersehen werden darf, da H. **Schulz** gezeigt hat, dass sogar Eisen bei 10000° Erwärmung nur noch die Dichte 1,3 haben dürfte [b].

Zu 271: *a.* Auch wenn ein Kurierzug 10 Meilen per Stunde zurücklegen würde, so betrüge dies in einem Jahre noch lange nicht 100000 Meilen; er

hätte somit weit über zwei Jahrhunderte nötig, um bis zur Sonne zu gelangen, während er in $22^1/_2$ Tagen die Erde umkreisen könnte. — *b.* Führt man in 270:6 nach oben $2r = 185406$ und $R = 19918150$ g. M. à 22843',4 P. ein, so erhält man für $T = 365^1/_4 \times 24 \cdot 60 \cdot 60$ als Beschleunigung der Schwere an der Sonnenoberfläche $P' = 823'$ P., eine Grösse, welcher unsere Muskelkraft nicht gewachsen wäre.

272. Die frühern Ansichten über die Sonne. — Die Kenntnisse der Alten über die physische Beschaffenheit der Sonne waren, obschon wir derselben mit Licht und Wärme die Hauptbedingungen des Lebens verdanken, sehr dürftig: Für die meisten Völker war sie ein reines, oft sogar „en confondant l'œuvre avec l'ouvrier" als Gottheit verehrtes Feuer [a]. Einzelne Flecken auf derselben, die dem freien, allfällig durch ein mit Öl gefülltes Hohlglas geschützten Auge sichtbar wurden [b], deutete man als Durchgänge von Merkur, Venus oder andern der Sonne fremden Körpern [c]. Überdies wurden solche Erscheinungen im allgemeinen nicht einmal aufmerksam beobachtet, sondern höchstens ganz beiläufig notiert und dann meistens von den Chronikschreibern mit Finsternissen, mit Verdunklungen der Sonne durch Höhenrauch, ja mit allem möglichen zusammengeworfen, so dass man oft gar nicht weiss, wie man ihre Berichte deuten soll [d].

Zu 272: *a.* In „Franz Samuel **Wild** (Bern 1743 — Lausanne? 1802; Salinendirektor in Bex und Oberberghauptmann; vgl. Biogr. II), Essai sur un prototype d'une mesure universelle. Lausanne 1801 in 8." liest man von der Sonne: „Il a été révéré comme Dieu suprême par toutes les nations dans leur enfance et beaucoup l'honorent comme tel jusqu'à ce jour. C'est l'être visible le plus brillant et le plus bienfaisant de la création. La magnificence et l'activité de cet oeuvre l'a fait confondre avec l'ouvrier par les hommes encore simples et ignorants". — Die Griechen (so z. B. Aratus) bezeichneten zuweilen die Sonne wegen ihres Glanzes als „Φαινος Ἥλιος", und dies scheint einzelne zu dem sonderbaren Schlusse veranlasst zu haben, es sei der als Lehrer von Meton genannte griechische Astronom **Phainos** zunächst Sonnenbeobachter gewesen. — *b.* Nach **Seneca** soll dieses Schutzmittel wenigstens bei Sonnenfinsternissen zuweilen Verwendung gefunden haben. — *c.* So wollten die Araber 807 Merkur 8 Tage lang und 840 Venus sogar 90 Tage lang vor der Sonne gesehen haben, — so glaubte im 12. Jahrhundert der berühmte **Averrhoës** einen Merkurdurchgang zu beobachten, — ja noch 1607 V 18 a. St. liess sich ein **Kepler** (vgl. seinen „Ausführlichen Bericht über den 1607 erschienenen Haarstern. Hall 1608 in 4.", in welchem der uns in 330 wieder begegnende Heinrich Stolle als Zeuge für den Durchgang figuriert) in ähnlicher Weise täuschen, indem er einen auf der Sonne bemerkten Flecken für Merkur hielt, obschon damals (wie zu seinem Ärger Dav. Fabricius sofort hervorhob) dieses Planeten Breite grösser als der Sonnenradius, und er selbst überdies viel zu klein war, um mit unbewaffnetem Auge vor der Sonne gesehen werden zu können, — muss ja nach **Schwabe** ein Flecken, um dem freien Auge sichtbar zu sein, mindestens einen scheinbaren Durchmesser von 50" besitzen, während Merkur bei der untern Kon-

junktion nicht einmal 13" erreicht. — *d.* Die Chinesen machten eine rühmliche Ausnahme, da John **Williams** (vgl. Monthly Not. 32 und meinen Auszug in Litt. 310) nach der Encyklopädie von **Ma Twan Lin** eine von 301 bis 1205 reichende Serie von Notizen publizieren konnte, die sich unzweifelhaft auf Sonnenflecken beziehen, aber allerdings nur unbrauchbare Vergleichungen mit „Datteln, Pflaumen, Eyern, Enten, etc." enthalten. Ferner ist als Ehrenmeldung für den 1525 in Peru verstorbenen Inka **Huyana Capac** zu erwähnen, dass ihm (vgl. Litt. 213) infolge von auf der Sonne gesehenen Flecken Zweifel aufstiegen, dass dieselbe wirklich eine Gottheit sei und die Welt regiere, dass er also offenbar die Flecken der Sonne selbst zuteilte. — In Beziehung auf die sog. **Verdunklungen** der Sonne mag, obschon dieselben mit ihr strenge genommen in gar keiner Beziehung stehen, noch beigefügt werden, dass analoge Erscheinungen auch in der neuern Zeit mehrfach beobachtet worden sind. Abgesehen davon, dass man zuweilen die Sonne noch in beträchtlicher Höhe über dem Horizonte als glanzlose rote Kugel sieht, so nahm, wie Emanuel **Liais** (Cherbourg 1826 geb.; Dir. Obs. Rio de Janeiro) in Compt. rend. 1860 berichtete, zu Olinda 1860 IV 11 gegen Mittag der Glanz der Sonne so ab, dass man mit ungeschütztem Auge in sie sehen und neben ihr einen Stern (die Venus) bemerken konnte; ferner wird versichert, dass 1883 VIII 26—29, d. h. nach dem die Insel Krakatoa vernichtenden Vulkan-Ausbruche, auf Schiffen, welche sich in der Nähe der Sunda-Strasse befanden, eine solche Dunkelheit herrschte, dass sogar Mittags künstliche Beleuchtung erforderlich war; etc. Man darf daher ähnliche Angaben aus älterer Zeit nicht ohne weiteres verwerfen, muss sie aber allerdings, da sogar die totale Sonnenfinsternis von 1706 als eine solche „Verdunklung" aufgeführt werden wollte, einer scharfen Kritik unterwerfen, wie dies namentlich von Edouard Albert **Roche** (Montpellier 1820 — ebenda 1883; Prof. math. Montpellier) in seinen „Recherches sur les offuscations du Soleil et les météores cosmiques. Paris 1868 in 4." geschehen ist, die so ziemlich nur 1547 IV 23—25 (ein Datum, auf welches mutmasslich auch die in Vogels „Memorabilia tigurina" für 1545 angegebene dreitägige Verdunklung zu versetzen ist) als ein sicheres Datum für eine ausserordentliche Sonnenverdunklung in früherer Zeit bestehen lässt. Immerhin hat seit Kenntnis des Faktums von 1883 auch die von Johannes **Stumpf** (Bruchsal 1500 — Zürich 1576; Pfarrer in Bubikon und Stammheim) in seiner „Schweizer-Chronik. Zürich 1547 in fol. (3. A. 1606)" gegebene Notiz: „Anno 797 war die Sonne 17 tag lang verfinsteret, gab keinen scheyn, also das auch die Schiff auf dem Meere verirret" ungemein an Glaubwürdigkeit gewonnen.

273. Die Entdeckung der Sonnenflecken. — Dass das Fernrohr bald nach seiner Erstellung auch auf die Sonne angewandt wurde, also das Bemerken vorhandener Sonnenflecken sofort nachfolgen und durch mehrere fast gleichzeitig geschehen musste, braucht kaum erwähnt zu werden; aber gerade darum dürfte es kaum mit vollständiger Sicherheit zu ermitteln sein, wer diese Flecken zuerst sah, und wenn man dennoch die Ehre der Entdeckung der Sonnenflecken den Johannes **Fabricius,** Galileo **Galilei** und Christoph **Scheiner** zuschreibt, so geschieht es nicht in der Meinung, dass es gerade diese drei Männer und sogar in dieser Folge gewesen seien: **Fabri-**

cius eröffnet die Reihe, weil er unbedingt der erste war, welcher eine Schrift über die Sonnenflecken verfasste und durch dieselbe zuerst die wichtige Lehre begründete, dass diese Gebilde der Sonne zugehören und deren bis dahin nur geahnte Rotation förmlich erweisen [a]; ihm folgt **Galilei** als der erste, der sich erfolgreich mit der Sonnenphysik befasste, namentlich die wolkenartige Natur der Flecken erkannte und lehrte [b], — und sodann **Scheiner**, weil man ihm eine erste längere Beobachtungsreihe und deren Verwertung zur Bestimmung der Rotationselemente, zur Festlegung der Fleckenzonen, etc., verdankt [c]. Dass übrigens diese drei Männer, wenn sie auch die ersten grössern Erfolge aufzuweisen hatten, nicht die einzigen waren, welche diese neuen Erscheinungen verfolgten und studierten, ist fast selbstverständlich, und in der That erwarben sich noch mehrere ihrer Zeitgenossen, wie ganz besonders die Thomas **Harriot**, Simon **Marius** und Johannes **Kepler**, ganz bedeutende Verdienste in dieser Richtung [d].

Zu 273: *a.* Die von Joh. **Fabricius** „Anno 1611 Idibus Junii" seinem Gönner Enno gewidmete und (vgl. den 1611 XII 1 von Vater David an Mästlin geschriebenen Brief in Litt. 69) bald darauf ausgegebene Schrift „De maculis in sole observatis, et apparente earum cum sole conversione, Narratio. Witebergæ 1611 (VIII et 36) in 4." enthält leider keine Zeitangaben; da jedoch der Verfasser, nachdem er (p. 12—17) im Detail erzählt, wie er sich teils mit dem Fernrohr, teils unter Benutzung der dunkeln Kammer von der Realität der Flecken, von ihrer (anfänglich vom Vater bestrittenen) Zugehörigkeit zur Sonne und von deren gemeinschaftlicher Konversion überzeugte, in Beziehung auf letztere beifügte: „Darüber wollte ich nicht aus einer einzigen Revolution urteilen, sondern aus etlichen folgenden, die ich vom Anfang des laufenden Jahres bis jetzt beobachtete", so ist man ganz sicher, dass er die Flecken nicht früher und nicht später als Anfang Dezember 1610 entdeckte und sodann mindestens bis zum Frühjahr 1611 verfolgte. Dass noch gegenwärtig einzelne Schriftsteller längst berichtigte falsche Angaben über den Verfasser der Narratio, oder abschätzige Urteile früherer Zeit über diese letztere mit einem gewissen Behagen reproduzieren, thut nichts zur Sache; ein unparteiischer Geschichtschreiber muss alle Versuche, **Fabricius** die Priorität (in dem oben angedeuteten Umfange) zu rauben, als unstatthaft bezeichnen und anerkennen, dass er sich, wie dies schon **Kepler** (vgl. dessen Ephemeriden auf 1617) bei Anlass seines frühen Todes aussprach, durch seine Schrift von 1611 ein Denkmal setzte, „das ihn mehr ehrt als jede Lobrede und Grabschrift". — *b.* Die zweite betreffende Schrift von grösserer Bedeutung ist die von **Galilei** verfasste „Istoria e dimostrationi intorno alle macchie solari e loro accidenti. Roma 1613 (164) in 4. (auch Bologna 1655)", auf deren Veranlassung wir sofort zurückkommen werden. Ihre Hauptbedeutung ist schon oben hervorgehoben worden, dagegen bleibt beizufügen, warum ich nicht nur dieser Schrift, sondern auch ihrem Verfasser erst die zweite Stelle einräumen konnte, obschon letzterer nach seiner eigenen, von mir gar nicht angezweifelten, und überdies durch „**Plana**, Réflexions sur les objections soulevées par Arago contre la priorité de Galilée pour la double découverte des taches solaires et de la

rotation uniforme du globe du soleil. Turin 1860 in 4., und: **Favaro**, Sulla priorità della scoperta e della osservazione delle macchie solari (Mem. Istit. Veneto 22 von 1882, p. 729—90)" mehrfach belegten Angabe, die Sonnenflecken schon im Sommer 1610, also mehrere Monate vor Fabricius, nicht nur selbst wahrnahm, sondern auch andern (z. B. Paolo Sarpi) „auf einer weissen Karte (also wohl in dem nach Weglegen des Okulars aufgefangenen Objektivbilde) zeigte: Der Grund liegt nicht nur in der schon an und für sich jeden Prioritätsstreit abwendenden Zeitdifferenz der Publikationen, sondern namentlich auch darin, dass ich annehmen muss, es habe **Galilei** anfänglich die Bedeutung seiner Entdeckung nicht erkannt; denn wie würde sonst derselbe Mann, welcher sich die Priorität sogar für ihm selbst noch unklare Funde durch Anagramme zu sichern suchte, noch im folgenden Jahre, wo ihm seine „Continuatione del Nuntio sidereo" die beste Gelegenheit darbot, auch von der Sonne zu sprechen, gänzlich darüber geschwiegen haben. An der totalen Unabhängigkeit von **Fabricius**, welche Plana für **Galilei** in Anspruch nimmt, zweifle ich nicht im mindesten. — *c.* Die dritte Hauptschrift endlich ist die von **Scheiner** aufgelegte dickleibige, aber auch ein noch für die spätere Zeit wichtiges Material enthaltende „Rosa ursina, sive Sol ex admirando facularum et macularum suarum phænomeno varius, nec non circà centrum suum et axem fixum ab ortu in occasum conversione quasi menstruâ, super polos proprios mobilis. Bracciani 1630 (XXXVI et 800) in fol." — Auch Scheiner hatte schon im März 1611 in Ingolstadt im Beisein seines Schülers J. B. Cysat Flecken auf der Sonne zu bemerken geglaubt, war dann aber durch seinen Provinzial Busäus so tüchtig abgekanzelt worden, etwas sehen zu wollen, wovon bei Aristoteles nichts zu lesen sei, dass er erst im folgenden Oktober wagte, die Sache weiter zu verfolgen. Als er nun dieselbe wieder bestätigt fand, gab er unter dem angenommenen Namen „Apelles" in drei Briefen an Markus **Welser** (Augsburg 1558 — ebenda 1614; Ratsherr in Augsburg, ein bekannter Mäcen der Gelehrten) Nachricht von seinen Wahrnehmungen und Vermutungen, welche nun dieser im folgenden Januar unter dem Titel „Epistolæ tres ad M. Velserum de maculis solaribus. Aug. Vindel. 1612 in 4." abdrucken liess und an verschiedene Gelehrte versandte. Auch **Galilei** erhielt ein solches Exemplar und schrieb nun 1612 V 4 an Welser, dass er schon vor 18 Monaten („da 18 mesi in quà", also im August oder November 1610, je nachdem er sich auf das Datum der Publikation oder auf dasjenige seines Briefes bezog) solche Flecken beobachtet, sie im vorigen Jahr (1611) in Rom vielen gezeigt, auch seither deren Bewegung und Veränderlichkeit erkannt habe, also die Priorität besitze. Da hierauf **Scheiner** replizierte, **Galilei** neuerdings antwortete, etc., so entstand ein lange andauernder Streit, der wenigstens das eine Gute zur Folge hatte, dass dem Fleckenphänomene mehr Aufmerksamkeit zugewandt wurde, als es ohne ihn mutmasslich geschehen wäre, und dass neben kleinern Streitschriften die bereits citierten und nach ihrer Bedeutsamkeit geschilderten Werke von 1613 und 1630 ausgegeben wurden, auf welche wir später noch mehrfach zurückkommen werden. — Dass **Scheiner** nur die dritte Stelle eingeräumt werden kann, geht schon daraus hervor, dass er die Natur der Flecken erst lange nach **Galilei** erkannte, ja noch 1614 seinen Schüler J. G. **Locher** in den „Disquisitiones mathematicæ de controversiis et novitatibus astronomicis. Ingolstadii 1614 in 4." den Satz aussprechen liess: „Maculæ solis sunt corpora nigricantia, circa solem erratica, motibus variis, nec numero nec natura adhuc definita", dessen erster Teil auch die Grundlage der Schriften „Jean **Tardé**

(Roque-Gajac bei Sarlat in Dordogne 1561 — Sarlat 1636; Kanonikus zu Sarlat), Borbonia sidera, id est Planetæ qui Solis limina circumvolitant motu proprio et regulari, falsò hactenus ab helioscopis maculæ Solis nuncupati, Parisiis 1620 in 4. (auch franz. 1623 und 1627), und: Charles **Malapert** (Mons 1581 — Vittoria 1630; Jesuit und Prof. math. et philos. Pont-à-Mousson und Douay), Austriaca sidera heliocyclia astronomicis hypothesibus illigata. Duaci 1633 in 4." bildete. Diese Ansicht wurde dann allerdings später von **Scheiner**, und zwar mutmasslich lange bevor **Tardé** dieselbe mit dem Argumente, „man werde doch nicht behaupten wollen, das Weltauge sei krank", zu stützen suchte, über Bord geworfen, indem er die Flecken ebenfalls der Sonne selbst zuteilte, jedoch in denselben, im Gegensatze zu den galileischen Wolken, Vertiefungen zu erkennen glaubte. — *d.* Zu den ersten Sonnenflecken-Beobachtern zählt entschieden auch Th. **Harriot**, der 1610 XII 8 a. St., also mutmasslich nur wenige Tage nach Fabricius, Flecken auf der Sonne sah, aber allerdings nicht als solche erkannte, — 1611 I 19, wo die Sonne gerade fleckenfrei war, seine frühere Wahrnehmung verifizieren wollte, — sich nun vorerst durch diesen Nichterfolg abschrecken liess, — dann aber von 1611 XII 1 hinweg während etwa $^5/_4$ Jahren eine kontinuierliche Beobachtungsreihe fortführte, welche ich seither, durch eine Notiz von **Zach** (Berl. Jahrb. 1788) darauf aufmerksam geworden, mit Hilfe meines sel. Freundes **Carrington**, aus ihrem $2^1/_2$ Jahrhunderte dauernden Todesschlafe in „Petworth House in Sussex" erwecken und (vgl. Mitth. 6 von 1858) nutzbar machen konnte. — Ferner ist Sim. **Marius** zu nennen, der die Sonnenflecken etwa von 1611 VIII 3 hinweg während mehreren Jahren fleissig beobachtet zu haben scheint, wie aus seinem „Mundus jovialis (549)", namentlich aber aus seiner „Beschreibung des Cometen von 1618. Nürnberg 1619 in 4." hervorgeht. **Marius** scheint der erste gewesen zu sein, der in den Sonnenflecken eine Art „Schlacken" vermutete, welche sich bei dem grossen Sonnenbrande absondern und dann zuweilen als Kometen ausgeworfen werden, damit die Sonne „wie ein gebutzt Kertzenliecht" wieder heller leuchten könne. — Der Raum erlaubt mir nicht, auch auf die ergänzenden Arbeiten der Pet. **Saxonius** (vgl. Litt. 18 und Verz. 216), Joach. **Jungius** (Litt. 573), Christ. **Grünberger** (Litt. 577), etc., näher einzugehen; dagegen darf nicht unterlassen werden, noch anzuführen, dass sich auch **Kepler** von 1611 hinweg vielfach mit den Sonnenflecken beschäftigte, sie allerdings zunächst nur mit seinem geistigen Auge in den Beobachtungen anderer verfolgend. Er erhielt dabei ein höchst merkwürdiges, gewissermassen zwischen den Ansichten Galileis und denjenigen der Neuzeit vermittelndes Facit, welches er 1613 VII 18 (vgl. Epist. Kepleri p. 556) dem Jesuiten Odo Malcotius in Rom in den Worten mitteilte: „Nicht nur bewegen sich die Flecken nicht parallel zur Ekliptik, sondern sie haben auch nicht alle die gleiche Geschwindigkeit, — folglich haften sie nicht an der Oberfläche der Sonne, wenn sie auch von derselben nicht durch einen merklichen Zwischenraum getrennt sind. Aus diesen Gründen und weil die Flecken bald erscheinen, bald verschwinden, auch merklichen Formveränderungen unterworfen sind, so ist es leicht zu schliessen, dass sie etwas unsern Wolken analoges sind, welche ebenfalls eine eigene, mehr oder weniger von der Erdrotation verschiedene Bewegung besitzen. Steigen diese undurchsichtigen Rauchwolken aus dem weissglühenden Sonnenkörper auf? Gott weiss es; denn die Analogie lässt sich nicht mit Sicherheit bis dahin anwenden."

274. Die neuern Ergebnisse über die Sonne. — In den etwas mehr als $2^1/_2$ Jahrhunderten, welche seit Entdeckung der Sonnenflecken verflossen sind, ist, obschon zeitweise die Bearbeitung dieses Gebietes sehr flau betrieben wurde, ein gewaltiges Material zum Studium desselben gesammelt worden, und es konnten nicht nur mit seiner Hilfe die Rotationsverhältnisse der Sonne viel sicherer ermittelt werden, sondern es gelang auch der Neuzeit, über den Verlauf des Fleckenphänomens und seine Bedeutung manches mit aller wünschbaren Sicherheit festzustellen: So wurde z. B. ermittelt, dass die Häufigkeit der Flecken periodischem Wechsel unterliegt, und zwar so, dass durchschnittlich einem Maximum nach $11^1/_9$ Jahren ein neues Maximum folgt, dass jedoch die Höhe und Länge der Wellen bedeutenden Variationen unterliegt, welche darauf schliessen lassen, dass jene Periode aus dem Zusammenwirken verschiedener Faktoren resultiert. Ferner weiss man jetzt, dass dieselbe sich mit allen ihren Anomalien in gewissen Erscheinungen auf unserer Erde, und wohl auch in ähnlichen auf den übrigen Planeten abspiegelt, voraus sehr getreu in den täglichen Variationen der erdmagnetischen Elemente, und zwar sowohl in den regelmässigen Schwankungen als in den sog. magnetischen Ungewittern. Wir werden später (517—34) über diese und andere wichtige Ergebnisse, zu denen in der neusten Zeit auch Photographie und Spektroskopie sehr bedeutende Beiträge geliefert haben, im Detail eintreten und dann auch auseinandersetzen, wie sich im Laufe der Zeiten die Ansichten über die Natur der Sonne und die innern Gründe der beobachteten Erscheinungen und Beziehungen gestaltet haben. Vorläufig mag es genügen, darauf hinzuweisen, dass diese letztere Erkenntnis um so grössern Schwierigkeiten unterliegt, als man auf dem Gebiete der „kosmischen Physik" keine Versuche zu Hilfe rufen kann, ja es sogar unstatthaft ist, die im Laboratorium erhaltenen Resultate ohne weiteres auf ganz andere Verhältnisse überzutragen. Man darf sich daher nicht verwundern, dass man bis vor kurzem nicht sehr weit über Kepler hinaus gekommen ist, ja häufig die Vermehrung der thatsächlichen Kenntnisse fast nur dazu diente, frühere Ideen als unhaltbar zu erweisen; erst in der allerneuesten Zeit scheint es auch auf diesem, an Komplikationen jeder Art so reichen Gebiete etwas tagen zu wollen.

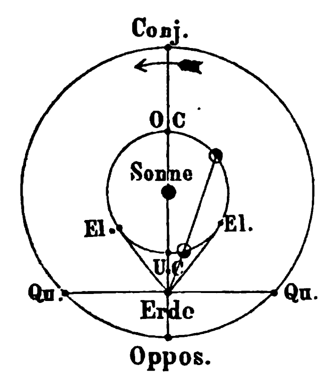
275. Aufzählung der Planeten und ihrer Monde. — Als bei Annahme des Coppernicanischen Systemes Sonne und Erde ihre Rollen vertauschten und der letztern nur der Mond als Satellit zugeteilt blieb, waren doch noch immer sieben Wandelsterne vor-

handen. Ganz anders gestalteten sich die Verhältnisse dagegen, nachdem 1610 **Galilei** zeigte, dass Jupiter sogar 4 Monde besitze und als 1655 **Huygens** auch bei Saturn einen Mond auffand: Jetzt besass man 6 Planeten und 6 Monde, und es soll Huygens aus der Übereinstimmung dieser Zahlen den Schluss gezogen haben, dass nunmehr die Periode der Entdeckungen abgeschlossen sei. Doch schon in den Jahren 1671 und 1672 wurde das vermeinte Gleichgewicht gestört, indem **Cassini** noch zwei neue Saturnsmonde entdeckte, so dass man nun 7 alte und 7 neue Wandelsterne kannte, deren Gesamtzahl 14 dem damals regierenden 14. Ludwig so grosse Freude machte, dass er die neuen Entdeckungen durch eine Medaille verherrlichen liess. — Streng genommen hätte man nun allerdings schon zur Zeit von **Huygens** auch den von ihm entdeckten, Saturn frei umschwebenden Ring mitzählen sollen; aber wenn man auch glaubte, dies unterlassen zu dürfen, und wenn sogar zwei neue Monde, welche **Cassini** 1684 bei Saturn auffand, unbeachtet bleiben wollten, so haben sich die frühern Verhältnisse seit etwas mehr als einem Jahrhundert total verändert: Zuerst entdeckte 1781 **Herschel** den Hauptplaneten „Uranus", durch welchen Saturn seine mehr als 2000jährige Stellung als „oberster Planet" einbüsste, und fand überdies 1787 bei demselben zwei Monde, sowie 1789 noch zwei neue Saturnsmonde auf. Sodann wurden 1801 bis 1807 durch **Piazzi**, **Olbers** und **Harding** in „Ceres, Pallas, Juno und Vesta" vier in der längst auffälligen Lücke zwischen Mars und Jupiter stehende Asteroiden entdeckt, — und 1845 begann **Hencke** mit Auffindung der „Astræa" eine neue, noch gegenwärtig fortlaufende Reihe betreffender Entdeckungen, welche die Anzahl der bekannten Glieder dieses Ringsystemes bald auf mehr als 3 Hunderte gebracht haben wird. Im Jahre 1846 feierte ferner die Astronomie einen ihrer grössten Triumphe, indem der durch die theoretischen Untersuchungen der **Adams** und **Leverrier** geforderte transuranische „Neptun" von **Galle** wirklich am Himmel aufgefunden wurde. Fast gleichzeitig entdeckten **Lassel** und **Bond** noch zwei Uranusmonde (1846), einen Neptunmond (1847) und einen achten Saturnsmond (1848), — und endlich fand **Hall** 1877 die längst vermuteten zwei Marsmonde auf. — Das Civilstandsregister unsers Sonnensystemes weist somit gegenwärtig, ausser der Sonne, acht Hauptplaneten, einen Planetenring, einen Mondenring und 21 einzelne Monde, also im ganzen, statt den ursprünglichen 7, volle 32 Nummern auf.

276. Einteilung in untere und obere Planeten. — Die Planeten Merkur und Venus, welche näher an der Sonne stehen als

die Erde, nennt man **untere**, die übrigen **obere Planeten**, und es unterscheiden sich diese beiden Klassen in Beziehung auf die schon früher (213) besprochenen Stellungsverhältnisse zu Sonne-Erde wesentlich von einander [a].

Zu 276: *a.* Die untern Planeten gelangen offenbar zweimal, einmal vor und einmal hinter der Sonne, zur Konjunktion mit derselben (untere, unter Umständen mit einem sog. Durchgange durch die Sonne verbundene, — und obere Konjunktion), dagegen nie in Quadratur, geschweige in Opposition zu ihr; sie bleiben immer in der Nähe der Sonne, — werden nur zuweilen vor Sonnenaufgang oder nach Sonnenuntergang als sog. **Morgen- oder Abendsterne** (535) sichtbar, — und nehmen während dieser Zeit je eine grösste **Elongation** (Digression) von der Sonne an; jeder kleinern Elongation entsprechen zwei verschiedene Stände, welche sich von der Erde aus nach Lichtphase und scheinbarer Grösse leicht unterscheiden lassen. Bei den obern Planeten tritt dagegen nur die eine (obere) Konjunktion ein, während die andere (untere) in eine Opposition übergeht, so dass dieselben bei Anfang der Nacht aufgehen oder akronyktisch (191) werden und um Mitternacht zur Kulmination kommen können, ferner die Elongation von der Sonne bei ihnen alle Werte von 0° bis ± 180° durchläuft. Auf die bei den beiden Klassen vorkommenden Verhältnisse in Beziehung auf Stationen und Retrogradationen werden wir später (493) zurückkommen.



277. Einteilung in innere und äussere Planeten. — Während der unter der vorigen Nummer für die Planeten benützte Einteilungsgrund nur für die Erde besteht oder also relativ ist, so bestehen dagegen auch Verschiedenheiten, welche mit der Natur des Sonnensystemes zusammenzuhängen scheinen, und diese haben veranlasst, die Planeten nach dem Vorschlage von **Humboldt** in **innere und äussere** zu teilen, je nachdem sie innerhalb oder ausserhalb des sich zwischen Mars und Jupiter durchziehenden Planetenringes liegen: Erstere sind nämlich (535—42) sämtlich relativ klein, aber dicht, rotieren langsam und sind wenig von Kugeln verschieden, — während letztere (549—60) vergleichungsweise gross, aber wenig dicht sind, rasch rotieren und starke Abplattungen besitzen. Im übrigen dagegen stimmen sämtliche Planeten mit einander überein: Sie zeigen sämtlich direkte Bewegung in Bahnen, die wenig excentrisch sind und deren Ebenen nahe zusammenfallen, — haben höchstens ein Minimum von eigenem Lichte, — und ergeben Spektren, welche wesentlich mit demjenigen der Sonne übereinstimmen. — Für weitern Detail wird auf die eben erwähnten Nummern verwiesen.

278. Die ältesten Nachrichten über Sternschnuppen, Feuerkugeln, Meteorsteinfälle und Kometen. — Die **Sternschnuppen** (stella cadens, étoile tombante) und die mit ihnen verwandten **Feuerkugeln** (globus ardens, bolide), welche man erst wirklich für fallende Sterne und dann für, den Irrlichtern verwandte, atmosphärische Gebilde hielt, wurden in den ältesten Zeiten nur ausnahmsweise beachtet, selbst wenn erstere massenweise als sog. **Meteorregen** auftraten oder letztern ein Fall von **Meteorsteinen** (Lapis ex coelo delapsus, aërolithe) folgte [a]. — Ebenso erging es den sog. **Kometen** (*κομήτης ἀστήρ*, Haarstern), die anfänglich mit den übrigen Meteoren in den gleichen Tiegel geworfen, dann wegen ihrer seltsamen Form und längern Dauer zwar von denselben abgelöst, aber dennoch im allgemeinen ebenfalls für Erzeugnisse der untern Luft gehalten und somit von der Beobachtung ausgeschlossen wurden [b].

Zu 278: *a.* Eine rühmliche Ausnahme bildeten die Chinesen, indem sie wenigstens solche Erscheinungen notierten, so dass Edouard **Biot** (Paris 1803 — ebenda 1850; Sohn von Jean-Baptiste in 13:t; Ingenieur) in seinem „Catalogue général des étoiles filantes et des autres météores observés en Chine pendant 24 siècles. Paris 1846 in 4." eine lange Reihe betreffender Notizen geben konnte, deren älteste sich auf einen 687 v. Chr. in China gesehenen Sternschnuppenschauer und einen 644 v. Chr. ebenda eingetroffenen Meteorsteinfall beziehen. — Bei den Griechen waren es nur einzelne, welche sich von der allgemeinen Ansicht emanzipierten: So soll **Anaxagoras** um 465 v. Chr., bei Anlass eines in Thracien am hellen Tage niedergefallenen Eisenklumpens von der Grösse eines Mühlsteines, die Ansicht geäussert haben, er möchte von der Sonne herabgestürzt sein, — und so soll **Plutarch** im Leben des Lysander berichten: „Sternschnuppen sind nach der Meinung einiger Physiker nicht Auswürfe und Abflüsse des ätherischen Feuers, welches in der Luft unmittelbar nach der Entzündung erlöscht, noch auch eine Entzündung und Entflammung der Luft, die in der obern Region sich in Menge aufgelöst hat; sie sind vielmehr **ein Fall himmlischer Körper**, dergestalt dass sie **durch eine gewisse Nachlassung der Schwungkraft** und durch den Wurf einer unregelmässigen Bewegung herabgeschleudert werden, nicht bloss nach der bewohnten Erde, sondern auch ausserhalb in das grosse Meer, wesshalb man sie dann nicht findet". — Auch einzelne Araber scheinen die Meteore beachtet zu haben, und wenn die Geschichte und Beschaffenheit des sog. „heiligen Steines" von Mekka auch noch auf längere Zeit unbekannt bleiben sollte, so haben sich dagegen von mehreren andern Steinschlägen Nachrichten erhalten, ja El **Kazwini** (5:n) konnte einer Chronik die Notiz entnehmen, „dass sich in Afrika im Jahre 411 eine Wolke mit heftigem Donner und Blitz erhob, zahlreiche Steine niederregnete und eine Menge Thiere und Pflanzen vernichtete". — Im Abendlande dagegen wurde in früherer Zeit, etwa abgesehen von dem in der Sage von den feurigen Thränen des 258 bei den Christenverfolgungen zu Rom verbrannten und später heilig gesprochenen **Laurentius** erhaltenen Andenken an reiche Sternschnuppenfälle um den 10. August, und einzelnen Steinschlägen, wie namentlich demjenigen, der 1492 IV 3 zu Ensisheim im Elsass statt hatte

und (vgl. Verz. 140) durch Sebastian **Brant** (Strassburg 1458 — ebenda 1521; Prof. Basel und Pfalzgraf) besungen wurde, wenig Notiz von solchen Erscheinungen genommen. Erst im 16. und 17. Jahrhundert wurde die Aufmerksamkeit etwas grösser, so dass z. B. die alten Zürcher-Chroniken zu berichten wissen, man habe 1603 IX 20, 10^h Abends einen „feurigen Drachen“ gesehen, worauf viele „Donnerschläge“ erfolget, — oder wieder andere Quellen die Nachricht aufbewahrten, es sei 1581 VII 26 zu Nieder-Reusen in Thüringen unter Donnerschlag ein halbzentriger Stein vom Himmel gestürzt, — etc.; aber ernstlich beobachtet wurden auch diese Erscheinungen nicht, sondern von den sog. Aufgeklärten angezweifelt, von den sog. Orthodoxen als etwas zu Irrlehren veranlassendes sogar angefeindet. Man muss somit froh sein, dass wenigstens einige Zeugen solcher älteren Meteorfälle übrig geblieben sind und nicht alle das Schicksal des bis jetzt einzigen schweizerischen Meteoriten hatten, der (vgl. „B. Studer, Der Meteorstein von Walkringen“ in Bern. Mitth. Nro. 792) 1698 V 18 zwischen 7 und 8^h Abends mit weit umher (z. B. auch in Zürich) gehörten Getöse zu Hinter-Schwendi bei Walkringen im Kanton Bern niederfiel, von dem dortigen sehr verständigen Pfarrer Jakob **Dünki** (Aarberg? 1657 — Münsingen? 1706; später Pfarrer in Münsingen) samt betreffendem Attestat geschenkweise an die Bibliothek in Bern gesandt wurde, seither aber spurlos verschwunden ist. — Anhangsweise mag bemerkt werden, dass sich an den erwähnten Katalog von Biot die ebenfalls höchst verdienstlichen Verzeichnisse „Ad. **Quetelet**, Catalogue des principales apparitions d'étoiles filantes (Mém. Brux. 1839/41), — Edw. **Herrick**, Contribution to a history of star-showers of former times (Sillim. Journ. 1840), — Mich. **Chasles**, Sur les apparitions périodiques d'étoiles filantes observées du 6 au 12 siècle (Compt. rend. 1841), — etc.“ anschlossen. — *b.* Auch für die Kometen stellten sich die Chaldäer und Chinesen auf einen etwas höhern Standpunkt als ihre meisten Zeitgenossen, indem erstere dieselben für eine Art Wandelsterne gehalten haben sollen, welche zeitweise in die fernsten Teile des Himmels ziehen und alsdann für uns unsichtbar werden, — letztere aber wenigstens Aufzeichnungen hinterliessen, nach welchen schon **Pingré** sein später zu besprechendes Kometenverzeichnis mit einem etwa 2296 v. Chr. in China gesehenen Kometen eröffnen und seither John **Williams** eine Zusammenstellung bearbeiten konnte, welche unter dem Titel „Observations of Comets from B. C. 611 to A. D. 1640. Extracted from the Chinese Annals. London 1871 in 4.“ nicht weniger als 372 von den Chinesen im Laufe jener $22^1/_2$ Jahrhunderte registrierten Kometen aufzählt und damit jenem alten Kulturvolke ein schönes Denkmal setzt. — Für die Anschauungen der spätern Völker wird auf die folgende Nummer verwiesen.

279. Die Kometen als Zeichen. — Bei den Griechen und Römern standen sich zwei ganz verschiedene Ansichten über die Kometen gegenüber: **Aristoteles** hielt nämlich dieselben für Dünste, welche sich in Morästen und Höhlen der Erde bilden, sich beim Aufsteigen in die höhern Regionen der Atmosphäre entzünden, dort von den Winden umhergetrieben werden und endlich erlöschen, ja **Plinius** ging noch einen Schritt weiter, indem er die Kometen zu Wunderzeichen stempelte und sogar aus ihrer Form und Farbe auf ihre Bedeutung schliessen wollte; dagegen lehrte der bei den Chal-

däern in die Schule gegangene **Apollonius** Myndius [a], dass die Kometen Gestirne seien, und ganz in seinem Sinne sprach etwas später **Seneca** aus, dass man wohl später ihre Bahnen analog wie bei den Planeten bestimmen werde, dabei mit den Worten schliessend: „Die Zeit wird kommen, wo unsere Nachkommen sich wundern werden, dass wir so offenbare Dinge nicht gewusst haben“ [b]. — Die erstere Lehre, welche fasslicher und durch die Autorität des grossen Peripatetikers gestützt war, dominierte nun allerdings, ja wurde nachmals im Abendlande zu einem förmlichen Dogma [c], und ebenso gedieh in letzterm der durch Plinius eingeleitete Kometenaberglaube vortrefflich, zumal die sonst so verdienstlichen Chroniken und die bei Anlass von neuen Erscheinungen angelegten Verzeichnisse früherer Kometen nicht verabsäumten, neben jeden derselben eine Reihe gleichzeitiger Vorkommnisse zu setzen [d]. — Einzelne, welche wagten solcher Irrlehre entgegenzutreten, wurden schlechtweg verketzert [e], ja dieselbe trieb vielmehr immer üppigere Blüten, bis sie gegen das Ende des 17. Jahrhunderts aus sofort zu entwickelnden Gründen ein jähes Ende nahm [f].

Zu 279: *a.* **Apollonius Myndius**, der um 270 v. Chr. oder einige Decennien vor **Apollonius Pergäus** lebte, dürfte mit dem Astronomen Apollonius identisch sein, der nach Cantor (I 284) den Beinamen Epsilon besass, — analog wie Eratosthenes den Beinamen Beta hatte. Ich möchte glauben, dass diese Beinamen dahin zu deuten sind, dass schon die Griechen Männer gleichen Namens in ähnlicher Weise durch Nummern unterschieden, wie wir es z. B. mit den Bernoulli halten. — *b.* **Seneca** hob in seinen „Quæstiones VII“ zu Gunsten der kosmischen Natur der Kometen namentlich auch den Umstand hervor, dass sie an der täglichen Bewegung der Sterne Teil nehmen. — Schon etwas früher sang **Manilius** in seinem „Astronomikon“, nachdem er die damals landläufigen Ansichten über Entstehung und Bedeutung der Kometen mitgeteilt hatte: „Oder es schuf die Natur sie zugleich mit den andern Sternen, — Die vom Gewölbe herab uns schimmern mit ewigem Lichte; — Aber es ziehet mit mächtiger Gluth sie Helios zu sich, — Der in die eigenen Strahlen sie bald einsenket, und bald sie — Wieder entlässt gleichwie Merkurius oder die Venus“. — *c.* Es soll bis gegen Ende des 17. Jahrhunderts in vielen europäischen Ländern kein Professor angestellt worden sein, ohne dass er öffentlich bezeugt hatte, er sei nicht nur im allgemeinen mit den Grundsätzen von **Aristoteles** einverstanden, sondern auch speciell mit dessen Ideen über die Kometen. — *d.* Als erstes Kometenverzeichnis wird das in der Schrift „Antoine **Mizauld** oder Mizaldus (Montluçon 1520? — Paris 1578; Arzt in Paris), Cometographia. Parisiis 1544 in 4. (auch 1549)“ enthaltene angesehen; dann folgte „Ludwig **Lavater** (Zürich 1527 — ebenda 1586; Antistes in Zürich), Cometarum omnium fere Catalogus. Turici 1556 in 12. (deutsch und fortgeführt durch J. J. Wagner 1681), — Benedict Marti oder **Aretius** (Bätterkinden 1505 — Bern 1574; Prof. log. Marburg, dann theol. Bern), Brevis cometarum explicatio. Bernæ 1556 in 4., — etc.“, — bis endlich Stanislaus **Lubienitzky** (Racow bei Krakau 1623 — Hamburg 1675; polnischer Edelmann) mit seinem „Theatrum

cometicum. Amstelodami 1667, 2 Vol. in fol. (auch Lugd. Batav. 1681)" diese ältere Reihe von Verzeichnissen abschloss. Noch letzterer zählte alle mit Kometen zusammentreffenden Ereignisse auf, — erhielt dabei annähernd für jeden Kometen ebensoviele gute als schlechte Vorkommnisse, — und zog daraus den Schluss, dass man über das Erscheinen eines Kometen nicht zu erschrecken habe. Immerhin war er als Kind seiner Zeit doch nicht ganz frei von der Meinung, dass der Komet einen bestimmenden Einfluss besitze; denn auf der einen Seite des Titelblattes seines Werkes sieht man einen Kometen mit einem Regenbogen und einer Hand, welche einen Palmzweig trägt, nebst der Aufschrift „bona bonis (Gutes für Gute)", — und auf der andern Seite einen Blitzstrahl nebst einer Hand mit einer Geisselrute unter der Aufschrift „mala malis (Böses für Böse)". Doch ist ein Fortschritt nicht zu verkennen, da seine meisten Vorgänger nur Schlechtes, wie z. B.: „A. 942 erschien ein Komet, darauff folget ein träffenlicher sterbend und schelmentod an vych und thieren, — A. 1477 war ein Komet, darauff war der stolze Karle von Burgund vor Nantzi erschlagen, — A. 1531, 32 und 33 sahe man Kometen, dazumahl brütete der Satan die Wiedertäuffer vollends aus, — etc.", notiert und damit die Kometen in einen höchst übeln Ruf gebracht hatten, — liest man ja noch (vgl. Verz. 21) unter einer Abbildung des Kometen von 1661 die Verse: „Cometen waren jeder Zeiten — Zornbotten Gottes und bedeuten — Wind, Theurung, Pest und Wassersnoht, — Erdbidem, Endrung, Fürstentodt. — Sollt aber drum der Fromm verzagen? — Nein, sonder mit Vertrauen sagen: — Wann Erd und Himmel brächen eyn, — Wird Gott mein Port und Anker seyn". — Auch die ehrende Geistlichkeit verschmähte es nicht, die Kometenerscheinungen zu Busspredigten zu benutzen und zog dabei vor, sich an Jeremias I 11—12: „Nach diesem hat der Herr also zu mir gesprochen: Jeremias, was siehest Du? Da sprach ich: Ich sehe eine wachende Ruthe. Da sprach der Herr zu mir: Du hast recht gesehen, denn ich will über meinen Rathschluss wachen, denselben zu vollstrecken" zu halten, statt Jeremias X 2: „Ihr sollet den Weg der Heiden nicht lernen und vor den Zeichen des Himmels nicht erschrecken, denn die Heiden fürchten solche" als Text zu wählen. Als Probe von dem Inhalte solcher Predigten erwähne ich, dass z. B. in der von dem gelehrten Konrad **Dietrich** (Gemünden an der Wehre 1575 — Ulm 1639; Prof. philos. Giessen, dann Superintendent in Ulm) herausgegebenen „Ulmischen Kometen-Predigt. Ulm 1619 in 4." davor gewarnt wird, die Kometen „mehr aus Fürwitz als bewegendem Herzen" zu betrachten, etwa „wie das Kalb ein neu Thor ansiehet", — die Hauptsache sei, in einem Kometen eine von Gott über uns geschwungene Ruthe zu erkennen, „die bald hinter uns her zu wischen träue". — *e.* Schon **Heinrich v. Hessen** (Langenstein bei Marburg 1325 — Wien 1397; Prof. theol. et math. Paris und Wien; „Leben" durch O. Hartwig, Marburg 1858 in 8.) schrieb bei Anlass des Kometen von 1368 eine „Quæstio de cometis", in welcher er sich entschieden gegen Kometenaberglauben und Astrologie aussprach, jedoch ohne namhaften Erfolg, — und ebenso erging es **Paracelsus** mit seiner schon als erste deutsche Kometenschrift (Biogr. III 21—25) bemerkenswerten „Usslegung des Cometen erschynen im hochbirg zu mittem Augsten Anno 1531. Zürich 1531 in 4." Dagegen hatte die von Pierre **Bayle** (Carlat in Languedoc 1647 — Rotterdam 1706; Prof. philos. Sédan und Rotterdam) ausgegebene „Lettre, où il est prouvé que les Comètes ne sont point le présage d'aucun malheur. Cologne 1682 in 12. (3 éd. Rotterdam 1699, 2 Vol. in 8.; deutsch von Gottsched, Hamburg 1741) ent-

schiedenen Einfluss auf den damaligen Umschwung. — *f.* Die Culmination erreichte der Kometenschwindel bei Anlass des Kometen von 1680. Nicht nur erschien eine ganze Flut ihn behandelnder Gelegenheitsschriften, — nicht nur wurde (Verz. 318) auf ihn eine Medaille geschlagen, — sondern man zog sogar das Vieh in Mitleidenschaft, indem man zu Rom eine „unbefleckte" Henne ein Ei legen liess, auf dem sich der Komet zeigte, dasselbe mehrfach abbildete (Verz. 17 und 101), ja sogar 1681 I 20 in dem von der Académie des Sciences patronisierten Journal des Savans ernstlich besprach.

280. Die ersten Beobachtungen der Kometen und deren Resultate. — Während **Aristoteles** über den scheinbaren Lauf eines von ihm 371 v. Chr. gesehenen Kometen wenigstens so viel mitzuteilen wusste, dass Pingré später den Versuch wagen konnte, dessen Bahn zu bestimmen, so vernachlässigten dessen Nachfolger diese Körper vollständig, — kömmt ja in dem ganzen Almagest das Wort „Komet" nicht ein einziges mal vor. Ebenso hielten es die Araber und die ältern Abendländer [a], und es gehört zu den grossen Verdiensten **Regiomontans,** dass er mit dem frühern Schlendrian brach, ja mit Hilfe seines Schülers Walther die Positionen des Kometen von 1472 durch Messung (389) bereits so gut bestimmte, dass nachmals Halley auf Grund derselben eine ganz ordentliche Bahnbestimmung vornehmen konnte [b]. Sein Beispiel wirkte, und schon im 16. Jahrhundert finden wir in Peter **Apian,** Paul **Fabricius,** Joachim **Heller,** Landgraf **Wilhelm,** etc. [c] eine Reihe ganz tüchtiger Kometen-Beobachter, an welche sich dann namentlich auch **Tycho** anschloss, dem wir unter anderm den wichtigen Nachweis verdanken, dass die Kometen, wie schon **Regiomontan** und **Apian** vermuteten, eine viel zu geringe Parallaxe besitzen, um entsprechend Aristoteles den sublunaren Meteoren beigezählt werden zu dürfen. — Sind aber die Kometen wirkliche Gestirne, so können sie auch nicht gesetzlos umherschweifen, sondern müssen bestimmte Bahnen durchlaufen, — entweder geradlinige Bahnen, wie noch **Kepler** und **Cysat** dachten, — oder auch langgestreckte Ellipsen, wie etwas später der wahrscheinlich von seinem Pensionär **Harriot** inspirierte Graf Percy von **Northumberland,** sodann **Borelli** und **Petit** vermuteten; ja bei Anlass des schon erwähnten Kometen von 1680 versuchte Jakob **Bernoulli** durch die erhaltenen Positionen eine Kreisbahn zu legen, deren Centrum ein ferner Planet sein sollte, und sogar die Wiederkehr dieses Kometen vorauszubestimmen, während Samuel **Dörfel** fand, man könne dieselben durch eine Parabel darstellen, in deren Brennpunkt die Sonne falle [d].

Zu 280: *a.* Eine etwelche Ausnahme scheint der 1359 verstorbene byzantinische Mönch Nicephorus **Gregoras** gemacht zu haben, indem Halley nach seinen Angaben den Kometen von 1337 berechnen konnte (575); seither sind

noch chinesische Beobachtungen hinzugekommen. — *b.* Auf den Kometen von 1472 bezieht sich auch der „Thurecensis phisiti Tractatus de cometis (Beronæ 1473) in fol.“, der mutmasslich die älteste gedruckte Kometenschrift repräsentiert und (vgl. Biogr. III 105) dem damals zu Zürich praktizierenden Arzte Eberhard **Schleusinger** von Garmanstorf in Franken zugeschrieben wird. Da derselbe, so unbedeutend sein Inhalt im ganzen ist, einige Anklänge an Regiomontans Ideen über Distanzbestimmung enthält, so ist Kästners Angabe, es habe Schleusinger in Wien unter Regiomontan studiert, ziemlich plausibel. — *c.* Paul **Fabricius** (Lauban in Ober-Lausitz 1529? — Wien 1588) war k. Pfalzgraf, Leibarzt und Prof. math. Wien, — Joachim **Heller** (Weissenfels 1518 — Eisleben 1590), Prof. math. Nürnberg, dann Buchdrucker in Nürnberg und Eisleben. — *d.* Für weitern Detail vgl. 574.

281. Die spätern Beobachtungen und deren Ergebnisse. — Unterdessen hatte **Newton** seine Lehre von der allgemeinen Gravitation aufgestellt und bei Entwicklung ihrer Konsequenzen unter anderm auch eine erste Methode (497) aufgefunden, um durch Näherung aus einigen Positionen eines Kometen dessen Bahn um die Sonne unter Voraussetzung einer Parabel zu bestimmen. Diese Methode wurde sodann durch **Halley** auf alle bis zum Abschlusse des 17. Jahrhunderts beobachteten Kometen angewandt und dabei von ihm unter anderm das höchst auffällige Resultat erhalten, dass die Kometen von 1531, 1607 und 1682 bei nahe gleicher Zwischenzeit ganz entsprechende Bahnverhältnisse zeigen, so dass er sich fragen musste, ob nicht etwa diese drei Kometen identisch seien, d. h. diese drei Erscheinungen einem eine Ellipse um die Sonne beschreibenden, jeweilen etwa nach 75 Jahren wieder in Sicht kommenden Kometen zugehören. Als er sodann unter dieser Voraussetzung nach dem dritten Kepler'schen Gesetze die grosse Axe der Ellipse, hierauf unter Benutzung der früher gefundenen Periheldistanz auch die Excentricität bestimmte und dabei fand, dass die neue Bahn sich den Beobachtungen mindestens ebensogut als die frühere parabolische anschliesse, so wurde er von der Richtigkeit seiner Vermutung so vollständig überzeugt, dass er nicht nur diese letztere in seiner „Cometographia seu astronomiæ cometicæ Synopsis. Oxoniæ 1705 in fol.“ auszusprechen, sondern sogar, unbekümmert um das Achselzucken seiner meisten Zeitgenossen, die Wiederkehr des Kometen auf Ende 1758 oder Anfang 1759 vorauszuverkünden wagte. Und wirklich traf nicht nur der seither mit seinem Namen verbundene Komet zu der angesetzten Zeit, und 1835 nochmals, ein, sondern es ist sogar mit Hilfe der früher erwähnten chinesischen Beobachtungen möglich geworden, ihn auch rückwärts bis etwas vor den Anfang unserer Zeitrechnung zu verfolgen. — Wir werden später (575—88) einlässlich auf diese und die sich anschliessenden

Entdeckungen, Beobachtungen und Untersuchungen zurückzukommen haben und wollen uns hier darauf beschränken, noch ganz kurz einige der Hauptresultate zusammenzustellen, welche sich bis jetzt auf diesem neuen Gebiete ergeben haben: An den Halley'schen Kometen schlossen sich nach und nach verschiedene andere periodische Kometen an, — namentlich, als man anfing, systematisch nach diesen Gestirnen zu suchen, eine ganze Reihe kleinerer, sog. teleskopischer Kometen von kurzer Umlaufszeit, wie voraus der sog. **Encke**'sche Komet mit $3^1/_3$ Jahren, von dem man nun bereits Dutzende von Erscheinungen kennt. Ihre Bahnen besitzen alle möglichen Neigungen zur Ekliptik, dagegen meistens sehr starke Excentricitäten, — und gerade unter den grossen und glänzenden Kometen finden sich manche, wo der sichtbare Lauf einen zu kleinen Teil der Bahn beschlägt, um daraus mit voller Sicherheit auf letztere schliessen zu können; auch sind bereits einzelne Kometen gefunden worden, die eine wirklich parabolische oder sogar hyperbolische Bahn zu durchlaufen schienen, so dass keine Hoffnung besteht, sie nochmals zu sehen, — und wieder andere, die unserm Sonnensysteme durch Einwirkung der grossen Planeten gewonnen wurden oder auch verloren gingen, — etc. — Die frühere Furcht vor den Kometen als Zeichen ging zuerst in die Befürchtung vor einem Zusammenstossen mit einem solchen Körper über, — doch hat sich auch diese so ziemlich verloren, seit der Nachweis geleistet wurde, dass sie eine ungemein kleine Masse besitzen, ja mit einem „rien visible“ verglichen werden können. Im übrigen liegt die Kenntnis der Natur der Kometen und namentlich auch der Bildungsweise ihrer merkwürdigen Schweife noch ziemlich im argen, doch darf man hoffen, dass gerade in dieser Beziehung die neuen physikalischen Hilfsmittel sich in nicht allzuferner Zeit bewähren werden.

282. Die kosmische Natur der Meteore. — Auch die übrigen Meteore der Alten, d. h. die Sternschnuppen, Feuerkugeln und Meteorsteine [a], werden nicht mehr als Produkte unserer Atmosphäre angesehen oder sogar weggeleugnet, seit **Chladni** plausibel gemacht hat, dass Sternschnuppen und Feuerkugeln nicht wesentlich verschieden sind und die Meteorsteinfälle mit ihnen im innigsten Zusammenhange stehen dürften, — seit die **Brandes** und **Benzenberg** durch Beobachtung und Rechnung nachgewiesen haben, dass jene leuchtenden Gebilde nicht nur in grossen Höhen gesehen werden, sondern planetarische Geschwindigkeit besitzen, — seit **Olmsted** die, ihre Lage gegen die Sterne nicht verändernden und somit von der Rotation der Erde unbeeinflussten sog. **Radiationspunkte** in Betracht

gezogen [b], und **Humboldt** darauf aufmerksam gemacht hat, dass schon in der blossen Existenz dieser letztern ein Beweis für die kosmische Natur der Sternschnuppen liegt, — und seit man endlich auf gewisse periodisch auftretende Sternschnuppenregen aufmerksam geworden ist, ja in denselben Meteorschwärme erkannt hat, auf welche wir an bestimmten Stellen unserer Bahn um die Sonne treffen. — Während früher die Beobachtung dieser Phänomene dem Astronomen fast verübelt wurde, hat dieselbe nunmehr volle Berechtigung erhalten und es sind bereits durch die **Quetelet**, **Heis**, **Schiaparelli**, etc. aus Zusammenstellung und Diskussion früherer Notizen mit den neuen Wahrnehmungen eine ganze Reihe der merkwürdigsten, auf tägliche und jährliche Häufigkeitsperioden, auf Beziehungen zwischen gewissen Schwärmen und Kometen, etc., bezügliche Resultate erhalten worden, mit welchen wir uns später (562—71) im Detail zu befassen haben werden.

Zu 282: *a.* Die scheinbare Grösse der Sternschnuppen ist so verschieden wie bei den Sternen, ja es sind schon Feuerkugeln beobachtet worden, welche fast dem Monde gleichzukommen schienen. Die Farbe ist meist ein ins Gelbe oder Blaue spielendes Weiss und geht auch auf den sog. Schweif über, welchen grössere Meteore häufig hinter sich zurücklassen. Letzterer ist übrigens nicht, etwa wie ein Kometenschweif, dem aus dem Kamine eines Dampfschiffes ausströmenden Rauche zu vergleichen, sondern eher mit dem Streifen, welchen das Schiff selbst auf dem Wasser, oder ein Phosphorzündhölzchen auf der Reibfläche zurücklässt: Er bewirkt, dass manchmal fast die ganze Bahn Minuten lang sichtbar bleibt, und nimmt zuweilen, ehe er sich verliert, ganz phantastische Formen an. — *b.* Die für uns in Sicht kommenden Teile der Bahnen sind mutmasslich in der Regel gerade und erscheinen uns nur als Bogen, weil wir sie in den Durchschnitt der durch den Beobachter führenden Ebene mit dem Himmelsgewölbe verlegen; die von verschiedenen Standpunkten wahrgenommenen Bahnen desselben Meteores haben somit den Punkt gemein, in welchem die Rückwärtsverlängerung der wahren Bahn jenes Gewölbe trifft, und diesen Punkt nennt man den **Radiationspunkt**. Wenn ausnahmsweise einzelne Bahnen als schlängelnd oder geknickt erscheinen, so hängt dies wohl mit Luftströmungen oder andern Anomalien in den höhern Regionen der Atmosphäre zusammen, — das zuweilen intermittierende Aufleuchten, oder auch Funkensprühen vor dem Erlöschen aber mit Überhitzung und dadurch bewirkten Explosionen.

XI. Die Welten.

Die ganze Welt vergeht, — Nur Gott allein
besteht, — Er kann sich nicht verwandeln.
(Sal. Wolf.)

---

283. Die Ausstreuung der Sterne. — Wenn man in einer mondfreien Nacht mit unbewaffnetem Auge den Sternhimmel betrachtet, so wird man alsbald auf einzelne Stellen aufmerksam, welche sich durch Reichtum an hellen oder dichtgedrängten Sternen vor andern gegenteils sehr sternarmen Stellen auszeichnen, ohne dass man jedoch etwa sofort eine Regel bemerkt, welcher dieser Wechsel unterworfen sein dürfte. Jedoch erkennt man bei etwas grösserer Aufmerksamkeit ohne Mühe, dass die reichen Stellen um so häufiger werden, je mehr man sich einem Lichtgewölke nähert, das sich, bei verschiedener Breite und Intensität, nahezu einem grössten Kreise entsprechend, gürtelähnlich um den Himmel zieht, — schon in den ältesten Zeiten der allgemeinen Aufmerksamkeit genoss, — meist als „weisser Kreis" oder **Milchstrasse** bezeichnet wurde [a], — und unter der folgenden Nummer speciell besprochen werden soll.

Zu 283: *a.* Der Name **Milchstrasse** (Galaxia, galaxy, via lactea, voie lactée, milky way), der mit γάλα = Milch = lāc zusammenhängt, ist weitaus am gebräuchlichsten, doch kommen auch die Bezeichnungen Jakobsstrasse (via strata sancti Jacobi di Gallicia, chemin de St-Jacques de Compostella), alte Sonnenstrasse (vestigium Solis), Himmelsgürtel (coeli cingulum), etc., vor. — In der früher (185) erwähnten „Teutsch Astronomei" wird die „weisse strass" als eigenes Sternbild aufgeführt.

284. Die Milchstrasse. — Die Alten hatten im allgemeinen über die Milchstrasse ganz bizarre Ansichten [a], und die einfachste Idee, sich dieselbe durch Zusammenfliessen des Lichtes zahlloser kleiner Sterne zu erklären, findet sich in älterer Zeit nur bei **Demokrit**, der sich schon dadurch das Recht erwarb, über die Thorheit der Menschen zu spotten, — dann allerdings später wieder bei Markus **Manilius**, **Bartolomeo** da Parma und einigen andern Schrift-

stellern [b]. Die Richtigkeit dieser letztern Ansicht wurde unmittelbar nach Erfindung des Fernrohrs durch **Galilei** und seine Zeitgenossen so vollständig konstatiert, dass sie wohl seither von niemand mehr ernstlich in Frage gestellt worden ist; dagegen dauerte es ziemlich lange, bis man ein erträgliches Bild der Milchstrasse zu entwerfen wusste [c] und bis einlässlichere Studien über sie angestellt wurden. Wir werden auf letztere später (593—94) zurückzukommen haben und es mag hier genügen, vorläufig anzudeuten, dass sie so ziemlich sicher dargethan haben, es hänge die scheinbar regellose Ausstreuung der Sterne in der That auf das innigste mit der Milchstrasse zusammen und es werde das ganze, mutmasslich linsenförmige Sternsystem, zu welchem auch unsere Sonne samt ihren Begleitern gehören dürfte, zunächst durch dieselbe repräsentiert [d].

Zu 284: *a.* Die einen wollten die Milchstrasse in Verbindung mit Milch bringen, welche die Amme des Zeus verschüttet habe, — die andern mit dem durch eine Fuge, welche beim Aufeinandersetzen der beiden Halbkugeln des Himmelsgewölbes übrig geblieben sei, durchschimmernden Feuers, das letzteres umgebe, — etc. Vgl. auch die ihr beigelegten Namen in 283 : a. — *b.* **Demokrit** wurde 460 v. Chr. zu Abdera geboren und starb 361. — **Manilius** liess in seinem Lehrgedichte „Astronomikon (189 : b)" der Aufzählung der verschiedenen Fabeln nach der 1857 durch Jos. Merkel gegebenen deutschen Übersetzung die Fragen folgen: „Oder entsteht vielleicht durch grössere Schaar sich drängender Sterne dichteres Flammengewebe, und glänzt mit gesammeltem Lichte? Bildet vereinigter Glanz an dem Himmel den helleren Streifen?" — Für **Bartolomeos** Ansichten vgl. pag. 67 seiner 6 : u erwähnten Schrift. — *c.* Noch in den Sternkarten von Flamsteed-Fortin, Bode, etc. gleicht die Milchstrasse eher einem Bandwurm als einem Lichtgewölk, und es enthalten so ziemlich die unter Leitung von Sir John William **Lubbock** entworfenen „Six Maps of the Stars, published under the superintendence of the Society for the diffusion of useful knowledge. London 1832 in fol. (auch 1836 und später)" die erste etwas präcise und sachgemässe Darstellung dieses merkwürdigen Gebildes. — *d.* Bemerkenswert ist, dass schon **Kepler** in seiner „Epitome" die Milchstrasse als ein grosses Sternsystem bezeichnete. — Anhangsweise mag erwähnt werden, dass, wohl im Kontraste gegen die glänzende Milchstrasse, einige ihr benachbarte Stellen in der Nähe des Südpoles so dunkel erscheinen, dass man dieselben **Kohlensäcke** genannt hat.

285. Die sog. Sternvergleichungen. — Zur Bestimmung der früher (183) behandelten sog. **Sterngrössen** hat **Argelander** eine vortreffliche Methode angegeben [a], welche auf dem durch Erfahrung bewährten Grundsatze basiert, dass schon das unbewaffnete Auge bei einiger Übung auch ganz geringe Lichtunterschiede bemerkt [b]. Von der Hilfe, welche photometrische Messungen namentlich für die hellern Sterne bieten können, wird später (595—96) gesprochen werden; dagegen ist hier noch darauf hinzuweisen, dass ein grosser Teil der schönen Erfolge auf dem alsbald (288) ins Auge zu fassenden

Gebiete der sog. **Veränderlichen,** welche **Argelander** und seine Schüler Eduard **Heis,** Julius **Schmidt,** Eduard **Schönfeld,** etc., erreicht haben, der ersterwähnten Methode zu verdanken ist.

Zu 285: *a.* Vgl. „**Argelander,** Aufforderung an Freunde der Astronomie zur Anstellung von Beobachtungen (Schumachers Jahrbuch 1844), — **Heis,** De magnitudine relativa numeroque accurato stellarum quæ solis oculis conspiciuntur fixarum. Monasterii 1852 in 4., — etc." — *b.* Das wesentliche der Argelander'schen Methode besteht darin, dass man die zwei zu vergleichenden Sterne a und b abwechselnd ins Auge fasst: Findet man sie beständig gleich, so notiert man a · b; dagegen bezeichnet b · 1 · a, dass b zuweilen heller als a erscheine (erste Stufe), — b · 2 · a, dass b immer heller als a (zweite Stufe), — b · 3 · a, dass b schon auf den ersten Blick etwas heller als a (dritte Stufe), — und b · 4 · a, dass b sogar merklich heller als a (vierte Stufe) gefunden wurde. Mehr als 4 Stufen (von welchen etwa 10 auf eine Grössenklasse gehen, da Argelander dem als Normalstern erster Klasse gewählten Arctur die Zahl 60, den schwächsten Sternen sechster Klasse aber 0 beilegt) schätzt man direkt nicht mehr zuverlässig, sondern muss Zwischensterne beiziehen, — und dasselbe Hilfsmittel ist auch anzuwenden, wenn die Sterne weit auseinander oder in sehr verschiedenen Höhen stehen. Bei den zahlreichen Sternen 3. bis 6. Grösse hat man für solche Vergleichungen eine so grosse Auswahl, dass man nicht nur a mit b, b mit c, c mit d, etc., sondern zur Kontrolle auch a mit c, b mit d, a mit d, etc., vergleichen und schliesslich durch Kombination eine sichere Grössenreihe aufstellen kann. Bei den Sternen der zwei ersten Klassen wird dagegen allerdings die Sache schwieriger und man ist fast genötigt, Vergleichungen beizuziehen, welche während der Dämmerung oder bei Mondschein gemacht sind; bei gehöriger Vorsicht ist letzteres Verfahren jedenfalls der früher beliebten Benutzung des allmäligen Erscheinens nach Sonnenuntergang vorzuziehen.

286. Die Farben der Sterne. — Die Farbe der Fixsterne ist vorherrschend weiss bis gelblich-weiss, doch kommen entschieden auch andere Farben, wie namentlich rot, vor [a]. Leider ist bei Farben die subjektive Auffassung kaum ganz zu eliminieren; doch scheinen bei einzelnen Sternen Farbenwechsel vorzukommen [b]. Schon **Doppler** führte nun die Farbenverschiedenheiten und namentlich auch den Farbenwechsel auf Bewegungserscheinungen zurück [c], und man hat in der That wohl anzunehmen, dass, wenn die Geschwindigkeit V' eines Gestirnes in endlichem Verhältnisse zur Geschwindigkeit V des Lichtes steht, sich bei Annäherung des Gestirnes, da die Anzahl n der in einer Sekunde von demselben ausgehenden Lichtwellen dieselbe bleibt, also die Längen dieser letztern die Proportion $\lambda' : \lambda = (V - V') : V$ eingehen müssen, die Lichtwellen sich verkürzen, folglich die das Gestirn charakterisierenden Linien sich dem Violet nähern werden, — bei Entfernung dagegen dem Rot [d]. Auf eine hiemit zusammenhängende Methode relativer Distanzbestimmung werden wir später (614) zurückzukommen haben [e].

Zu 286: *a.* Nach Christian **Doppler** (Salzburg 1803 — Venedig 1853; Prof. math. et phys. Prag, Schemnitz und Wien) sind etwa 5 Zehnteile der Sterne gelblich-weiss, 2 entschieden weiss, 2 orange und ein letzter Zehnteil rot, blau, etc. — Vgl. auch „G. F. **Chambers**, A working Catalogue of **Red** Stars (Monthly Not. 1887)", wo 719 rötliche und rote Sterne aufgezählt sind, sowie eine Übersicht der betreffenden Litteratur gegeben wird. — *b.* So wurde z. B. Sirius von den Alten zu den roten Sternen gezählt, von **Seneca** sogar „röther als Mars" bezeichnet, während ihn schon die arabischen Astronomen nicht mehr unter die roten Sterne einreihten und er jetzt den weissesten gleichkömmt; so fand Charles Piazzi **Smyth** (Neapel 1819 geb.; Prof. astr. und Dir. Edinburgh), dass der Doppelstern 95 Herculis aus einem roten und einem grünen Sterne je 5. Grösse bestehe, während zu andern Zeiten W. **Struve** (1832/3) und **Sestini** (1844/5 und 1856/8) beide Sterne als nahe unfarbig, und namentlich als gleichfarbig, bezeichneten; etc. — *c.* Vgl. „**Doppler,** Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels. Prag 1842 in 4., — und: Gedanken über die Möglichkeit, die absoluten Entfernungen und absoluten Durchmesser der Fixsterne auf rein optischem Wege zu bestimmen (Schriften der böhm. Ges. 1847)". Er stützte sich dabei auf den seither durch E. **Mach** in seinen Abhandlungen „Über die Änderung des Tones und der Farbe durch Bewegungen (Wien. Sitz. 41 von 1860), — und: Beiträge zur Doppler'schen Theorie der Ton- und Farbenänderung durch Bewegung. Prag 1874 in 8." teils experimentell bewiesenen, teils weiter ausgebeuteten Satz, dass sich der Ton verändert, wenn sich die Tonquelle in einer zur Geschwindigkeit des Schalles in endlichem Verhältnisse stehenden Geschwindigkeit bewegt. — *d.* Verschiebt sich also z. B. die Wasserstofflinie F des Sonnenspektrums etwas gegen Violett hin, so kann geschlossen werden, dass sich die betreffende Stelle der Sonne uns nähert, — und umgekehrt; ja es hat sich **Zöllners** Vermutung, dass durch Vergleichung der Spektren der beiden Sonnenränder die Rotationszeit der Sonne ermittelt werden könne, bereits bewahrheitet. — *e.* Vorläufig mag erwähnt werden, dass neben **Doppler** und **Mach** auch **Secchi, Zöllner** und **Fizeau** die Priorität für diese Methode beanspruchten, — dass **Huggins,** William Henry Mahoney **Christie** (Woolwich 1845 geb.; Astronomer Royal), **Vogel,** etc., dieselbe schon mehrfach mit Erfolg anwandten, — und dass z. B. letzterer bei Sirius eine Verschiebung der Linien gegen Rot nachwies, aus welcher zu schliessen war, dass sich dieser Stern gegenwärtig per Sekunde um 6 Kilometer von der Erde entferne.

287. Die sog. neuen Sterne. — Am 11. November 1572 sah **Tycho** in der Cassiopeia einen vorher nie bemerkten, der Venus an Grösse gleichkommenden, aber weissglänzenden Stern. Er verfolgte denselben aufmerksam, fand im Laufe der folgenden Monate die Position immer genau gleich, dagegen den Glanz rasch abnehmend, indem die Nova im Dezember kaum noch mit Jupiter zu vergleichen, im Februar und März 1573 zu einem Sterne erster Grösse und etwas gelblich geworden war, im April und Mai nur noch etwa in 2., im Juli und August in 3. Grösse glänzte, zu Anfang 1574 sogar nur 5. bis 6. Grösse mit saturnähnlichem bleifarbigem Lichte erschien und im März wieder ganz unsichtbar wurde. Die früher

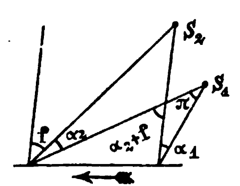
in das Gebiet der Sage verwiesenen Nachrichten (599) von dem Erscheinen neuer Sterne und deren Wiederverschwinden waren somit rehabilitiert und eine neue, höchst merkwürdige Thatsache konstatiert, — ja diese erhielt sogar bald durch das Erscheinen eines zweiten neuen Sternes, der vom Oktober 1604 bis in den Anfang von 1606 unter ähnlichen Verumständungen, namentlich durch **Kepler**, im Ophiuchus beobachtet wurde, ein neues Belege, — und auch seither sind wiederholt Sterne gesehen worden, welche plötzlich auftauchten und dann nach verhältnismässig kurzer Zeit wieder erloschen. — Welche Natur besitzen diese neuen Sterne? Sind es veränderliche Sterne von der Art wie die unter der folgenden Nummer besprochenen, — oder waren wir je Zeugen eines Weltbrandes, — oder liegt da eine von allen übrigen wesentlich verschiedene Art von Selbstleuchtern vor? Erst die Folgezeit wird darüber definitiv entscheiden, doch hat in der letzten Zeit die mittlere Ansicht entschieden etwas Boden gewonnen, indem nach **Huggins** der 1866 in der Krone aufleuchtende neue Stern zwei übereinanderliegende Spektren zeigte: Ein gewöhnliches Spektrum mit dunkeln Linien, und ein Spektrum mit hellen, namentlich Wasserstofflinien. — Für weitern Detail vgl. die Nummern 599—602.

288. Die veränderlichen Sterne. — Im Jahre 1596 sah David **Fabricius** wiederholt einen ihm früher unbekannten Stern 3. Grösse am Halse des Walfisches; später verschwand er ihm wieder, wurde dagegen von **Bayer** als 0 Ceti in seine Uranometrie von 1603 eingetragen und auch 1609 von **Fabricius**, sowie 1638 von **Holwarda** neuerdings gesehen. Es lag also ein nur zeitweise sichtbarer Stern vor, und als sodann **Hevel** und **Boulliau** denselben konsequent beobachteten, ergab sich für ihn eine Periode von durchschnittlich 332 Tagen, in deren erster Hälfte diese sog. **Mira Ceti** (Mirus der Wunderbare) von circa 3. Grösse bis zur Unsichtbarkeit abnahm, um dann in der zweiten Hälfte nach und nach wieder zur frühern Grösse zurückzukehren. — Die neuern Beobachtungen haben nun nicht nur diesen Verlauf bestätigt und somit die Existenz periodisch veränderlicher Sterne ausser Zweifel gesetzt, sondern es sind sogar viele Dutzende dieser letztern aufgefunden und ihre sog. **Lichtkurven** festgelegt worden. Über ihre eigentliche Natur ist man dagegen allerdings noch nicht recht ins klare gekommen, zumal die ausserordentliche Verschiedenheit dieser Kurven jede Theorie ungemein erschwert. Immerhin denkt man jetzt kaum mehr daran, die betreffenden Erscheinungen, wie früher, durch linsenförmige Gestalt, Oberflächenverschiedenheiten, etc., erklären zu wollen, sondern hat,

nach meinem Vorgange im Jahre 1852, einerseits angefangen, sie mit den Vorgängen auf der Sonne zu vergleichen, und darf anderseits hoffen, in nicht allzuferner Zeit durch die Spektralanalyse Aufschlüsse zu erhalten, welche auf eine gute Fährte hinweisen dürften. Für weitern Detail kann auf 603—6 verwiesen werden.

289. Die Fixsternparallaxe. — Wir haben früher (263) gesehen, dass die von **Coppernicus** ausgedachte Methode für Bestimmung der jährlichen Parallaxe, trotz ihrer theoretischen Richtigkeit, weder ihn noch seine Nachfolger zu positiven Resultaten führte, — ja noch am Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts wusste man bloss, dass auch die Parallaxe des nächsten Fixsternes keine volle Sekunde betragen könne, oder seine Distanz mehr als 20 Millionen : Si 1″ ≒ 4 Billionen g. M. halten müsse. Damit war aber offenbar nur eine untere Grenze für die Fixsterndistanzen gefunden, welche man unter dem Namen **Sternweite** als eine neue Einheit einführte, — wohl auch, da das Licht etwa $3^1/_3$ Jahre brauchte, um sie zu durchlaufen, gleich $3^1/_3$ sog. **Lichtjahre** setzte, so dass sich Sternweite und Lichtjahr gerade so wie Meter und Fuss verhalten. Es blieb also noch zu versuchen, wenigstens für einzelne Sterne auch die Parallaxe selbst oder zum mindesten eine obere Grenze für deren Distanz zu ermitteln, und dies gelang endlich gegen die Mitte des Jahrhunderts den **Bessel, Henderson** und **Struve** ziemlich gleichzeitig. Wir werden jedoch auf diese und verwandte seitherige Bestimmungen erst später (607) im Detail eintreten können und es muss hier genügen, vorläufig und beispielsweise anzuführen, dass **Bessel** für 61 Cygni eine jährliche Parallaxe von mindestens 0″,37 fand, so dass dieser Stern etwa 3 Sternweiten oder 10 Lichtjahre von uns entfernt sein dürfte [a].

Zu 289: *a.* **Bessel** wählte zu seinem Versuche diesen Doppelstern, teils weil er in ihm wegen starker Eigenbewegung (291) zu den nähern Sternen zu gehören schien, teils weil in seiner Nähe zwei kleine Sterne ohne solche standen, welche also mutmasslich weit ferner waren, wie es die von ihm gewählte Methode erforderte, von welcher folgendes einen vorläufigen Begriff giebt: Stehen für einen Beobachter zwei Punkte nahe in einer auf ihn zulaufenden Geraden, so bewegt sich scheinbar, wenn der Beobachter seitwärts geht, der fernere der beiden Punkte mit ihm, und wenn sich somit dem durch die Erdbewegung fortwährend deplacierten Beobachter bei wiederholter Messung des Abstandes zwischen einem hellen Sterne S_1 und einem ihm nahen schwachen, also (592) mutmasslich fernern Sterne S_2 dieses Verhältnis zeigt, so ist der schwächere wirklich ferner und zugleich ist die Differenz der Abstände



$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pi - f \qquad \text{oder} \qquad \pi > \alpha_2 - \alpha_1$$

und zwar, da f für einen fernen Stern klein ist, mutmasslich sehr nahe $\pi = \alpha_2 - \alpha_1$, so dass man annähernd die Parallaxe von S_1 in Beziehung auf die betreffende Bewegung des Beobachters kennt, und daraus durch Rechnung auf seine der mittlern Distanz Erde-Sonne entsprechende jährliche Parallaxe schliessen kann. — Schon **Galilei** deutete diese Methode an, indem er 1632 auf pag. 375 seiner Dialoge sagte, dass „wenn man im Felde eines Fernrohrs in unmittelbarer Nähe eines der hellsten Sterne einen sehr kleinen erblickte, man vielleicht eine merkliche Veränderung in der gegenseitigen Lage beider wahrnehmen könnte". Ferner findet sich nach Arago in „Thom. Birch, History of the Roy. Society. London 1756, 4 Vol. in 4. (III 225)" ein 1675 von Jam. **Gregory** geschriebener Brief, in welchem diese Methode auseinandergesetzt ist, und ebenso erscheint sie 1698 in **Huygens** „Cosmotheoros". Nach Arago versuchte sich sodann Roger **Long** praktisch in derselben, scheint aber nicht zu befriedigenden Resultaten gelangt zu sein. Ebenso erging es W. **Herschel**, vgl. dessen Abhandlung „On the parallax of the fixed stars (Ph. Tr. 1782; deutsch durch Schröter als Anhang zu seinen Beiträgen von 1788)", — und noch 1809, vgl. „Voiron, Histoire de l'astronomie depuis 1781 jusqu'à 1811. Paris 1810 in 4. (pag. 91)", Bernh. **v. Lindenau**. Es blieb, wie schon oben gesagt, **Bessel** und seiner Zeit vorbehalten, solche Bestimmungen mit wirklichem Erfolge in Angriff zu nehmen.

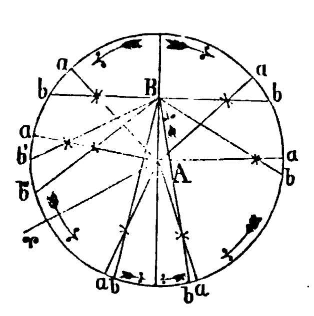
290. Der scheinbare und mittlere Ort. — Die Präcession übt offenbar einen mit der Zeit fortwährend zunehmenden oder **sekulären** Einfluss auf die Sterncoordinaten aus, während der (201) an die Mondknotenperiode gebundenen Nutation und ebenso der (264) vom Erdjahr abhängigen Aberration nur ein **periodischer** Einfluss zukömmt. Man versteht nun unter dem **mittlern Orte** eines Sternes die Coordinaten, welche er zu einer bestimmten Zeit, z. B. zur Epoche eines Sternkataloges oder zu Anfang eines Jahres, bloss unter Berücksichtigung der Präcession erhalten würde, — unter **scheinbarem Orte** die ihm zu irgend einer Zeit scheinbar wirklich zukommenden, nicht nur für den seit der Epoche oder seit Anfang Jahres fälligen Betrag der Präcession, sondern auch für Aberration und Nutation korrigierten Coordinaten. — Für jetzt mag diese Feststellung der Begriffe genügen, — eine eingehende Entwicklung wird später (609—13) nachgetragen werden.

291. Die Eigenbewegung der sog. Fixsterne. — Bestimmt man zu verschiedenen Zeiten durch Beobachtung die Positionen eines Fixsternes und reduziert die erhaltenen Örter unter Berücksichtigung von Präcession, Nutation und Aberration auf eine und dieselbe Epoche, so ergeben sich kleine, der Zeit proportionale Differenzen, welche man gewohnt ist, als **Eigenbewegung** des Sternes zu bezeichnen ^{a}. Wir werden die Bedeutung dieser Eigenbewegung unter der folgenden Nummer besprechen, dagegen weitern betreffenden Detail erst später (612—14) nachtragen.

Zu 291: *a.* Beispielsweise mag schon jetzt angeführt werden, dass sich für den Stern 61 Cygni eine jährliche Eigenbewegung von $+ 0^s,359 = 5'',38$ in Æ und von $+ 3'',30$ in D, — für *α* Centauri eine solche von $- 0^s,470 = - 7'',05$ in Æ und von $+ 0'',83$ in D, — für *α* Bootis eine solche von $- 0^s,078 = - 1'',17$ in Æ und von $- 1'',96$ in D, — etc., ergab.

292. Die fortschreitende Bewegung der Sonne. — In seinen klassischen „Cosmologischen Briefen. Augsburg 1761 in 8." schrieb **Lambert** mit prophetischem Geiste: „Die scheinbaren Eigenbewegungen der Sterne sind zum Theil reell, zum Theil Folgen der Bewegung unserer Sonne, und es wird später möglich werden, diese beiden Komponenten zu trennen und die Richtung anzugeben, nach der sich unsere Sonne bewegt". Seine Prophezeiung erfüllte sich nun früher, als er hatte erwarten dürfen, indem **Herschel** schon 1783 III 6 der Roy. Society seine berühmte Abhandlung „On the proper motion of the Sun and Solar System" vorlegte, in welcher er, gestützt auf die durch Tob. **Mayer** bestimmten Eigenbewegungen einer Anzahl von Fixsternen, gerade jene Aufgabe löste [a]. **Herschel** fand dabei, dass sich die Sonne in einer nach $17^h\ 22^m$ und $+ 26^0\ 17'$ führenden Richtung bewege, oder also der sog. **Apex** in der Nähe von *λ* Herculis liege, und die sämtlichen hierauf bezüglichen Untersuchungen der neuern Zeit haben nicht nur dies Resultat im grossen Ganzen bestätigt, sondern sogar wahrscheinlich gemacht, dass die Bewegung der Sonne und ihres Gefolges in der angegebenen Richtung nicht weniger als etwa 4000 Meilen per Stunde betrage. In folgenden Jahrhunderten wird man ohne Zweifel die langsame Veränderung der gegenwärtigen Bewegungsrichtung konstatieren, daraus auf die eigentliche Bahn der Sonne schliessen und ihre Umlaufszeit um einen fernen Schwerpunkt berechnen, d. h. die Aufgabe wirklich lösen können, welche sich **Mädler** bei versuchter Bestimmung einer sog. **Centralsonne** etwas zu frühe gestellt hatte [b]. — Weiterer Detail wird später (614—15) beigebracht werden.

Zu 292: *a.* **Herschel** befolgte bei seiner Lösung der Lambert'schen Aufgabe ungefähr folgenden Gedankengang: Wenn sich die Sonne von A nach B bewegt, so werden diejenigen Sterne, welche von A aus gesehen scheinbar in a stehen, von B aus gesehen in b erscheinen, — die in der Richtung der Bewegung liegenden Sterne gehen gewissermassen auseinander, während die in der entgegengesetzten Richtung liegenden sich einander nähern, — auf der einen Seite der Bewegungsrichtung (links) nehmen die Rektascensionen zu, auf der andern Seite (rechts) ab, — und wenn umgekehrt diese Verschiebungen für eine gewisse Richtung im grossen



Ganzen mit den Eigenbewegungen der Sterne übereinstimmen, so wird zu schliessen sein, dass sich die Sonne wirklich nach dieser Richtung bewegt. Nun hat z. B. **Argelander** in seinen „DLX stellarum fixarum Positiones mediæ. Helsingforsiæ 1835 in 4." zwischen $10\frac{1}{2}$ und $11\frac{1}{2}^h$ Æ, sowie zwischen $22\frac{1}{2}$ und $23\frac{1}{2}^h$ je 8 nicht mehr als 10° vom Equator entfernte Sterne, und von diesen haben die ersten im Mittel $-0^s,0173$, die zweiten $+0^s,0181$ jährliche Bewegung in Rektascension; es werden also diese Bewegungen für 11^h und 23^h bei entgegengesetztem Zeichen nahe gleich gross, — ferner liegt in Beziehung auf die Bewegungsrichtung 11^h (wegen —) rechts, 23^h (wegen +) links, — und es hat somit eine Bewegung der Sonne gegen $\frac{1}{2}(11 + 23) = 17^h$ statt, was nahe mit dem Herschel'schen Resultate übereinstimmt. — *b.* Wohl noch mit grösserm Rechte als die Vergangenheit die Bestimmung der Sonnendistanz als **vornehmste Aufgabe** der Astronomie bezeichnete, hat die Zukunft dieses Epitheton der Bestimmung des grossen Sonnenjahres beizulegen.

293. Die optischen Doppelsterne und die sog. Fixsterntrabanten. — Früher wurden einander nahe Sterne nicht weiter beachtet und nur als sog. **optische** Doppelsterne angesehen, d. h. als Sterne, welche zwar vom Standpunkte des Beobachters aus nahe in derselben Richtung gesehen werden, aber möglicherweise weit auseinander liegen. Erst nach der Mitte des vorigen Jahrhunderts verbreitete **Lambert** richtigere Begriffe über binäre Systeme und die bei solchen infolge der allgemeinen Gravitation notwendigen Bewegungen, während John **Michell** ungefähr gleichzeitig auf die Unwahrscheinlichkeit hinwies, dass die sämtlichen Doppelsterne nur optisch und ebenso gewisse Sterngruppen, wie z. B. die Pleyaden (295) nur Folge einer zufälligen Sternausstreuung seien. Immerhin lagen jedoch damals zu wenige bestimmte Daten vor, um diese Anschauungen ganz sicher zu begründen, und es war daher unbedingt eine sehr verdienstliche und zeitgemässe Unternehmung, als bald darauf Christian **Mayer** förmlich nach Doppelsternen zu suchen begann. Ebenso ehrt es ihn, dass er, nachdem er verschiedene Dutzend solcher Paare sehr naher Sterne aufgefunden hatte, die Überzeugung aussprach, es scheine wirklich eine Anzahl von Sternen zu geben, welche **Trabanten** besitzen, — ja man kann jetzt kaum mehr begreifen, wie er deswegen von seinen Zeitgenossen mehr verlacht und angegriffen, als belobt werden konnte. Wir werden übrigens auf diese Verhältnisse in 619—20 einlässlich zurückkommen.

294. Die betreffenden Arbeiten der Neuzeit. — Wenig später als Chr. Mayer wurde auch Wilh. **Herschel** bei seiner Durchmusterung des Himmels auf die Doppelsterne aufmerksam und fand nicht nur bald mehrere Hunderte derselben auf, sondern schuf, indem er von Anfang an darauf Bedacht nahm, je den einen Stern durch Polarcoordinaten gegen den andern und dessen Deklinations-

kreis festzulegen und diese Messungen von Zeit zu Zeit zu wiederholen, für die Folgezeit ein kostbares Material zu betreffenden Untersuchungen, das sodann durch viele andere Astronomen, und ganz besonders durch Wilh. **Struve**, in grossartiger Weise geäuffnet wurde, so dass jetzt die Anzahl der bekannten Doppelsterne bereits auf mehrere Tausende gestiegen ist. Schon im Anfange unsers Jahrhunderts konnte **Herschel** aus seinen Messungen bei einzelnen Doppelsternen Lageveränderungen und damit die wirkliche Existenz von binären Systemen nachweisen, und seither hat sich nicht nur die Anzahl dieser Fälle ausserordentlich vermehrt, sondern es ist nach dem Vorgange von Fel. **Savary** gelungen, sichere Methoden aufzufinden, um aus einigen der erhaltenen Positionsveränderungen unter der Annahme, dass das Gravitationsgesetz auch diese fernen Welten beherrsche, die relative Bahn des Begleiters um den Hauptstern zu bestimmen, — ja durch Übereinstimmung der erhaltenen Rechnungsresultate mit den sämtlichen Beobachtungsergebnissen die Richtigkeit jener Annahme zu konstatieren. Wir werden diese neuen Arbeiten und Methoden später (621—30) ebenfalls im Detail behandeln, und es mag hier vorläufig nur noch beispielsweise angeführt werden, dass der Begleiter von ζ Herculis seinen nahe $34^1/_2$ Jahre in Anspruch nehmenden Umlauf nun bereits dreimal vor den Augen seiner Beobachter vollendet hat.

295. Die den Alten bekannten Sternhaufen und Nebel. — Schon die Alten waren auf einige auffallend dicht mit Sternen besetzte Stellen am Firmamente aufmerksam geworden, — so namentlich auf die sog. **Hyaden** oder das Regengestirn am Kopfe, und die sog. **Pleyaden** oder das Siebengestirn (wohl auch die Gluckhenne) am Rücken des Stiers. Ebenso finden sich im Almagest einige vage, und sodann in dem ebenfalls schon mehrerwähnten Sternverzeichnisse von **Al-Sûfi** sogar sichere Andeutungen, dass sie auch einzelne Himmelsnebel bemerkt hatten, — ja in letzterm wird speciell des sofort (296) zu besprechenden Nebels in der Andromeda und der, später auch den Indienfahrern und dem Weltumsegler **Magelhaens** auffällig gewordenen **Kap-Wolken** gedacht. Eingehender beschäftigte sich aber die ältere Zeit allerdings nur mit den Pleyaden, dabei ihren sieben bemerklichsten Sternen die Namen der sieben Atlantiden „Alcyone, Merope, Elektra, Kelæno, Maja, Taygeta und Asterope" beilegend, zu welchen dann etwas später noch für zwei Sterne die Namen der Eltern „Atlas und Plejone" hinzukamen[a].

Zu 295: *a.* Die ältern Schriftsteller, wie **Homer**, sprechen nur von 6 Pleyaden, während **Plinius**, **Hipparch** und **Ptolemäus** die obigen 7 Atlantiden aufführen. Noch spätere Autoren kennen wieder nur 6 Pleyaden, angeblich

weil sich Merope, aus Scham, einen Sterblichen geheiratet zu haben, flüchtete. — Interessanter als diese Fabel ist allerdings, dass bei den alten Griechen der Frühaufgang der Pleyaden als Zeichen des Sommeranfanges, der Spätuntergang als Zeichen des Winteranfanges betrachtet wurden. Nach **Ideler** fielen diese beiden Momente 800 v. Chr. auf V 19 und XI 3, und erscheinen bei **Hesiod** als Zeichen der Ernte und des Pflügens. Ferner soll in einem alten Kalender der Brahmanen ein Monat „Kartika (Pleyadenmonat)" vorkommen, der unserm November entspricht. Endlich sollen gewisse Festepochen mit den Pleyaden in Verbindung stehen, wie z. B. das Totenfest, das schon heidnische Völkerschaften, wie jetzt noch die Katholiken, am 2. November gefeiert zu haben scheinen.

296. Die ersten Entdeckungen mit dem Fernrohr. — Schon im 13. Jahrhundert sprach **Kazwini** in seiner „Kosmographie", wahrscheinlich gestützt auf **Al-Sûfi**, die Vermutung aus, dass in den Pleyaden zwischen den sich für das freie Auge deutlich abscheidenden 6 bis 7 Sternen noch „eine Menge dunkler (lichtschwacher) stehen" möchte, und so konnte in der That Sir Christopher **Heyden** 1610 rühmen: „Ich sehe mit meinem Perspicille 11 Sterne in den Pleyaden, während kein Zeitalter deren mehr als 7 kennt" [a], — ja **Galilei** teilte nicht nur gleichen Jahres in seinem „Sydereus nuncius" mit, dass er mehr als 40 solcher Sterne gezählt, sondern auch, dass er in der sog. Krippe des Krebses, im Kopfe und Gürtel des Orion, etc., mehrere ähnliche und zum Teil noch dichtere Sternhaufen gefunden habe. Von eigentlichen Himmelsnebeln hatte dagegen letzterer offenbar noch keine Ahnung, da er den Sternhaufen am Kopfe des Orion zwar als „Nebulosa Orionis" bezeichnet, aber als Sternhaufen abbildet, — und es ist somit nur um so bemerkenswerter, dass schon 1612 Simon **Marius** nicht nur in der Andromeda einen solchen wirklichen Nebel auffand, sondern auch ganz richtig charakterisierte, indem er ihn mit einem durch ein Hornblättchen gesehenen Lichte verglich [b]. Bald darauf wurde, spätestens 1619 durch **Cysat**, wie dessen Kometenschrift gleichen Jahres erweist [c], ein noch viel glänzenderer Himmelsnebel unter dem Gürtel des Orion entdeckt, mit welchem sich nachmals **Huygens** so intensiv befasste, dass man vielfach, wenn auch mit Unrecht, seine Auffindung diesem grossen Geometer zuschrieb [d].

Zu 296: *a.* Vgl. die Rektoratsrede „K. v. **Littrow**, Über das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften. Wien 1869 in 8." — Christoph Heyden war wahrscheinlich Sohn von Christian **Heyden** (Nürnberg 1526 — ebenda 1576; Lehrer zu Nürnberg), der nach Poggendorf einen „Traktatus de nova stella. Norimb. 1573" schrieb, und wohl identisch mit Sir Christopher **Heydon**, von welchem Pulkowa „An astrological discourse. London 1650 in 8." besitzt. — *b.* Vgl. das Vorwort zu seinem „Mundus jovialis" von 1614. Allerdings hatte mutmasslich (295) schon lange vorher **Al-Sûfi** diesen Nebel gesehen, aber dies war im Abendland unbekannt. — *c.* **Cysat** spricht nämlich

auf pag. 75 seiner „Mathemata astronomica de Cometa 1618/9. Ingolstadii 1619 in 4." von der **wie auf einer weissen Wolke** lagernden Sterngruppe im Schwerte Orions. — *d.* Schon **Bessel** trat (Berl. Jahrb. 1808) für die Priorität Cysats auf, und da seine Reklamation wenig beachtet wurde, erneuerte ich dieselbe (Bern. Mitth. 1853 und A. N. 895 von 1854).

297. Die neuern Arbeiten und Ansichten. — Die Folgezeit fand noch viele solche Sternhaufen und Nebel, ja es wurden schliesslich durch die **Messier**, **Herschel**, **Dunlop**, etc., förmliche Kataloge derselben angelegt, welche sie nach Hunderten und Tausenden zählen, und ebenso sind die optischen Hilfsmittel der Neuzeit zur Ergründung ihrer Natur beigezogen worden. Ich werde später (631—40) im Detail über diese Arbeiten und ihre Ergebnisse berichten; vorläufig mag es genügen, als Hauptresultat anzuführen, dass von den Sternhaufen, welche schon das freie Auge zu erkennen vermag, bis zu solchen, die nur durch eigentliche Riesenteleskope aufgelöst werden und bei schwächern Mitteln höchstens als kleine Nebel erscheinen, alle möglichen Zwischenstufen vorkommen, und dass alle diese Gebilde eine verwandte Natur, namentlich ein kontinuierliches Spektrum, zeigen, — somit mutmasslich ferne Weltsysteme sind, welche uns zunächst nur wegen ihrer verschiedenen Entfernung verschieden erscheinen; dass es aber überdies eine Menge von Nebeln giebt, welche nicht nur jenen kräftigsten Mitteln zur Auflösung total widerstehen, sondern gleichzeitig auch durch Spektren mit hellen Linien als heisse Gasmassen charakterisiert werden, also mutmasslich erst in Bildung begriffene Welten sind, vielleicht dazu bestimmt, nach Millionen von Jahren jetzt bestehende abzulösen.

298. Die Entstehung des Weltgebäudes. — Über Zweck, Plan und Schöpfung des Weltgebäudes, oder auch nur unsers Sonnensystemes, wissen wir nichts Bestimmtes, ja es ist kaum vorauszusehen, dass der Schleier je für uns gelüftet werde; aber gerade darum ist es für manche Naturen nur um so verlockender, sich in betreffenden Betrachtungen zu ergehen, und so ist auch von den ältesten bis auf die neuesten Zeiten von allen Gebieten der Astronomie keines so vielfach durch die sog. Philosophen ausgebeutet worden wie das vorliegende[a]. Es kann jedoch hier natürlich auf diese unfruchtbaren Bemühungen nicht näher eingetreten werden, — zumal auf diejenigen der ältern Zeit, welche sich nicht einmal um die wenigen einschlagenden Thatsachen bekümmerten, sondern sich ausschliesslich auf dem Gebiete der reinen Spekulation bewegten. Während letzteres auch noch so ziemlich bei der sog. **Wirbeltheorie** von **Descartes** der Fall war[b], welche in der zweiten Hälfte des

17. Jahrhunderts in Frankreich einen jetzt kaum mehr begreiflichen Beifall fand und noch im Anfange des 18. Jahrhunderts der Einbürgerung der allgemeinen Gravitation grossen Widerstand leistete, so ist dagegen rühmlich anzuerkennen, dass **Kant** [c] in seiner „Naturgeschichte und Theorie des Himmels, oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprung des ganzen Weltgebäudes nach Newtonischen Grundsätzen abgehandelt. Königsberg 1755 in 8.“ die ihm bekannten Thatsachen berücksichtigte und seine Theorien mit denselben in Einklang zu bringen suchte. Dass es jedoch Kant, welcher von der Annahme ausging, „dass alle Materien, daraus die Kugeln, die unserer Sonnenwelt gehören, alle Planeten und Cometen bestehen, im Anfange aller Dinge in ihren elementaren Grundstoff aufgelöst, den ganzen Raum des Weltgebäudes erfüllt haben, darin jetzo diese gebildete Körper herumlaufen“, wirklich gelungen sei, aus diesem **Chaos** unter alleiniger Hilfe der gegenseitigen, aber auch nach „den Gattungen der Elemente“ etwas verschiedenen Anziehung der Teilchen, nach und nach in ungezwungener und den Gesetzen der Mechanik entsprechender Weise unser gegenwärtiges Sonnensystem herauszubilden, wird kaum jemand behaupten wollen [d], und es verdient ein davon unabhängiger neuer Versuch, speciell die Bildung des Sonnensystemes zu erklären, welchen einige Decennien später **Laplace** in seiner „Exposition du système du monde. Paris 1796, 2 Vol. in 8.“ machte [e], entschiedenen Vorzug: Laplace ging nicht von dem Chaos aus, sondern für ihn existierte bereits die Sonne als eine langsam um eine Axe rotierende und glühende Dunstmasse, welche sich über den ganzen Planetenraum ausdehnte [f]. Nach und nach kühlte sich diese Masse durch Ausstrahlung in den Weltraum etwas ab und zog sich zugleich, unter Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit, zusammen. Es kam dabei eine Zeit, wo an der äussern Grenze der Masse die Centrifugalkraft der Anziehung Gleichgewicht hielt, ja erstere sogar grösser als letztere wurde: Es löste sich nun von der equatorealen Zone eine Masse ab, welche sofort Kugelgestalt oder Ringform annahm und als Planet oder Asteroidenring die Sonne umkreiste [g], dabei infolge des Geschwindigkeitsüberschusses der äussern Teile eine Rotation in gleichem Sinne erhielt, welche bei zunehmender Abkühlung wachsen musste und so in analoger Weise zur Bildung von Monden und Mondenringen führen konnte. Gleichzeitig kühlte sich auch die übrig gebliebene Sonnenmasse weiter ab, — es trat später eine neue Ablösung ein, — u. s. f., bis das ganze System vorhanden war. Möglicherweise machten sich auch an andern Stellen des Weltraumes ähnliche Verhältnisse und Bildungen schon früher oder gleichzeitig geltend, ja

es ist die Schöpfungsperiode mutmasslich noch jetzt nicht abgeschlossen. — So einfach jedoch diese Theorie die geringe Neigung der Planetenbahnen gegen den Sonnenequator, die übereinstimmende Richtung aller Revolutionen und Rotationen, das Verhältnis zwischen der Revolutionszeit des untergeordneten und der Rotationszeit des übergeordneten Körpers, etc., erklärt, so ruht sie doch teilweise, wie **Laplace** auch selbst ganz gut einsah [h], auf unsicherer Basis, und musste so in der That z. B. nach Auffindung der Mars-Monde (542) sehr bedeutend modifiziert werden, was namentlich **Faye** in seiner Schrift „Sur l'origine du monde. Paris 1884 in 8.", auf welche ich hier verweisen muss, mit bekannter Gewandtheit durchzuführen wusste [i].

Zu 298: *a.* Die bekannte Definition von Wilhelm **Jordan** (Insterburg 1819 geb.; Litterat in Frankfurt; nicht zu verwechseln mit dem Geodäten desselben Namens: Ellwangen 1842 geb., Prof. Geod. Karlsruhe und Hannover): „Wenn man wissen will, was kein Mensch wissen kann, und so thut als ob man es doch wüsste, so nennt man das philosophiren", ist hier ganz zutreffend. — *b.* Der grosse Philosophe **Descartes** hatte erst (vgl. Whewell II 139) ein System auf die Annahme eines leeren Raumes basiert, dann aber auf einen Wink seines Freundes Mersenne, dass der leere Raum in Paris nicht mehr Mode sei, plötzlich gefunden, dass gegenteils die Materie das ganze Universum erfülle, sich jedoch entsprechend den verschiedenen Sonnensystemen in Wirbel eingeteilt habe, welche aufeinander einwirken und nur die Kometen ungeniert zirkulieren lassen. Er entwickelte seine Theorie in den „Principia philosophiæ. Amstelodami 1644 in 4. (franz. Paris 1701)" und sie wurde bei einem Jahrhundert in Frankreich hochgehalten, ja noch 1752 durch **Fontenelle** in seiner „Théorie des tourbillons cartésiens. Paris 1752 in 12." aufgewärmt, obschon ihre Leistungsfähigkeit ausserordentlich gering war und **Delambre** (Hist. V 235) sogar das strenge Urteil abgab: „**Descartes** renouvelait la méthode des anciens Grecs, qui dissertaient à perte de vue, sans jamais rien observer et sans jamais rien calculer; mais erreur pour erreur, roman pour roman, j'aimerais encore mieux les sphères solides d'Aristote, que les tourbillons de Descartes. Avec ces sphères on a du moins fait des planétaires qui représentaient en gros les mouvemens célestes, on a pu trouver des règles approximatives de calcul; **on n'a jamais pu tirer aucun parti des tourbillons ni pour le calcul, ni pour les machines**". Es bleibt beizufügen, dass zum Sturze des Cartesianismus wesentlich die Schrift „Pierre **Sigorgne** (Rambertcourt-les-Pots in Lothringen 1719 — Macon 1809; Prof. phys. Paris, später Generalvikar der Diöcese von Macon), Démonstration physico-mathématique de l'insuffisance et de l'impossibilité des tourbillons. Paris 1741 in 12. (auch engl. in Ph. Tr. 1740)" beitrug. — *c.* Immanuel **Kant** (Königsberg 1724 — ebenda 1804) war Prof. philos. Königsberg. Vgl. für ihn z. B. „**Schubert**, Kant's Biographie, zum grossen Teil aus handschriftlichen Nachrichten. Leipzig 1842 in 8." — *d.* Gegenteils sagt sogar **Faye** in seiner Note „Sur un théorème de Kant relatif à la mécanique céleste (Compt. rend. 1884)", **Kant** habe „après un magnifique début" im Verlaufe seiner Entwicklung sich gegen das Gesetz der Erhaltung der Flächen verstossen und es habe somit letztere strenge genommen gar keinen Wert. — *e.* Faye giebt

(l. c.) zwar zu, dass **Kant** schon 1755 das wichtige Gesetz „Lorsque un corps céleste est animé d'un mouvement de rotation, son atmosphère ne saurait dépasser une certaine limite sans cesser aussitôt d'appartenir à ce corps; cette limite, dans le plan de l'équateur de la planète, est celle où la force centrifuge fait équilibre à la pesanteur" ausgesprochen habe, das die Basis der Laplace'schen Theorie bilde; da aber Kant dasselbe zwar in glücklichster Weise (vgl. 556) auf das Saturnssystem angewandt, dagegen für seine kosmogonische Theorie gar nicht benutzt habe, so sei es dennoch unrichtig, die Theorie von Laplace schon bei Kant finden zu wollen. — *f.* Der wesentlichste Unterschied der beiden Theorien von **Kant** und **Laplace** besteht darin, dass der französische Mathematiker die Rotationsbewegung als gegeben annahm, der deutsche Philosophe dagegen sich abmühte, ihre innere Notwendigkeit nachzuweisen, anstatt mit **Newton** in dem Hinzutreten eines excentrischen Stosses zur ursprünglichen fortschreitenden Bewegung einen **zeitlichen Anfang** zuzugeben, gewissermassen den „Finger Gottes" zu erkennen. — *g.* Es scheint angegeben, hier vorläufig auf den später (556) zu besprechenden Versuch von **Plateau** hinzuweisen. — *h.* **Laplace** sagt nämlich: „Je présente cette origine du système planétaire avec la défiance que doit inspirer tout ce qui n'est point un résultat de l'observation ou du calcul". — *i.* Vgl. ferner für diesen Abschnitt und die zwei folgenden: „W. **Herschel**, On the Construction of the Heavens (Ph. Tr. 1784 u. f.; deutsche Ausg. von G. M. Sommer mit einem Auszuge aus Kants Nat. d. H. Königsberg 1791 in 8., ferner von J. W. Pfaff, Dresden 1826 in 8., und im Auszuge von E. G. Fischer im Berl. Jahrb. 1794), — Georg Ernst **Otto**, Grundzüge einer philosophischen Kosmologie. Freiberg 1860 in 8., — Gust. **Zeuner**, La formation des corps célestes. Lausanne 1869 in 8., — Karl Sebastian **Cornelius** (Ronshausen in Hessen 1820 geb.; Prof. phys. Halle), Über die Entstehung der Welt, mit besonderer Rücksicht auf die Frage: ob unserm Sonnensysteme, namentlich der Erde und ihren Bewohnern, ein zeitlicher Anfang zugeschrieben werden muss. Halle 1870 in 8., — Heinr. **Baumgärtner**, Natur und Gott. Leipzig 1870 in 8., — Aimé Julius Theophil **Forster** (Beringen bei Schaffhausen 1841 geb.; Prof. phys. Bern), Der Welt Anfang und Ende. Ein Vortrag. Bern 1874 in 8., — Charles **Wolf** (Vodges in Aisne 1827 geb.; Prof. phys. Nîmes, dann Astr. und Akad. Paris), Les hypothèses cosmogoniques. Examen des théories scientifiques modernes sur l'origine des mondes, suivie de la traduction de la Théorie du ciel de Kant. Paris 1886 in 8., — Karl **Braun** (Neustadt in Kurhessen 1831 geb.; Jesuit; Prof. phys. Pressburg, Assist. Secchi, Dir. Kalocsa), Über Kosmogonie vom Standpunkt christlicher Wissenschaft. Münster 1889 in 8., — G. A. **Hirn**, Constitution de l'espace céleste. Paris 1889 in 4., — etc."

299. Die Organisation des Weltgebäudes. — Während die Entstehung des Weltgebäudes mutmasslich für uns immer ein Rätsel bleiben wird, so ist dagegen die Erkenntnis seiner Organisation, wenn auch schwierig, doch nicht geradezu unmöglich, ja es sind auf letzterm Gebiete bereits einige schöne Vorarbeiten zu verzeichnen, — voraus diejenigen von Thom. **Wright** [a], sodann die mehr oder weniger auf ihnen basierenden Betrachtungen der **Kant** und **Lambert** [b], und endlich die von W. **Herschel** auf eigene Beobachtungen gegründeten Anschauungen [c]. Fassen wir die Vermutungen dieser

vier Forscher zusammen, so haben wir etwa anzunehmen, dass eine Reihe dunkler Körper (Planeten), von denen einzelne noch untergeordnete Begleiter (Monde, Ringe) besitzen und andere unter sich zu einem Ringsysteme (Asteroiden-Ring) verbunden sind, mit ein oder mehrern Selbstleuchtern (Sonnen, Doppelsterne) ein System von organischem Zusammenhange (Sonnensystem) bilden. Viele Tausende solcher Sonnensysteme sind zu einem System höherer Ordnung (Sternhaufen) vereinigt, — Myriaden solcher Sternhaufen neuerdings zu einem höhern Systeme (Milchstrasse), wobei die einzelnen Elemente sich, wie die Planeten im Sonnensysteme, gegen eine Ebene (die galaktische Ebene) anzuhäufen scheinen, — und solcher Systeme giebt es wieder zahllose, die Teile eines grössern Ganzen sind, und so fort bis ins Unendliche [d]. — Alle diese Systeme sind ohne Zweifel zunächst ursprünglichen Gesetzen, voraus dem Gravitationsgesetze, unterworfen, jedoch ist auch ein neues schöpferisches Eingreifen durchaus nicht ungedenkbar [e].

Zu 299: *a.* Schon 1734 hatte **Wright** über betreffende Fragen zu meditieren begonnen und sodann sechszehn Jahre später, unter Beigabe von selbst in Schwarzkunst schön ausgeführten Tafeln, sein Werk „An original **Theory** or a new hypothesis **of the Universe**, founded on the laws of nature. London 1750 in 4." herausgegeben. Leider ist dies Werk, in welchem sich namentlich die Idee ausgesprochen findet, dass die Milchstrasse für das Sternsystem eine ähnliche Bedeutung wie die Ekliptik für das Sonnensystem habe, sowie die feste Überzeugung, dass unser Sonnensystem eine fortschreitende Bewegung besitze, äusserst selten geworden, so dass es der Gegenwart fast nur durch Auszüge älterer Zeit und durch den Artikel, in welchem **Nyrèn** (Astr. Viert. 14) das Pulkowaer Exemplar beschrieben hat, bekannt geworden ist. — *b.* Ein in den „Hamburgischen freyen Urtheilen" vom Jahre 1751 erschienener Auszug aus Wrights Schrift gab sodann **Kant** die erste Veranlassung zu seiner bereits (298) besprochenen „Naturgeschichte" von 1755, und derselbe sagt in seiner Vorrede auch ganz ehrlich: „Ich kann die Grenzen nicht genau bestimmen, die zwischen dem System des Herrn Wright und dem meinigen anzutreffen seyn, und in welchen Stücken ich seinen Entwurf bloss nachgeahmet oder weiter ausgeführt habe". Und in der That findet man nach Nyrèn bereits bei **Wright** im wesentlichen jeden einzelnen der sieben Sätze, welche W. **Struve** in seinen „Etudes stellaires (vgl. 592)" als „Système de Kant" aufgeführt hat. — Auch die wenig später von **Lambert** in seinen „Cosmologischen Briefen (vgl. 292)" ausgesprochenen Ideen haben viele Anklänge an **Wright**, obschon er sich nicht speciell auf ihn beruft. — *c.* Auf „**Herschel**, On the Construction of the Heavens (vgl. 298 : i)" werden wir in den Schlussabschnitten des vierten Buches wiederholt zurückzukommen haben. — *d.* Nach **Lambert** gehört unser Sonnensystem mit allen über $1\frac{1}{2}$ Millionen zählenden Sternen, welche wir nach allen Richtungen zerstreut am Himmel erblicken und deren jeder mit den ihn umkreisenden Planeten und Kometen ebenfalls ein Sonnensystem konstituiert, zu einem sphärischen Sternhaufen von circa 150 Siriusdistanzen Durchmesser, der einen dunkeln Centralkörper besitzt; unsere Milchstrasse ist ein System solcher Sternhaufen und hat die Form einer Scheibe von verhältnismässig

geringer Dicke, dagegen einen Durchmesser von vielleicht 15000 Siriusdistanzen. Solcher Milchstrassen giebt es wieder zahllose, die zusammen ein System der vierten Ordnung bilden. Sogar noch weitere Systeme hält **Lambert** für möglich, aber sie können von uns kaum mehr aufgefasst werden, — und entsprechend sagt **Kant**: „Es ist hie kein Ende, sondern ein Abgrund einer wahren Unermesslichkeit, worin alle Fähigkeit der menschlichen Begriffe sinkt, wenn sie gleich durch die Hülfe der Zahlwissenschaft erhoben wird“. — *e.* Ich schliesse mit den noch gegenwärtig zutreffenden Worten von **Lambert**: „In Ansehung des ganzen Weltbaues scheinen wir dermalen das zu sein, was vor Zeiten **Pythagoras**, **Philolaus**, **Nicetas** und andere griechische Weltweise in Absicht auf unser Sonnensystem waren. Wir erwarten noch die **Coppernicus**, **Kepler's** und **Newton's** für den ganzen Weltbau, und können nur eine ähnliche Vorherverkündigung entwerfen, wie sie **Seneca** (vgl. 279) in Absicht auf die Cometen getroffen hat“.

300. Die Dauer des Weltgebäudes. — Nach den Ergebnissen der Mechanik des Himmels ist im Weltgebäude von einer weisen Hand Alles so geordnet, dass zunächst das Princip der Erhaltung vorherrscht; aber wir beobachten auch Lebenserscheinungen, und wo wir Leben sehen, finden wir nicht minder Tod und Wiedergeburt, — also wird mutmasslich dennoch nach Tausenden von Jahrtausenden unsere jetzige Welt absterben, um einer neuen Platz zu machen. Wann dies statthaben und was folgen wird, wissen wir allerdings ebensowenig als wann und wie unser gegenwärtiger Wohnplatz geschaffen wurde [a], — wissen wir ja kaum, wohin unser Schiff heute treibt, geschweige was die Räume bergen, denen wir morgen zusteuern; aber wir dürfen dennoch getrost auf dem unbekannten Weltmeere fahren, denn wir besitzen, wenn nicht aller Anschein trügt, ein noch ganz solides Schiff und vor allem aus einen bewährten Fährmann. — Ich schliesse mit den diese Gedanken noch etwas weiter ausführenden Worten, welche mein unvergesslicher Lehrer **Littrow** in dem betreffenden Abschnitte seiner klassischen „Wunder des Himmels“ gebrauchte [b]: „Alles was Körper und sonach sterblich ist, eilt, wenn es seine Zeit gedauert und seine Bestimmung erfüllt hat, der Auflösung entgegen, von der es durch keine Kraft zurückgehalten werden kann. Sowie auf den Gipfeln unserer Berge und in den Abgründen der Erde die Versteinerungen und Überreste der Thiere und Pflanzen einer längst verschwundenen Vorwelt zerstreut liegen, so werden auch einst die morschen Trümmer des grossen himmlischen Baues in dem Weltraume zerstreut werden. Die Sonne wird erlöschen und die zahllosen Sterne des Himmels werden vergehen, und an ihrer Stelle werden sich andere erheben, die auch wieder, wenn sie ausgeblüht haben, abfallen werden, wie welke Blätter, mit denen die Winde spielen, und dieselbe Welle, die sie so lange getragen, und endlich auch heruntergezogen hat in die Tiefe des Weltenmeeres,

dieselbe Welle wird aus dem Abgrunde der ewigen Nacht andere Sonnen und Sterne heraufführen, immer neue Schöpfungen, im ewigen Wechsel, von immer neuem Untergange gefolgt. **Einer** nur, den kein Name nennt, steht hoch und unverändert über diesem Ocean der Welten, der zu den Füssen seines Thrones wogt, — Er allein kennt keinen Wechsel, keine Grösse ausser sich, — und Er, vor dem der Tod einer ganzen Welt gleich dem einer Milbe ist, wird, von allem, was da war und werden wird, allein unwandelbar und ewig bleiben".

Zu 300: *a.* Nach Jakob **Müller** (Seen bei Winterthur 1846 — Zürich 1875; Prof. phys. Zürich; vgl. Zürch. Viert. von 1875) scheint aus den grossen mechanischen Principien der neuesten Zeit zu folgen, dass sich die Planeten nach und nach der Sonne nähern, aber auch gleichzeitig sich verflüchtigen werden, — ja dass überhaupt die unsere jetzigen Welten bildende Materie nach ungezählten Jahrtausenden in den Urzustand der Zerstreuung zurückkehren dürfte, um von da aus bei einer Neubildung Verwendung zu finden. — *b.* Ich ziehe vor, diese später (wenigstens in der 7. A. durch Weiss) etwas abgeänderte Stelle hier in der ursprünglichen Fassung zu geben.

XII. Die Zeitrechnung.

Geh' jede Stunde einen Schritt, aber geh' diesen Schritt jede Stunde, so wirst du bald an's Ziel gelangen. *(Börne.)*

301. Die Zeitrechnung der ältesten Völker. — Die ältesten Völker scheinen übereinstimmend ihre Zeitrechnung nach dem Mondlaufe geordnet und ihren sog. **Monat** je mit dem Tage begonnen zu haben, an welchem sie Abends die Mondsichel zum ersten Male wahrnehmen konnten. Der Monat wurde anfänglich zu 30 Tagen gerechnet, und 12 solche Zeitabschnitte bildeten ein **Jahr**, das somit 360 Tage hielt, jedoch von den verschiedenen Völkern nicht gleichzeitig begonnen wurde: So legten die Chinesen den Jahresanfang auf den ersten Monat nach dem Wintersolstitium, die Griechen dagegen auf den ersten Monat nach dem Sommersolstitium, und die Römer auf den Monat, in welchen das Frühlingsequinoktium fiel [a].

Zu 301: *a.* Bei den Griechen und Römern war es üblich, das erste Sichtbarwerden der Mondsichel öffentlich auszurufen, und es hängt wohl hiemit der von ihnen noch später für jeden ersten Monatstag gebrauchte Name **Calendæ** (von καλεῖν = calare = ausrufen) zusammen, sowie mit diesem der nachmals für die Vorausbestimmung der Ausrufstage und das damit Zusammenhängende übliche Name **Kalender**, der sodann auch auf uns übergegangen ist.

302. Die Schaltmonate und der Meton'sche Cyklus. — Es brauchte weder lange Erfahrung, noch sehr grosse Aufmerksamkeit, um zu bemerken, dass der Mondwechsel nicht volle 30, sondern nur wenig mehr als $29^1/_2$ Tage beansprucht, und so ist es ganz begreiflich, dass dieselben alten Völker, deren erste Zeitrechnung unter der vorhergehenden Nummer besprochen wurde, dieselbe bald in der Weise abänderten, dass sog. **volle** Monate von 30 Tagen regelmässig mit sog. **leeren** Monaten von 29 Tagen wechselten, wodurch in der That der Monat durchschnittlich nahe die richtige Länge erhielt [a]. Da aber auf diese Weise die 12 Monate nur

noch $6 \times 30 + 6 \times 29 = 354$ Tage zählten, während der Wechsel der Jahreszeiten mindestens 365 Tage erforderte, so trat nach wenigen Jahren eine fühlbare Verschiebung der letztern ein, der man nun durch zeitweiliges Einschieben von sog. **Schaltmonaten** immer besser zu begegnen suchte [b], bis endlich der bei den Griechen 433 v. Chr. durch **Meton** eingeführte Cyklus von 235 auf 19 Jahre verteilten Monaten als der bestmögliche Kompromiss zwischen den Zeitrechnungen nach Mond und Sonne erschien [c]. — Dieser **Meton'sche Mondzirkel** von 19 Jahren ist noch jetzt für manche Untersuchungen wertvoll und man hat sich verständigt, das Jahr 1 v. Chr. oder also das Jahr 0 unserer Zeitrechnung, in welchem der Neumond auf den Jahresanfang fiel, als Ausgangspunkt für denselben zu wählen, so dass man nach

$$g = \left[\frac{n+1}{19}\right] = \alpha + 1 \qquad \text{wo} \qquad \alpha = \left[\frac{n}{19}\right] \qquad \mathbf{1}$$

ist, leicht die sog. **goldene Zahl** berechnen kann, d. h. das wievielte Jahr im Mondzirkel dem Jahre n unserer Zeitrechnung entspricht [d].

Zu 302: *a.* Bei den Griechen scheinen die vollen und leeren Monate zwischen der Zeit von **Hesiod** (um 850), wo noch das frühere System im Gebrauche gewesen sein soll, und der Zeit von **Solon** (um 600), wo bereits von Schaltmonaten die Rede war, eingeführt worden zu sein. — *b.* Zuerst wurde jedem zweiten Jahre ein voller Monat beigefügt; da aber hiedurch die Länge von Jahr und Monat durchschnittlich auf

$$J = \frac{354 \times 2 + 30}{2} = 369^d{,}00 \qquad M = \frac{354 \times 2 + 30}{12 + 13} = 29^d{,}52$$

gebracht wurden, so musste auch diese sog. **Trieteris** (von διὰ τρίτου ἔτους = tertio quoque anno = jedes zweite Jahr) bald als ungenügend erscheinen, und in der That ersetzte man sie (etwa 500) durch eine **Octaeteris**, bei welcher jedes 3., 5. und 8. Jahr einen vollen Schaltmonat erhielt, somit

$$J = \frac{354 \times 8 + 30 \times 3}{8} = 365^d{,}250 \qquad M = \frac{354 \times 8 + 30 \times 3}{12 \times 8 + 3} = 29^d{,}515$$

wurde, und in der That ein grosser Fortschritt erreicht war. — Dass **Eudoxus** (um 360) bei Einführung der Octaeteris mitgewirkt habe, ist entschieden unrichtig, da diese schon mindestens ein halbes Jahrhundert vor ihm bereits wieder durch den Mondzirkel verdrängt war; und ebenso beruht wohl auch die Angabe, er habe bei den Griechen die Übung eingeführt, jedem 4. Jahre einen Tag einzuschalten, auf einem Missverständnisse, da die Griechen weit über ihn hinaus dem Mondzirkel treu blieben. — *c.* Der durch die Octaeteris gegebene Wert von J war, wie wir jetzt wissen, ein wenig zu gross, der von M sogar merklich zu klein, und so entstand doch nach und nach wieder eine Verschiebung, welche den Griechen lästig fiel und sogar von **Aristophanes** auf dem Theater verspottet wurde. Folgte nun der Vorschlag von **Meton** (um 450 v. Chr. Mathematiker in Athen; vgl. „Redlich, Der Astronom Meton und sein Cyclus. Hamburg 1854 in 8."), auf 19 Jahre 7 Schaltjahre (nach Ideler mutmasslich die Jahre 3, 5, 8, 11, 13, 16, 19) einzuführen, und von den sich

so ergebenden $12 \times 12 + 13 \times 7 = 235$ Monaten 125 voll und 110 leer zu nehmen, so dass der Cyklus $125 \times 30 + 110 \times 29 = 6940^d$ erhielt, ferner im Mittel

$$J = \frac{6940}{19} = 365^d,263 \qquad M = \frac{6940}{235} = 29^d,532$$

wurde, das Jahr sich somit etwas verschlechterte, der Monat aber allerdings erheblich verbesserte. — Da das Jahr damals allgemein zu $365\frac{1}{4}^d$ angenommen wurde, so erschien der Meton'sche Cyklus wegen $365\frac{1}{4} \times 19 = 6939\frac{3}{4}^d$ um $\frac{1}{4}^d$ zu lang, und dies brachte etwa 330 v. Chr. **Kalippus** auf den Gedanken, eine Periode von $4 \times 19 = 76^a$ vorzuschlagen, in welcher man je einen Tag auszuschalten, d. h. einen der vollen Monate zu einem leeren zu machen habe, wodurch

$$J = \frac{6940 \times 4 - 1}{19 \times 4} = 365^d,250 \qquad M = \frac{6940 \times 4 - 1}{235 \times 4} = 29^d,531$$

und damit wirklich praktisch ziemlich genügende Werte erhalten wurden. Als daher **Hipparch** später vorschlug, die Kalippische Periode noch einmal zu vervierfachen und wieder einen Tag auszuschalten, wodurch die noch richtigern Werte $J = 365^d,24671$ (statt 365,24220) und $M = 29^d,53058$ (statt 29,53059) dargestellt worden wären, fand man es überflüssig, dies wirklich auszuführen. — Sehr interessant ist es, dass beide Verbesserer den Takt hatten, die Gleichsetzung von 19 Jahren und 235 Monaten nicht anzutasten; denn da

$$\frac{29,53059}{365,24220} = 1 : [12, 2, 1, 2, 1, 1, 17 \ldots] = \frac{1}{12}, \frac{2}{25}, \frac{3}{37}, \frac{8}{99}, \frac{11}{136}, \frac{19}{235}, \frac{334}{4131} \ldots$$

so ist in der That $\frac{19}{235}$ eine ganz vorzügliche Annäherung. Übrigens kommen in der Reihe der Näherungsbrüche auch die $\frac{1}{12}$, $\frac{3}{25}$ und $\frac{8}{99}$ vor, welche den drei ersten Annäherungen entsprechen. — Der Meton'sche Cyklus stimmt mit der Periode **Tschong** überein, welche nach den einen Historikern schon um 2620 v. Chr. durch **Hoang-ti** in China eingeführt, nach andern dagegen erst viel später aus Griechenland importiert wurde. Wenn es jedoch richtig ist, dass schon die Chaldäer auf 600 Jahre 7421 Monde rechneten, so dürfte man, da, wegen $600 \times 235 = 141000$ und $7421 \times 19 = 140999$, sehr nahe $600 : 7421 = 19 : 235$ ist, auch mutmassen, es stehe sowohl der Meton'sche Cyklus als der Tschong der Chinesen mit jener chaldäischen Errungenschaft in Beziehung. — *d.* Der Name **goldene Zahl** (numerus aureus, nombre d'or) rührt nach den einen davon her, dass der Meton'sche Cyklus am Minerva-Tempel in Athen mit goldenen Lettern an schwarzem Marmor aufgezeichnet worden war, — nach andern von der Gewohnheit der Mönche, dieselbe in ihren Kalendarien um ihrer Wichtigkeit willen mit Gold aufzutragen.

303. Die Zeitrechnung der Mohammedaner und Juden. — Die Mohammedaner und Juden halten sich noch jetzt an das ursprüngliche Mondjahr mit seinen 12 abwechselnd vollen und leeren Monaten [a], — jedoch mit dem Unterschiede, dass erstere mit dem entsprechenden Jahre von 354 Tagen ohne jede Rücksicht auf den Sonnenlauf fortrechnen, also einen beweglichen Jahresanfang haben und nur insoweit einzelne Schalttage anwenden, als es nötig ist, um die Monattage gegenüber den Mondphasen festzuhalten [b], — während letztere nicht nur Schaltmonate haben, um auch den Jahresanfang an eine bestimmte Jahreszeit zu knüpfen, sondern überdies

noch ziemlich komplizierte Regeln besitzen, nach welchen sie einzelne Tage ein- oder ausschalten [c].

Zu 303: *a.* Die zwölf Monate der Mohammedaner und Juden tragen nach Ideler folgende Namen:

Nro.	Mohammed. Monate	Dauer	Jüdische Monate	Jahrestage
1	Moharrem	30^d	Nisan (Nissan) . . .	1—30
2	Safar	29	Jjar (Jyar)	31—59
3	Rebî el-awwel . . .	30	Sivan	60—89
4	Rebî el-accher . . .	29	Thamus (Tamouz) . .	90—118
5	Dschemâdi el-awwel .	30	Ab	119—148
6	Dschemâdi el-accher .	29	Elui (Elloul)	149—177
7	Redschel	30	Thischri (Tisseri) . .	178—207
8	Schabân	29	Marcheschwan (Hervan)	208—236
9	Ramadân	30	Kislev (Kislew) . . .	237—266
10	Schewwâl	29	Thebeth (Tébeth) . .	267—295
11	Dsû'l-kade	30	Schebath (Schebat) .	296—325
12	Dsû'l-hedsche . . .	29	Adar	326—354

Der erste Tag, oder vielmehr nach arabischem Gebrauche die **erste Nacht** des Moharrem sollte mit einem solchen Sonnenuntergange beginnen, dass je nach demselben die Mondsichel zum ersten Male sichtbar war. Dabei wurde der Anfang der Zeitrechnung auf den 1. Moharrem desjenigen Jahres gelegt, in welchem Mohammed von Mekka nach Medina flüchtete, und dieser Aera der Name **Hedschra** (Aera der Flucht) beigelegt, und zwar soll dieser erste Moharrem dem 15. Juli des Jahres 622 der christlichen Zeitrechnung entsprechen. — Zur Zeit, wo bei den Juden ihr um 1500 v. Chr. lebender Gesetzgeber **Moses** das Mondjahr einführte, begann dasselbe ungefähr zur Zeit der Frühlingsnachtgleiche mit dem Monate Nisan oder dem Ährenmonate, — jedoch musste der Jahresanfang um einen Monat verschoben werden, wenn das Reifen der Gerste etwas verspätet einzutreffen schien, da am 15. Nisan reife Ähren geopfert werden mussten. Eine festere Ordnung erhielt der jüdische Kalender erst nach der Rückkehr aus der babylonischen Gefangenschaft (538 v. Chr.), und es scheinen auch erst damals die übrigen Monate, welche früher nur Ordnungsnummern besassen, ihre Namen erhalten zu haben, während gleichzeitig der Anfang des bürgerlichen Jahres auf den ersten Thischri verlegt wurde, der mit dem **Moled** (dem Neumonde oder vielmehr dem Sichtbarwerden der Mondsichel) zusammenfallen sollte. — *b.* Da der synodische Monat $29^d,5306$ hält, während der Rechnungsmonat der Mohammedaner nur $29^d,5$ beträgt, so ist letzterer um $0^d,0306$, also das Mondjahr um $0^d,367$ zu kurz, — eine Zahl, welche in 30 Jahren auf $11^d,01$ aufläuft, so dass im Verlaufe von 30 Jahren jeweilen 11 Tage eingeschaltet werden müssen, wenn die Zeitrechnung mit den Mondphasen im Einklange bleiben soll. Und in der That führten die Mohammedaner ziemlich frühe (jedenfalls kaum erst nach der Mitte des 18. Jahrhunderts, wo der Fehler bereits auf mehr als 400 Tage angelaufen wäre) eine solche 30jährige Schaltperiode ein, indem sie in den 11 Jahren 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26, 29 je den letzten Monat zu einem vollen machten. In diesem 30jährigen Cyklus betrugen somit

1ª...	354ᵈ	7ª...	2481ᵈ	13ª...	4607ᵈ	19ª...	6733ᵈ	25ª...	8859ᵈ
2	709	8	2835	14	4961	20	7087	26	9214
3	1063	9	3189	15	5315	21	7442	27	9568
4 ...	1417	10 ...	3544	16 ...	5670	22 ...	7796	28 ...	9922
5	1772	11	3898	17	6024	23	8150	29	10277
6	2126	12	4252	18	6379	24	8505	30	10631

— *c*. Die Juden korrigierten, wie bereits angegeben wurde, ihr ebenfalls 354^d haltendes **gemeines Jahr**, um es einigermassen mit den Jahreszeiten im Einklang zu erhalten, dadurch, dass sie (anfänglich zuweilen, etwa vom 4. Jahrhundert hinweg regelmässig in den Jahren 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19 des Mondzirkels) vor den Adar (der in diesem Falle „Veadar“ hiess) noch einen vollen Monat (ihren „Adar rischon“) einschoben, somit ein **Schaltjahr** von 384^d benutzten. Überdies liessen sie diese **regelmässigen** Jahre von 354 und 384^d mit **überschüssigen** Jahren von 355 und 385^d (wo dem Marcheschwan ein Tag zugelegt wurde) und mit **mangelhaften** Jahren von 353 und 383^d (wo der letzte Kislew wegfiel) abwechseln, und ihre Vorschriften, auf die wir zum Teil noch später (318) zurückzukommen haben werden, waren überhaupt nichts weniger als einfach. Vgl. für weitern Detail z. B. „Louis **Bridel** (Begnins 1759 — Lausanne 1821; Prof. theol. Lausanne), Traité de l'année juive antique et moderne. Basle 1810 in 8.“

304. Das Sonnenjahr der Egypter. — Aus der Sage, der Gott Thot habe im Brettspiele der Mondgöttin 5 Tage abgewonnen und sodann diese den bisherigen 360 Tagen des Jahres beigelegt, geht mit ziemlicher Sicherheit hervor, dass das älteste Jahr der Egypter ebenfalls ein Mondjahr von 12 Monaten à 30 Tage war, aber frühe mit einem Sonnenjahre von 365 Tagen vertauscht wurde [a]. Letzteres wurde dann auch noch beibehalten, als man sich längst bewusst war, dass dasselbe um etwa $^1/_4{}^d$ zu kurz sei, d. h. man adoptierte einen beweglichen Jahresanfang und begann wahrscheinlich mit dem Jahre 1322 v. Chr., wo nach Idelers Rechnung der Frühaufgang des Sirius auf unsern 20. Juli fiel, eine sog. **Hundssternperiode** (Sothische Periode) von $365 \times 4 = 1460$ Jahren à $365^1/_4{}^d = 1461$ egyptischen Jahren, nach deren Ablauf der Jahresanfang je wieder mit jenem Frühaufgang zusammenfallen sollte [b]. Ehe jedoch diese Periode voll abgelaufen war, und zwar wahrscheinlich im Jahre 238 v. Chr. [c], wurde beliebt, jedem vierten Jahre noch einen sechsten Ergänzungstag beizufügen, wodurch der nunmehr fest werdende Jahresanfang auf den 29. August kam [d].

Zu 304: *a*. Für die Namen der 12 egyptischen Monate vgl. d. — Dagegen ist zu erwähnen, dass nach **Ideler** schon die alten Mexikaner ein Sonnenjahr von 365^d benutzten, wobei sie jedem 52. Jahre noch 13 Tage einschalteten, so dass es im Mittel auf $365^1/_4{}^d$ gebracht wurde. Für weitern Detail wird auf „**Humboldt**, Vue des Cordillères et des monuments des peuples indigènes de l'Amérique. Paris 1810, 2 Vol. in fol.“ verwiesen. — Ebenso benutzten nach Moritz **Stern** (Frankfurt 1807 geb.; Prof. math. Göttingen, jetzt in Zürich

privatisierend) die Perser schon frühe ein Sonnenjahr von 12 Monaten à 30^d und 5 Supplementartagen, wobei sie je dem 120. Jahre einen Schaltmonat von 30 Tagen beifügten, so dass das Jahr im Mittel ebenfalls $365\frac{1}{4}^d$ hielt; jedoch soll dieser Schaltmonat von 636 n. Chr. hinweg vergessen worden sein. — *b.* **Biot** machte in seinem „Mémoire sur divers points d'astronomie ancienne et sur la période sothiaque (Mém. Par. 1845)" darauf aufmerksam, dass zwar gegenüber der richtigen Jahreslänge die 1460 auf 1505^a erhöht werden müssten, dass dagegen die Rechnung für die Zwischenzeit zweier helischen Aufgänge des Sirius, unter Voraussetzung, sie treten bei 11° Depression der Sonne ein und werden in Egypten beobachtet, für mehrere Jahrtausende fast genau $365\frac{1}{4}^d$ ergebe, also die Periode von 1460^a sich in Beziehung auf diesen Stern vollkommen rechtfertige. — Vgl. auch „**Oppolzer**, Über die Länge des Siriusjahres und der Sothisperiode (Wien. Anz. 1884)". — *c.* Eine 1866 durch **Lepsius** und seine Gefährten bei dem Dorfe San in Unter-Egypten auf einem Steine gefundene Inschrift soll bezeugen, dass von 238 v. Chr. hinweg jedem 4. Jahre ein 6. Ergänzungstag beigefügt und als Fest der „Wohlthätigen Götter" begangen wurde. — *d.* Als die sog. **Nabonnassar'sche Zeitrechnung** mit beweglichem Jahresanfange, auf welche wir noch später (315) zurückkommen werden, durch die sog. **Alexandrinische Zeitrechnung** mit festem Jahresanfange am 29. August ersetzt wurde, behielt man im übrigen die alten 12 Monate unverändert bei, und zwar begannen nunmehr dieselben

1. Thot	VIII 29	5. Tybi	XII 27	9. Pachon	IV 26
2. Paophi	IX 28	6. Mechir	I 26	10. Payni	V 26
3. Athyr	X 28	7. Phamenoth	II 25	11. Epiphi	VI 25
4. Choiak	XI 27	8. Pharmuti	III 27	12. Mesori	VII 25

so dass es sehr leicht fällt, ein alexandrinisches Datum in ein julianisches umzusetzen. (Vgl. 315.)

305. Die Zeitrechnung der alten Römer. — Die Nachrichten über die älteste Zeitrechnung der Römer sind sehr unsicher [a]; jedoch benutzten sie mutmasslich lange ebenfalls ein Mondjahr von 354 Tagen, wenn auch mit der sonderbaren Einrichtung, dass von den 12 Monaten

1. **Martius**	4. Junius	7. September	10. December
2. Aprilis	5. **Quintilis**	8. **October**	11. Januarius
3. **Majus**	6. Sextilis	9. November	12. Februarius

die vier fett gedruckten, sog. **grossen** Monate volle 31 Tage besassen, sieben andere 29 Tage zählten, und so für den letzten Monat nur 27 Tage übrig blieben [b]. Es hatte auf diese Weise offenbar erst je nach Ablauf eines Jahres gegenüber den Mondphasen eine Ausgleichung statt, obschon jeder Monat mit dem ersten Sichtbarwerden der Mondsichel (den Calendæ) beginnen sollte, und es war somit der Unordnung von vorneherein der schönste Vorschub geleistet [c]. Als dann überdies wünschbar erschien, das Jahr in eine gewisse Übereinstimmung mit dem Wechsel der Jahreszeiten zu bringen, und dies etwa 153 v. Chr. in nichts weniger als glücklicher

Weise, unter gleichzeitiger Verlegung des Jahresanfanges vom Idus Martii (März-Vollmond) auf die Calendæ Januarii, dadurch zu erreichen gesucht wurde, dass man in einem vierjährigen Cyklus je dem zweiten Jahre 22, je dem vierten aber 23 Tage zufügte, ergab sich eine noch grössere Konfusion, die es bald unumgänglich notwendig machte, eine gründliche Reform eintreten zu lassen [d].

Zu 305: *a.* Angaben wie z. B. diejenigen, dass das römische Jahr anfänglich nur aus den 10 Monaten März bis December bestanden und 304 Tage besessen habe, oder wieder, dass ihr Mondjahr 355 Tage zählte, beruhen ohne Zweifel auf Missverständnissen. — *b.* Die vier ersten römischen Monate sollen der Reihe nach dem Kriegsgotte Mars, — dem Sonnengotte Apollo mit dem Beinamen Aperta, — dem Jupiter mit dem Beinamen Majus (der Erhabene), — und der frühern Mondgöttin Juno gewidmet gewesen sein; Januar sollte an den Zeitengott Janus oder Janno, Februar an den Todtengott Pluto oder Februus erinnern. — Die 31 und 29 der Römer, gegenüber den 30 und 29 der übrigen Völker, sollen daher rühren, dass jeder Monat nach ihrer Meinung einen Mittel-Tag besitzen musste. — *c.* **Voltaire** schilderte diese perennierende Unordnung im römischen Kalender mit den Worten: „Les généraux romains triomphaient toujours, mais ils ne savaient pas quel jour ils triomphaient“. — *d.* Diese Einschaltung wurde in der Weise vorgenommen, dass der Februar mit dem auf den 23. desselben fallenden Feste der Terminalien abgebrochen und aus den restierenden 4 Tagen in Verbindung mit den 22 oder 23 Supplementartagen ein Schaltmonat, der sog. **Mercedonius**, gebildet wurde.

306. Der julianische Kalender. — Als **Julius Cäsar** [a] im Jahre 707 der Stadt Rom (47 v. Chr.) von seinem Feldzuge nach Egypten zurückkehrte, entschloss er sich sofort zu der längst nötigen Kalenderverbesserung und führte dieselbe nach Beratung mit **Sosigenes** [b] schon im folgenden Jahre, dem sog. „Jahre der Verwirrung“ oder eigentlich dem letzten Jahre der Verwirrung, in folgender Weise durch: Zunächst verordnete er, dass dem Jahre 708 der Stadt (46 v. Chr.), um den durch Unachtsamkeit und Willkür nach und nach zu vollen 85 Tagen aufgelaufenen Fehler zu heben, ausser dem gewöhnlichen Schaltmonate noch zwei andere eingefügt werden, — sodann führte er, ohne weitere Rücksicht auf den Mond zu nehmen, einen Cyklus ein, in welchem drei **gemeinen Jahren** von 365^d je ein durch Zulage eines Schalttages auf 366^d gebrachtes sog. **Schaltjahr** folgte [c], — und setzte überdies fest, wie unter Beibehaltung des (305) bereits auf den 1. Januar verlegten Jahresanfanges die auf solche Weise jedem Jahre beigelegten 11 Tage unter die bisherigen Monate zu verteilen seien [d], und wie es mit dem Schalttage gehalten werden solle [e]. Dieser ungemein einfache und praktische sog. **julianische Kalender** lebte sich sehr bald ein, ging infolge der damaligen Machtstellung Roms ziemlich rasch auch auf andere Völker über und würde wohl längst Gemeingut aller

Kulturvölker geworden sein, wenn er nicht später (308—9) bei einzelnen derselben durch eine damals noch ziemlich unnötige und ihn mancher seiner Vorzüge beraubende Flickarbeit etwas abgeändert und so eine neue Dissonanz hervorgerufen worden wäre.

Zu 306: *a.* Cajus **Julius Cäsar** (Rom 100 — ebenda 44) wurde schon im Jahre 74 zum Pontifex maximus (Kultusminister, dem auch das Kalenderwesen unterstellt war) erwählt und zeichnete sich nicht nur als Staatsmann und Feldherr, sondern auch als Redner und Schriftsteller aus. — *b.* Wahrscheinlich wurde Cäsar mit dem Schaltverfahren der Egypter (304) und auch mit dem damals mutmasslich in Alexandrien lebenden Astronomen **Sosigenes** schon auf seinem egyptischen Feldzuge bekannt. Ob er letztern nur dort beriet oder mit sich nach Rom nahm, weiss man nicht sicher, dagegen ist anzunehmen, dass der Fachmann zunächst die Grösse des aufgelaufenen Fehlers bestimmte, während Cäsar selbst die eigentümliche Anpassung des neuen Kalenders an den alten besorgte. — *c.* Nach Cäsars Ermordung wurde 36 Jahre lang, aus Missverständnis seiner wahrscheinlich „quarto quoque anno" lautenden Schalt-Vorschrift, jedem dritten Jahre ein Schalttag beigeordnet, dann aber auf Anordnung seines Adoptivsohnes und Erben **Augustus** (63 v. Chr. bis 14 n. Chr.) der neue Fehler dadurch wieder vollständig gehoben, dass die nächsten 12 Jahre gar keinen Schalttag erhielten. — *d.* Von den 11 Tagen gab Cäsar an die Monate Januar, Februar und Dezember je zwei, — an die Monate April, Juni, Sextilis, September und November dagegen je einen Tag ab; als dann aber, nachdem schon etwas früher Augustus dem Quintilis den wohlverdienten Namen „Julius" gegeben hatte, durch Senatsbeschluss der Sextilis aus Schmeichelei den Namen „Augustus" erhielt, wurde dem Februar wieder ein Tag genommen und dem August beigelegt, um diesen ebenbürtig mit dem Juli zu machen. — Der erste Tag jedes Monats führte wie früher den Namen **Calendæ**, — der 7. (in den 4 alten grossen Monaten) oder 5. (in den übrigen) Monatstag hiess **Nonæ**, — der 15. oder 13. **Idus**; die Tage nach den Calenden, Nonen und Iden endlich erhielten nach ihrem Abstande von den folgenden Nonen, Iden und Calenden Nummern, jedoch so, dass der einer solchen Epoche unmittelbar vorausgehende Tag (der auch den Specialnamen „Pridie" führte) als zweiter, und so z. B. der 17. Januar als „Dies decimus sextus ante Calendas Februarias" bezeichnet wurde. Vgl. auch Tab. XI[b]. — *e.* Der **Schalttag** wurde an Stelle des frühern Schaltmonats vor dem 24. Februar oder dem „Dies sextus ante Calendas Martias", der somit zum 25. wurde, eingereiht, und nun im Schaltjahre der 24. Februar als „bis sextus" bezeichnet, — entsprechend letzteres „Annus bissextilis" genannt.

307. Die Zeitrechnung der christlichen Völker. — Die Zählung der Jahre vollzog sich bei den ersten Christen meistens nach römischem Gebrauche „ab urbe condita", doch liefen daneben auch manche andere Übungen [a], so dass nach und nach ein ziemlicher Wirrwarr entstand, zu dessen Beseitigung sodann der Scythe **Dionysius** exiguus [b] im Jahre 527 unserer gegenwärtigen Zeitrechnung vorschlug, eine **christliche** Zeitrechnung einzuführen, und zwar die Jahre von der Fleischwerdung oder Empfängnis Christi (ab incarnatione Domini) aus zu zählen, d. h. das **erste** Jahr mit dem

25. März des Jahres 753 nach Gründung der Stadt Rom zu beginnen [c]. Dieser Vorschlag wurde im allgemeinen gut aufgenommen, nur war man nicht überall mit der Auffassung des Dionysius bezüglich der Fleischwerdung einverstanden und nahm wohl seine Jahreszahl an, nicht aber den vorgeschlagenen Jahresanfang, der in der mannigfaltigsten Weise wechselte [d], bis man endlich allgemein wieder zu dem römischen Gebrauche zurückkehrte, das Jahr mit dem ersten Januar zu beginnen [e]. — Die zwölf römischen Monate scheinen immer unangefochten geblieben zu sein [f], während man sich sonst auf diesem Gebiete, wo jeder glaubte mitreden zu können, über alles mögliche herumstritt [g].

Zu 307: *a.* Einzelne zählten von der Christenverfolgung unter Diokletian aus, — die Spanier von der Eroberung ihres Landes durch die Römer, — etc., während im oströmischen Reiche die Zählung nach Olympiaden (313) fortgeführt wurde. — *b.* **Dionysius**, der um seiner kleinen Gestalt willen den Beinamen „exiguus“ erhielt, war Abt eines römischen Klosters und starb 556 n. Chr. — *c.* Der von **Dionysius** etwa 527 n. Chr. gemachte Vorschlag wurde 607 durch Papst Bonifacius IV. acceptiert, bürgerte sich bald in Italien und Frankreich, und sodann nach und nach auch in den andern Ländern ein, — wohl am spätesten, nämlich erst 1415, in Portugal. Allerdings ist später durch verschiedene, so z. B. durch **Kepler** in seinen beiden Schriften „De Jesu Christi servatoris nostri vero anno natalitio. Francofurti 1606 in 4., und: Widerholter Aussführlicher Teutscher Bericht, Das unser Herr und Hailand Jesus Christus nit nuhr ein Jahr vor dem Anfang unserer heutiges Tags gebreuchigen Jahrzahl geboren sey, sondern fünff gantzer Jahr. Strassburg 1613 in 4. (lat. Francof. 1614)“, nachgewiesen worden, dass **Dionysius** etwas fehlgriff; aber zum Glücke ist dies von sehr untergeordneter Bedeutung, da der Ausgangspunkt der Zählung seiner Natur nach ganz willkürlich ist und nur eine allgemeine Verständigung über denselben notwendig war. — *d.* Neben dem durch **Dionysius** als Jahresanfang gewählten 25. März (Empfängnis) war namentlich auch der 25. Dezember (Weihnacht) im Gebrauch, und zwar so, dass z. B. Frankreich und England früher den 25. Dezember und später den 25. März benutzten, während Deutschland vom 25. März auf den 25. Dezember überging, ja wohl in einzelnen Ländern neben dem in der bürgerlichen Zeitrechnung noch immer gebrauchten römischen Jahresanfange auch andere mitliefen. — *e.* Der Jahreswechsel wurde in Frankreich gesetzlich 1566 auf den 1. Januar verlegt, in den Niederlanden 1575, in Schottland 1599, etc., am spätesten in England, nämlich erst 1752; in andern Ländern machte sich die Sache nach und nach von selbst, so z. B. in Deutschland und der Schweiz im Verlaufe des 15. und 16. Jahrhunderts: Da Konr. **Gessner** in seiner Beschreibung des Nordlichts von 1560 XII 27 (vgl. 229) ausdrücklich sagt, dasselbe sei „beim Beginn des Jahres 1561 am dritten Tage nach der Geburt des Herrn“ gesehen worden, so ist somit sicher, dass damals in Zürich noch üblich war, das Jahr mit Weihnacht zu beginnen; ebenso geht aus der früher (7: f) erwähnten „Teutsch Astronomei“ von 1545 hervor, dass zur Zeit ihres Erscheinens derselbe Jahresanfang auch wenigstens in einem Teile von Deutschland gebraucht wurde; etc. — *f.* Auch **Karl der Grosse** wollte (vgl. „F. Piper: Karl der Grosse, Kalendarium und Ostertafel. Berlin 1858 in 8.“) die zwölf römischen Monate bei-

behalten wissen, ihnen jedoch, mit März beginnend, die Namen „Lentzimânoth, Ostarmânoth, Wunnimânoth, Brachmânoth, Hewimânoth, Aranmânoth, Herbistmânoth, Windumemânoth, Witumânoth, Heilagmânoth, Wintarmânoth, Hornunc" beilegen, von welchen sich einige neben den römischen in den Ländern deutscher Zunge bis auf jetzt erhalten haben. — *g.* Anhangsweise mag noch erwähnt werden, dass schon am Ende des 17. und dann wieder am Ende des 18. Jahrhunderts leidenschaftlich darüber diskutiert wurde, ob 1700, respektive 1800, das alte Jahrhundert abschliesse oder das neue beginne: Beide Male wurde schliesslich, wie es offenbar schon durch den Sprachgebrauch und alle Analogien angegeben ist, das Jahr 1 als das erste des Jahrhunderts angenommen.

308. Die gregorianische Kalenderreform. — Die Kirchenversammlung in Nicäa hatte A. 325 im Einverständnisse mit Kaiser Konstantin festgesetzt, dass die Frühlingsnachtgleiche beständig auf den 21. März zu fallen habe, und dieser willkürlichen Vorschrift konnte das etwas zu grosse julianische Jahr allerdings auf die Dauer nicht genügen [a], — sondern es hatte eine immer grössere Verschiebung statt, welche bald auch in der sog. Festrechnung (316) bemerklich wurde und erst leise, dann immer lautere, meist von betreffenden Vorschlägen begleitete Wünsche nach einer sog. Kalenderverbesserung hervorrief [b]. Nachdem letztere jahrhunderte lang und auch unbeschadet ohne Erfüllung geblieben waren, entschloss sich endlich Papst **Gregor** XIII [c], der fortwährenden Verschleppung dadurch ein Ende zu machen, dass er durch eine von 1582 III 1 datierte Bulle anbefahl: **1)** die Tage X 5—14 des laufenden Jahres aus dem Kalender zu streichen, um den bisdahin auf 10 Tage angewachsenen Fehler zu heben, und **2)** jedem nicht durch 4 teilbaren Sekularjahre (wie 1700, 1800, 1900) den Schalttag zu nehmen, um dadurch das Entstehen eines neuen bemerklichen Fehlers auf Jahrtausende hinauszurücken [d]. Wir werden unter der folgenden Nummer hören, was Gregor mit seiner Bulle erreichte, und wollen hier vorläufig nur an das früher (306) zunächst mit Beziehung auf diese sog. **gregorianische Kalenderreform** gesagte erinnern, immerhin anerkennend, dass der durch dieselbe dem julianischen Kalender aufgesetzte Flick, wenn auch hässlich und verfrüht, doch wenigstens haltbar war und voraussichtlich noch lange halten wird [e].

Zu 308: *a.* Da 365,25 — 365,24220 = 0,00780 $\fallingdotseq {}^{1}/_{129}{}^{d}$, so traf die Frühlingsnachtgleiche schon um die Mitte des folgenden Jahrhunderts III 20 ein und dann immer früher und früher. — *b.* Schon im 8. Jahrhundert glaubte **Beda**, sowie im 13. Jahrhundert Roger **Baco** eine Verbesserung vorschlagen zu sollen, und eine betreffende Abhandlung des letztern soll noch jetzt als Manuskript in Oxford existieren. Dann plädierte wieder Pierre **d'Ailly** (Compiegne 1350 — Avignon 1425?; Kanzler der Universität Paris und Kardinal-Legat für Deutschland) teils 1414 vor dem Konzil zu Konstanz, teils in einer dem Papste übergebenen Abhandlung „De correctione Calendarii (Opuscula

1480)" für eine solche, — und auch der Kardinal **Cusanus** suchte sie 1436 durch seinen „Tractatus de reparatione Calendarii (Opera 1565)" dem Basler Konzil zu belieben, dabei den bestimmten Vorschlag machend, dem auf 1439 V 24 fallenden Pfingstsonntag sofort VI 1 als Pfingstmontag folgen zu lassen, und künftig je dem 304. Jahre den Schalttag zu nehmen. Papst **Sixtus** IV. (von 1471—84 Inhaber des heil. Stuhles und sonst als Beförderer der Inquisition etc. nicht gerade in gutem Andenken) wollte dann wirklich die gewünschte Kalenderreform ausführen und liess 1475 **Regiomontan** zur nötigen Vorberatung nach Rom kommen; da aber letzterer bald nach seiner Ankunft starb, blieb die Sache wieder liegen, und als dann 1516 das lateranische Konzil für die Reform eine eigene Kommission niedersetzte, wandte sich diese zwar an **Coppernicus** und **Stöffler** um Rat und Beistand, — erhielt auch von letzterm den bemerkenswerten, von demselben nachmals in seinem „Calendarium magnum romanum. Oppenheym 1518 in fol. (zum Teil auch deutsch 1522)" noch weiter ausgeführten Vorschlag, den aufgelaufenen Fehler **allmälig** durch Weglassen der nächsten 10 Schaltjahre zu heben, und dem Auflaufen eines neuen Fehlers dadurch vorzubeugen, dass man künftig alle 132 Jahre einen Schalttag ausfallen lasse, — kam aber wegen der kurzen Dauer des Konzils doch nicht dazu, den erhaltenen Auftrag zu erledigen. Ebensowenig Erfolg hatte Mich. **Stifel**, als er 1545 in seiner „Deutschen Arithmetica", unter Annahme, es sei das julianische Jahr um $18^m = {}^1/_{80}{}^d$ zu lang, den Vorschlag machte, einen Cyklus von 80 Jahren einzuführen und je dem letzten Jahre den Schalttag zu nehmen. — *c.* Hugo **Buoncompagni** (Bologna 1502 — Rom 1585) war erst Prof. jur. Bologna, dann Kardinal und bestieg 1572 als **Gregor** XIII. den päpstlichen Stuhl. — *d.* Es war die Inswerksetzung eines Vorschlages, welchen Luigi **Lilio** (Ciro in Kalabrien 1520? — Rom 1576; Arzt in Rom) kurz vor seinem Tode dem Papste gemacht, sodann sein Bruder Antonio noch weiter ausgearbeitet und 1577 in einem „Compendium novæ rationis restituendi Calendarium" neuerdings vorgelegt hatte. Der Papst hatte diesen Vorschlag, „um eine Allen gemeinsame Sache nach dem Rate Aller zu vollenden", verschiedenen Universitäten und Fürsten zur Begutachtung und Kenntnisnahme mitgeteilt, und, nach Eingang einer Reihe beifälliger Antworten, von einer aus dem Kardinal **Sirtelli,** dem Spanier Petrus **Ciaconius,** dem Deutschen Christoph **Clavius** und dem Italiener Ignatio **Danti** bestehenden Kommission nochmals prüfen lassen und konnte so wirklich glauben, zur Ausführung berechtigt zu sein. Es wurde dadurch der julianische Bruch $^1/_4$ auf $^1/_4 - {}^3/_{400} = 0{,}24250$ gebracht, somit ein mittleres Jahr von 365,24250 erstellt, welches von dem jetzt angenommenen tropischen Jahre 365,24220 nur noch um $^3/_{10000}$ eines Tages abweicht, also erst nach $3^1/_3$ Jahrtausenden einen neuen Fehler von einem Tage bewirken kann; aber dennoch wäre es, wenn einmal um jeden Preis eine Verbesserung angebahnt werden sollte, rationeller gewesen, sich statt dieser Flickarbeit aus

$$0{,}24220 = 1 : [4, 7, 1, 3, \ldots] = {}^1/_4, {}^7/_{29}, {}^8/_{33}, {}^{31}/_{128}, \ldots$$

statt dem ersten Näherungsbruche den dritten $^8/_{33} = 0{,}24242$ auszuwählen, welcher in der 12 mal kürzeren Zeit von 33 Jahren ein noch merklich genaueres mittleres Jahr produziert hätte. Es ist bemerkenswert, dass dieser Cyklus von 33 Jahren schon 1079 durch den Persier **Omar-Cheian** (oder nach Wöpcke richtiger: Omar ben Ibrahim Alkhayyami) einzuführen versucht wurde und auch genau das leistet, was **Stöffler** mit seinem vierfachen Cyklus von 132 Jahren erreichen wollte. — *e.* Für weitern Detail vergleiche „**Fasbender,** Darstellung des Wesens und der Geschichte des Gregorianischen Kalenders.

Barmen 1851 in 4., — Wilh. **Sidler**, Der Kalender (Jahresb. von Einsiedeln 1871/2), — Ferd. **Kaltenbrunner**, Die Vorgeschichte des gregorianischen Kalenders. Wien 1876 in 8., — etc."

309. Der Kalenderstreit und der sog. Reichskalender. — Während in den meisten katholischen Ländern die gregorianische Reform bald, wenn auch da und dort nur mit Widerstreben, Eingang fand, so hielt dagegen die griechische Kirche und auch die grosse Mehrzahl der Protestanten vorläufig am alten Kalender fest, da sie die Notwendigkeit einer Änderung, sowie die Zweckmässigkeit des dafür angenommenen Modus bestritten und sich namentlich auch nicht dazu verstehen wollten, eine von Rom aus diktierte Verordnung anzuerkennen [a]. Da aber das Nebeneinanderbestehen der beiden Kalender an benachbarten Orten, ja bei paritätischer Bevölkerung sogar in demselben Lande, den Verkehr störte und auf die Dauer absolut unhaltbar war, so verstanden sich endlich vom Ende des 17. Jahrhunderts hinweg nach und nach auch die protestantischen Länder dazu, sei es direkt den gregorianischen Kalender, sei es unter dem Namen **Reichskalender** eine ihm wesentlich ganz entsprechende Reform einzuführen [b]. Noch etwas später liess man mit den noch bestehenden kleinen Unterschieden auch letztern Namen fallen [c] und so erhielt gegen das Ende des 18. Jahrhunderts der gregorianische Kalender, mit Ausnahme der griechischen Kirche, in der ganzen Christenheit Geltung, — allerdings abgesehen von einer momentanen Störung, mit welcher wir uns unter der folgenden Nummer befassen werden [d].

Zu 309: *a.* Ganz entsprechend der Bulle, oder wenigstens noch vor Abschluss des Jahres 1582, wurde der neue Kalender in Frankreich, Lothringen, den Niederlanden, Spanien, Portugal, Dänemark, Riga, Böhmen, einem Teile von Italien und (vgl. Bull. Neuch. V) im Fürstentum Neuenburg eingeführt, — sodann 1583 in Luzern, Uri, Schwyz, Unterwalden, Freiburg und Luzern, — 1584 auf ausdrücklichen Wunsch Kaiser Rudolf II. in den katholischen Teilen Deutschlands, obschon sich die betreffenden Fürsten durch den etwas anmassenden Ton der Bulle verletzt fühlten, ferner in Appenzell, dessen Ausserrhoden jedoch 1590 wieder zum alten Kalender zurückkehrte, — 1585 in den sog. „gemeinen Herrschaften" der Schweiz, aber nur für die Katholiken, — 1586 in Polen, — 1587 in Ungarn, — und dann noch nachträglich 1622 im Wallis, sowie 1682 in Strassburg. Dabei ging es mancherorts, wie z. B. die Schrift „Benj. **Bergmann**, Die Kalenderunruhen in Riga. Leipzig 1806 in 8." zeigt, nicht ganz glatt ab, wozu Missverständnisse beitrugen; so wurde von manchen übersehen, dass die Reform die Wochentage nicht beschlage, und so z. B. Samstag dem 4. Oktober 1582 in beiden Kalendern ein **Sonntag** folge, nur dass dieser im neuen Kalender anstatt als 5. nunmehr als 15. Oktober zu numerieren sei, — nicht etwa (wie es beim wirklichen Ausfallen von 10 Tagen wegen $10 = 7 + 3$ in der That der Fall wäre) im neuen Kalender ein **Mittwoch.** — Die grosse Mehrzahl der Protestanten hielt dagegen am alten Kalender

fest: Einerseits hatte man natürlich nicht vergessen, dass derselbe Gregor kurz zuvor die Bartholomäusnacht durch ein Tedeum feiern liess, und hielt es auch für unpolitisch, „das man dem Babst die Macht wiederum gebe seines gefallens die Fasttäge in Ecclesia zu verändern, wie er will", — und anderseits fand man, dass die vorgeschlagene Reform, welche sogar die „lodeligen (beweglichen)" Feste bestehen lasse, anstatt z. B. Ostern für ein und alle mal auf den ersten Sonntag im April zu legen, keinen erheblichen Fortschritt repräsentiere, jedenfalls mehr Verwirrung als Nutzen zur Folge haben werde. **Wilhelm IV.** wollte in dem durch die Churfürsten von ihm erbetenen „Judicium" höchstens zugeben, dass man, um den jetzt für das bürgerliche Leben noch keineswegs störenden Fehler nicht noch mehr anwachsen zu lassen, im Jahre 1600 und dann in der Folge entsprechend Stöfflers Vorschlag je im 132. Jahre den Schalttag weglasse, und die meisten der damals erschienenen Streitschriften, von welchen ich beispielsweise „M. **Mästlin**, Aussführlicher und gründtlicher Bericht von der allgemeinen, und nunmehr bey sechtzehen Hundert Jaren, von dem ersten Keyser Julio biss auff jetzige unsere Zeit im gantzen H. Römischen Reich gebrauchter Jarrechnung oder Kalender. Sambt erklaerung der newen Reformation, welche jetziger Bapst zu Rom Gregorius XIII in demselben Kalender hat angestellet, und an vilen Orten eyngeführet, und was davon zu halten seye. Heydelberg 1583 in 4., und: B. **Leemann**, Bedenken über den nüwen Gregorianischen Kalender. Zürich 1584 in 4." anführe, sprachen sich entschieden gegen die Reform aus, — ja es war „Nicodemus **Frischlin** (Balingen in Würtemberg 1547 — Hohen-Urach 1590; erst Prof. poes. et hist. Tübingen, dann vagierend und zuletzt in Haft), De astronomia artis. Francof. 1586 in 8." fast die einzige nennenswerte Schrift, welche für dieselbe plädierte. — *b.* Leider wurde später übersehen, dass es sich nun nicht mehr darum handle, **ob und wie** man reformieren wolle, sondern ob es angegeben sei, eine bereits vielfach eingeführte Reform ebenfalls anzunehmen, um Übereinstimmung zu erzielen, und, da überdies die Katholiken durch Spottreden dazu beitrugen, den Handel zu verschärfen, gewissermassen den Kalender zu einem Religionsartikel zu machen, so blieben sogar die wiederholten Vermittlungsversuche des der Reform günstigen und bei beiden Parteien hochangesehenen **Kepler** ohne Erfolg, ja noch dessen für Kaiser Matthias verfasstes und überdies 1613 auf dem Reichstage zu Regensburg persönlich vertretenes Gutachten verfing nicht. Erst als durch den dreissigjährigen Krieg die Leidenschaft sich etwas abgekühlt hatte, wurde die Stimmung nach und nach günstiger, und gegen das Ende des 17. Jahrhunderts gelang es Erhard **Weigel** (Weiden an der Nab 1625 — Jena 1699; Prof. math. et astr. Jena; vgl. „Lebensbild" durch E. Spiess, Leipzig 1881 in 8.), eine Einigung zu erzielen: Schon 1697 war er nach Regensburg gereist, um dort einen zur Verteilung an die evangelischen Reichsstände bestimmten „Unmassgeblichen Vorschlag zur Zeitvereinigung" drucken zu lassen, der sodann von seinem frühern Schüler **Leibnitz** sehr günstig beurteilt wurde und schliesslich jene veranlasste, 1699 IX 23 die Einführung eines sog. verbesserten **Reichskalenders** zu beschliessen, der von dem gregorianischen ausser im Namen nur noch darin abwich, dass die Festrechnung (316—17) nicht mehr auf den Prutenischen Tafeln Reinholds, sondern auf den Rudolphinischen Keplers beruhte. Dieser Vereinbarung entsprechend wurden von den Evangelischen Deutschlands und der Niederlande A. 1700 die 11 Tage II 19—29 weggelassen, und auch Zürich, Bern, Basel, Schaffhausen, Genf, Biel und Mühlhausen schlossen sich alsbald derselben an, indem sie das Jahr 1701 mit I 12

begannen. Ferner folgte 1710 auf Verwendung von **Römer** auch Dänemark, und 1724 St. Gallen, ja sogar 1752 England. In diesem letztern Lande hatte schon 1583 John **Dee** (London 1527 — Mortlake in Surrey 1607; Math. et Astrol.; einige Zeit in Prag bei Rudolf II., dann Pensionär der Königin Elisabeth) durch einen Traktat „A plain discourse concerning the needful reformation of the vulgar Kalendar" eine Kalenderverbesserung angeregt, wobei er entsprechend Stöffler (308) vorgehen wollte; aber es war damals (vgl. 307) nicht einmal die noch ausstehende Regulierung des Jahresanfanges zu erhalten, so dass Lord **Chesterfield** 1752 beide Reformen durchzuführen hatte, wodurch momentan grosse Verwirrung entstand und das gemeine Volk sich um drei Monate betrogen glaubte. — *c.* Die Verschiedenheit in der Festrechnung (vgl. 316 : b) bewirkte noch einige Male kleine Verwirrungen, indem dadurch Ostern um eine Woche verschoben werden konnte; als dies für 1778 wieder bevorstand, erwarb sich **Friedrich der Grosse** das Verdienst, auch noch in dieser Hinsicht einen vollständigen Anschluss an den gregorianischen Kalender auszuwirken. — *d.* Im Jahre 1753 war nämlich Schweden der Reform ebenfalls beigetreten, — 1760 Puschlav, — 1784 Chur, Thusis, Flims, Engadin und Bergell, — und durch ein Dekret des helvetischen Vollziehungsdirektoriums von 1798 VI 29 wurde sie auch noch in Ausserrhoden, Glarus und den restierenden Teilen von Bündten anbefohlen, was allerdings die Gemeinde Süs im Engadin nicht hinderte, den alten Kalender noch bis 1811 beizubehalten, wo sie durch Androhung von Straftruppen endlich zur Raison gebracht werden konnte.

310. Der sog. republikanische Kalender. — Nach Ausbruch der ersten Revolution sollte in Frankreich alles anders werden und so auch der bisherige Kalender einem neuen weichen: Aera und Jahresanfang wurden auf das Herbstequinoktium 1792 als den glorreichen Anfang der einen und unteilbaren französischen Republik gelegt, — das Jahr aber erhielt die zwölf Monate

1. Vendémiaire	4. Nivôse	7. Germinal	10. Messidor
2. Brumaire	5. Pluviôse	8. Floréal	11. Thermidor
3. Frimaire	6. Ventôse	9. Prairial	12. Fructidor

deren 30 Tage in drei Dekaden abgeteilt waren, und diesen 12 Monaten folgten 5 Supplementartage (Sanscullotides), zu welchen in jedem vierten Jahre noch ein 6. hinzutrat, welcher als Abschluss eines Cyklus, einer sog. „Franciade", mit republikanischen Spielen zu feiern war [a]. — Nur ungern und zögernd wurde dieser durch die Schreckensregierung für alle öffentlichen Akte als obligatorisch eingeführte Kalender aufgenommen, ja kam eigentlich nie in allgemeinen bürgerlichen Gebrauch, und glücklicherweise wurde nach der Thronbesteigung Napoleons durch ein kaiserliches Dekret angeordnet, dass von 1806 I 1 hinweg auch in Frankreich der gregorianische Kalender wieder gesetzliche Geltung haben solle [b].

Zu 310: *a.* Vergeblich wollte **Laplace** seinen Landsleuten belieben, als neue Aera das Jahr 1250 zu wählen, wo nach seiner Rechnung die grosse Axe der Erdbahn zur Linie der Nachtgleichen senkrecht gestanden hatte, — das

Jahr mit der Frühlingsnachtgleiche zu beginnen, — und den Ausgangsmeridian um 185,30 Grade der 400. Teilung östlich von Paris zu verlegen, da unter demselben der Anfang der Aera auf Mitternacht gefallen sei. Diese Grundideen, welche wenigstens dem Kalender einen universellen Anstrich gegeben hätten, wurden nämlich von den Revolutionsmännern nicht goutiert, sondern von der Nationalversammlung, nachdem sich zum Schein das „Comité d'instruction“ mit **Lalande** und **Pingré** als Abgeordneten der Akademie beraten hatte, auf Antrag ihrer Mitglieder Gilbert **Romme** (Riom 1750 — Paris 1795; ein jüngerer Bruder des Nautikers Charles Romme, der früher als Mathematiklehrer in Russland gelebt, und später, als Montagnard zum Tode verurteilt, sich erdolcht haben soll) und Charles-François **Dupuis** (Trye-le-Château 1742 — Is-sur-Til bei Dijon 1809; früher Prof. rhet. Lisieux und Paris) 1793 X 5 ein Dekret angenommen, in welchem die oben angegebenen Bestimmungen enthalten waren und überdies der vorletzte seiner zwölf Artikel besagte: „Le jour, de minuit à minuit, est divisé en dix parties, chaque partie en dix autres, ainsi de suite, jusqu'à la plus petite portion commensurable de la durée“. Dieser letztere Beschluss scheint jedoch nie in Ausführung gekommen zu sein; dagegen bleibt nachzutragen, dass die Tage jeder Dekade einfach als „Primedi, Duodi, Tridi, Quaterdi, Quintidi, Sextidi, Septidi, Octidi, Nonidi, Decadi“ aufgezählt wurden, — dass jeder Quintidi und jeder Decadi sog. Feiertage (Lumpentage) waren, — der erstere dieser beiden überdies nach dem Vorschlage von Philippe-François-Nazaire **Fabre d'Eglantine** (Carcassonne 1755 — Paris 1794; erst Schauspieler und Theaterdichter, dann Deputierter, zuletzt Opfer von Robespierre) den Namen eines Tieres, der letztere denjenigen eines landwirtschaftlichen Gerätes erhielt, während die übrigen Tage Pflanzennamen besassen, — und so z. B. die Tage der 2. Dekade des Vendémiaire die Namen „Pomme de terre, Immortelle, Potiron, Réséda, **Ane**, Belle-de-nuit, Citronelle, Sarrazin, Tournesol, **Pressoir**“ hatten. — Unsere Tab. XI^{b} enthält das Nötige für leichte Übertragung der republikanischen Daten in gregorianische; jedoch ist allerdings hiefür der „Manuel pour la concordance des calendriers républicain et grégorien. Paris 1806 in 8.“ noch bequemer. Auch mag auf „E. **Millin**, Annuaire du Républicain, avec l'explication des 372 noms imposés aux mois et aux jours. Paris 1793 in 12.“ hingewiesen werden. — *b.* Als **Lalande** 1802 bei Anwesenheit eines Ministers in einem öffentlichen Vortrage über die Geschichte der Astronomie des abgelaufenen Jahres zu sagen wagte: „Le premier jour du dix-neuvième siècle a été marqué par la découverte d'une neuvième planète. Je me sers du calendrier de toutes les nations persuadé que le gouvernement français renoncera bientôt à un calendrier qui n'est entendu et ne peut être adopté ni de nos voisins ni de la grande majorité des Français“, wurde er von stürmischem Beifall unterbrochen. — Anhangsweise mag beigefügt werden, dass während der kurzen Blüte der Helvetik daran gedacht worden zu sein scheint, den fränkischen Kalender nach und nach auch in der Schweiz zu acclimatisieren; wenigstens enthielt der Jahrgang 1799 des in Luzern erscheinenden, nach dem Buchdrucker Georg Ignaz **Thüring** benannten „Thüring-Kalenders“ die Anzeige: „Die gesetzgebende Versammlung der einen und unteilbaren helvetischen Republik hat beschlossen, dass künftig im ganzen Schweizerlande nur **ein** Kalender soll gebraucht werden, nämlich der gregorianische, **und dass die französische Zeitrechnung neben der unsrigen gedruckt werden soll**“. In Ausführung scheint allerdings der zweite Teil dieses Beschlusses nie gekommen zu sein.

311. Der Sonnenzirkel und die sog. Indiktion. — Neben dem früher (302) besprochenen Meton'schen Mondzirkel von 19 Jahren wurde nach Einführung der Woche auch ein sog. **Sonnenzirkel** von 28 Jahren verwendet, der die Tage dieser letztern wieder dauernd auf dieselben Jahrestage zurückbrachte [a], und zwar wurde vereinbart, dass von den beiden Divisionsresten

$$s = \left[\frac{n+9}{28}\right] \qquad \text{und} \qquad z = \left[\frac{n+3}{15}\right] \qquad \mathbf{1}$$

der erstere (s) angebe, das wievielte Jahr im Sonnenzirkel das Jahr n unserer Zeitrechnung sei, während der zweite die demselben Jahre entsprechende **Indiktion** (Zinszahl, z) sei, eine Rechnungszahl, welche man lange benutzte, ohne zu wissen, welche Bedeutung der ihr zu Grunde liegende 15jährige Cyklus besitze [b].

Zu 311: *a.* Da nämlich $365 = 52 \times 7 + 1$ und $366 = 52 \times 7 + 2$ ist, so rückt in jedem gemeinen Jahre der Wochentag um 1, in jedem Schaltjahre um 2 vor, — also in einer 4jährigen Schaltperiode um 5 Tage. Frägt man nun, nach wie vielen Schaltperioden sich diese Tage zu einer Anzahl ganzer Wochen aufhäufen werden, so hat man offenbar die Gleichung $5 \cdot x = 7 \cdot y$ in möglichst kleinen ganzen Zahlen zu lösen, und hiebei erhält man $x = 7$ und $y = 5$, — es hat also wirklich nach 7 Schaltperioden oder nach 28 Jahren statt. Dabei ist es ganz gleichgiltig, wann man den Cyklus beginnt, — nur muss natürlich eine Verabredung getroffen werden. — *b.* Erst in der neuern Zeit gelang es einerseits Friedrich Karl v. **Savigny** (Frankfurt 1779 — Berlin 1861; Prof. jur. und Akad. Berlin), in der Abhandlung „Über die Steuerverfassungen unter den Kaisern (Berl. Abh. 1822/3)" nachzuweisen, dass der Indiktionszirkel mit einer etwa im 4. Jahrhundert durch Kaiser Konstantin eingeführten **Steuerperiode** übereinstimmt, und anderseits **Houzeau** (Ciel et terre 1885 XI 1), zu zeigen, dass es bei den Römern auch eine entsprechende **Dienstperiode** gab, indem die Legionäre 15 Jahre zu dienen hatten und so die Wiederkehr der Indiktion des Eintrittsjahres für sie Dienstbefreiung bedeutete.

312. Die julianische Periode. — Um zwischen dem Sonnen- und Mondzirkel zu vermitteln, führte schon im 5. Jahrhundert **Victorius** eine seinen Namen tragende Periode von $19 \times 28 = 532$ Jahren ein, deren Anfang er auf das Jahr 76 legte, mit welchem (302 und 311) Mond- und Sonnenzirkel gleichzeitig begannen [a]. Da jedoch neben dieser alsbald in der Kirchenrechnung vielgebrauchten Periode auch noch der Indiktionszirkel häufig zur Verwendung kam, so fand es später Joseph **Scaliger** [b] angemessen, denselben ebenfalls einzubeziehen, d. h. eine Periode von $532 \times 15 = 7980$ Jahren einzuführen, und das erste Jahr derselben auf $76 - 9 \times 532 = -4712$ oder 4713 v. Chr. zurückzuversetzen, wodurch er den grossen Vorteil erzielte, dass nicht nur alle drei kleinen Cykeln zugleich mit der grossen Periode begannen, sondern letztere auch sämtliche in der Geschichte vorkommenden Jahre v. Chr. umfasste [c]. Diese neue

Periode, deren Epoche somit auf das Vorjahr 4714 v. Chr. oder auf das Jahr 3960 vor Erbauung der Stadt Rom fiel, benannte er nach seinem Vater Julius, und sie fand mit Recht alsbald in der Chronologie allgemeine Verwendung, ja ist noch gegenwärtig für historische Untersuchungen nicht ohne Bedeutung [d].

Zu 312: *a.* **Victorius** soll aus Aquitanien in Südfrankreich gebürtig gewesen sein. Übrigens soll schon etwas vor ihm der egyptische Mönch **Anianus** eine solche Periode von 532 Jahren in Vorschlag gebracht haben, jedoch noch ohne ihren Anfang festzulegen. — *b.* Joseph Justus **Scaliger** (Agen 1540 — Leyden 1609) war Professor der schönen Wissenschaften in Leyden und machte sich durch sein „Opus de emendatione temporum. Lutetiæ 1583 in fol. (auch Coloniæ Allobrogum = Genf 1629)" um die Chronologie hochverdient. Er war Sohn des Arztes Giulio Cesare della Scala oder Julius Cäsar **Scaliger** (Padua 1484 — Agen 1558), der erst in Venedig und Padua praktiziert, dann sich zu Agen in Frankreich niedergelassen hatte. — *c.* Schon die von den morgenländischen Kaisern gebrauchte **Periodus Constantinopolitana** hielt 7980 Jahre, begann aber 795 Jahre früher als die von Scaliger eingeführte Periode, so dass ihrer Epoche nur die Indiktion $z = 0$, dagegen $g = 16$ und $s = 11$ entsprach. — *d.* Die Einführung der julianischen Periode rief alsbald der Aufgabe, das Jahr x derselben zu finden, welchem gegebene Werte der g, s und z entsprechen. Zu ihrer Lösung, mit welcher bekanntlich Jak. **Bernoulli** debütiert haben soll, schlug dessen Schüler Joh. Heinrich **Stähelin** (Basel 1668 — ebenda 1721; später Prof. anat. et bot. Basel und Vater von Hallers Freund Benedikt Stähelin, welchem das Loos 1727 statt Euler die Prof. phys. zuteilte, dagegen 1732 die Prof. anat. et bot. zu Gunsten von Dan. Bernoulli verweigerte) in seinen „Theses de variis epochis et annorum periodis. Basileæ 1706 in 4." folgenden, mutmasslich mit dem seines Lehrers ähnlichen Weg ein: Bezeichnen a, b, c ganze Zahlen, so muss

$$x = 19 \cdot a + g = 28 \cdot b + s = 15 \cdot c + z \qquad \mathbf{1}$$

sein. Löst man nun die aus Gleichsetzung der beiden ersten Werte von x entstehende unbestimmte Gleichung (28) nach a und b auf, so erhält man, wenn u eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, successive

$$a = 28 \cdot u + 3 \cdot s - 3 \cdot g \quad b = 19 \cdot u + 2 \cdot s - 2 \cdot g \quad x = 532 \cdot u + 57 \cdot s - 56 \cdot g \qquad \mathbf{2}$$

Setzt man sodann letztern Wert von x dem obigen dritten Werte gleich und löst die neue Gleichung nach c und u auf, so erhält man, wenn v wieder eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet, successive

$$c = 532 \cdot v - 209 \cdot s - 252 \cdot g - 71 \cdot z \qquad u = 15 \cdot v - 6 \cdot s - 7 \cdot g - 2 \cdot z$$

und für diesen Wert von u geht die letzte 2 in

$$x = 7980 \cdot v - 3135 \cdot s - 3780 \cdot g - 1064 \cdot z \qquad \mathbf{3}$$

über, wo natürlich v so zu wählen ist, dass x positiv und kleiner als 7980 ausfällt. Um nicht jedesmal, wie es diese Bernoulli-Stähelin'sche Regel erfordert, einen passenden Wert von v suchen zu müssen, kann man $v = s + g + z - w$ einführen, wo auch w eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet, und erhält sodann statt 3

$$x = 4845 \cdot s + 4200 \cdot g + 6916 \cdot z - 7980 \cdot w \qquad \mathbf{4}$$

findet somit x, indem man die Summe der drei ersten Glieder bildet, diese durch 7980 dividiert und den Rest behält. Ist z. B. $s = 22$, $g = 9$ und $z = 2$ (wie

dies nach 302 und 311 für 1889 statt hat), so erhält man x = [158222 : 7980] = 6602 = 4713 + 1889. Diese bequeme Regel 4 wurde schon 1666 (also vor Bernoulli, aber ohne Beweis) durch Jacques **de Billy** (Compiegne 1602 — Dijon 1679; Jesuit; Prof. math. Lyon und Dijon) sowohl im Journ. d. Sav. als in den Phil. Trans. mitgeteilt.

313. Einige andere Perioden. — Mehrere alte Völker scheinen sehr frühe unter dem Namen **Néros** auch einen Cyklus von 600 Jahren angewandt zu haben, auf welchen sie 7421 Monate rechneten, und wenn dem wirklich so sein sollte, so würde darin ein gewichtiges Zeugnis für das hohe Alter erheblicher astronomischer Kenntnisse liegen [a]. Ferner ist zu erwähnen, dass die Griechen längere Zeit nach sog. **Olympiaden** von 4 Jahren rechneten [b], während die Römer unter dem Namen **Lustrum** zeitweise eine Periode von 5 Jahren und unter dem Namen **Sæculum** eine solche von 100 Jahren anwandten [c].

Zu 313: *a.* Während Flavius **Josephus** diese Periode schon bei den Patriarchen finden will, schreiben sie andere den Chaldäern oder Egyptern zu; wie dem jedoch sei, so ist sie unter allen Umständen wegen ihrer aus

$$29{,}53059 \times 7421 : 600 = 365{,}2422$$

hervorgehenden auffallenden Genauigkeit höchst merkwürdig und man kann begreifen, dass sie **Bailly** (12) als ein Hauptargument für seine antediluvianische Astronomie erscheinen musste. In welcher Beziehung zu ihr eine Periode von 60 Jahren stand, welche die Babylonier und Chinesen unter dem Namen **Sossos** benutzt haben sollen, — oder wieder eine Periode von 3600 Jahren, welche als eine grosse **Saros** von einzelnen alten Schriftstellern neben der sich auf die Finsternisse beziehenden Saros (3,245) erwähnt wird, weiss man nicht recht. — *b.* Die an das alle 4 Jahre in Olympia gefeierte Nationalfest anknüpfenden **Olympiaden** sollen erst im 3. Jahrhundert v. Chr. durch **Timäus** eingeführt worden sein, um einige Ordnung in die zerfahrene griechische Zeitrechnung zu bringen, wobei er die erste Olympiade in unserm Jahre 776 v. Chr. beginnen liess, so dass z. B. das dritte Jahr der 143. Olympiade auf das Jahr 776 — (4 × 142 + 3) = 205 v. Chr. fiel. Als gegen Ende des 4. Jahrhunderts n. Chr. unter Kaiser Theodosius die olympischen Spiele aufhörten, verschwand alsbald auch diese Zählweise. — *c.* Das **Lustrum** (Jahrfünft) hing wahrscheinlich damit zusammen, dass die Censoren eine fünfjährige Amtsdauer hatten, an deren Schluss sie für das ganze Volk ein Reinigungs- oder Sühnopfer brachten. Unter **Sæculum** verstand man früher auch wohl überhaupt eine längere Reihe von Jahren, wie z. B. ein Menschenalter.

314. Der Sonntagsbuchstabe und die Epakte. — Seit alter Zeit hat sich die Übung eingebürgert [a], die Tage des Jahres fortlaufend mit einer die Woche repräsentierenden Buchstabenfolge: a, b, c, d, e, f, g zu bezeichnen (vgl. Tab. XI[a]) und speciell in jedem Jahre den auf die Sonntage fallenden Buchstaben als **Sonntagsbuchstaben** anzumerken [b]. — Unter **Epakte** versteht man im allgemeinen denjenigen Teil einer Periode, der beim Beginne einer

andern Periode bereits abgelaufen ist [c], — speciell unter **Epakte eines Jahres** die Anzahl der Tage, welche man dem letzten Neumonde des Vorjahres noch zulegen muss um den Anfang des neuen Jahres zu erreichen, oder also auch, den Neumond als ersten Tag gerechnet, das sog. **Alter des Mondes** bei Abschluss des Vorjahres; es fallen daher, wenn man den Tagen des Jahres fortlaufend die absteigende Zahlenreihe 30, 29, 28, ... 1 beischreibt, bei jeder zweiten Reihe (vgl. Tab. XI[a]) zu Gunsten der leeren Monate eine Zahl (gewöhnlich die 25) überspringend, die der Epakte eines Jahres entsprechenden Zahlen jeweilen annähernd auf Tage mit Neumond.

Zu 314: *a.* Jedenfalls spätestens als **Sacrobosco** um die Mitte des 13. Jahrhunderts seinen „Computus ecclesiasticus (Vitebergæ 1549 in 12. durch Er. Reinhold; von Rhäticus zum Druck vorbereitet und schon 1538 durch Melanchthon mit Vorwort versehen)" schrieb. — *b.* Wegen $365 = 7 \times 52 + 1$ muss jedes gemeine Jahr mit demselben Wochentage abschliessen, mit dem es begann, — also der Sonntagsbuchstabe im folgenden Jahre um eine Stelle vorrücken. Ferner ist zu beachten, dass auf II 28 immer der Buchstabe c, also in gemeinen Jahren auf III 1 der Buchstabe d fällt, welcher in Schaltjahren bereits für II 29 verbraucht wird: Man muss also bei Eintritt eines dieser letztern **entweder** von III 1 an eine neue, mit e beginnende Buchstabenfolge aufschreiben und sodann am Schlusse desselben den Sonntagsbuchstaben um zwei Stellen verschieben, — **oder**, wenn man vorzieht, die alte Buchstabenfolge beizubehalten, schon mit III 1 den Sonntagsbuchstaben um eine Stelle vorrücken, wie es in Tab. XI[a] und in dem unten folgenden Täfelchen geschehen ist. — Da nach dem frühern der Anfang unserer Zeitrechnung so festgelegt wurde, dass das erste Jahr derselben das 10. eines Sonnenzirkels war, — ferner einem Schaltjahre folgte, — und mit einem Samstage begann oder den Sonntagsbuchstaben b hatte, so ergiebt sich aus dem vorgehenden, dass den Jahren s im Sonnenzirkel die Folge der Sonntagsbuchstaben

s	S.-B.	s	S.-B.	s	S.-B.	s	S.-B.
1	g · f	8	e	15	c	22	a
2	e	9	d · c	16	b	23	g
3	d	10	b	17	a · g	24	f
4	c	11	a	18	f	25	e · d
5	b · a	12	g	19	e	26	c
6	g	13	f · e	20	d	27	b
7	f	14	d	21	c · b	28	a

nicht nur damals entsprach, sondern so lange entsprechen muss, als die Schaltperiode keine Störung erleidet, d. h. beim julianischen Kalender noch jetzt. So findet man z. B. für 1887, nach 311:1 vorerst $s = [(1887 + 9) : 28] = 20$ ermittelnd, in diesem Täfelchen sofort den julianischen Sonntagsbuchstaben d, so dass julianisch I 4 ein Sonntag war. Hieraus geht aber mit Notwendigkeit hervor, dass auch gregorianisch $I\ 4 + 12 = 16$ und somit I 9 und I 2 auf Sonntage fielen, also diesem Jahre der Sonntagsbuchstabe b entsprach: Man kann also das Täfelchen auch zur leichten Bestimmung des gregorianischen Sonntagsbuchstabens benutzen. — *c.* **Epakte** ist aus „ἐπαγειν = hinzufügen"

abgeleitet. — *d.* Bei der sog. **alexandrinischen** Zeitrechnung wurde nach Vorgang von **Anatolius** (einem Alexandriner, der etwa 277 n. Chr. zum Bischof von Laodicæa in Kleinasien ernannt wurde) zur Bestimmung des ersten Neumondes in einem Jahre im Anschlusse an den Mondcyklus in folgender Weise vorgegangen: Dem Jahre 258 n. Chr., wo die Mondsichel I 22 zum erstenmal sichtbar gewesen zu sein scheint, entsprach (302:1) die goldene Zahl $g = 12$ und hieraus wurde geschlossen, dass dies für $g = 1$ etwa I 23 geschehen sei oder damals der betreffende Tag Januar die Nummer $n = 23$ besessen habe. Da nämlich das Mondjahr mit seinen 354 Tagen um 11 Tage kleiner sei als das Sonnenjahr von 365 Tagen, so werde der erste Neumond in jedem folgenden Jahre um 11 Tage früher eintreffen, also n um 11 kleiner werden, folglich $g = 2$ notwendig $n = 23 - 11 = 12$ und $g = 3$ ebenso $n = 12 - 11 = 1$ entsprechen. Um weiter zu gehen, sei dem Jahre 3 ein Schaltmonat von 30 Tagen zuzufügen, so dass $g = 4$ und $n = 1 + 30 - 11 = 20$ korrespondieren, etc. Es ergiebt sich so in der That die in der beistehenden Tafel enthaltene Zahlenreihe, in der wirklich 22 neben 12 zu stehen kömmt. Um jedoch von der Schlusszahl 5 eines Cyklus auf die Anfangszahl 23 des folgenden Cyklus überzugehen, muss man entweder nur einen leeren Monat zufügen oder 12 abziehen, — ein Ausnahmsfall, welchen man früher als „saltus lunæ“ bezeichnet hat. Dass bei dieser Rechnung die 7 Jahre 3, 5, 8, 11, 13, 16 und 19 einen Schaltmonat erhalten, entspricht ganz der in 302:c nach **Ideler** ausgesprochenen Vermutung. — Da

g	n	p	e	e'	e''
1	23	15	8	11	0
2	12	4	19	22	11
3	1	23	30	3	22
4	20	12	11	14	3
5	9	1	22	25	14
6	28	20	3	6	25
7	17	9	14	17	6
8	6	28	25	28	17
9	25	17	6	9	28
10	14	6	17	20	9
11	3	25	28	1	20
12	22	14	9	12	1
13	11	3	20	23	12
14	30	22	1	4	23
15	19	11	12	15	4
16	8	0	23	26	15
17	27	19	4	7	26
18	16	8	15	18	7
19	5	27	26	29	18

sowohl ein voller und ein leerer Monat als Januar und Februar (abgesehen von Schaltjahren) zusammen 59 Tage ausmachen, so giebt die Kolumne n auch die ersten Neumonde im März, und wenn man zu diesen Daten, unter der Annahme, dass der Vollmond dem (sichtbar gewordenen) Neumonde in 13 Tagen folge, 13 addiert, so erhält man somit die März-Vollmonde, von welchen derjenige, der dem 21. März in $p = n + 13 - 21 = n - 8$ Tagen folgt, aus später (316) angegebenen Gründen **Ostervollmond** genannt wird; die Reihe der p, welche somit in leichtester Weise aus der Reihe der n erhalten wird, findet sich ebenfalls in obiger Tafel. — Die spätere Zeit hat den n die sich aus ihnen leicht ergebenden Epakten e substituiert: Da nämlich der n^{te} Januar eines Jahres dem $(31 + n)^{ten}$ Dezember des Vorjahres entspricht und der Monat, in welchen das Neujahr fällt, als ein voller angesetzt wird, so fällt auch auf den $(31 + n - 30) = (n + 1)^{sten}$ dieses letztern ein Neumond oder das Alter 1, also hat der Mond am Schlusse des Jahres das nach Definition der Epakte gleiche Alter $e = 31 - n = 23 - p$, so dass $g = 1$ die Epakte $e = 31 - 23 = 8$ entspricht, etc., d. h. die oben in der Rubrik e stehende Reihe erhalten wird. Diese sog. **alexandrinische Epakte** ist jedoch, obschon sie für die Festrechnung (316) als **kirchliche Epakte** beibehalten wurde, für die Mondrechnung selbst gegenwärtig nicht mehr anwendbar, da unter den bei der approximativen Be-

rechnung der n und e begangenen Fehlern ein sekulärer vorkömmt: Mit Einrechnung der 7 Schaltmonate umfassen nämlich die 19 Jahre nach unserer obigen Rechnung im ganzen $19 \times 354 + 6 \times 30 + 29 = 6935$ Tage, so dass auf den vierfachen, auch die julianische Schaltperiode umfassenden Cyklus $4 \times 6935 = 27740$ Tage fallen, zu welchen dann aber noch 19, vorläufig ausser Acht gelassene Schalttage hinzukommen, welche die Zahl auf 27759 Tage erhöhen, d. h. genau auf die in 19 julianischen Jahrvierten à $3 \times 365 + 366 = 1461^d$ enthaltene Anzahl. Da nun (302 : c) die kalippische Periode von 76 Jahren in Wirklichkeit nur $4 \times 235 \times 29{,}53059 = 27758{,}7546$ Tage, also beinahe $^1/_4{}^d$ weniger umfasst als die 76 julianischen Jahre, so entsteht ein Fehler, der sich etwa in 300 Jahren auf einen vollen Tag anhäuft, und es wurde daher zur Zeit der Kalenderreform nötig, die bisherige Epakte, um den bereits aufgelaufenen Fehler annähernd zu heben, durch die sog. **julianische Epakte** $e' = e + 3$ zu ersetzen, sowie zu beschliessen, dass sie künftig alle 300 Jahre je wieder um eine Einheit erhöht werden solle. Zugleich wurde für den neuen Kalender die sog. **gregorianische Epakte** $e'' = e' - 11$ eingeführt, um im Durchschnitte den successiven Differenzen von 10, 11 und 12 Tagen zwischen den beiden Kalendern Rechnung zu tragen. — Statt obiger Tafel kann man zur Epaktenbestimmung auch die Formeln

$$e = \left[\frac{11 \cdot g - 3}{30}\right] \qquad e' = \left[\frac{11 \cdot g}{30}\right] \qquad e'' = \left[\frac{11\,(g-1)}{30}\right] \qquad \mathbf{1}$$

benutzen, deren dritter **Delambre** (Conn. d. t. 1817) für das Jahr $n = 100 \cdot s + m$ die Formel

$$e'' = [11\,(g-1) : 30] + 8 + {}^1/_4 \cdot s + {}^1/_3 \cdot s - s \qquad \mathbf{2}$$

substituieren wollte, wo bei $^1/_4 \cdot s$ und $^1/_3 \cdot s$ je nur die Ganzen in Rechnung gebracht werden sollten. Da für $s = 18$ die Korrektion $8 + {}^1/_4 \cdot s + {}^1/_3 \cdot s - s = 8 + 4 + 6 - 18 = 0$ wird, so stimmt 2 für unser Jahrhundert vollständig mit 1''' überein, während sie für $s = 0$ oder für den Anfang unserer Zeitrechnung in $e = [11 \cdot g : 30] - 11 + 8 = [(11 \cdot g - 3) : 30]$, d. h. in 1' übergeht.

315. Die sog. Absolutzahlen der Aeren. — Die hohe Bedeutung der julianischen Periode beruht namentlich darauf, dass mit ihrer Hilfe Daten, welche sich auf verschiedene Ausgangspunkte oder **Aëren** beziehen [a], leicht mit einander verglichen werden können, besonders wenn einmal für jede Aëra die meines Wissens von **Ideler** eingeführte sog. **Absolutzahl** derselben, d. h. die Anzahl der Tage bestimmt ist, welche bei ihrem Beginne von der julianischen Periode bereits verflossen sind [b]. Um letztere zu finden, ist es am besten, vorerst aus der Differenz der Jahre die in ihr enthaltenen julianischen Jahrvierte auszuscheiden, jedes derselben mit seinen 1461^d in Rechnung zu bringen, sodann die allfällig noch restierenden Jahre auf ihren Charakter zu untersuchen und schliesslich die letztern zukommenden Tage dem frühern Produkte beizufügen [c].

Zu 315: *a.* Über den Ursprung des Wortes **Aëra** (ère) sind die Gelehrten nicht einig; doch weist manches darauf hin, dass es zuerst in Spanien gebraucht worden sei, wo in den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung, und mutmasslich zu Ehren des Augustus, als Epoche für die Jahrzählung das

Jahr 38 v. Chr. benutzt wurde, so dass die Meinung, es sei Aera oder eigentlich A.ER.A. eine Abkürzung für „Annus erat Augusti", zum mindesten ebenso plausibel erscheint als diejenige, es sei jenes Wort aus dem arabischen „arrach = datieren", oder dem gotischen „jera = Jahr", etc. abzuleiten. — *b.* Bezeichnen nämlich a_1 und a_2 diese Absolutzahlen für zwei Aeren, auf welche sich zwei entsprechende Daten t_1 und t_2 beziehen, so ist offenbar

$$a_1 + t_1 = a_2 + t_2 \qquad \text{oder} \qquad t_2 = t_1 + (a_1 - a_2) \qquad \textbf{1}$$

c. So z. B. sind vom Anfange des Jahres 4714 v. Chr. $= -4713$, welches (312) als Epoche für die julianische Periode dient, bis zu dem auf den Anfang des Jahres 1 fallenden Beginne unserer Zeitrechnung 4713 Jahre, also bis 0 I 0 schon $4712^a = 4 \times 1178^a = 1461 \times 1178^d = 1\,721058^d$ verflossen, und es ist daher

$$1\,721058 \qquad \text{für die Epoche} \qquad 0 \text{ I } 0 \qquad \textbf{2}$$

die **julianische Absolutzahl**, zu welcher für jedes Jahrviert vor und nach $366 + 365 + 365 + 365 = 1461^d$ und für jedes Jahrhundert $(100:4) \cdot 1461 = 36525^d$ in Abzug oder Zuschlag kommen, wie dies bei Konstruktion von Tab. VIII^b gehalten worden ist. Aus dieser Tafel ersehen wir z. B. in leichtester Weise, dass bei Anfang des Jahres 432 v. Chr. $(-431 = -500 + 69)$ und bei Anfang des Jahres 1750

$$1538\,433 + 25\,203 = 1563\,636^d \qquad \text{und} \qquad 2341\,983 + 18\,263 = 2360\,246^d$$

der julianischen Periode abgelaufen waren, — etc. Wünscht man für die neuere Zeit sich direkt auf den gregorianischen Kalender zu beziehen und, wie es in Tab. VIII^c geschehen ist, für dieselbe 1750 I 0 greg. als Epoche zu wählen, so hat man obige Zahl um die bis dahin ausgeschalteten 11 Tage zu vermindern und erhält so

$$2\,360235 \qquad \text{für die Epoche} \qquad 1750 \text{ I } 0 \qquad \textbf{3}$$

als **gregorianische Absolutzahl.** Will man nun z. B. wissen, wie viele Tage der julianischen Periode bei Beginn des 9. August 1883 bereits verflossen waren, so hat man zur Absolutzahl 3 (nach Tab. VIII^c) für 1883 I 0 noch 48577 und für VIII 8 noch 220^d zuzuschlagen und erhält somit 2409032 als Facit. — Zu einem zweiten Beispiele wähle ich die von den spätern Egyptern benutzte **Aera von Nabonnassar**, welche auf den 1. Thot seines ersten Regierungsjahres gelegt wurde, der mit dem 26. Februar 747 v. Chr. zusammenfiel, so dass seit Anfang der julianischen Periode bereits $4714 - 748 = 3966 = 4 \times 991 + 2^a$ und überdies noch $31 + 25^d$ verflossen waren. Da nun 749 v. Chr. $= -748$ ein Schaltjahr, folglich 748 v. Chr. ein gemeines Jahr war, und $1461 \times 991 + 366 + 365 + 56 = 1448\,638$ ist, so hat man somit

$$1\,448\,638 \qquad \text{für die Epoche} \qquad 0 \text{ Thot } 0 \qquad \textbf{4}$$

als **Nabonnassar'sche Absolutzahl.** Will man nun z. B. wissen, welches christliche Datum der von **Ptolemäus** am 13. Epiphi oder (304) am 313. Tage des 2. Jahres von Antonin oder des 886. Jahres von Nabonnassar gemachten Marsbeobachtung entspricht, so hat man sich zunächst zu erinnern, dass damals das egyptische Jahr nur 365^d hielt, also zur Zeit der Beobachtung seit der Nabonnassar'schen Aera $885 \times 365 + 312 = 323337^d$ verflossen waren, also hat man nach 1,4 und 2 in Beziehung auf die christliche Aera $t_1 = a_2 - a_1 + t_2 = 1\,488638 - 1\,721058 + 323337 = 50917^d$. Bringt man nun für das Jahr $0 = 1$ v. Chr., das ein Schaltjahr war, 366^d in Abrechnung, so bleiben seit dem 0. Januar des ersten Jahres unserer Zeitrechnung $50551 = 1461 \times 34 + 365 + 365 + 147^d$ übrig, welche mit $138^a\ 147^d$ übereinstimmen, und es ist also die

Beobachtung am 27. Mai des 139. Jahres nach Christi Geburt gemacht worden. — Ein drittes Beispiel endlich giebt uns die **Hedschra** der Mohammedaner, welche (303) auf 622 VII 15 n. Chr. fiel. Da diesem Tage in unserer Zeitrechnung 621^a 195^d oder also, da $620 = 4 \times 155$ ist, $155 \times 1461 + 365 + 195 = 227015^d$ vorausgingen, so hat man unter Benutzung von 2

1948073 für die Epoche 0 Moharem 0 **5**

als **Absolutzahl der Hedschra.** Will man nun z. B. wissen, welchem Datum unserer Zeitrechnung die Sonnenfinsternis entspricht, welche **Ibn Junis** am 29. Schewwâl 367 zu Kairo beobachtete, so geht man davon aus, dass dieses Datum dem Anfange der Hedschra in 366 Mondjahren (oder 12 ganzen Schaltperioden à 30^a und 6 Jahren der 13.), 9 Monaten und 29 Tagen, oder (303 : a, b) in $12 \times 10631 + 2126 + 266 + 29 = 129993^d$ folgte, also nach 5 und 2 auf den $129993 + 1948073 - 1721058 = 357008^d$ unserer Zeitrechnung fiel. Da nun $357008 = 244 \times 1461 + 365 + 159 = 977^a$ 159^d ist, ferner der 159. Tag eines gemeinen Jahres auf VI 8 fällt, so muss somit jene Finsternis 978 VI 8 beobachtet worden sein. — Für einige andere Aeren vgl. Tab. XII und 318.

316. Die christliche Ostern und die davon abhängigen Feste. — Während in den ersten Jahrhunderten der christlichen Kirche keine allgemeinen Vorschriften für die Feier von Festen vorhanden waren, brachte es Kaiser **Konstantin** dazu, dass A. 325 auf der Kirchenversammlung zu Nicæa auch diese Verhältnisse geordnet wurden [a]. Ohne ein förmliches Dekret zu erlassen, vereinbarte man sich damals dahin, dass die Frühlingsnachtgleiche dem 21. März entsprechen, und das Auferstehungsfest oder die **Ostern** je an dem Sonntag gefeiert werden solle, welcher dem ersten Vollmonde nach der Frühlingsnachtgleiche folge [b]. Ferner wurde festgesetzt, dass der sog. **Fastensonntag** je 7 Wochen vor Ostern anzusetzen sei [c], dagegen 40, 50 und 60 Tage nach Ostern (diese als erster Tag gezählt) **Auffahrt, Pfingsten** und **Frohnleichnam.**

Zu 316: *a.* Früher begingen z. B. die morgenländischen Christen am 14. Nisan (dem Vortage des Passah-Festes der Juden) ein Erinnerungsfest an die Einsetzung des Abendmahles und die Leiden Christi, während die abendländischen Christen am darauf folgenden Sonntage die Auferstehung des Herrn feierten. — *b.* Der in Nicæa getroffenen Vereinbarung entsprechende Regeln für die Festrechnung stellte schon im Anfange des 8. Jahrhunderts **Beda** venerabilis in seinem Traktate „De temporum ratione (Coloniæ 1537 in fol.)" zusammen, sodann wieder im 11. Jahrhundert (nach Günther) die gelehrte Dame **Herrad** von Landsperg in ihrem „Computus", und seither sind ihrem Beispiele, nach Vorgang von **Regiomontan** (vgl. Mitth. 32 von 1873), viele Kalendariographen namentlich auch in der Weise gefolgt, dass sie sog. **Ostertafeln** veröffentlichten, aus welchen das Datum der julianischen Ostern für jedes beliebige Jahr in leichter Weise erhoben werden kann. Noch bequemer und lucider als die mir zu Gesicht gekommenen dieser letztern dürfte die beifolgende von mir konstruierte, aber, wie ich seither gesehen habe, z. B. auch schon von Ul. **Bouchet** (vgl. 319) gegebene Tafel sein, welche für die beiden Argumente: Goldene Zahl (G) und Sonntagsbuchstabe (a, b, c, d, e, f, g)

G	P	Q	a	b	c	d	e	f	g
1	36	4	40	41	42	43	37	38	39
2	25	1	26	27	28	29	30	31	32
3	44	3	47	48	49	50	51	45	46
4	33	7	40	34	35	36	37	38	39
5	22	4	26	27	28	29	23	24	25
6	41	6	47	48	42	43	44	45	46
7	30	3	33	34	35	36	37	31	32
8	49	5	54	55	56	50	51	52	53
9	38	2	40	41	42	43	44	45	39
10	27	6	33	34	28	29	30	31	32
11	46	1	47	48	49	50	51	52	53
12	35	5	40	41	42	36	37	38	39
13	24	2	26	27	28	29	30	31	25
14	43	4	47	48	49	50	44	45	46
15	32	1	33	34	35	36	37	38	39
16	21	5	26	27	28	22	23	24	25
17	40	7	47	41	42	43	44	45	46
18	29	4	33	34	35	36	30	31	32
19	48	6	54	55	49	50	51	52	53

unmittelbar den Tag März giebt, auf welchen Ostern fällt, — so z. B. für das gemeine Jahr 1563, wo (302, 311 und 314) $G = [(1563 + 1) : 19] = 6$ und c wegen $[(1563 + 9) : 28] = 4$ Sonntagsbuchstabe ist, III 42 = IV 11, und für das Schaltjahr 1576, wo entsprechend $G = 19$ und g der zweite Sonntagsbuchstabe ist, III 53 = IV 22. Ich habe der Tafel die zu ihrer Erstellung benutzten Hilfskolumnen P und Q beigefügt: Die $P = 21 + p$ geben (314 : d) die Tage März, auf welche der Ostervollmond fällt, die Q aber die Anzahl Tage, nach welcher demselben in der Buchstabenreihe (Tab. XI) ein a, d. h. wenn a Sonntagsbuchstabe ist, ein Sonntag oder Ostern folgt, so dass $P + Q$ dem Osterdatum entspricht und somit in Kolumne a einzutragen war, während die Zahlen der folgenden Kolumnen je um eine Einheit grösser werden, — jedoch so, dass, wenn im ganzen zu P mehr als 7 zuzufügen wären, nur der Überschuss über 7 addiert wird, weil man den **nächsten** Sonntag nach dem Ostervollmonde erhalten will. — Bei Einleitung der gregorianischen Kalenderreform erhielt **Clavius** den Auftrag, die alten Regeln für die Festrechnung derselben entsprechend zu modifizieren, und entledigte sich desselben in seiner „Romani Calendarii a Gregorio XIII restituti Explicatio. Romæ 1603 in fol. (auch als Band 5 von dessen „Opera mathematica. Moguntiæ 1612, 12 Vol. in fol.“ erschienen)“. Es würde auch nicht schwer halten, für 1582—1699, 1700—1799, etc., für die gregorianische Ostern je ähnliche Täfelchen wie das obige zu konstruieren; ich ziehe jedoch, da Tab. XI* die sämtlichen gregorianischen Osterdaten für das 19. Jahrhundert enthält und die folgende Nummer allgemeine Osterformeln geben wird, vor, davon Umgang zu nehmen und hier nur noch im Hinblick auf 309 : c anzuführen, dass für den Reichskalender das Osterfest nicht durch blosse Annäherung mit Hilfe der sog. kirchlichen Epakte, sondern (in guter Meinung, aber höchst überflüssig) durch genaue astronomische Rechnung bestimmt wurde: Hiedurch wurde nun Ostern 1724 von IV 16 auf IV 9, 1744 von IV 5 auf III 29 verschoben, und ähnliche Abweichungen störender Art wären natürlich später wieder von Zeit zu Zeit vorgekommen, würde nicht der bereits (309 : c) erwähnte Beschluss gefasst worden sein. — Anhangsweise mag noch erwähnt werden, dass die Diskordanz von 1724 Joh. **Bernoulli** zu dem Gutachten „De die, qua celebrandum Festum Paschalis A. 1724 (Opera IV)“ veranlasste, in welchem er unter anderm den frühern Vorschlag (309 : a) wiederholte, Ostern beständig am ersten April-Sonntag zu

feiern. — *c.* Schon in den ersten Jahrhunderten war es bei den Christen üblich, während der Erinnerungszeit an das Leiden und Sterben Christi zu fasten und sich namentlich an den Wochentagen (an den Sonntagen wurde nicht gefastet) des Fleischessens zu enthalten. Später wurde diese **Fastenzeit** (Carniprivium) von der Kirche so geordnet, dass sie vom Sonntag Quadragesimæ (Invocavit) bis Ostern, d. h. 6 Wochen, dauerte, — und noch etwas später wurden die 4 letzten Tage der Vorwoche dazu genommen, um die Zahl der 40 Fastentage zu erhalten, welche man Jesus zuschrieb, — ja die Geistlichen wollten sich in der Enthaltsamkeit noch vor dem gemeinen Volke auszeichnen und schlugen sogar die ganze dem Sonntag Quinquagesimæ (Esto mihi) folgende 7. Woche vor Ostern zu den Fasten. Fast gleichzeitig entstand aber auch die Übung, sich am letzten Tage vor den Fasten noch recht gütlich zu thun und zu erlustigen, und daher datieren die alte **Fassnacht** (Bauernfassnacht) am Invocavit oder am Vorabend des ersten alten Fastentages „Hirsmontag“, die eigentliche oder neue **Fassnacht** am Dienstag nach Esto mihi oder am Vorabend des die 40tägigen Fasten eröffnenden „Aschermittwoch“, und der **Fastensonntag** (Herrenfassnacht oder Pfaffenfassnacht) am Esto mihi selbst. Die letzte Fastenwoche wurde als **Passionswoche** (Charwoche vom altdeutschen Char = Trauer) noch besonders hoch gehalten. — Manche Kalendariographen früherer Zeit gaben statt einer Ostertafel eine Tafel der Fastensonntage, und so enthält z. B. die „Teutsch Astronomei“ von 1545 eine solche, welche (mit denselben Argumenten wie unsere obige Ostertafel) die Anzahl der zwischen Weihnacht (vgl. 307 : e) und Fastensonntag liegenden Wochen und Tage zu finden lehrt.

317. Die Gauss'sche Osterformel. — Unter vollständiger Berücksichtigung aller kirchlichen Vorschriften hat **Gauss** für Bestimmung des Osterdatums folgende allgemeine Regel aufgestellt [a]: Setzt man die Divisionsreste

$$[n:19]=a \qquad [n:4]=b \qquad [n:7]=c$$
$$[(19\cdot a+x):30]=d \qquad [(2\cdot b+4\cdot c+6\cdot d+y):7]=e \qquad \mathbf{1}$$

wo n eine beliebige Jahrzahl bezeichnet und für den julianischen Kalender beständig

$$x = 15 \qquad y = 6$$

für den gregorianischen Kalender dagegen successive und zwar von

	1583—1699	1700—1799	1800—1899	1900—2099
x =	22	23	23	24
y =	2	3	4	5

einzuführen ist, so giebt nach ihm

$$O = 22 + d + e \qquad \mathbf{2}$$

den Tag März, an welchem im Jahre n das Osterfest gefeiert werden soll [b]. Nur in zwei, übrigens von **Gauss** ebenfalls genau präcisierten Fällen, hat für den gregorianischen Kalender eine kleine Abweichung von der allgemeinen Regel einzutreten: Wenn nämlich d = 29 und e = 6 wird, so ist Ostern dennoch nicht

erst III 57 = IV 26, sondern schon IV 19 zu feiern, — und wenn $d = 28$, $e = 6$ sowie zugleich $a > 10$ wird, so ist das Fest von III 56 = IV 25 auf IV 18 zu verlegen [e].

Zu 317: *a.* In seiner Note „Berechnung des Osterfestes (Mon. Corr. 1800 VIII; Nachtrag in Z. f. A. I von 1816)" gab **Gauss** seine Regel ohne eigentliche Ableitung; der unter b enthaltene Beweis schliesst sich an den in „Hermann **Kinkelin** (Bern 1832 geb.; Prof. math. Basel), Die Berechnung des christlichen Osterfestes (Z. f. M. u. Ph. 15 von 1870)" gegebenen an. — Im übrigen vgl. für diese Frage: „Lodovigo **Ciccolini** (Macerata 1767 — Bologna? 1854; Prof. astr. Bologna), Formole analitiche pel calcolo della pasqua. Roma 1817 in 8. (vgl. Corr. astr. 6 von 1822, etc.), — Tommaso Asinari **Cisa di Gresy** (Asti 1790? — Turin 1846; Prof. mech. und Akad. Turin), Démonstration des formules de Mr. Gauss pour déterminer le jour de Pâques (Mém. Tur. 1820), — Ferdinand **Piper** (Stralsund 1811 geb.; Prof. theol. Berlin), Formeln und Tafeln zur Kirchenrechnung (Crelle 22 von 1841), — Laurenz **Feldt** (Dambitsch in Posen 1796 geb.; Prof. math. Braunsberg), De Gaussii formula paschali analytica commentatio. Brunsb. 1852 in 4., — etc." — *b.* Im Jahre 0 unserer Zeitrechnung war (311 : 1) $s = 9$ und es begann somit (314) jenes Jahr mit einem Donnerstage, — folglich, da es ein Schaltjahr war, der März (wegen $31 + 29 = 8 \times 7 + 4$) mit einem Montage, so dass die Märzsonntage auf III 0, 7, 14 etc. fielen. Hievon ausgehend erhält man aber offenbar für das Jahr

$$n = 28 \cdot A + 4 \cdot B + C \qquad 3$$

das Datum S eines Märzsonntages, wenn man von einem jener Daten für jedes Jahr einen Tag und für jedes der $(7 \cdot A + B)$ Schaltjahre noch einen Tag abzieht, dann aber schliesslich eine solche ganze Zahl v von Wochen zufügt, dass man eine kleine positive Zahl erhält, d. h. es ist $S = 7 \cdot v - (28 \cdot A + 4 \cdot B + C) - (7 \cdot A + B) = 7 \cdot v - 35 \cdot A - 5 \cdot B - C$ oder, da man v um ganze Einheiten vermehren oder vermindern kann, $S = 7 \cdot v + 2B - C$, oder endlich, da $[n:28] = 4B + C$ und $[n:4] = C$ folgt,

$$S = 7 \cdot v + \tfrac{1}{2}([n:28] - C) - C = 7 \cdot v + \tfrac{1}{2}([n:28] - 3 \cdot [n:4]) \qquad 4$$

Setzt man aber entsprechend 1

$$n = 4 \cdot x + b = 7 \cdot y + c \qquad 5$$

so folgt (28) für Auflösung in ganzen Zahlen, wenn wie oben auch v eine solche bezeichnet,

$$n = 28 \cdot v - 7 \cdot b + 8 \cdot c \quad \text{folglich} \quad [n:28] = -7 \cdot b + 8 \cdot c, \quad [n:4] = -3 \cdot b = b$$

und man erhält daher schliesslich für den julianischen Kalender

$$S = 7 \cdot v - 5 \cdot b + 4 \cdot c = 7 \cdot v + 2 \cdot b + 4 \cdot c \qquad 6'$$

Bei Einführung des gregorianischen Kalenders A. 1582 wurde jedes Datum um $10 = 7 + 3$ vermehrt, also rückte damals das Sonntagsdatum gegenüber dem julianischen Kalender um 3 Tage, und sodann in den Säkularjahren 1700, 1800, 1900, 2100 etc. je noch um einen Tag vor, so dass 6′ in

$$S = 7 \cdot v + 2 \cdot b + 4 \cdot c + s \qquad 6''$$

wo	1583—1699	1700—1799	1800—1899	1900—2099	2100—2199
	s = 3	4	5	6	0

zu setzen ist, überging, — eine Formel, welche sich für $s = 0$ auf 6′ reduziert, also für $s = 0$ auch für den julianischen Kalender giltig ist. — Da (314)

$e = [(11 \cdot g - 3) : 30] = [11 \cdot a : 30] + 8$ und somit $p = 23 - e = 15 - [11 \cdot a : 30] = 15 + [19 \cdot a : 30]$ ist, so erhält man (316) als Märzdatum des sog. julianischen (eigentlich alexandrinischen oder kirchlichen) Ostervollmondes

$$V = 21 + p = 21 + [(19 \cdot a + 15) : 30] \qquad 7$$

Für den gregorianischen Kalender rückte sodann wegen den im Oktober 1582 dem Datum zugefügten 10 Tagen in den folgenden Jahren auch das Datum des Ostervollmondes um 10 Tage vor, während es zugleich wegen der (314 : d) besprochenen und nach oben in Abzug kommenden Vermehrung der Epakte um 3 abnahm; es gingen somit die 15 in $x = 15 + 10 - 3 = 22$ über. Wegen Wegfall der Schalttage in den Säkularjahren 1700, 1800, 1900, 2100, etc. würde x je wieder um eine Einheit zunehmen, wenn nicht (l. c.) auch die Epakte alle 300 Jahre um eine Einheit vergrössert werden müsste und so 1800, 2100, etc., die beiden Zunahmen, sich aufheben würden. Man erhält so schliesslich für den gregorianischen Ostervollmond das Märzdatum

$$V = 21 + d \qquad \text{wo} \qquad d = [(19 \cdot a + x) : 30] \qquad 8$$

und für 1583—1699 1700—1899 1900—2199 etc.
$x = 22$ 23 24

ist, — eine Formel, welche offenbar auch 7 für $x = 15$ involviert, also für beide Kalender gilt. Allerdings erleidet sie, um den hier ausschliesslich massgebenden kirchlichen Vorschriften zu genügen, zwei schon oben berührte Ausnahmen, indem, wenn $d = 29$ oder 28 wird, der Ostervollmond in ersterm Falle immer, im zweiten Falle dagegen nur, wenn zugleich $a > 10$ ist, um einen Tag früher angesetzt werden muss als es 8 ergiebt, was sodann (vgl. c) jenes erwähnte Vorrücken der Ostern um eine Woche zur Folge hat. — Da nun Ostern an dem Sonntag gefeiert werden soll, welcher dem Ostervollmonde unmittelbar folgt, so kann die Differenz D zwischen dem Datum S des Märzsonntages und dem Datum V des Ostervollmondes nur von 1 bis 7 schwanken, und man hat daher

$$D = [(S - V) : 7] = [(S - V + 6) : 7] + 1$$

zu setzen, wo letzterer Wert die Bedingung in sich schliesst, dass D nicht Null werden darf. Man hat somit nach 6 und 8

$$D = e + 1 \qquad \text{wo} \qquad e = [(2 \cdot b + 4 \cdot c + 6 \cdot d + y) : 7] \qquad 9$$

ist, falls $s - 1$ durch y ersetzt wird. Hieraus folgt aber schliesslich mit nochmaliger Hilfe von 8 das Märzdatum des Ostertages

$$O = V + D = 22 + d + e \qquad 10$$

womit die Vorschriften von **Gauss** vollständig als richtig erwiesen sind. Noch mag erwähnt werden, dass **Gauss** in seiner ersten Note von 1800 die Regeln zur Bestimmung von x und y im gregorianischen Kalender für das Jahr $n = 100 \cdot k + m$ unter Annahme, es sei $k = 3p + r_1 = 4q + r_2$, in

$$x = [(15 + k - p - q) : 30] \qquad y = [(4 + k - q) : 7] \qquad 11$$

zusammenfasste, — später durch seinen damaligen Zuhörer Paul **Tittel** (Pásthó bei Erlau 1784 — Ofen 1831; Prof. astr. Pesth und Dir. Obs. Ofen) darauf aufmerksam gemacht wurde, dass unter Anwendung dieser Regeln vom 5. Jahrtausend unserer Zeitrechnung hinweg die volle Übereinstimmung mit der von **Clavius** in seiner „Explicatio (316)“ gegebenen Ostertafel aufhöre, — und nun, nachdem er den Grund davon im Übersehen einer Vorschrift der alten Kirchenrechnung aufgefunden hatte, in dem Nachtrage von 1816 dem Übelstande dadurch begegnete, dass er p aus $8k + 13 = 25p + r$ zu bestimmen vorschrieb. —

c. Wenn $e = 6$ ist, so wird $D = 7$, d. h. es fällt der Ostervollmond 7^d vor einen Märzsonntag oder ist selbst Sonntag. Trifft daher dieser Umstand, wie es im gregorianischen Kalender z. B. 1609 (mit $d = 29$ und $e = 6$) geschah und 1954 (mit $d = 28$, $e = 6$ und $a = 16 > 10$) wieder geschehen wird, mit einem der beiden Ausnahmsfälle zusammen, in welchen der Ostervollmond um 1^d rückwärts versetzt werden soll, so fällt letzterer auf einen Samstag, und es kann daher Ostern schon am folgenden Tage, also eine volle Woche früher gefeiert werden. Dagegen bietet 1886 (mit $d = 28$, $e = 6$ und $a = 5 < 10$) ein Beispiel für den Fall, wo eine solche Verlegung nicht stattfand und Ostern wirklich erst III 56 = IV 25 gefeiert wurde, während sie z. B. 1573 im julianischen und 1818 im gregorianischen Kalender (mit $d = 0 = e$) schon III 22 anzusetzen war. — Ein Kuriosum anderer Art bot das Jahr 1882 ($a = 1$, $b = 2$, $c = 6$), für welches im julianischen Kalender $d' = 4$, $e' = 2$, $O' = 28$, — im gregorianischen dagegen $d'' = 12$, $e'' = 6$, $O'' = 40$ folgte: Es war somit in diesem Jahr $O'' - O' = 12$ oder gleich der Kalenderdifferenz, d. h. es wurde Ostern nach beiden Kalendern an demselben Tage gefeiert, — ein Fall, der übrigens gar nicht selten vorkömmt, so sich in der That schon 1885, 86 und 89 wiederholte, während dagegen allerdings andere Male, wie z. B. 1883 ($a = 2$, $b = 3$, $c = 0$; $d' = 23$, $e' = 3$, $O' = 48$ (= III 60 n. St.); $d'' = 1$, $e'' = 2$, $O'' = 25$), die Differenz bis auf volle 5 Wochen ansteigen kann. — Da die in 1 vorkommenden Grössen a, b, c sich in $19 \times 4 \times 7 = 532^a$ offenbar nach allen ihren Kombinationen erschöpfen müssen und dies für die julianische Ostern (da für dieselbe x und y konstant sind) auch für d und e der Fall sein muss, so kehren im alten Kalender jeweilen nach 532 Jahren dieselben Osternfolgen zurück, wie sich dies spätestens schon Joh. Heinrich **Waser** (Zürich 1742 — ebenda 1780; Pfarrer am Kreuz bei Zürich; vgl. Biogr. I und Not. 260) zurechtgelegt hatte, da hierauf die von ihm in seinem wertvollen „Historisch-diplomatischen Jahrzeitbuche. Zürich 1779 in fol." gegebene erste Tafel beruht. — Anhangsweise mag noch erwähnt werden, dass man in den Prophezeiungen von Michel Nôtre-Dame oder **Nostradamus** (St-Rémy in der Provence 1503 — Salon 1566; stieg durch die Astrologie vom hungerleidenden zum gefeierten Arzte auf) unter anderm lesen soll: „Quand Georges Dieu crucifera, — Que Marc le ressucitera, — Et que St-Jean le portera, — La fin du monde arrivera", — d. h. in dem Jahre, wo der Charfreitag auf St. Georg (IV 23), folglich Ostern auf St. Markus (IV 25) und Frohnleichnam auf Johanni (VI 24) falle, werde das Ende der Welt eintreffen. Es hätte also nach oben 1886 wieder einmal der Weltuntergang vor sich gehen sollen; er wurde jedoch gnädiglich auf 1943 vertagt.

318. Das jüdische Osterfest. — Auch die für die jüdische Zeitrechnung (303) bestehenden komplizierten Vorschriften gelang es **Gauss** [a], in relativ einfache Regeln zusammenzufassen, so dass er, unter Annahme, es falle der 15. Nisan des jüdischen Jahres A in das Jahr A — 3760 der christlichen Zeitrechnung [b], für Bestimmung des julianischen Datums dieses Tages, an welchem die Juden nach mosaischer Vorschrift ihr Oster- oder Passah-Fest zu beginnen haben, folgende Anleitung geben konnte: Man berechne die Divisionsreste

$$[(12\,A + 17):19] = a \qquad [A:4] = b \qquad [(M + 3\,A + 5 \cdot b + 5):7] = c \quad \mathbf{1}$$

unter M die Ganzen des Ausdruckes

$$32{,}0440933 + 1{,}5542418 \cdot a + 0{,}25 \cdot b - 0{,}00317779 \cdot A = M + m$$ **2**

verstehend, während m den Decimalbruch desselben bezeichnen soll. Es sind sodann folgende vier Fälle zu unterscheiden: I. Ist $c = 1$, $a > 6$ und $m \geqq 0{,}6328\,7037$, so fällt Ostern auf März $M + 2$. II. Erhält c einen der Werte 2, 4, 6, so fällt dagegen Ostern auf März $M + 1$. III. Wird $c = 0$, $a > 11$ und $m \geqq 0{,}8977\,2376$, so fällt Ostern ebenfalls auf März $M + 1$. IV. In allen übrigen Fällen wird Ostern März M gefeiert [c]. — Ausnahmslos folgt Ostern nach 163 Tagen der erste Thischri oder der Neujahrstag des folgenden Jahres [d].

Zu 318: *a.* **Gauss** gab seine Anleitung 1802 in Bd. 5 der Mon. Corr. Vgl. auch „**Cisa di Gresy**, Démonstration des formules de Gauss pour déterminer le jour de Pâques des Juifs (Corr. astr. 1 von 1818)“. — *b.* Die spätern Juden begannen nach **Ideler** die Zählung ihrer Mondjahre mit dem Herbste des julianischen Jahres 953, so dass bei Beginn ihrer Aera bereits 952 Jahre der julianischen Periode verflossen waren und man somit zu der jüdischen Jahrzahl 952 zu addieren hat, um die entsprechende julianische zu erhalten, oder (312) von derselben $4713 - 952 = 3761$ abziehen muss, wenn man sich auf die christliche Aera beziehen will, — jedoch in unserm Falle mit **Gauss** nur 3760, da die auf das Frühjahr fallende Ostern schon dem folgenden Jahre der christlichen Zeitrechnung angehört. — *c.* Für die eigentliche Ableitung der Gauss'schen Regeln auf die unter a gegebene Litteratur verweisend, beschränke ich mich darauf, zu erwähnen, dass das Jahr 0 der jüdischen Zeitrechnung, welchem $g = 17$ entspricht, im julianischen Kalender ein Schaltjahr war, — dass die Reste a und b sich auf den Mondcyklus und die julianische Schaltperiode beziehen, — c dagegen und die vier Fälle mit den Eigentümlichkeiten der jüdischen Jahrrechnung zusammenhängen, zu welch' letztern z. B. gehört, dass, wenn der Moled Thischri auf Sonntag, Mittwoch oder Freitag fällt, das Jahr erst mit dem folgenden Tage beginnen soll, — etc. — Als Beispiel mag dienen, dass für $A = 5585$ nach 1 und 2 successive $a = 5$, $b = 1$, $M + m = 22{,}317\,3227$, $M = 22$, $m = 0{,}317\,3227$, $c = 1$ folgt, also für dieses Jahr, dessen Frühling auf $5585 - 3760 = 1825$ n. Chr. fällt, die Juden ihr Osterfest nach IV auf den 22. März alten oder den 3. April neuen Stiles zu legen hatten. — *d.* Da die 303 : c erwähnten Jahresvariationen die Zeit zwischen dem 15. Nisan (15) und dem 1. Thischri (178) unberührt lassen, so folgt in der That jeweilen der Ostern eines Jahres nach $178 - 15 = 163$ Tagen ein Neujahr, so z. B. der nach oben auf 1825 IV 3 n. St. (93) fallenden Ostern des Jahres 5585 am $93 + 163 = 256$. unserer Jahrestage oder am 13. September der Neujahrstag des 5586. Jahres.

319. Die sog. Kalendariographie. — Unter **Kalendariographie** versteht man die Kunst, gestützt auf die im vorhergehenden entwickelten Grundlagen, sog. **Jahreskalender** oder auch sich auf eine grössere Reihe von Jahren, wie etwa auf ein volles Jahrhundert, erstreckende sog. **immerwährende Kalender** zu entwerfen, d. h. bequeme Hilfsmittel, um sich für ein oder mehrere Jahre über die

gegenseitige Lage der Wochen- und Monatstage, das Eintreffen der beweglichen Feste, etc., allfällig auch noch über den Stand von Sonne und Mond, die Zeit ihres Auf- und Unterganges, die zu erwartenden Finsternisse, etc., zu belehren [a]. Unzweifelhaft existierten schon im Altertume, und sodann auch ziemlich frühe im Abendlande, einzelne Hilfsmittel dieser Art [b]; aber den Urtypus für unsere gegenwärtigen Kalender scheinen doch erst **Johannes v. Gmunden** [c] und ganz besonders der grosse **Regiomontan** [d] festgestellt zu haben. Nach Erfindung der Buchdruckerkunst verbreiteten sich namentlich die Jahreskalender bald allgemein, erhielten zu Stadt und Land den Ehrenplatz neben der Bibel und wurden schliesslich zu einem ganz bedeutenden Handelsartikel, dessen Absatz der „Kalendersteller" durch Beigabe von astrologischem Kram und piquanten Erzählungen noch zu erhöhen suchte. Je mehr sich aber der Kalender in letzterer Weise ausdehnte, desto ausschliesslicher zogen sich die wissenschaftlichen Angaben aus demselben in die, ebenfalls nach dem Vorgange von **Regiomontan** [e], neben ihm erscheinenden, für den Fachmann bestimmten astronomischen Jahrbücher oder Ephemeriden zurück, auf welche wir jedoch erst später (516) näher eintreten werden [f].

Zu 319: *a.* Früher schrieb man in den sog. immerwährenden Kalendern jedem Monatstage die goldene Zahl bei, welche dem Jahre zugehörte, das auf ihn einen Neumond brachte, so z. B. (vgl. Tab. in 314 : d) I 23 (und dann wieder I 23 + 29 = II 21, II 21 + 30 = III 23, III 23 + 29 = IV 21, etc.) die Zahl 1, I 12 (und dann wieder I 12 + 29 = II 10, etc.) die Zahl 2, etc., und fügte wohl auch in einer zweiten Kolumne noch entsprechende Zahlen für den Vollmond bei. — *b.* Abgesehen von Spuren, welche sich bei den alten Egyptern und Chinesen finden sollen, ist zu erwähnen, dass die Berliner Bibliothek ein Kalender-Manuskript aus dem Jahre 1200, die Pariser Bibliothek ein ebensolches aus dem Jahre 1284 besitzt; ferner wird berichtet, dass Roger **Baco** auf 1292 einen Kalender gestellt, Paolo **Dagomari** auf 1326 unter dem Titel „Taccuino" einen ersten italienischen Kalender verfasst habe, etc. — *c.* Johannes Nyder vulgo **Joannes da Gamundia** (Gmunden am Traunsee oder Schwäbisch-Gmünd 1380? — Wien 1442; Prof. astr. Wien, der durch Vergabung den Grund zur Wiener Bibliothek legte; vgl. Stern in Ersch und Gruber und Joh. Müller im Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit 1878) verfertigte ein mutmasslich mit 1416 beginnendes, sich über 4 Mondzirkel erstreckendes „Calendarium", welches sodann (vgl. Mon. Corr. 18) mit noch vorhandenen Holztafeln vervielfältigt wurde; auch bot vor einigen Jahren Antiquar Rosenthal in München unter dem Titel „Johannes de Gmundiis, Calendarius bonus et utilis pronuntiatus in studio Wienniensi. Cum explicatione signorum coelestium, etc. Eclipses Solis et Lunæ quæ 1433—62 erunt, cum fig. pictis" ein aus 18 Folioblättern bestehendes, angeblich 1432 verfasstes Manuskript zum Verkaufe aus. Wie sich zu diesen Werken ein nach Müller in der Öttingen-Wallenstein'schen Fideikommiss-Bibliothek befindlicher, 1404 zu Ulm von „Johannes wissbier da gamundia" geschriebener „Computus" verhält, bleibt noch festzustellen, — und ebenso ihre allfällige Beziehung zu einem um die Mitte des

15. Jahrhunderts von „ludwig zu basel“ mit Holztafeln von 83^{mm} Höhe auf 67^{mm} Breite gedruckter Kalender, der sich im Schloss Spiez am Thunersee befand, dort 1875 von Antiquar Butsch in Augsburg erstanden und sodann als Unicum zu 2400 Mark ausgeboten wurde. — *d.* Nachdem **Regiomontan**, mutmasslich schon 1474, einen mit Holztafeln gedruckten Kalender ausgegeben, liess er 1475, und zwar zugleich deutsch und lateinisch, einen mit beweglichen Typen gedruckten Kalender erscheinen, welcher in beiden Ausgaben übereinstimmend 30 Quartblätter Tabellen oder Text und zwei Figurentafeln enthält und die hohen Festtage rot gedruckt zeigt, während dagegen (wenigstens in meinem Exemplare der lat. Ausgabe) die goldenen Zahlen von Hand mit roter Tinte eingetragen sind. Das Titelblatt ist leer geblieben, dagegen liest man auf dem Schlussblatte der deutschen Ausgabe: „Also ist begriffen körczlich diss kalenders nucz und töglichait nach meinem slechten tewtsche und chlainem vermögen. M. Johan von Köngsperg“, — am Ende der lateinischen Ausgabe dagegen bloss: „Ductu Joannis de Monteregio“. Zuerst kömmt der eigentliche Kalender, in welchem jedem Monat zwei Seiten eingeräumt sind: Die erste Seite giebt für die mit 1475, 1494 und 1513 oder mit der goldenen Zahl 13 beginnenden Gruppen von je 19 Jahren (mit der goldenen Zahl als Argument) Stunde und Minute von jedem Neumond und Vollmond, — die zweite Seite dagegen in der jetzt noch bei immerwährenden Kalendern gebräuchlichen Weise den Monatstag, die mit Hilfe des Sonntagsbuchstabens den Wochentag bestimmende Buchstabenfolge (314), den korrespondierenden Tag des römischen Kalenders, die wichtigsten festen Festtage, sowie auch Zahlen, aus welchen sich mittelst beigegebener Hilfstäfelchen für jeden Tag die Längen von Sonne und Mond finden lassen. Dann folgt eine kleine Ortstafel mit Angabe der Stunden und Minuten der auf Nürnberg bezogenen Längen und der auf ganze Grade abgerundeten Breiten, — ferner ein Verzeichnis der von 1475 bis 1530 zu erwartenden Sonnen- und Mondfinsternisse, mit Angabe ihrer Dauer und Grösse, — und endlich eine Tafel der beweglichen Feste (316), sowie eine ebensolche der Tageslänge für jeden zwischen 36 und 55 fallenden Breitengrad und jeden 3. Grad der Sonnenlänge. Ausserdem sind noch Anleitungen zum Gebrauche des Kalenders, zur Konstruktion von Sonnenuhren, etc., beigegeben, sowie ein auf steifes Papier aufgezeichnetes „Instrumentum horarium inæqualium“, ein ebensolches „Instrumentum veri motus lunæ“, wohl auch noch ein „Quadrans horologii horizontalis“ und ein „Quadratum horarium generale“. Für weitern betreffenden Detail auf meine Mitteilungen (Nro. 32 und 33 von 1872/3) verweisend, füge ich noch bei, dass dieser Kalender, der namentlich im astronomischen Teile gegenüber demjenigen des Johannes da Gamundia wesentliche Fortschritte zeigt, vielfach und zwar meistens mit seinem Verfasser ganz fremden Zusätzen, für welche derselbe natürlich nicht (wie es z. B. in Delambre III geschah) verantwortlich gemacht werden darf, nachgedruckt wurde. — *e.* Nahe gleichzeitig mit seinem Kalender gab nämlich **Regiomontan**, wieder ohne Titel, aber am Schlusse die kennzeichnenden Worte „Explicitum est hoc opus anno chr. Do. 1474 ductu Joannis de Monteregio“ beifügend, auch „Ephemerides ab anno 1475 ad annum 1506“ heraus, welche grosses Aufsehen erregten, — bei den damaligen Entdeckungsreisen eine bedeutende Rolle spielten, so z. B. von **Columbus**, wie aus dessen Schiffsjournal deutlich hervorgehen soll, vielfach gebraucht wurden, — und, da sie schon anfänglich mit 12 Dukaten bezahlt wurden, ja bald kaum mehr erhältlich waren, mehrfach in Nachdruck erschienen, so unter anderm „Venetiis 1498“ durch Peter Liechten-

stein aus Köln als „Ephemerides sive Almanach perpetuus". Diese mir vorliegende neue Ausgabe beschlägt 122 Blätter und reproduziert im Eingange Ortstafel und Kalender, nur dass erstere sich auf den Meridian von Toledo, als den westlichsten Ort der Tafel, bezieht, und letzterer bloss die Monats-, Wochen- und Fest-Tage enthält. Dann folgt eine Art Schlüssel für die Cykeln und beweglichen Feste, — eine der frühern analoge Tafel der Tageslängen, — und eine Einleitung in die eigentlichen Ephemeriden, in welcher sich „Johanes Lucilius **Santritter** Helbrunnensis Germanus" als Bearbeiter und Herausgeber vorführt. Diese eigentlichen Ephemeriden geben nun in ausgedehnterer Weise, und nicht bloss wie im Kalender für Sonne und Mond, sondern auch für die übrigen Wandelsterne, die Längen und für den Mond ebenfalls die Breiten. Zum Schlusse kömmt noch ein, demjenigen im Kalender entsprechendes, Verzeichnis der von 1475—1530 zu erwartenden Finsternisse, und zum Überflusse zu Gunsten der Astrologen eine „Tabula introitus Solis in principia signorum Zodiaci", sowie eine „Tabula domorum". — Zum Schlusse füge ich bei, dass allerdings, strenge genommen, diese Regiomontan'schen Ephemeriden nicht die ältesten waren, da spätestens **Ptolemäus** und seine Zeit ähnliche Hilfsmittel erstellt hatten; aber sie waren nicht nur bequemer und reichhaltiger, sondern eben die ersten, welche durch den Druck allgemeiner zugänglich und für praktische Zwecke benutzbar wurden. — *f.* Für weitern Detail verweise ich auf die Fachlitteratur, zu deren Ergänzung noch folgende Schriften aufführend: „J. J. **Littrow**, Kalendariographie. Wien 1828 in 8., — Jakob Philipp **Kulik** (Lemberg 1793 — Prag 1863; Prof. math. Prag), Der tausendjährige Kalender. Prag 1831 in 12. (2. A. 1834 in 4.), — Wilhelm **Matzka** (Leipertitz in Mähren 1798 geb.; Prof. math. Wien und Prag), Die Chronologie. Wien 1844 in 8., — Ferdinand **v. Schmöger** (München 1792 geb.; Prof. phys. et astr. Regensburg), Grundriss der christlichen Zeit- und Festrechnung. Halle 1854 in 8., — Ul. **Bouchet**, Hémérologie ou traité pratique complet des Calendriers. Paris 1868 in 8., — F. J. **Brockmann**, System der Chronologie. Stuttgart 1883 in 8., — August **Mommsen** (Oldesloe 1821 geb.; jüngerer Bruder von Theodor; Gymnas. Prof. Schleswig), Chronologie: Untersuchungen über das Kalenderwesen der Griechen. Leipzig 1883 in 8., — Osc. **Fleischhauer**, Kalender-Compendium. Gotha 1884 in 8., — etc."

320. Die sog. Chronologie. — Eigentlich alles umfassend, was bisher in diesem Abschnitte auseinander gesetzt wurde, versteht man doch gewöhnlich unter **Chronologie** [a] zunächst nur die historische Zeitrechnung, und vor allem aus die Anleitung zur kritischen Prüfung und Berichtigung historischer Daten mit Hilfe gleichzeitiger astronomischer Verhältnisse und Erscheinungen. Es sind nun für diesen mehr technischen Teil der Zeitrechnung ausser dem bereits mitgeteilten die Mittel zur leichten Bestimmung der Equinoktien, Solstitien und Syzygien, sowie ganz besonders der Finsternisse von hervorragender Bedeutung [b]. Ich muss mich jedoch hier des beschränkten Raumes wegen begnügen, auf die später (in den Abschnitten XVIII und XIX) zu berührenden Theorien zu verweisen, einige betreffende Hilfsmittel bekannt zu geben [c], den Gebrauch der von mir zu Gunsten der Chronologie komponierten

Tab. VIII[b] an einigen Beispielen zu erläutern[d], und zum Schlusse zur Ergänzung der bisher aufgeführten Litteratur noch einige allgemeinere Werke namhaft zu machen[e].

Zu 320: *a.* Von χρονολογία = Zeitrechnung. — *b.* Nach Günther machte schon **Apian** in seinem „Astronomicon" auf diesen Umstand aufmerksam, und bald darauf erwarb sich Gerhard **Mercator** das Verdienst, in seiner „Chronologia a mundi exordio ad A. 1568 ex eclipsibus et observationibus astronomicis. Coloniæ 1568 in fol." einen ersten Versuch zu seiner Fruktifizierung zu machen. — *c.* Vor allem ist das von Dom François **d'Antine** (Gonrieux 1688 — Paris 1746; Benediktiner der Congrégation de St-Maur) angelegte grossartige Werk „L'art de vérifier les dates des faits historiques. Paris 1750, 2 Vol. in 4. (3. A. 1783—87 in 3 Vol. in fol. durch seinen Ordensbruder Dom François Clément besorgt; seither noch Suppl.) zu erwähnen, für welches **Lacaille** eine Tafel aller in Europa sichtbaren Finsternisse vom Anfange unserer Zeitrechnung bis 1800 besorgte (für die spätern Ausgaben durch Pingré und Duvancel bis 2000 verlängert), an welche sich „**Pingré,** Chronologie des éclipses qui ont été visibles depuis le pôle boréal jusque vers l'équateur, pendant les dix siècles qui ont précédé l'ère chrétienne. Paris 1787 in 4. (auch Vol. 42 der Mém. de l'Acad. d. inscr.)" anschloss. — In der neuern Zeit machte sich in dieser Richtung besonders **Zech** durch seine Preisschriften „Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse der Alten. Leipzig 1851 in 4., — und: Astronomische Untersuchungen über die Finsternisse, welche von den Schriftstellern des Altertums erwähnt werden. Leipzig 1853 in 4." verdient; ferner erschienen die bei bescheidenen Ansprüchen ganz brauchbaren Hilfsmittel „Charles-Louis **Largeteau** (Mouilleron-en-Pareds in Vendée 1791 — Pouzauge in Vendée 1857; Akad. Paris), Tables pour le calcul des syzygies, des èquinoxes et des solstices (Conn. d. t. 1846—47; auch Mém. Par. 1850, und in deutsch. Bearb. von Gumpach: Heidelberg 1853), — C. M. **Stürmer,** Sonnentafeln nach Le Verrier's Elementen der Sonnenbahn berechnet. Würzburg 1875 in 4., — Ch. **Paulus,** Tafeln zur Berechnung der Mondphasen. Tübingen 1885 in 8., — etc.", — und überdies die umfassenden Arbeiten: „**Newcomb,** On the reccurence of Solar Eclipses with Tables of Eclipses from B. C. 700 to A. D. 2300. Washington 1879 in 4. (Astr. Papers I 1), — und: Theodor **v. Oppolzer** (Prag 1841 — Wien 1886; Prof. astr. Wien), Syzygien-Tafeln für den Mond, nebst ausführlicher Anweisung zum Gebrauche derselben (Publ. 16 astr. Ges. von 1881)", welchen der letztere noch seinen grossartigen „Canon der Finsternisse. Wien 1887 in 4." folgen liess, der leider den Abschluss seiner fruchtbaren Thätigkeit bilden sollte. — *d.* Die Tab. VIII[b] enthält nämlich ausser dem in 315 angeführten, im Auszuge aus „Robert **Schram,** Hilfstafeln für Chronologie. Wien 1883 in 4." aber in etwas bequemerer Anordnung, die Mittel, um für den ganzen Zeitraum von — 2000 bis + 2000 die Eintrittszeiten der Sonne in die Zeichen des Widders, Krebses, der Wage und des Steinbocks, d. h. also die **Equinoktien und Solstitien,** zu berechnen, — ferner die Zeitpunkte derjenigen Neu- und Vollmonde festzulegen, welche bei geringer Breite des Mondes statthaben, also mutmasslich von Finsternissen begleitet sind und daher als **ekliptische Syzygien** bezeichnet werden, — und eine ganze Reihe verwandter Aufgaben in leichter Weise zu lösen, wie dies folgende Beispiele belegen und erläutern mögen: Wünscht man z. B. zu wissen, wann in dem (im Jahrviert die 2. Stelle einnehmenden) Jahre 1890 Sommersolstitium und

Herbstequinoktium eingetreten seien, so entnimmt man der Tafel, dass dies

$$160{,}25 - \tfrac{1}{100}\,(160{,}25 - 159{,}42) \cdot 90 - 0{,}50 = 159^d{,}00 \text{ Tage}$$

und $$253{,}80 - \tfrac{1}{100}\,(253{,}80 - 253{,}02) \cdot 90 - 0{,}50 = 252{,}60 \quad \text{„}$$

nach Jahresanfang, oder also (vgl. VIII^c) annähernd

VI 9 jul. = VI 21 greg. um Mittag und IX 10 jul. = IX 22 greg. um $14\tfrac{1}{2}^h$

geschehen sei, wie dies auch der Naut. Alm. bestätigt. — Wünscht man die Angabe des Almagest (éd. Halma I 244,5), dass zu Babylon in der Nacht vom 29./30. Thot des 27. Jahres von Nabonnassar eine totale Mondfinsternis und zwar $2\tfrac{1}{2}^h$ vor Mitternacht (oder, Babylon in $2^h\ 50^m$ Greenwich angenommen, um $6^h\ 40^m$ Gr.) deren Mitte beobachtet worden sei, zu kontrolieren, so übersetzt man vorerst diese Zeitangabe nach 304 und 315 in Tage der julianischen Periode, wodurch man

$$1448\,638 + 26 \times 365 + 28{,}28 = 1458\,156{,}28$$

erhält, und findet sodann in unserer Tafel

$T_1 = 1452\,263{,}78$	$A_1 = 346$	$B_1 = 73$
T_2	$5\,876{,}59$	$A_2 = 108$ ·	$B_2 = 36$ *
ΔT_1	$15{,}57$	54	109
ΔT_2	$0{,}33$		
	$1458\,156{,}27$		

also schönste Übereinstimmung. — Für den Mittag des 7. Juli 1890 oder 1890 VI 25 jul. = 1890 I 0 + 175 erhält man mit Hilfe der obigen Bestimmungen, wenn x den Zuwachs der Sonnenlänge vom Sommersolstitium hinweg bezeichnet,

$$x : 90^0 = (175 - 159{,}00) : (252{,}60 - 159{,}00) \qquad \text{oder} \qquad x = 15\tfrac{1}{4}^0$$

so dass sich für jenes Datum, übereinstimmend mit unserer VIII^a und dem Naut. Alm., die Sonnenlänge 105° 15′ ergiebt. — Etc. — *e.* Ich erwähne noch: „Heinrich **Wolf** (Zürich 1551 — ebenda 1594; Pfarrer und Prof. theol. Zürich; mein Ur-Ur-Oheim, vgl. mein Neujahrsblatt auf 1874), Chronologia. Tiguri 1585 in 4., — Seth Kalwitz oder **Calvisius** (Groschleben in Thüringen 1556 — Leipzig 1615; Kantor in Leipzig), Opus Chronologicum. Lipsiæ 1605 in fol., — **Petavius**, Opus de doctrina temporum. Paris 1627, 2 Vol. in fol., und: Uranologium. Paris 1630 in fol., — Anton **Pilgram** (Wien 1730 — ebenda 1793; Jesuit; Observ. Wien), Calendarium chronologicum. Vindobonæ 1781 in 4., — **Ideler**, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. Berlin 1825—26, 2 Vol. in 8. (2. Abdr. Breslau 1883) und: Lehrbuch der Chronologie. Berlin 1829 in 8., — Ed. **Brinckmeier**, Praktisches Handbuch der historischen Chronologie. Berlin 1843 in 8. (2. A. 1882), — etc.“

Einige Zusätze und Berichtigungen.

26 (zu 13): Vgl. auch „**Bessel** als Bremer Handlungslehrling. Bremen 1890 in 8., — und: J. A. **Repsold,** Nachrichten über die Familie Repsold. Hamburg 1884 in 8." Aus letzterer Schrift erfährt man z. B., dass Joh. Georg Repsold 1770 IX 19 (nicht erst 1771) geboren wurde.

27 (zu 14): Eine „Sonnenwarte" giebt es in Potsdam nicht, sondern nur ein einheitliches „Astrophysikalisches Observatorium", an welchem, unter Direktion von Prof. **Vogel,** Prof. **Spörer** und Dr. **Lohse** als Observatoren arbeiten. — Der Litteratur füge ich „S. **Günther,** Handbuch der mathematischen Geographie. Stuttgart 1890 in 8." bei.

28 (zu 15): Ich erwähne noch „G. v. **Vega,** Vorlesungen über die Mathematik. Wien 1782—1800, 4 Bde. in 8., — L. B. **Francœur,** Cours complet de mathématiques pures. Paris 1809, 2 Vol. in 8., — Josef **Knar** (Hartberg in Steyermark 1800 — Graz 1861; Prof. math. Graz), Lehrbuch der Elementarmathematik. Graz 1828—29, 2 Bde. in 8., — und: Oscar **Schlömilch** (Weimar 1823 geb.; Prof. math. Jena und Dresden), Handbuch der Mathematik. Breslau 1880—81, 2 Bde. in 8."

29 (zu 41): Der Litteratur sind beizufügen „Adolf **Minding** (Kalisch 1806 geb.; Prof. math. Berlin und Dorpat), Sammlung von Integraltafeln. Berlin 1849 in 4., — Jos. **Herr,** Lehrbuch der höhern Mathematik. Wien 1857—64, 2 Bde. in 8., — M. **Stegemann,** Grundriss der Differential- und Integralrechnung. Hannover 1873, 2 Bde. in 8., — Ax. **Harnack,** Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1881 in 8., — etc."

30 (zu 65): Bemerkenswert ist auch „B. **Pitiscus,** Trigonometria. Augustæ Vindel. 1600 in 4."

31 (zu 121): Vgl. ferner „Charles **Célerrier** (Genf 1818 — ebenda 1889; Prof. math. Genf), Mémoire sur la mesure de la pesanteur par le pendule (Mém. Genève 1866), und: Rapport sur la question du pendule. Berlin 1881 in 4., — und: C. S. **Peirce,** Methods and results of pendulum experiments. Washington 1882 in 4."

32 (zu 123): Es sind beizufügen „F. **Berthoud,** Essai sur l'horlogerie. Paris 1763, 2 Vol. in 4., — und: P. **Dubois,** Histoire de l'horlogerie. Paris 1849 in 4."

33 (zu 149): Im Titel der Schrift von **Leslie** ist „properties" durch „propagation" zu ersetzen. — **Hirn** starb 1890 zu Kolmar. — Vgl. „Alb. **Riggenbach,** Historische Studie über die Entwicklung der Grundbegriffe der Wärmefortpflanzung. Basel 1884 in 4."

34 (zu 172): Ich habe leider auch übersehen „J. **Wilsing,** Über den Einfluss von Luftdruck und Wärme auf die Pendelbewegung. Berlin 1880 in 8."

35 (zu 227): Vgl. ferner „W. **Ferrel,** A popular treatise on the winds. New-York 1889 in 8."

Tafeln.

I. **Reduktionstafel für Längenmasse.**

II. **Arithmetische Tafeln:** *a.* Quadrattafel; *b.* Tafel der Potenzen, Vielfachen u. Reciproken; *c.* Faktorentafel; *d.* Tafel der Binomial-Koeffizienten; *e.* Interpolationstafel; *f.* Hilfstafel zur Fehlerrechnung.

III. **Logarithmentafeln:** *a.* Tafel zehnstelliger natürlicher und gemeiner Logarithmen; *b.* Hilfstafel zur Berechnung einzelner anderer solcher Logarithmen und Vielfachen-Tafel; *c.* Vierstellige gemeine Logarithmen.

IV. **Trigonometrische Tafeln:** *a.* Sehnentafel; *b.* Trigonometrische Zahlen und hyperbolische Funktionen; *c.* Vierstellige Logarithmen der Sinus; *d.* Vierstellige Logarithmen der Tangens; *e.* Reduktionstafel für Bogen und Zeit.

V. **Physikalische Tafeln:** *a.* Hypsometrische Tafel; *b.* Tafel der Atomgewichte, Brechungsexponenten, Dichten, etc.; *c.* Tafel für Wasserdampf.

VI. **Bessel'sche Refraktionstafel.**

VII. **Geodätische Tafeln:** *a.* Ortstafel; *b.* Höhentafel für $\varphi = 47^{0}\ 23'$; *c.* Länge des halben Tagbogens; *d.* Tafel für die Gestalt der Erde und Bodes Tafel.

VIII. **Sonnen- und Mond-Tafeln:** *a.* Deklination und Radius der Sonne, wahre Länge derselben, etc.; *b.* Tafel der Equinoktien, Solstitien und Finsternisse; *c.* Zeittafel; *d.* Tafel der Sonnenflecken und Variationen.

IX. **Planeten- und Kometen-Tafeln:** *a.* Tafeln von Halley und Encke; *b.* Planeten-Tafel; *c.* Kometen-Tafel.

X. **Stern-Tafeln:** *a.* Sterntafel; *b.* Veränderliche und neue Sterne; *c.* Verzeichnis von Doppelsternen; *d.* Verzeichnis von Nebelflecken und Sternhaufen; *e.* Hilfstafel für die Mayer'sche Formel.

XI. **Kalendariographische Tafeln:** *a.* Immerwährender gregorianischer Kalender; *b.* Epakte, Sonntagsbuchstabe und Ostern; *c.* Römischer und französischer Kalender.

XII. **Historisch-litterarische Tafel.**

NB. Die für einzelne dieser Tafeln als notwendig erscheinenden Erläuterungen oder Beispiele sind zum Teil denselben beigedruckt, zum Teil unter den citierten Nummern im Texte aufzusuchen.

A. Reduktion auf Meter.

n	Alt französisches Mass				Englisches Mass			A. Zürich	A. Rom	A. Griech.
	Toise	Pied	Pouce	Ligne	Yard	Foot	Inch	Fuss	Pes	Ποῦς
	m	dm	cm	mm	m	dm	cm	dm	dm	dm
1	1,9490	3,2484	2,707	2,256	0,9144	3,0479	2,540	3,0128	2,9586	3,0828
2	3,8981	6,4968	5,414	4,512	1,8288	6,0959	5,080	6,0256	5,9172	6,1656
3	5,8471	9,7452	8,121	6,767	2,7431	9,1438	7,620	9,0384	8,8758	9,2484
4	7,7962	12,9936	10,828	9,023	3,6575	12,1918	10,160	12,0512	11,8344	12,3312
5	9,7452	16,2420	13,535	11,279	4,5719	15,2397	12,700	15,0640	14,7930	15,4140
6	11,6942	19,4904	16,242	13,535	5,4863	18,2877	15,240	18,0767	17,7516	18,4968
7	13,6433	22,7388	18,949	15,791	6,4007	21,3356	17,780	21,0895	20,7102	21,5796
8	15,5923	25,9872	21,656	18,047	7,3151	24,3836	20,320	24,1023	23,6688	24,6624
9	17,5413	29,2355	24,363	20,302	8,2394	27,4315	22,860	27,1151	26,6274	27,7452
10	19,4904	32,4839	27,070	22,558	9,1538	30,4795	25,400	30,1279	29,5860	30,8280
11	21,4394	35,7322	29,777	24,814	10,0682	33,5274	27,939	33,1407	32,5446	33,9108
12	23,3884	38,9807	32,481	27,070	10,9826	36,5753	30,479	36,1535	35,5032	36,9936

B. Reduktion von Meter.

n	Alt französisches Mass				Englisches Mass			A. Zürich	A. Rom	A. Griech.
	Toise	Pied	Pouce	Ligne	Yard	Foot	Inch	Fuss	Pes	Ποῦς
	t	'	''	'''	y	'	''	'	'	'
1	0,51307	3,0784	36,941	443,30	1,0936	3,2809	39,371	3,3192	3,3800	3,2438
2	1,02615	6,1569	73,883	886,59	2,1873	6,5618	78,742	6,6384	6,7600	6,4876
3	1,53922	9,2353	110,824	1329,89	3,2809	9,8427	118,112	9,9576	10,1400	9,7314
4	2,05230	12,3138	147,765	1773,18	4,3745	13,1236	157,483	13,2768	13,5200	12,9752
5	2,56537	15,3922	184,707	2216,48	5,4682	16,4045	196,854	16,5960	16,9000	16,2190
6	3,07844	18,4707	221,648	2659,78	6,5618	19,6854	236,225	19,9152	20,2800	19,4628
7	3,59152	21,5491	258,589	3103,07	7,6554	22,9663	275,596	23,2344	23,6600	22,7066
8	4,10459	24,6276	295,531	3546,37	8,7491	26,2472	314,966	26,5536	27,0400	25,9504
9	4,61767	27,7060	332,472	3989,66	9,8427	29,5281	354,337	29,8728	30,4200	29,1942
10	5,13074	30,7844	369,413	4432,96	10,9363	32,8090	393,708	33,1920	33,8000	32,4380

C. Reduktion auf Kilometer. / D. Reduktion von Kilometer.

n	C. Seemeile 60 = 1°	C. Geogr. M. 15 = 1°	C. Schweiz. Stunde	C. Mile passus	C. Στάδιον	D. Seemeile 60 = 1°	D. Geogr. M. 15 = 1°	D. Schweiz. Stunde	D. Mile passus	D. Στάδιον
	km	km	km	km	km	dm	gm	st	m. p.	στ
1	1,8519	7,4074	4,8000	1,4793	0,1850	0,5400	0,1350	0,2083	0,6760	5,4063
2	3,7037	14,8148	9,6000	2,9586	0,3699	1,0800	0,2700	0,4167	1,3520	10,8126
3	5,5556	22,2222	14,4000	4,4379	0,5549	1,6200	0,4050	0,6250	2,0280	16,2189
4	7,4074	29,6296	19,2000	5,9172	0,7399	2,1600	0,5400	0,8333	2,7040	21,6252
5	9,2593	37,0371	24,0000	7,3965	0,9249	2,7000	0,6750	1,0417	3,3800	27,0315
6	11,1111	44,4445	28,8000	8,8758	1,1098	3,2400	0,8100	1,2500	4,0559	32,4377
7	12,9630	51,8519	33,6000	10,3551	1,2948	3,7800	0,9450	1,4583	4,7319	37,8440
8	14,8148	59,2593	38,4000	11,8344	1,4798	4,3200	1,0800	1,6666	5,4079	43,2503
9	16,6667	66,6667	43,2000	13,3137	1,6647	4,8600	1,2150	1,8750	6,0839	48,6566
10	18,5185	74,0741	48,0000	14,7930	1,8497	5,4000	1,3500	2,0833	6,7599	54,0629

Amerika (U. S.): Yard = 36'' = 0,9144 m, vgl. ob.; Mile = 1760 Y = 1,6093 km = 0,8690 See-M.
Deutschld. (alt): Bay. 1' = 10'' = 2,9186 dm; Preuss. 1' = 12'' = 3,1385 dm; Würt. 1' = 10'' = 2,8649 dm
England: 1' = 12'' = 3,0479 dm, vgl. oben; Mile = 5280' = 1,6093 km = 0,8690 See-M.
Frankreich (alt): 1' = 12'' = $^1/_6$ t = 3,2484 dm; lieue = 13682' = 4,4444 km = $^1/_{25}$° = $^3/_5$ geogr. M.
Griechenld. (alt): 1' = 4 παλαισταί = 3,0828 dm; στάδιον = 600' = 0,1850 km ≒ $^1/_{10}$ See-M.
Oesterreich (alt): 1' = 12'' = 3,1611 dm; Meile = 24000' = 7,5867 km
Rom (alt): 1' = 4 palmi = 16 digiti = 2,9586 dm; mile passus = 5000' = 1,4793 km
Russland: 1' = 12'' = 3,0479 dm; Werst = 3500' = 1,0668 km
Schweiz (alt): 1' = 10'' = 3 dm (wie Baden); Wegstunde = 16000' = 4,8 km
Zürich (alt): 1' = 12'' = 3,0128 dm, vgl. oben; Wegstunde = 15000' = 4,5192 km

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
10	**1** 0000	0201	0404	0609	0816	1025	1236	1449	1664	1881
11	2100	2321	2544	2769	2996	3225	3456	3689	3924	4161
12	4400	4641	4884	5129	5376	5625	5876	6129	6384	6641
13	6900	7161	7424	7689	7956	8225	8496	8769	9044	9321
14	9600	9881	.0164	.0449	.0736	.1025	.1316	.1609	.1904	.2201
15	**2** 2500	2801	3104	3409	3716	4025	4336	4649	4964	5281
16	5600	5921	6244	6569	6896	7225	7556	7889	8224	8561
17	8900	9241	9584	9929	.0276	.0625	.0976	.1329	.1684	.2041
18	**3** 2400	2761	3124	3489	3856	4225	4596	4969	5344	5721
19	6100	6481	6864	7249	7636	8025	8416	8809	9204	9601
20	**4** 0000	0401	0804	1209	1616	2025	2436	2849	3264	3681
21	4100	4521	4944	5369	5796	6225	6656	7089	7524	7961
22	8400	8841	9284	9729	.0176	.0625	.1076	.1529	.1984	.2441
23	**5** 2900	3361	3824	4289	4756	5225	5696	6169	6644	7121
24	7600	8081	8564	9049	9536	.0025	.0516	.1009	.1504	.2001
25	**6** 2500	3001	3504	4009	4516	5025	5536	6049	6564	7081
26	7600	8121	8644	9169	9696	.0225	.0756	.1289	.1824	.2361
27	**7** 2900	3441	3984	4529	5076	5625	6176	6729	7284	7841
28	8400	8961	9524	.0089	.0656	.1225	.1796	.2369	.2944	.3521
29	**8** 4100	4681	5264	5849	6436	7025	7616	8209	8804	9401
30	**9** 0000	0601	1204	1809	2416	3025	3636	4249	4864	5481
31	6100	6721	7344	7969	8596	9225	9856	.0489	.1124	.1761
32	**10** 2400	3041	3684	4329	4976	5625	6276	6929	7584	8241
33	8900	9561	.0224	.0889	.1556	.2225	.2896	.3569	.4244	.4921
34	**11** 5600	6281	6964	7649	8336	9025	9716	.0409	.1104	.1801
35	**12** 2500	3201	3904	4609	5316	6025	6736	7449	8164	8881
36	9600	.0321	.1044	.1769	.2496	.3225	.3956	.4689	.5424	.6161
37	**13** 6900	7641	8384	9129	9876	.0625	.1376	.2129	.2884	.3641
38	**14** 4400	5161	5924	6689	7456	8225	8996	9769	.0544	.1321
39	**15** 2100	2881	3664	4449	5236	6025	6816	7609	8404	9201
40	**16** 0000	0801	1604	2409	3216	4025	4836	5649	6464	7281
41	8100	8921	9744	.0569	.1396	.2225	.3056	.3889	.4724	.5561
42	**17** 6400	7241	8084	8929	9776	.0625	.1476	.2329	.3184	.4041
43	**18** 4900	5761	6624	7489	8356	9225	.0096	.0969	.1844	.2721
44	**19** 3600	4481	5364	6249	7136	8025	8916	9809	.0704	.1601
45	**20** 2500	3401	4304	5209	6116	7025	7936	8849	9764	.0681
46	**21** 1600	2521	3444	4369	5296	6225	7156	8089	9024	9961
47	**22** 0900	1841	2784	3729	4676	5625	6576	7529	8484	9441
48	**23** 0400	1361	2324	3289	4256	5225	6196	7169	8144	9121
49	**24** 0100	1081	2064	3049	4036	5025	6016	7009	8004	9001

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	**25** 0000	1001	2004	3009	4016	5025	6036	7049	8064	9081
51	**26** 0100	1121	2144	3169	4196	5225	6256	7289	8324	9361
52	**27** 0400	1441	2484	3529	4576	5625	6676	7729	8784	9841
53	**28** 0900	1961	3024	4089	5156	6225	7296	8369	9444	.0521
54	**29** 1600	2681	3764	4849	5936	7025	8116	9209	.0304	.1401
55	**30** 2500	3601	4704	5809	6916	8025	9136	.0249	.1364	.2481
56	**31** 3600	4721	5844	6969	8096	9225	.0356	.1489	.2624	.3761
57	**32** 4900	6041	7184	8329	9476	.0625	.1776	.2929	.4084	.5241
58	**33** 6400	7561	8724	9889	.1056	.2225	.3396	.4569	.5744	.6921
59	**34** 8100	9281	.0464	.1649	.2836	.4025	.5216	.6409	.7604	.8801
60	**36** 0000	1201	2404	3609	4816	6025	7236	8449	9664	.0881
61	**37** 2100	3321	4544	5769	6996	8225	9456	.0689	.1924	.3161
62	**38** 4400	5641	6884	8129	9376	.0625	.1876	.3129	.4384	.5641
63	**39** 6900	8161	9424	.0689	.1956	.3225	.4496	.5769	.7044	.8321
64	**40** 9600	.0881	.2164	.3449	.4736	.6025	.7316	.8609	.9904	:1201
65	**42** 2500	3801	5104	6409	7716	9025	.0336	.1649	.2964	.4281
66	**43** 5600	6921	8244	9569	.0896	.2225	.3556	.4889	.6224	.7561
67	**44** 8900	.0241	.1584	.2929	.4276	.5625	.6976	.8329	.9684	:1041
68	**46** 2400	3761	5124	6489	7856	9225	.0596	.1969	.3344	.4721
69	**47** 6100	7481	8864	.0249	.1636	.3025	.4416	.5809	.7204	.8601
70	**49** 0000	1401	2804	4209	5616	7025	8436	9849	.1264	.2681
71	**50** 4100	5521	6944	8369	9796	.1225	.2656	.4089	.5524	.6961
72	**51** 8400	9841	.1284	.2729	.4176	.5625	.7076	.8529	.9984	:1441
73	**53** 2900	4361	5824	7289	8756	.0225	.1696	.3169	.4644	.6121
74	**54** 7600	9081	.0564	.2049	.3536	.5025	.6516	.8009	.9504	:1001
75	**56** 2500	4001	5504	7009	8516	.0025	.1536	.3049	.4564	.6081
76	**57** 7600	9121	.0644	.2169	.3696	.5225	.6756	.8289	.9824	:1361
77	**59** 2900	4441	5984	7529	9076	.0625	.2176	.3729	.5284	.6841
78	**60** 8400	9961	.1524	.3089	.4656	.6225	.7796	.9369	:0944	:2521
79	**62** 4100	5681	7264	8849	.0436	.2025	.3616	.5209	.6804	.8401
80	**64** 0000	1601	3204	4809	6416	8025	9636	.1249	.2864	.4481
81	**65** 6100	7721	9344	.0969	.2596	.4225	.5856	.7489	.9124	:0761
82	**67** 2400	4041	5684	7329	8976	.0625	.2276	.3929	.5584	.7241
83	**68** 8900	.0561	.2224	.3889	.5556	.7225	.8896	:0569	:2244	:3921
84	**70** 5600	7281	8964	.0649	.2336	.4025	.5716	.7409	.9104	:0801
85	**72** 2500	4201	5904	7609	9316	.1025	.2736	.4449	.6164	.7881
86	**73** 9600	.1321	.3044	.4769	.6496	.8225	.9956	:1689	:3424	:5161
87	**75** 6900	8641	.0384	.2129	.3876	.5625	.7376	.9129	:0884	:2641
88	**77** 4400	6161	7924	9689	.1456	.3225	.4996	.6769	.8544	:0321
89	**79** 2100	3881	5664	7449	9236	.1025	.2816	.4609	.6404	.8201
90	**81** 0000	1801	3604	5409	7216	9025	.0836	.2649	.4464	.6281
91	**82** 8100	9921	.1744	.3569	.5396	.7225	.9056	:0889	:2724	:4561
92	**84** 6400	8241	.0084	.1929	.3776	.5625	.7476	.9329	:1184	:3041
93	**86** 4900	6761	8624	.0489	.2356	.4225	.6096	.7969	.9844	:1721
94	**88** 3600	5481	7364	9249	.1136	.3025	.4916	.6809	.8704	:0601
95	**90** 2500	4401	6304	8209	.0116	.2025	.3936	.5849	.7764	.9681
96	**92** 1600	3521	5144	7369	9296	.1225	.3156	.5089	.7024	.8961
97	**94** 0900	2841	4784	6729	8676	.0625	.2576	.4529	.6484	.8441
98	**96** 0400	2361	4324	6289	8256	.0225	.2196	.4169	.6144	.8121
99	**98** 0100	2081	4064	6049	8036	.0025	.2016	.4009	.6004	.8001

a	a^3	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a}$	$0{,}9 \cdot a$	$2a\pi$	$a^2\pi$	$\frac{a}{2\pi}$	$\frac{1}{a}$
1	1	1,000	1,000	0,9	6,28	3,142	0,159	1,0000
2	8	1,414	1,260	1,8	12,57	12,566	0,318	0,5000
3	27	1,732	1,442	2,7	18,85	28,274	0,477	0,3333
4	64	2,000	1,587	3,6	25,13	50,265	0,637	0,2500
5	125	2,236	1,710	4,5	31,42	78,540	0,796	0,2000
6	216	2,449	1,817	5,4	37,70	113,10	0,955	0,1667
7	343	2,646	1,913	6,3	43,98	153,94	1,114	0,1429
8	512	2,828	2,000	7,2	50,26	201,06	1,273	0,1250
9	729	3,000	2,080	8,1	56,55	254,47	1,432	0,1111
10	1000	3,162	2,154	9,0	62,83	314,16	1,592	0,1000
11	1331	3,317	2,224	9,9	69,11	380,13	1,751	0,0909
12	1728	3,464	2,289	10,8	75,40	452,39	1,910	0,0833
13	2197	3,606	2,351	11,7	81,68	530,93	2,069	0,0769
14	2744	3,742	2,410	12,6	87,96	615,75	2,228	0,0714
15	3375	3,873	2,466	13,5	94,25	706,86	2,387	0,0667
16	4096	4,000	2,520	14,4	100,53	804,25	2,564	0,0625
17	4913	4,123	2,571	15,3	106,81	907,92	2,706	0,0588
18	5832	4,243	2,621	16,2	113,10	1017,9	2,865	0,0556
19	6859	4,359	2,668	17,1	119,38	1134,1	3,024	0,0526
20	8000	4,472	2,714	18,0	125,66	1256,6	3,183	0,0500
21	9261	4,583	2,759	18,9	131,95	1385,4	3,324	0,0476
22	10648	4,690	2,802	19,8	138,23	1520,5	3,501	0,0455
23	12167	4,796	2,844	20,7	144,51	1661,9	3,660	0,0435
24	13824	4,899	2,884	21,6	150,80	1809,6	3,820	0,0417
25	15625	5,000	2,924	22,5	157,08	1963,5	3,979	0,0400
26	17576	5,099	2,962	23,4	163,36	2123,7	4,138	0,0385
27	19683	5,196	3,000	24,3	169,65	2290,2	4,297	0,0370
28	21952	5,292	3,037	25,2	175,93	2463,0	4,456	0,0357
29	24389	5,385	3,072	26,1	182,21	2642,1	4,615	0,0345
30	27000	5,477	3,107	27,0	188,50	2827,4	4,774	0,0333
31	29791	5,568	3,141	27,9	194,78	3019,1	4,934	0,0323
32	32768	5,657	3,175	28,8	201,06	3217,0	5,093	0,0313
33	35937	5,745	3,208	29,7	207,35	3421,2	5,252	0,0303
34	39304	5,831	3,240	30,6	213,63	3631,7	5,411	0,0294
35	42875	5,916	3,271	31,5	219,91	3848,5	5,570	0,0286
36	46656	6,000	3,302	32,4	226,19	4071,5	5,729	0,0278
37	50653	6,083	3,332	33,3	232,48	4300,8	5,889	0,0270
38	54872	6,164	3,362	34,2	238,76	4536,5	6,048	0,0263
39	59319	6,245	3,391	35,1	245,04	4778,4	6,207	0,0256
40	64000	6,325	3,420	36,0	251,33	5026,6	6,366	0,0250
41	68921	6,403	3,448	36,9	257,61	5281,0	6,525	0,0244
42	74088	6,481	3,476	37,8	263,89	5541,8	6,684	0,0238
43	79507	6,557	3,503	38,7	270,18	5808,8	6,843	0,0233
44	85184	6,633	3,530	39,6	276,46	6082,1	7,003	0,0227
45	91125	6,708	3,557	40,5	282,74	6361,7	7,162	0,0222
46	97336	6,782	3,583	41,4	289,03	6647,6	7,321	0,0217
47	103823	6,856	3,609	42,3	295,31	6939,8	7,480	0,0213
48	110592	6,928	3,634	43,2	301,59	7238,2	7,639	0,0208
49	117649	7,000	3,659	44,1	307,88	7543,0	7,798	0,0204
50	125000	7,071	3,684	45,0	314,16	7854,0	7,958	0,0200

a	a^3	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a}$	$0,9 \cdot a$	$2a\pi$	$a^2\pi$	$\frac{a}{2\pi}$	$\frac{1}{a}$
51	132651	7,141	3,708	45,9	320,44	8171	8,12	0,0196
52	140608	7,211	3,733	46,8	326,73	8495	8,28	0,0192
53	148877	7,280	3,756	47,7	333,01	8825	8,43	0,0189
54	157464	7,348	3,780	48,6	339,29	9161	8,59	0,0185
55	166375	7,416	3,803	49,5	345,58	9503	8,75	0,0182
56	175616	7,483	3,826	50,4	351,86	9852	8,91	0,0179
57	185193	7,550	3,849	51,3	358,14	10207	9,07	0,0175
58	195112	7,616	3,871	52,2	364,42	10568	9,23	0,0172
59	205379	7,681	3,893	53,1	370,71	10936	9,39	0,0169
60	216000	7,746	3,915	54,0	376,99	11310	9,55	0,0167
61	226981	7,810	3,936	54,9	383,27	11690	9,71	0,0164
62	238328	7,874	3,958	55,8	389,56	12076	9,87	0,0161
63	250047	7,937	3,979	56,7	395,84	12469	10,03	0,0159
64	262144	8,000	4,000	57,6	402,12	12868	10,19	0,0156
65	274625	8,062	4,021	58,5	408,41	13273	10,34	0,0154
66	287496	8,124	4,041	59,4	414,69	13685	10,50	0,0152
67	300763	8,185	4,062	60,3	420,97	14103	10,66	0,0149
68	314432	8,246	4,082	61,2	427,26	14527	10,82	0,0147
69	328509	8,307	4,102	62,1	433,54	14957	10,98	0,0145
70	343000	8,367	4,121	63,0	439,82	15394	11,14	0,0143
71	357911	8,426	4,141	63,9	446,11	15837	11,30	0,0141
72	373248	8,485	4,160	64,8	452,39	16286	11,46	0,0139
73	389017	8,544	4,179	65,7	458,67	16742	11,62	0,0137
74	405224	8,602	4,198	66,6	464,96	17203	11,78	0,0135
75	421875	8,660	4,217	67,5	471,24	17671	11,94	0,0133
76	438976	8,718	4,236	68,4	477,52	18146	12,10	0,0132
77	456533	8,775	4,254	69,3	483,81	18627	12,25	0,0130
78	474552	8,832	4,273	70,2	490,09	19113	12,41	0,0128
79	493039	8,888	4,291	71,1	496,37	19607	12,57	0,0127
80	512000	8,944	4,309	72,0	502,65	20106	12,73	0,0125
81	531441	9,000	4,327	72,9	508,94	20612	12,89	0,0123
82	551368	9,055	4,344	73,8	515,22	21124	13,05	0,0122
83	571787	9,110	4,362	74,7	521,50	21642	13,21	0,0120
84	592704	9,165	4,380	75,6	527,79	22167	13,37	0,0119
85	614125	9,220	4,397	76,5	534,07	22698	13,53	0,0118
86	636056	9,274	4,414	77,4	540,35	23235	13,69	0,0116
87	658503	9,327	4,431	78,3	546,64	23779	13,85	0,0115
88	681472	9,381	4,448	79,2	552,92	24328	14,01	0,0114
89	704969	9,434	4,465	80,1	559,20	24885	14,16	0,0112
90	729000	9,487	4,481	81,0	565,49	25447	14,32	0,0111
91	753571	9,539	4,498	81,9	571,77	26016	14,48	0,0110
92	778688	9,592	4,514	82,8	578,05	26590	14,64	0,0109
93	804357	9,644	4,531	83,7	584,34	27172	14,80	0,0108
94	830584	9,695	4,547	84,6	590,62	27759	14,96	0,0106
95	857375	9,747	4,563	85,5	596,90	28353	15,12	0,0105
96	884736	9,798	4,579	86,4	603,19	28953	15,28	0,0104
97	912673	9,849	4,595	87,3	609,47	29559	15,44	0,0103
98	941192	9,899	4,610	88,2	615,75	30172	15,60	0,0102
99	970299	9,950	4,626	89,1	622,04	30791	15,76	0,0101
100	1000000	10,000	4,642	90,0	628,32	31416	15,92	0,0100

	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
1	*	*	3.67	7.43	*	3.167	*	*	3.267	17.53
3	*	*	7.29	3.101	13.31	*	3.201	19.37	11.73	3.301
5	*	3.35	5.41	5.61	3.135	5.101	5.121	3.235	5.161	5.181
7	*	*	3.69	*	11.37	3.169	*	7.101	3.269	*
9	3.3	*	11.19	3.103	*	*	3.203	*	*	3.303
11	*	3.37	*	*	3.137	7.73	13.47	3.237	*	*
13	*	*	3.71	*	7.59	3.171	*	23.31	3.271	11.83
15	3.5	5.23	5.43	3.105	5.83	5.103	3.205	5.143	5.163	3.305
17	*	3.39	7.31	*	3.139	11.47	*	3.239	19.43	7.131
19	*	7.17	3.73	11.29	*	3.173	*	*	3.273	*
21	3.7	11.11	13.17	3.107	*	*	3.207	7.103	*	3.307
23	*	3.41	*	17.19	3.141	*	7.89	3.241	*	13.71
25	5.5	5.25	3.75	5.65	5.85	3.175	5.125	5.145	3.275	5.185
27	3.9	*	*	3.109	7.61	17.31	3.209	*	*	3.309
29	*	3.43	*	7.47	3.143	23.23	17.37	3.243	*	*
31	*	*	3.77	*	*	3.177	*	17.43	3.277	7.133
33	3.11	7.19	*	3.111	*	13.41	3.211	*	7.119	3.311
35	5.7	3.45	5.47	5.67	3.145	5.107	5.127	3.245	5.167	5.187
37	*	*	3.79	*	19.23	3.179	7.91	11.67	3.279	*
39	3.13	*	*	3.113	*	7.77	3.213	*	*	3.313
41	*	3.47	*	11.31	3.147	*	*	3.247	29.29	*
43	*	11.13	3.81	7.49	*	3.181	*	*	3.281	23.41
45	3.15	5.29	5.49	3.115	5.89	5.109	3.215	5.149	5.169	3.315
47	*	3.49	13.19	*	3.149	*	*	3.249	7.121	*
49	7.7	*	3.83	*	*	3.183	11.59	7.107	3.283	13.73
51	3.17	*	*	3.117	11.41	19.29	3.217	*	23.37	3.317
53	*	3.51	11.23	*	3.151	7.79	*	3.251	*	*
55	5.11	5.31	3.85	5.71	5.91	3.185	5.131	5.151	3.285	5.191
57	3.19	*	*	3.119	*	*	3.219	*	*	3.319
59	*	3.53	7.37	*	3.153	13.43	*	3.253	*	7.137
61	*	7.23	3.87	19.19	*	3.187	*	*	3.287	31.31
63	3.21	*	*	3.121	*	*	3.221	7.109	*	3.321
65	5.13	3.55	5.53	5.73	3.155	5.113	5.133	3.255	5.173	5.193
67	*	*	3.89	*	*	3.189	23.29	13.59	3.289	*
69	3.23	13.13	*	3.123	7.67	*	3.223	*	11.79	3.323
71	*	3.57	*	7.53	3.157	*	11.61	3.257	13.67	*
73	*	*	3.91	*	11.43	3.191	*	*	3.291	7.139
75	3.25	5.35	5.55	3.125	5.95	5.115	3.225	5.155	5.175	3.325
77	7.11	3.59	*	13.29	3.159	*	*	3.259	*	*
79	*	*	3.93	*	*	3.193	7.97	19.41	3.293	11.89
81	3.27	*	*	3.127	13.37	7.83	3.227	11.71	*	3.327
83	*	3.61	*	*	3.161	11.53	*	3.261	*	*
85	5.17	5.37	3.95	5.77	5.97	3.195	5.137	5.157	3.295	5.197
87	3.29	11.17	7.41	3.129	*	*	3.229	*	*	3.329
89	*	3.63	17.17	*	3.163	19.31	13.53	3.263	7.127	23.43
91	7.13	*	3.97	17.23	*	3.197	*	7.113	3.297	*
93	3.31	*	*	3.131	17.29	*	3.231	13.61	19.47	3.331
95	5.19	3.65	5.59	5.79	3.165	5.119	5.139	3.265	5.179	5.199
97	*	*	3.99	*	7.71	3.199	17.41	*	3.299	*
99	3.33	*	13.23	3.133	*	*	3.233	17.47	29.31	3.333

* bezeichnet Primzahl.

n	$-\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$-\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	n	$-\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$-\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
0,00	0,000 000	0,00000	0,0000	0,000	0,50	0,125 000	0,06250	0,0391	0,027
01	004 950	0328	025	02	51	124 950	6206	386	27
02	009 800	0647	048	04	52	124 800	6157	382	27
03	014 550	0955	071	06	53	124 550	6103	377	26
04	019 200	1254	093	07	54	124 200	6044	372	26
0,05	0,023 750	0,01544	0,0114	0,009	0,55	0,123 750	0,05981	0,0366	0,025
06	028 200	1824	134	11	56	123 200	5914	361	25
07	032 550	2094	153	12	57	122 550	5842	355	24
08	036 800	2355	172	13	58	121 800	5765	349	24
09	040 950	2607	190	15	59	120 950	5685	342	23
0,10	0,045 000	0,02850	0,0207	0,016	0,60	0,120 000	0,05600	0,0336	0,023
11	048 950	3084	223	17	61	118 950	5511	329	22
12	052 800	3309	238	18	62	117 800	5419	322	22
13	056 550	3525	253	20	63	116 550	5322	315	21
14	060 200	3732	267	21	64	115 200	5222	308	21
0,15	0,063 750	0,03931	0,0280	0,022	0,65	0,113 750	0,05119	0,0301	0,020
16	067 200	4122	293	22	66	112 200	5012	293	20
17	070 550	4304	304	23	67	110 550	4901	285	19
18	073 800	4477	316	24	68	108 800	4787	278	18
19	076 950	4643	326	25	69	106 950	4670	270	18
0,20	0,080 000	0,04800	0,0336	0,026	0,70	0,105 000	0,04550	0,0262	0,017
21	082 950	4949	345	26	71	102 950	4427	253	17
22	085 800	5091	354	27	72	100 800	4301	245	16
23	088 550	5224	362	27	73	098 550	4172	237	15
24	091 200	5350	369	28	74	096 200	4040	228	15
0,25	0,093 750	0,05469	0,0376	0,028	0,75	0,093 750	0,03906	0,0220	0,014
26	096 200	5580	382	29	76	091 200	3770	211	14
27	098 550	5683	388	29	77	088 550	3631	202	13
28	100 800	5779	393	29	78	085 800	3489	194	12
29	102 950	5868	398	29	79	082 950	3346	185	12
0,30	0,105 000	0,05950	0,0402	0,030	0,80	0,080 000	0,03200	0,0176	0,011
31	106 950	6025	405	30	81	076 950	3052	167	11
32	108 800	6093	408	30	82	073 800	2903	158	10
33	110 550	6154	411	30	83	070 550	2751	149	09
34	112 200	6208	413	30	84	067 200	2598	140	09
0,35	0,113 750	0,06256	0,0414	0,030	0,85	0,063 750	0,02444	0,0131	0,008
36	115 200	6298	416	30	86	060 200	2288	122	08
37	116 550	6333	416	30	87	056 550	2130	113	07
38	117 800	6361	417	30	88	052 800	1971	104	07
39	118 950	6384	417	30	89	048 950	1811	096	06
0,40	0,120 000	0,06400	0,0416	0,030	0,90	0,045 000	0,01650	0,0087	0,005
41	120 950	6410	415	30	91	040 950	1488	078	05
42	121 800	6415	414	29	92	036 800	1325	069	04
43	122 550	6413	412	29	93	032 550	1161	060	04
44	123 200	6406	410	29	94	028 200	0996	051	03
0,45	0,123 750	0,06394	0,0408	0,029	0,95	0,023 750	0,00831	0,0043	0,003
46	124 200	6376	405	29	96	019 200	0666	034	02
47	124 550	6352	402	28	97	014 550	0500	025	02
48	124 800	6323	398	28	98	009 800	0333	017	01
49	124 950	6289	395	28	99	004 950	0167	008	01
0,50	0,125 000	0,06250	0,0391	0,027	1,00	0,000 000	0,00000	0,0000	0,000

n	A_2	$-A_4$	A_6	$-A_3$	A_5	$-A_7$
0,00	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,166 667	0,033 333	0,007 143
01	00 050	0 004	001	66 650	3 329	7 142
02	00 200	0 017	002	66 600	3 317	7 139
03	00 450	0 037	005	66 517	3 296	7 134
04	00 800	0 067	009	66 400	3 267	7 127
0,05	0,001 250	0,000 104	0,000 014	0,166 250	0,033 229	0,007 119
06	01 800	0 150	020	66 067	3 183	7 108
07	02 450	0 203	027	65 850	3 129	7 095
08	03 200	0 265	035	65 600	3 067	7 081
09	04 050	0 335	045	65 317	2 996	7 064
0,10	0,005 000	0,000 413	0,000 055	0,165 000	0,032 917	0,007 046
11	06 050	0 498	064	64 650	2 830	7 026
12	07 200	0 591	079	64 267	2 735	7 003
13	08 450	0 692	092	63 850	2 632	6 979
14	09 800	0 801	106	63 400	2 526	6 953
0,15	0,011 250	0,000 916	0,000 122	0,162 917	0,032 400	0,006 926
16	12 800	1 039	138	62 400	2 272	6 896
17	14 450	1 169	155	61 850	2 136	6 864
18	16 200	1 306	173	61 267	1 992	6 831
19	18 050	1 450	192	60 650	1 840	6 796
0,20	0,020 000	0,001 600	0,000 211	0,160 000	0,031 680	0,006 758
21	22 050	1 757	232	59 317	1 512	6 719
22	24 200	1 919	253	58 600	1 336	6 679
23	26 450	2 088	275	57 850	1 152	6 636
24	28 800	2 262	297	57 067	0 961	6 592
25	31 250	2 441	320	56 250	0 762	6 546

m	$-B_2$	B_4	$-B_6$	$-B_3$	B_5	$-B_7$
0,00	0,125 000	0,023 438	0,004 883	0,041 667	0,004 688	0,000 698
01	124 950	23 427	4 881	41 650	4 685	697
02	124 800	23 396	4 874	41 600	4 679	696
03	124 550	23 344	4 863	41 517	4 669	695
04	124 200	23 271	4 847	41 400	4 654	692
0,05	0,123 750	0,023 177	0,004 827	0,041 250	0,004 635	0,000 690
06	123 200	23 063	4 802	41 067	4 613	686
07	122 550	22 928	4 773	40 850	4 586	682
08	121 800	22 773	4 739	40 600	4 555	677
09	120 950	22 596	4 701	40 317	4 519	672
0,10	0,120 000	0,022 400	0,004 659	0,040 000	0,004 480	0,000 666
11	118 950	22 183	4 613	39 650	4 437	659
12	117 800	21 946	4 562	39 267	4 389	652
13	116 550	21 689	4 506	38 850	4 338	644
14	115 200	21 412	4 447	38 400	4 282	635
0,15	0,113 750	0,021 115	0,004 383	0,037 917	0,004 223	0,000 626
16	112 200	20 798	4 315	37 400	4 160	616
17	110 550	20 462	4 243	36 850	4 092	606
18	108 800	20 106	4 167	36 267	4 021	595
19	106 950	19 731	4 087	35 650	3 946	584
0,20	0,105 000	0,019 338	0,004 003	0,035 000	0,003 868	0,000 572
21	102 950	18 925	3 915	34 817	3 785	559
22	100 800	18 493	3 823	33 600	3 699	546
23	098 550	18 044	3 727	32 850	3 609	532
24	096 200	17 576	3 628	32 067	3 515	518
25	093 750	17 090	3 525	31 250	3 418	504

Arg.	Oben φ (v) mit Argument v, unten w' mit Argum. t										Arg.	w'' mit Argum. f'' : f'			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1/4	1/2	3/4
0,0	0,5 642	641	640	637	633	628	622	614	606	596	0,0	0,0 000	135	269	403
1	586	574	561	547	533	517	499	481	462	442	1	538	672	806	940
2	421	399	375	351	326	300	273	245	217	187	2	0,1 073	206	339	472
3	156	125	093	060	026	.992	.956	.921	.883	.846	3	604	735	866	997
4	0,4 808	769	729	689	649	608	566	524	481	438	4	0,2 127	256	385	513
5	394	350	305	260	215	169	123	077	036	.983	5	641	767	893	.019
6	0,3 936	889	841	794	746	698	650	601	553	505	6	0,3 143	266	389	511
7	456	408	360	311	263	215	167	119	071	023	7	632	751	870	988
8	0,2 975	928	880	833	786	739	693	647	601	555	8	0,4 105	221	336	449
9	510	465	420	376	332	288	245	202	159	117	9	562	673	783	892
1,0	076	034	.993	.953	.913	.873	.834	.795	.757	.720	1,0	0,5 000	107	212	316
1	0,1 683	646	609	573	538	503	469	435	402	369	1	419	520	620	716
2	337	305	274	243	213	183	153	124	096	068	2	817	913	.008	.102
3	041	014	.988	.962	.937	.912	.888	.864	.840	.817	3	0,6 194	285	375	463
4	0,0 795	773	751	730	709	689	669	650	631	613	4	550	635	719	802
5	595	577	560	543	527	511	495	480	465	450	5	883	963	.042	.119
6	436	422	409	396	383	371	359	347	336	325	6	0,7 195	269	342	414
7	314	303	293	283	273	264	255	246	237	229	7	485	554	621	688
8	221	213	206	198	191	184	177	171	165	159	8	753	816	879	940
9	153	147	141	136	131	126	121	116	112	108	9	0,8 000	058	116	172
2,0	103	099	095	092	088	084	081	078	075	072	2,0	227	280	332	383
1	069	066	063	060	058	055	053	051	049	047	1	433	482	530	576
2	045	043	041	039	037	036	034	033	031	030	2	622	666	709	751
3	028	027	026	025	024	023	022	021	020	019	3	792	832	870	908
4	018	017	016	015	015	014	013	013	012	012	4	945	981	.016	.049
5	011	010	010	009	009	008	008	008	007	007	5	0,9 082	114	146	176
6	007	006	006	006	005	005	005	005	004	004	6	205	234	261	288
7	004	004	003	003	003	003	003	003	002	002	7	314	339	364	387
8	002	002	002	002	002	002	002	001	001	001	8	410	433	454	475
9	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	9	495	515	534	552
0,0	0,0 000	113	226	338	451	564	676	789	901	.013	3,0	570	587	603	619
1	0,1 125	236	348	459	569	680	790	900	.009	.118	1	635	649	664	678
2	0,2 227	335	443	550	657	763	869	974	.079	.183	2	691	704	716	728
3	0,3 286	389	491	593	694	794	893	992	.090	.187	3	740	751	761	772
4	0,4 281	380	475	569	662	755	847	937	.027	.117	4	782	791	800	809
5	0,5 205	292	379	465	549	633	716	798	879	959	5	818	825	833	840
6	0,6 039	117	194	270	346	420	494	566	638	708	6	848	854	861	867
7	778	847	914	981	.047	.112	.175	.238	.300	.361	7	874	879	885	890
8	0,7 421	480	538	595	651	707	761	814	867	918	8	896	901	905	910
9	969	.019	.068	.116	.163	.209	.254	.299	.342	.385	9	915	919	922	926
1,0	0,8 427	468	508	548	586	624	661	698	733	768	4,0	930	933	936	940
1	802	835	868	900	931	961	991	.020	.048	.076	1	943	946	948	951
2	0,9 103	130	155	181	205	229	252	275	297	319	2	954	956	958	961
3	340	361	381	400	419	438	456	473	490	507	3	963	965	966	968
4	523	539	554	569	583	597	611	624	637	649	4	970	971	973	974
5	661	673	684	695	706	716	726	736	745	755	5	976	977	978	980
6	763	772	780	788	796	804	811	818	825	832	6	981	982	983	984
7	838	844	850	856	861	867	872	877	882	886	7	985	986	986	987
8	889	895	899	903	907	911	915	918	922	925	8	988	989	989	990
9	928	931	934	937	939	942	944	947	949	951	9	991	991	992	992

a	Natürl. Logar. Ln a	Gemeine Logar. Lg a	a	Natürl. Logar. Ln a	Gemeine Logar. Lg a
1	0,00000 00000 0	0,00000 00000 0	51	3,93182 56327 2	1,70757 01761 0
2	0,69314 71805 6	0,30102 99956 6	52	3,95124 37185 8	1,71600 33436 3
3	1,09861 22886 7	0,47712 12547 2	53	3,97029 19135 5	1,72427 58696 0
4	1,38629 43611 2	0,60205 99913 3	54	3,98898 40465 6	1,73239 37598 2
5	1,60943 79124 3	0,69897 00043 4	55	4,00733 31852 3	1,74036 26894 9
6	1,79175 94692 3	0,77815 12503 8	56	4,02535 16907 4	1,74818 80270 1
7	1,94591 01490 6	0,84509 80400 1	57	4,04305 12678 3	1,75587 48556 7
8	2,07944 15416 8	0,90308 99869 9	58	4,06044 30105 5	1,76342 79935 6
9	2,19722 45773 4	0,95424 25094 4	59	4,07753 74439 1	1,77085 20116 4
10	2,30258 50929 9	1,00000 00000 0	60	4,09434 45622 2	1,77815 12503 8
11	2,39789 52728 0	1,04139 26851 6	61	4,11087 38641 7	1,78532 98350 1
12	2,48490 66497 9	1,07918 12460 5	62	4,12713 43850 5	1,79239 16895 0
13	2,56494 93574 6	1,11394 33523 1	63	4,14313 47263 9	1,79934 05494 5
14	2,63905 73296 2	1,14612 80356 8	64	4,15888 30833 6	1,80617 99739 8
15	2,70805 02011 0	1,17609 12590 6	65	4,17438 72699 0	1,81291 33566 4
16	2,77258 87222 4	1,20411 99826 6	66	4,18965 47420 3	1,81954 39355 4
17	2,83321 33440 6	1,23044 89213 8	67	4,20469 26193 9	1,82607 48027 0
18	2,89037 17579 0	1,25527 25051 0	68	4,21950 77051 8	1,83250 89127 1
19	2,94443 89791 7	1,27875 36009 5	69	4,23410 65046 0	1,83884 90907 4
20	2,99573 22735 5	1,30102 99956 6	70	4,24849 52420 5	1,84509 80400 1
21	3,04452 24377 2	1,32221 92947 3	71	4,26267 98770 4	1,85125 83487 2
22	3,09104 24533 6	1,34242 26808 2	72	4,27666 61190 2	1,85733 24964 3
23	3,13549 42159 3	1,36172 78360 2	73	4,29045 94411 5	1,86332 28601 2
24	3,17805 38303 5	1,38021 12417 1	74	4,30406 50932 0	1,86923 17197 3
25	3,21887 58248 7	1,39794 00086 7	75	4,31748 81135 4	1,87506 12633 9
26	3,25809 65380 2	1,41497 33479 7	76	4,33073 33402 9	1,88081 35922 8
27	3,29583 68660 0	1,43136 37641 6	77	4,34380 54218 5	1,88649 07251 7
28	3,33220 45101 8	1,44715 80313 4	78	4,35670 88266 9	1,89209 46026 9
29	3,36729 58299 9	1,46239 79979 0	79	4,36944 78524 7	1,89762 70912 9
30	3,40119 73816 6	1,47712 12547 2	80	4,38202 66346 7	1,90308 99869 9
31	3,43398 72044 9	1,49136 16938 3	81	4,39444 91546 7	1,90848 50188 8
32	3,46573 59028 0	1,50514 99783 2	82	4,40671 92472 6	1,91381 38523 8
33	3,49650 75614 7	1,51851 39398 8	83	4,41884 06078 0	1,91907 80923 8
34	3,52636 05246 2	1,53147 89170 4	84	4,43081 67988 4	1,92427 92860 6
35	3,55534 80614 9	1,54406 80443 5	85	4,44265 12564 9	1,92941 89257 1
36	3,58351 89384 6	1,55630 25007 7	86	4,45434 72962 5	1,93449 84512 4
37	3,61091 79126 4	1,56820 17240 7	87	4,46590 81186 5	1,93951 92526 2
38	3,63758 61597 3	1,57978 35966 2	88	4,47733 68144 8	1,94448 26721 5
39	3,66356 16461 3	1,59106 46070 3	89	4,48863 63697 3	1,94939 00066 4
40	3,68887 94541 1	1,60205 99913 3	90	4,49980 96703 8	1,95424 25094 4
41	3,71357 20667 0	1,61278 38567 2	91	4,51085 95065 2	1,95904 13923 2
42	3,73766 96182 8	1,62324 92904 0	92	4,52178 85770 5	1,96378 78273 5
43	3,76120 01156 9	1,63346 84555 8	93	4,53259 94931 5	1,96848 29485 5
44	3,78418 96339 2	1,64345 26764 9	94	4,54329 47822 7	1,97312 78536 0
45	3,80666 24897 7	1,65321 25137 8	95	4,55387 68916 0	1,97772 36052 9
46	3,82864 13964 9	1,66275 78316 8	96	4,56434 81914 7	1,98227 12330 4
47	3,85014 76017 1	1,67209 78579 4	97	4,57471 09785 0	1,98677 17342 7
48	3,87120 10109 1	1,68124 12373 8	98	4,58496 74786 7	1,99122 60756 9
49	3,89182 02981 1	1,69019 60800 3	99	4,59511 98501 3	1,99563 51946 0
50	3,91202 30054 3	1,69897 00043 4	100	4,60517 01859 9	2,00000 00000 0

a	$\mathrm{Ln}(1+a\cdot 10^{-n})$	$\mathrm{Lg}(1+a\cdot 10^{-n})$	a	Vielfache	Vielfache
	$n=2$	$n=2$		$a\cdot\pi$	$a\cdot 180:\pi$
1	0,00995 03308 5	0,00432 13737 8	1	3,14159 26535 · 9	57,2957 79513 1
2	1980 26273 0	0860 01717 6	2	6,28318 53071 8	114,5915 59026 2
3	2955 88022 4	1283 72247 1	3	9,42477 79607 7	171,8873 38539 2
4	3922 07131 5	1703 33393 0	4	12,56637 06143 6	229,1831 18052 3
5	4879 01641 7	2118 92990 7	5	15,70796 32679 5	286,4788 97565 4
6	5826 89081 2	2530 56852 6	6	18,84955 59215 4	343,7746 77078 5
7	6765 86484 7	2938 37776 9	7	21,99114 85751 3	401,0704 56591 6
8	7696 10411 4	3342 37554 9	8	25,13274 12287 2	458,3662 36104 7
9	8617 76962 4	3742 64979 4	9	28,27433 38823 1	515,6620 15617 7
	$n=3$	$n=3$		$a:\pi$	$a\cdot\pi:180$
1	0,00099 95003 3	0,00043 40774 8	1	0,31830 98861 8	0,01745 32925 2
2	199 80026 6	086 77215 3	2	0,63661 97723 7	03490 65850 4
3	299 55089 8	130 09330 2	3	0,95492 96585 5	05235 98775 6
4	399 20212 7	173 37128 1	4	1,27323 95447 4	06981 31700 8
5	498 75415 1	216 60617 6	5	1,59154 94309 2	08726 64626 0
6	598 20716 8	259 79807 2	6	1,90985 93171 0	10471 97551 2
7	697 56137 4	302 94705 5	7	2,22816 92032 9	12217 30476 4
8	796 81696 5	346 05321 1	8	2,54647 90894 7	13962 63401 6
9	895 97413 7	389 11662 4	9	2,86478 89756 5	15707 96326 8
	$n=4$	$n=4$		$a\cdot\sqrt{\pi}$	a · Si 1″
1	0,00009 99950 0	0,00004 34272 8	1	1,77245 38509 1	0,00000 48481 4
2	19 99800 0	08 68502 1	2	3,54490 77018 1	0 96962 7
3	29 99550 1	13 02688 1	3	5,31736 15527 2	1 45444 1
4	39 99200 2	17 36830 6	4	7,08981 54036 2	1 93925 5
5	49 98750 4	21 70929 7	5	8,86226 92545 3	2 42406 8
6	59 98200 7	26 04985 5	6	10,63472 31054 3	2 90888 2
7	69 97551 1	30 38997 8	7	12,40717 69563 4	3 39369 6
8	79 96801 7	34 72966 9	8	14,17963 08072 4	3 87851 0
9	89 95952 4	39 06892 5	9	15,95208 46581 5	4 36332 3
	$n=5$	$n=5$		$a:\sqrt{\pi}$	a : Si 1″
1	0,00000 99999 5	0,00000 43249 2	1	0,56418 95835 5	206 264,80624 7
2	1 99998 0	0 86858 0	2	1,12837 91671 0	412 529,61249 4
3	2 99995 5	1 30286 4	3	1,69256 87506 4	618 794,41874 1
4	3 99992 0	1 73714 3	4	2,25675 83341 9	825 059,22498 8
5	4 99987 5	2 17141 8	5	2,82094 79177 4	1031 324,03123 5
6	5 99982 0	2 60568 9	6	3,38513 75012 9	1237 588,83748 3
7	6 99975 5	3 63995 5	7	3,94932 70848 3	1443 853,64373 0
8	7 99968 0	3 47421 7	8	4,51351 66683 8	1650 118,44997 7
9	8 99959 5	3 90847 4	9	5,07770 62519 3	1856 383,25622 4
	$n=6$	$n=6$		a · Ln 10	a · Lg e
1	0,00000 10000 0	0,00000 04342 9	1	2,30258 50929 9	0,43429 44819 0
2	20000 0	08685 9	2	4,60517 01859 9	0,86858 89638 1
3	30000 0	13028 8	3	6,90775 52789 8	1,30288 34457 1
4	39999 9	17371 7	4	9,21034 03719 8	1,73717 79276 1
5	49999 9	21714 7	5	11,51292 54649 7	2,17147 24095 2
6	59999 8	26057 6	6	13,81551 05579 6	2,60576 68914 2
7	69999 8	30400 5	7	16,11809 56509 6	3,04006 13733 2
8	79999 7	34743 4	8	18,42068 07439 5	3,47435 58552 3
9	89999 6	39086 3	9	20,72326 58369 5	3,90865 03371 3

n	0	1	2	D	3	4	5	6	D	7	8	9
10	0000	0043	0086	42	0128	0170	0212	0253	41	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	39	0531	0569	0607	0615	37	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	35	0899	0934	0969	1004	34	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	33	1239	1271	1303	1335	32	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	30	1553	1584	1614	1644	29	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	29	1847	1875	1903	1931	28	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	27	2122	2148	2175	2201	26	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	25	2380	2405	2430	2455	25	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	24	2625	2648	2672	2695	23	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	23	2856	2878	2900	2923	22	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	21	3075	3096	3118	3139	21	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	21	3284	3304	3324	3345	20	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	19	3483	3502	3522	3511	19	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	19	3674	3692	3711	3729	18	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	18	3856	3874	3892	3909	18	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	17	4031	4048	4065	4082	17	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	17	4200	4216	4232	4249	16	4265	4281	4298
27	4314	4380	4316	16	4362	4378	4393	4409	16	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	16	4518	4533	4548	4564	15	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	15	4669	4683	4698	4713	15	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	14	4814	4829	4843	4857	14	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	14	4955	4969	4983	4997	14	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	13	5092	5105	5119	5132	13	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	13	5224	5237	5250	5263	13	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	13	5353	5366	5378	5391	13	5103	5416	5428
35	5441	5453	5465	13	5478	5490	5502	5514	13	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	12	5599	5611	5623	5635	12	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	12	5717	5729	5740	5752	11	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	11	5832	5843	5855	5866	11	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	11	5914	5955	5966	5977	11	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	11	6053	6064	6075	6085	11	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	11	6160	6170	6180	6191	10	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	10	6263	6274	6284	6294	10	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	10	6365	6375	6385	6395	10	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	10	6164	6174	6484	6493	10	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	10	6561	6571	6580	6590	9	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	9	6656	6665	6675	6684	9	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	9	6749	6758	6767	6776	9	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	9	6839	6848	6857	6866	9	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	9	6928	6937	6946	6955	9	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	9	7016	7024	7033	7042	8	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	8	7101	7110	7118	7126	8	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	8	7185	7193	7202	7210	8	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	8	7267	7275	7284	7292	8	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	8	7348	7356	7364	7372	8	7380	7388	7396

n	0	1	2	D	3	4	5	6	D	7	8	9
55	7404	7412	7419	8	7427	7435	7443	7451	8	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	8	7505	7513	7520	7528	8	7536	7544	7551
57	7559	7566	7574	8	7582	7589	7597	7604	8	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	8	7657	7664	7672	7679	8	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	8	7731	7738	7745	7752	8	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7	7803	7810	7818	7825	7	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7	7875	7882	7889	7896	7	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7	7945	7952	7959	7966	7	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	7	8014	8021	8028	8035	7	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	7	8082	8089	8096	8102	7	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	7	8149	8156	8162	8169	7	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	6	8215	8222	8228	8235	6	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	6	8280	8287	8293	8299	6	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	6	8344	8351	8357	8363	6	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	6	8407	8414	8420	8426	6	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	6	8470	8476	8482	8488	6	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	6	8531	8537	8543	8549	6	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	6	8591	8597	8603	8609	6	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	6	8651	8657	8663	8669	6	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	6	8710	8716	8722	8727	6	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	6	8768	8774	8779	8785	6	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	6	8825	8831	8837	8842	6	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	6	8882	8887	8893	8899	6	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	6	8938	8943	8949	8954	6	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	6	8993	8998	9004	9009	6	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	6	9047	9053	9058	9063	6	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	5	9101	9106	9112	9117	5	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	5	9154	9159	9165	9170	5	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	5	9206	9212	9217	9222	5	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	5	9258	9263	9269	9274	5	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	5	9309	9315	9320	9325	5	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	5	9360	9365	9370	9375	5	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	5	9410	9415	9420	9425	5	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	5	9460	9465	9469	9474	5	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	5	9509	9513	9518	9523	5	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	5	9557	9562	9566	9571	5	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	5	9605	9609	9614	9619	5	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	5	9652	9657	9661	9666	5	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	5	9699	9703	9708	9713	4	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	4	9745	9750	9754	9759	4	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	4	9791	9795	9800	9805	4	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	4	9836	9841	9845	9850	4	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	4	9881	9886	9890	9894	4	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	4	9926	9930	9934	9939	4	9943	9948	9952
99	9956	9960	9965	4	9969	9974	9978	9983	4	9987	9991	9996

IVª. Sehnentafel.

(r = 10000.)

Winkel.	Sehne.	Pfeil.	Winkel.	Sehne.	Pfeil.	Winkel.	Sehne.	Pfeil.	Winkel.	Sehne.	Pfeil.
1°	175	0	46°	7815	795	91	14265	2991	136°	18544	6254
2	349	2	47	7975	829	92	14387	3053	137	18608	6335
3	524	3	48	8135	865	93	14507	3116	138	18672	6416
4	698	6	49	8294	900	94	14627	3180	139	18733	6498
5	872	10	50	8452	937	95	14746	3244	140	18794	6580
6	1047	14	51	8610	974	96	14863	3309	141	18853	6662
7	1221	19	52	8767	1012	97	14979	3374	142	18910	6744
8	1395	24	53	8924	1051	98	15094	3439	143	18966	6827
9	1569	31	54	9080	1090	99	15208	3506	144	19021	6910
10	1743	38	55	9235	1130	100	15321	3572	145	19074	6993
11	1917	46	56	9389	1171	101	15432	3639	146	19126	7076
12	2091	55	57	9543	1212	102	15543	3707	147	19176	7160
13	2264	64	58	9696	1254	103	15652	3775	148	19225	7244
14	2437	75	59	9848	1296	104	15760	3843	149	19273	7328
15	2611	86	60	10000	1340	105	15867	3912	150	19319	7412
16	2783	97	61	10151	1384	106	15973	3982	151	19363	7496
17	2956	110	62	10301	1428	107	16077	4052	152	19406	7581
18	3129	123	63	10450	1474	108	16180	4122	153	19447	7666
19	3301	137	64	10598	1520	109	16282	4193	154	19487	7750
20	3473	152	65	10746	1566	110	16383	4264	155	19526	7836
21	3645	167	66	10893	1613	111	16483	4336	156	19563	7921
22	3816	184	67	11039	1661	112	16581	4408	157	19598	8006
23	3987	201	68	11184	1710	113	16678	4481	158	19633	8092
24	4158	219	69	11328	1759	114	16773	4554	159	19665	8178
25	4329	237	70	11472	1808	115	16868	4627	160	19696	8264
26	4499	256	71	11614	1859	116	16961	4701	161	19726	8350
27	4669	276	72	11756	1910	117	17053	4775	162	19754	8436
28	4838	297	73	11896	1961	118	17143	4850	163	19780	8522
29	5008	319	74	12036	2014	119	17233	4925	164	19805	8608
30	5176	341	75	12175	2066	120	17321	5000	165	19829	8695
31	5345	364	76	12313	2120	121	17407	5076	166	19851	8781
32	5513	387	77	12450	2174	122	17492	5152	167	19871	8868
33	5680	412	78	12586	2229	123	17576	5228	168	19890	8955
34	5847	437	79	12722	2284	124	17659	5305	169	19908	9042
35	6014	463	80	12856	2340	125	17740	5383	170	19924	9128
36	6180	489	81	12989	2396	126	17820	5460	171	19938	9215
37	6346	517	82	13121	2453	127	17899	5538	172	19951	9302
38	6511	545	83	13252	2510	128	17976	5616	173	19963	9390
39	6676	574	84	13383	2569	129	18052	5695	174	19973	9477
40	6840	603	85	13512	2627	130	18126	5774	175	19981	9564
41	7004	633	86	13640	2686	131	18199	5853	176	19988	9651
42	7167	664	87	13767	2746	132	18271	5933	177	19993	9738
43	7330	696	88	13893	2807	133	18341	6013	178	19997	9825
44	7492	728	89	14018	2867	134	18410	6093	179	19999	9913
45	7654	761	90	14142	2929	135	18478	6173	180	20000	10000

(Vgl. 78.)

Ang. trs. ψ	Si ψ Tg α	Tg ψ Sih φ	Se ψ Coh φ	Sect. hyp. φ	Ang. com. α	Ang. trs. ψ	Si ψ Tg α	Tg ψ Sih φ	Se ψ Coh φ	Sect. hyp. φ	Ang. com. α
1°	0,0175	0,0175	1,0002	0,0076	1° 0'	46°	0,7193	1,0355	1,4396	0,3936	35° 44'
2	0349	0349	0006	0152	2 0	47	7314	0724	4663	4046	36 11
3	0523	0524	0014	0227	3 0	48	7431	1106	4945	4158	36 37
4	0698	0699	0024	0303	3 59	49	7547	1504	5243	4273	37 3
5	0872	0875	0038	0379	4 59	50	7660	1918	5557	4389	37 27
6	0,1045	0,1051	1,0055	0,0456	5 58	51	0,7771	1,2349	1,5890	0,4509	37 51
7	1219	1228	0075	0532	6 57	52	7880	2799	6243	4630	38 14
8	1392	1405	0098	0608	7 55	53	7986	3270	6616	4755	38 37
9	1564	1584	0125	0685	8 53	54	8090	3764	7013	4882	38 58
10	1736	1763	0154	0762	9 51	55	8192	4281	7434	5013	39 19
11	0,1908	0,1944	1,0187	0,0839	10 48	56	0,8290	1,4826	1,7883	0,5147	39 40
12	2079	2126	0223	0916	11 45	57	8387	5399	8361	5284	39 59
13	2250	2309	0263	0994	12 41	58	8480	6003	8871	5425	40 18
14	2419	2493	0306	1072	13 36	59	8572	6643	9416	5570	40 36
15	2588	2679	0353	1150	14 31	60	8660	7321	2,0000	5719	40 54
16	0,2756	0,2867	1,0403	0,1229	15 25	61	0,8746	1,8040	2,0627	0,5873	41 10
17	2924	3057	0457	1308	16 18	62	8829	8807	1301	6032	41 27
18	3090	3249	0515	1387	17 10	63	8910	9626	2027	6296	41 42
19	3256	3443	0576	1467	18 2	64	8988	2,0503	2812	6366	41 57
20	3420	3640	0642	1548	18 53	65	9063	1445	3662	6542	42 11
21	0,3584	0,3839	1,0711	0,1629	19 43	66	0,9135	2,2460	2,4586	0,6725	42 25
22	3746	4040	0785	1710	20 32	67	9205	3558	5593	6915	42 38
23	3907	4245	0864	1792	21 21	68	9272	4751	6695	7113	42 50
24	4067	4452	0946	1875	22 8	69	9336	6051	7904	7320	43 2
25	4226	4663	1034	1958	22 55	70	9397	7475	9238	7537	43 13
26	0,4384	0,4877	1,1126	0,2042	23 40	71	0,9455	2,9042	3,0716	0,7764	43 24
27	4540	5095	1223	2127	24 25	72	9511	3,0777	2361	8003	43 34
28	4695	5317	1326	2212	25 9	73	9563	2709	4203	8255	43 43
29	4848	5543	1434	2299	25 52	74	9613	4874	6280	8522	43 52
30	5000	5774	1547	2386	26 34	75	9659	7321	8637	8806	44 0
31	0,5150	0,6009	1,1666	0,2474	27 15	76	0,9703	4,0108	4,1336	0,9109	44 8
32	5299	6249	1792	2562	27 55	77	9744	3315	4454	9433	44 15
33	5446	6494	1924	2652	28 34	78	9781	7046	8097	9784	44 22
34	5592	6745	2062	2743	29 13	79	9816	5,1446	5,2408	1,0164	44 28
35	5736	7002	2208	2835	29 50	80	9848	6713	7588	0580	44 34
36	0,5878	0,7265	1,2361	0,2928	30 27	81	0,9877	6,3138	6,3925	1,1040	44 39
37	6018	7536	2521	3023	31 2	82	9903	7,1154	7,1853	1554	44 43
38	6157	7813	2690	3118	31 37	83	9925	8,1443	8,2055	2135	44 47
39	6293	8098	2868	3215	32 12	84	9945	9,5144	9,5668	2809	44 51
40	6428	8391	3054	3313	32 44	85	9962	11,4301	11,4737	3599	44 53
41	0,6561	0,8693	1,3250	0,3413	33 16	86	0,9976	14,3007	14,3356	1,4569	44 56
42	6691	9004	3456	3514	33 47	87	9986	19,0811	19,1073	5819	44 58
43	6820	9325	3673	3617	34 18	88	9994	28,6363	28,6537	7581	44 59
44	6947	9657	3902	3721	34 47	89	9998	57,2900	57,2987	2,0591	45 0
45	7071	1,0000	4142	3828	35 16	90	1,0000	∞	∞	∞	45 0

Arc.	0,0°=0'	0,1=6	0,2=12	0,3=18	0,4=24	0,5=30	0,6=36	0,7=42	0,8=48	0°,9=54'
0°	—	7,2419	7,5429	7,7190	7,8439	7,9408	8,0200	8,0870	8,1450	8,1961
1	8,2419	8,2832	8,3210	8,3558	8,3880	8,4179	8,4459	8,4723	8,4971	8,5206
2	8,5428	8,5640	8,5842	8,6035	8,6220	8,6397	8,6567	8,6731	8,6889	8,7041
3	8,7188	8,7330	8,7468	8,7602	8,7731	8,7857	8,7979	8,8098	8,8213	8,8326
4	8,8436	8,8543	8,8647	8,8749	8,8849	8,8946	8,9042	8,9135	8,9226	8,9135
5	8,9403	8,9489	8,9573	8,9655	8,9736	8,9816	8,9894	8,9970	9,0046	9,0120
6	9,0192	9,0264	9,0334	9,0403	9,0472	9,0539	9,0605	9,0670	9,0734	9,0797
7	9,0859	9,0920	9,0981	9,1040	9,1099	9,1157	9,1214	9,1271	9,1326	9,1381
8	9,1436	9,1489	9,1542	9,1594	9,1646	9,1697	9,1747	9,1797	9,1847	9,1895
9	9,1943	9,1991	9,2038	9,2085	9,2131	9,2176	9,2221	9,2266	9,2310	9,2353
10	9,2397	9,2439	9,2482	9,2524	9,2565	9,2606	9,2647	9,2687	9,2727	9,2767
11	9,2806	9,2845	9,2883	9,2921	9,2959	9,2997	9,3034	9,3070	9,3107	9,3143
12	9,3179	9,3214	9,3250	9,3284	9,3319	9,3353	9,3387	9,3421	9,3455	9,3488
13	9,3521	9,3554	9,3586	9,3618	9,3650	9,3682	9,3713	9,3745	9,3775	9,3806
14	9,3837	9,3867	9,3897	9,3927	9,3957	9,3986	9,4015	9,4044	9,4073	9,4102
15	9,4130	9,4158	9,4186	9,4214	9,4242	9,4269	9,4296	9,4323	9,4350	9,4377
16	9,4403	9,4430	9,4456	9,4482	9,4508	9,4533	9,4559	9,4584	9,4609	9,4634
17	9,4659	9,4684	9,4709	9,4733	9,4757	9,4781	9,4805	9,4829	9,4853	9,4876
18	9,4900	9,4923	9,4946	9,4969	9,4992	9,5015	9,5037	9,5060	9,5082	9,5104
19	9,5126	9,5148	9,5170	9,5192	9,5213	9,5235	9,5256	9,5278	9,5299	9,5320
20	9,5341	9,5361	9,5382	9,5402	9,5423	9,5443	9,5463	9,5484	9,5504	9,5523
21	9,5543	9,5563	9,5583	9,5602	9,5621	9,5641	9,5660	9,5679	9,5698	9,5717
22	9,5736	9,5754	9,5773	9,5792	9,5810	9,5828	9,5847	9,5865	9,5883	9,5901
23	9,5919	9,5937	9,5954	9,5972	9,5990	9,6007	9,6024	9,6042	9,6059	9,6076
24	9,6093	9,6110	9,6127	9,6144	9,6161	9,6177	9,6194	9,6210	9,6227	9,6243
25	9,6259	9,6276	9.6292	9,6308	9,6324	9,6340	9,6356	9,6371	9,6387	9,6403
26	9,6418	9,6434	9,6449	9,6465	9,6480	9,6495	9,6510	9,6526	9,6541	9,6556
27	9,6570	9,6585	9,6600	9,6615	9,6629	9,6644	9,6659	9,6673	9,6687	9,6702
28	9,6716	9,6730	9,6744	9,6759	9,6773	9,6787	9,6801	9,6814	9,6828	9,6842
29	9,6856	9,6869	9,6883	9,6896	9,6910	9,6923	9,6937	9,6950	9,6963	9,6977
30	9,6990	9,7003	9,7016	9.7029	9,7042	9,7055	9,7068	9,7080	9,7093	9,7106
31	9,7118	9,7131	9,7144	9,7156	9,7168	9,7181	9,7193	9,7205	9,7218	9,7230
32	9,7242	9,7254	9,7266	9,7278	9,7290	9,7302	9,7314	9,7326	9,7338	9,7349
33	9,7361	9,7373	9,7384	9,7396	9,7407	9,7419	9,7430	9,7442	9,7453	9,7464
34	9,7476	9,7487	9,7498	9,7509	9,7520	9,7531	9,7542	9,7553	9,7564	9,7575
35	9,7586	9,7597	9,7607	9,7618	9,7629	9,7640	9,7650	9,7661	9,7671	9,7682
36	9,7692	9,7703	9,7713	9,7723	9,7734	9,7744	9,7754	9,7764	9,7774	9,7785
37	9,7795	9,7805	9,7815	9,7825	9,7835	9,7844	9,7854	9,7864	9,7874	9,7884
38	9,7893	9,7903	9,7913	9,7922	9,7932	9,7941	9,7951	9,7960	9,7970	9,7979
39	9,7989	9,7998	9,8007	9,8017	9,8026	9,8035	9,8044	9,8053	9,8063	9,8072
40	9,8081	9,8090	9,8099	9,8108	9,8117	9,8125	9,8134	9,8143	9,8152	9,8161
41	9,8169	9,8178	9,8187	9,8195	9,8204	9,8213	9,8221	9,8230	9,8238	9,8247
42	9,8255	9,8264	9,8272	9,8280	9,8289	9,8297	9,8305	9,8313	9,8322	9,8330
43	9,8338	9,8346	9,8354	9,8362	9,8370	9,8378	9,8386	9,8394	9,8402	9,8410
44	9,8418	9,8426	9,8433	9,8441	9,8449	9,8457	9,8464	9,8472	9,8480	9,8487

Arc.	0,0° = 0'	0,1 = 6	0,2 = 12	0,3 = 18	0,4 = 24	0,5 = 30	0,6 = 36	0,7 = 42	0,8 = 48	0°,9 = 54'
45°	9,8495	9,8502	9,8510	9,8517	9,8525	9,8532	9,8540	9,8547	9,8555	9,8562
46	9,8569	9,8577	9,8584	9,8591	9,8598	9,8606	9,8613	9,8620	9,8627	9,8634
47	9,8641	9,8648	9,8655	9,8662	9,8669	9,8676	9,8683	9,8690	9,8697	9,8704
48	9,8711	9,8718	9,8724	9,8731	9,8738	9,8745	9,8751	9,8758	9,8765	9,8771
49	9,8778	9,8784	9,8791	9,8797	9,8804	9,8810	9,8817	9,8823	9,8830	9,8836
50	9,8843	9,8849	9,8855	9,8862	9,8868	9,8874	9,8880	9,8887	9,8893	9,8899
51	9,8905	9,8911	9,8917	9,8923	9,8929	9,8935	9,8941	9,8947	9,8953	9,8959
52	9,8965	9,8971	9,8977	9,8983	9,8989	9,8995	9,9000	9,9006	9,9012	9,9018
53	9,9023	9,9029	9,9035	9,9041	9,9046	9,9052	9,9057	9,9063	9,9069	9,9074
54	9,9080	9,9085	9,9091	9,9096	9,9101	9,9107	9,9112	9,9118	9,9123	9,9128
55	9,9134	9,9139	9,9144	9,9149	9,9155	9,9160	9,9165	9,9170	9,9175	9,9181
56	9,9186	9,9191	9,9196	9,9201	9,9206	9,9211	9,9216	9,9221	9,9226	9,9231
57	9,9236	9,9241	9,9246	9,9251	9,9255	9,9260	9,9265	9,9270	9,9275	9,9279
58	9,9284	9,9289	9,9294	9,9298	9,9303	9,9308	9,9312	9,9317	9,9322	9,9326
59	9,9331	9,9335	9,9340	9,9344	9,9349	9,9353	9,9358	9,9362	9,9367	9,9371
60	9,9375	9,9380	9,9384	9,9388	9,9393	9,9397	9,9401	9,9406	9,9410	9,9414
61	9,9418	9,9422	9,9427	9,9431	9,9435	9,9439	9,9443	9,9447	9,9451	9,9455
62	9,9459	9,9463	9,9467	9,9471	9,9475	9,9479	9,9483	9,9487	9,9491	9,9495
63	9,9499	9,9503	9,9506	9,9510	9,9514	9,9518	9,9522	9,9525	9,9529	9,9533
64	9,9537	9,9540	9,9544	9,9548	9,9551	9,9555	9,9558	9,9562	9,9566	9,9569
65	9,9573	9,9576	9,9580	9,9583	9,9587	9,9590	9,9594	9,9597	9,9601	9,9604
66	9,9607	9,9611	9,9614	9,9617	9,9621	9,9624	9,9627	9,9631	9,9634	9,9637
67	9,9640	9,9643	9,9647	9,9650	9,9653	9,9656	9,9659	9,9662	9,9666	9,9669
68	9,9672	9,9675	9,9678	9,9681	9,9684	9,9687	9,9690	9,9693	9,9696	9,9699
69	9,9702	9,9704	9,9707	9,9710	9,9713	9,9716	9,9719	9,9722	9,9724	9,9727
70	9,9730	9,9733	9,9735	9,9738	9,9741	9,9743	9,9746	9,9749	9,9751	9,9754
71	9,9757	9,9759	9,9762	9,9764	9,9767	9,9770	9,9772	9,9775	9,9777	9,9780
72	9,9782	9,9785	9,9787	9,9789	9,9792	9,9794	9,9797	9,9799	9,9801	9,9804
73	9,9806	9,9808	9,9811	9,9813	9,9815	9,9817	9,9820	9,9822	9,9824	9,9826
74	9,9828	9,9831	9,9833	9,9835	9,9837	9,9839	9,9841	9,9843	9,9845	9,9847
75	9,9849	9,9851	9,9853	9,9855	9,9857	9,9859	9,9861	9,9863	9,9865	9,9867
76	9,9869	9,9871	9,9873	9,9875	9,9876	9,9878	9,9880	9,9882	9,9884	9,9885
77	9,9887	9,9889	9,9891	9,9892	9,9894	9,9896	9,9897	9,9899	9,9901	9,9902
78	9,9904	9,9906	9,9907	9,9909	9,9910	9,9912	9,9913	9,9915	9,9916	9,9918
79	9,9919	9,9921	9,9922	9,9924	9,9925	9,9927	9,9928	9,9929	9,9931	9,9932
80	9,9934	9,9935	9,9936	9,9937	9,9939	9,9940	9,9941	9,9943	9,9944	9,9945
81	9,9946	9,9947	9,9949	9,9950	9,9951	9,9952	9,9953	9,9954	9,9955	9,9956
82	9,9958	9,9959	9,9960	9,9961	9,9962	9,9963	9,9964	9,9965	9,9966	9,9967
83	9,9968	9,9968	9,9969	9,9970	9,9971	9,9972	9,9973	9,9974	9,9975	9,9975
84	9,9976	9,9977	9,9978	9,9978	9,9979	9,9980	9,9981	9,9881	9,9982	9,9983
85	9,9983	9,9984	9,9985	9,9985	9,9986	9,9987	9,9987	9,9988	9,9988	9,9989
86	9,9989	9,9990	9,9990	9,9991	9,9991	9,9992	9,9992	9,9993	9,9993	9,9994
87	9,9994	9,9994	9,9995	9,9995	9,9996	9,9996	9,9996	9,9996	9,9997	9,9997
88	9,9997	9,9998	9,9998	9,9998	9,9998	9,9999	9,9999	9,9999	9,9999	9,9999
89	9,9999	9,9999	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Arc.	0,0° 0'	0,1 6	0,2 12	0,3 18	0,4 24	0,5 30	0,6 36	0,7 42	0,8 48	0°,9 54'
0°	—	7,2419	7,5429	7,7190	7,8439	7,9409	8,0200	8,0870	8,1450	8,1962
1	8,2419	8,2833	8,3211	8,3559	8,3881	8,4181	8,4461	8,4725	8,4973	8,5208
2	8,5431	8,5643	8,5845	8,6038	8,6223	8,6401	8,6571	8,6736	8,6894	8,7046
3	8,7194	8,7337	8,7475	8,7609	8,7739	8,7865	8,7988	8,8107	8,8223	8,8336
4	8,8446	8,8554	8,8659	8,8762	8,8862	8,8960	8,9056	8,9150	8,9241	8,9331
5	8,9420	8,9506	8,9591	8,9674	8,9756	8,9836	8,9915	8,9992	9,0068	9,0143
6	9,0216	9,0289	9,0360	9,0430	9,0499	9,0567	9,0633	9,0699	9,0764	9,0828
7	9,0891	9,0954	9,1015	9,1076	9,1135	9,1194	9,1252	9,1310	9,1367	9,1423
8	9,1478	9,1533	9,1587	9,1640	9,1693	9,1745	9,1797	9,1848	9,1898	9,1948
9	9,1997	9,2046	9,2094	9,2142	9,2189	9,2236	9,2282	9,2328	9,2374	9,2419
10	9,2463	9,2507	9,2551	9,2594	9,2637	9,2680	9,2722	9,2764	9,2805	9,2846
11	9,2887	9,2927	9,2967	9,3006	9,3046	9,3085	9,3123	9,3162	9,3200	9,3237
12	9,3275	9,3312	9,3349	9,3385	9,3422	9,3458	9,3493	9,3529	9,3564	9,3599
13	9,3634	9,3668	9,3702	9,3736	9,3770	9,3804	9,3837	9,3870	9,3903	9,3935
14	9,3968	9,4000	9,4032	9,4064	9,4095	9,4127	9,4158	9,4189	9,4220	9,4250
15	9,4281	9,4311	9,4341	9,4371	9,4400	9,4430	9,4459	9,4488	9,4517	9,4546
16	9,4575	9,4603	9,4632	9,4660	9,4688	9,4716	9,4744	9,4771	9,4799	8,4826
17	9,4853	9,4880	9,4907	9,4934	9,4961	9,4987	9,5014	9,5040	9,5066	9,5092
18	9,5118	9,5143	9,5169	9,5195	9,5220	9,5245	9,5270	9,5295	9,5320	9,5345
19	9,5370	9,5394	9,5419	9,5443	9,5467	9,5491	9,5516	9,5539	9,5563	9,5587
20	9,5611	9,5634	9,5658	9,5681	9,5704	9,5727	9,5750	9,5773	9,5796	9,5819
21	9,5842	9,5864	9,5887	9,5909	9,5932	9,5954	9,5976	9,5998	9,6020	9,6042
22	9,6064	9,6086	9,6108	9,6129	9,6151	9,6172	9,6194	9,6215	9,6236	9,6257
23	9,6279	9,6300	9,6321	9,6341	9,6362	9,6383	9,6404	9,6424	9,6445	9,6465
24	9,6486	9,6506	9,6527	9,6547	9,6567	9,6587	9,6607	9,6627	9,6647	9,6667
25	9,6687	9,6706	9,6726	9,6746	9,6765	9,6785	9,6804	9,6824	9,6843	9,6863
26	9,6882	9,6901	9,6920	9,6939	9,6958	9,6977	9,6996	9,7015	9,7034	9,7053
27	9,7072	9,7090	9,7109	9,7128	9,7146	9,7165	9,7183	9,7202	9,7220	9,7238
28	9,7257	9,7275	9,7293	9,7311	9,7330	9,7348	9,7366	9,7384	9,7402	9,7420
29	9,7438	9,7455	9,7473	9,7491	9,7509	9,7526	9,7544	9,7562	9,7579	9,7597
30	9,7614	9,7632	9,7649	9,7667	9,7684	9,7701	9,7719	9,7736	9,7753	9,7771
31	9,7788	9,7805	9,7822	9,7839	9,7856	9,7873	9,7890	9,7907	9,7924	9,7941
32	9,7958	9,7975	9,7992	9,8008	9,8025	9,8042	9,8059	9,8075	9,8092	9,8109
33	9,8125	9,8142	9,8158	9,8175	9,8191	9,8208	9,8224	9,8241	9,8257	9,8274
34	9,8290	9,8306	9,8323	9,8339	9,8355	9,8371	9,8388	9,8404	9,8420	9,8436
35	9,8452	9,8468	9,8484	9,8501	9,8517	9,8533	9,8549	9,8565	9,8581	9,8597
36	9,8613	9,8629	9,8644	9,8660	9,8676	9,8692	9,8708	9,8724	9,8740	9,8755
37	9,8771	9,8787	9,8803	9,8818	9,8834	9,8850	9,8865	9,8881	9,8897	9,8912
38	9,8928	9,8944	9,8959	9,8975	9,8990	9,9006	9,9022	9,9037	9,9053	9,9068
39	9,9084	9,9099	9,9115	9,9130	9,9146	9,9161	9,9176	9,9192	9,9207	9,9223
40	9,9238	9,9254	9,9269	9,9284	9,9300	9,9315	9,9330	9,9346	9,9361	9,9376
41	9,9392	9,9407	9,9422	9,9438	9,9453	9,9468	9,9483	9,9499	9,9514	9,9529
42	9,9544	9,9560	9,9575	9,9590	9,9605	9,9621	9,9636	9,9651	9,9666	9,9681
43	9,9697	9,9712	9,9727	9,9742	9,9757	9,9773	9,9788	9,9803	9,9818	9,9833
44	9,9848	9,9864	9,9879	9,9894	9,9909	9,9924	9,9939	9,9955	9,9970	9,9985

Arc.	0,0°—0'	0,1—6	0,2—12	0,3—18	0,4—24	0,5—30	0,6—36	0,7—42	0,8—48	0°,9—54'
45°	0,0000	0,0015	0,0030	0,0045	0,0061	0,0076	0,0091	0,0106	0,0121	0,0136
46	0,0152	0,0167	0,0182	0,0197	0,0212	0,0228	0,0243	0,0258	0,0273	0,0288
47	0,0303	0,0319	0,0334	0,0349	0,0364	0,0379	0,0395	0,0410	0,0425	0,0440
48	0,0456	0,0471	0,0486	0,0501	0,0517	0,0532	0,0547	0,0562	0,0578	0,0593
49	0,0608	0,0624	0,0639	0,0654	0,0670	0,0685	0,0700	0,0716	0,0731	0,0746
50	0,0762	0,0777	0,0793	0,0808	0,0824	0,0839	0,0854	0,0870	0,0885	0,0901
51	0,0916	0,0932	0,0947	0,0963	0,0978	0,0994	0,1010	0,1025	0,1041	0,1056
52	0,1072	0,1088	0,1103	0,1119	0,1135	0,1150	0,1166	0,1182	0,1197	0,1213
53	0,1229	0,1245	0,1260	0,1276	0,1292	0,1308	0,1324	0,1340	0,1356	0,1371
54	0,1387	0,1403	0,1419	0,1435	0,1451	0,1467	0,1483	0,1499	0,1516	0,1532
55	0,1548	0,1564	0,1580	0,1596	0,1612	0,1629	0,1645	0,1661	0,1677	0,1694
56	0,1710	0,1726	0,1743	0,1759	0,1776	0,1792	0,1809	0,1825	0,1842	0,1858
57	0,1875	0,1891	0,1908	0,1925	0,1941	0,1958	0,1975	0,1992	0,2008	0,2025
58	0,2042	0,2059	0,2076	0,2093	0,2110	0,2127	0,2144	0,2161	0,2178	0,2195
59	0,2212	0,2229	0,2247	0,2264	0,2281	0,2299	0,2316	0,2333	0,2351	0,2368
60	0,2386	0,2403	0,2421	0,2438	0,2456	0,2474	0,2491	0,2509	0,2527	0,2545
61	0,2562	0,2580	0,2598	0,2616	0,2634	0,2652	0,2670	0,2689	0,2707	0,2725
62	0,2743	0,2762	0,2780	0,2798	0,2817	0,2835	0,2854	0,2872	0,2891	0,2910
63	0,2928	0,2947	0,2966	0,2985	0,3004	0,3023	0,3042	0,3061	0,3080	0,3099
64	0,3118	0,3137	0,3157	0,3176	0,3196	0,3215	0,3235	0,3254	0,3274	0,3294
65	0,3313	0,3333	0,3353	0,3373	0,3393	0,3413	0,3433	0,3453	0,3473	0,3494
66	0,3514	0,3535	0,3555	0,3576	0,3596	0,3617	0,3638	0,3659	0,3679	0,3700
67	0,3721	0,3743	0,3764	0,3785	0,3806	0,3828	0,3849	0,3871	0,3892	0,3914
68	0,3936	0,3958	0,3980	0,4002	0,4024	0,4046	0,4068	0,4091	0,4113	0,4136
69	0,4158	0,4181	0,4204	0,4227	0,4250	0,4273	0,4296	0,4319	0,4342	0,4366
70	0,4389	0,4413	0,4437	0,4461	0,4484	0,4509	0,4533	0,4557	0,4581	0,4606
71	0,4630	0,4655	0,4680	0,4705	0,4730	0,4755	0,4780	0,4805	0,4831	0,4857
72	0,4882	0,4908	0,4934	0,4960	0,4986	0,5013	0,5039	0,5066	0,5093	0,5120
73	0,5147	0,5174	0,5201	0,5229	0,5256	0,5284	0,5312	0,5340	0,5368	0,5397
74	0,5425	0,5454	0,5483	0,5512	0,5541	0,5570	0,5600	0,5629	0,5659	0,5689
75	0,5719	0,5750	0,5780	0,5811	0,5842	0,5873	0,5905	0,5936	0,5968	0,6000
76	0,6032	0,6065	0,6097	0,6130	0,6163	0,6196	0,6230	0,6264	0,6298	0,6332
77	0,6366	0,6401	0,6436	0,6471	0,6507	0,6542	0,6578	0,6615	0,6651	0,6688
78	0,6725	0,6763	0,6800	0,6838	0,6877	0,6915	0,6954	0,6994	0,7033	0,7073
79	0,7113	0,7154	0,7195	0,7236	0,7278	0,7320	0,7363	0,7406	0,7449	0,7493
80	0,7537	0,7581	0,7626	0,7672	0,7718	0,7764	0,7811	0,7858	0,7906	0,7954
81	0,8003	0,8052	0,8102	0,8152	0,8203	0,8255	0,8307	0,8360	0,8413	0,8467
82	0,8522	0,8577	0,8633	0,8690	0,8748	0,8806	0,8865	0,8924	0,8985	0,9046
83	0,9109	0,9172	0,9236	0,9301	0,9367	0,9433	0,9501	0,9570	0,9640	0,9711
84	0,9784	0,9857	0,9932	1,0008	1,0085	1,0164	1,0244	1,0326	1,0409	1,0494
85	1,0580	1,0669	1,0759	1,0850	1,0944	1,1040	1,1138	1,1238	1,1341	1,1446
86	1,1554	1,1664	1,1777	1,1893	1,2012	1,2135	1,2261	1,2391	1,2525	1,2663
87	1,2806	1,2954	1,3106	1,3264	1,3429	1,3599	1,3777	1,3962	1,4155	1,4357
88	1,4569	1,4792	1,5027	1,5275	1,5539	1,5819	1,6119	1,6441	1,6789	1,7167
89	1,7581	1,8038	1,8550	1,9130	1,9800	2,0591	2,1561	2,2810	2,4571	2,7581

Grade. Minuten.	Zeit-Minuten.	Umdrehungen oder Tage.	Grade. Minuten.	Zeit-Minuten.	Umdrehungen oder Tage.	Grade. Minuten.	Zeit-Minuten.	Umdrehungen oder Tage.	Grade. Minuten.	Zeit-Minuten.	Umdrehungen oder Tage.
15′	1ᵐ	0,000694	15′	37ᵐ	0,025694	15′	73ᵐ	0,050694	15′	109ᵐ	0,075694
30	2	1389	30	38	26389	30	74	51389	30	110	76389
45	3	2083	45	39	27083	45	75	52083	45	111	77083
1°	4	2778	10°	40	27778	19°	76	52778	28°	112	77778
15	5	0,003472	15	41	0,028472	15	77	0,053472	15	113	0,078472
30	6	4167	30	42	29167	30	78	54167	30	114	79167
45	7	4861	45	43	29861	45	79	54861	45	115	79861
2	8	5556	11	44	30556	20	80	55556	29	116	80556
15	9	0,006250	15	45	0,031250	15	81	0,056250	15	117	0,081250
30	10	6944	30	46	31944	30	82	56944	30	118	81944
45	11	7639	45	47	32639	45	83	57639	45	119	82639
3	12	8333	12	48	33333	21	84	58333	30	120	83333
15	13	0,009028	15	49	0,034028	15	85	0,059028	15	121	0,084028
30	14	09722	30	50	34722	30	86	59722	30	122	84722
45	15	10417	45	51	35417	45	87	60417	45	123	85417
4	16	11111	13	52	36111	22	88	61111	31	124	86111
15	17	0,011806	15	53	0,036806	15	89	0,061806	15	125	0,086806
30	18	12500	30	54	37500	30	90	62500	30	126	87500
45	19	13194	45	55	38194	45	91	63194	45	127	88194
5	20	13889	14	56	38889	23	92	63889	32	128	88889
15	21	0,014583	15	57	0,039583	15	93	0,064583	15	129	0,089583
30	22	15278	30	58	40278	30	94	65278	30	130	90278
45	23	15972	45	59	40972	45	95	65972	45	131	90972
6	24	16667	15	60	41667	24	96	66667	33	132	91667
15	25	0,017361	15	61	0,042361	15	97	0,067361	15	133	0,092361
30	26	18056	30	62	43056	30	98	68056	30	134	93056
45	27	18750	45	63	43750	45	99	68750	45	135	93750
7	28	19444	16	64	44444	25	100	69444	34	136	94444
15	29	0,020139	15	65	0,045139	15	101	0,070139	15	137	0,095139
30	30	20833	30	66	45833	30	102	70833	30	138	95833
45	31	21528	45	67	46528	45	103	71528	45	139	96528
8	32	22222	17	68	47222	26	104	72222	35	140	97222
15	33	0,022917	15	69	0,047917	15	105	0,072917	15	141	0,097917
30	34	23611	30	70	48611	30	106	73611	30	142	098611
45	35	24306	45	71	49306	45	107	74306	45	143	099306
9	36	25000	18	72	50000	27	108	75000	36	144	100000
′	s		″	s		″	s			°	m = h m
1	4	0,0000463	1	0,07	0,0000008	15	1	0,0000116	0,1	36	144 = 2 24
2	8	0926	2	13	15	30	2	0231	0,2	72	288 4 48
3	12	1389	3	20	23	45	3	0347	0,3	108	432 7 12
4	16	1852	4	27	31	60	4	0463	0,4	144	576 9 36
5	20	2315	5	33	38	75	5	0578	0,5	180	720 12 0
6	24	2778	6	40	46	90	6	0694	0,6	216	864 14 24
7	28	3241	7	47	54	105	7	0810	0,7	252	1008 16 48
8	32	3704	8	53	62	120	8	0926	0,8	288	1152 19 12
9	36	4167	9	60	69	135	9	1041	0,9	324	1296 21 36

b	β	H'	T + t	A	Engl. Mass.	mm	Fahr.	Cels.
mm	mm	m		m				
760	0,12	0	0°	18393	21''	533,4	0°	— 17,77°
55	12	56	1	430	22	558,8	10	— 12,22
50	12	112	2	467	23	584,2	20	— 6,66
45	12	168	3	503	24	609,6	30	— 1,11
40	12	225	4	540	25	635,0	32	0,00
735	12	284	5	18577	26	660,4	34	1,11
30	12	340	6	614	27	685,8	36	2,22
28	12	363	7	651	28	711,2	38	3,33
26	12	387	8	687	29	736,6	40	4,44
24	12	410	9	724	30	762,0	42	5,55
722	12	433	10	18761	Par.		44	6,66
20	12	457	11	798	Mass.		46	7,77
18	12	480	12	835	18	487,3	48	8,88
16	12	504	13	871	19	514,3	50	10,00
14	12	527	14	908	20	541,4	52	11,11
712	12	551	15	18945	21	568,5	54	12,22
10	12	575	16	982	22	595,5	56	13,33
08	12	599	17	19019	23	622,6	58	14,44
06	12	623	18	055	24	649,7	60	15,55
04	11	647	19	092	25	676,7	62	16,66
702	11	671	20	19129	26	703,8	64	17,77
00	11	694	21	166	27	730,9	66	18,88
695	11	755	22	203	28	758,0	68	20,00
90	11	816	23	239	1'''	2,3	70	21,11
85	11	878	24	276	2	4,5	72	22,22
680	11	939	25	19313	3	6,8	74	23,33
75	11	1002	26	350	4	9,0	76	24,44
70	11	1064	27	387	5	11,3	78	25,55
65	11	1128	28	423	6	13,5	80	26,66
60	11	1191	29	460	7	15,8	82	27,77
655	11	1206	30	19497	8	18,0	84	28,88
50	11	1320	31	534	9	20,3	86	30,00
45	11	1386	32	571	10	22,6	88	31,11
40	10	1451	33	607	11	24,8	90	32,22
35	10	1518	34	644			92	33,33
					Réaum.	Cels.		
630	10	1584	35	19681			94	34,44
25	10	1652	36	718	1°	1,25	96	35,55
20	10	1719	37	755	2	2,50	98	36,66
15	10	1788	38	791	3	3,75	100	37,77
10	10	1857	39	828	4	5,00	120	48,88
605	10	1926	40	19865	5	6,25	140	60,00
600	10	1996	41	902	6	7,50	160	71,11
550	09	2731	42	939	7	8,75	180	82,22
500	08	3536	43	975	8	10,00	200	93,33
400	06	5420	44	20012	9	11,25	212	100,00

Es giebt $\beta = 0{,}00016 \cdot b$ die Temperaturkorrektion für 1° C.; vgl. 128 : 1
$A = 18393\,[1 + 0{,}002\,(T + t)]$ den Faktor in 127 : 6
$H' = 19445\,[\mathrm{Lg}\,760 - \mathrm{Lg}\,b]$ die approximative Meereshöhe.

Name.	Zeichen und Formeln; a. Atomgewicht; b. Brechungsexponent; d. Dichte; e. Eigenwärme; g. Gebundene Wärme; l. Längenausdehnung; s'. Schmelzpunkt; s''. Siedepunkt bei 760^{mm} Druck.
Alaun, alumen	$AlK(Na) \cdot 2SO_4 + 12H_2O$; d'. 1,71; aus Thonschiefer
Alkohol, spiritus vini	C_2H_6O; b. 1,377; d'. 0,79; g''. 208; s'. —130; s''. 78,4
Aluminium	Al; a. 27,0; d'. 2,60; s'. 700?; Thonerde Al_2O_3
Antimon, stibium	Sb; a. 122,0; d'. 6,7; e. 0,051; l. 10,83; s'. 432
Argentan, Neusilber	Legierung von 8 Cu + 3,5 Zn + 3 Ni (Gew.)
Arsen	As; a. 75,0; d'. 5,73; Arsenik As_2O_3 (heftiges Gift)
Baumöl, oleum	Durch Auspressen von Samen erhalten; d. 0,91; s'. 2,2
Bernstein, electrum	Mineralisches Harz; b. 1,552; d'. 1,08
Blei, plumbum	Pb; a. 206,5; d'. 11,37; e. 0,031; g'. 5,4; l. 28,48; s'. 325
Braunstein, Mangansuperoxyd	MnO_2; d'. 5,026; giebt mit Salzsäure übergossen bei Erwärmen Chlor ab
Brom	Br; a. 80,0; d'. 2,97; s'. — 7,3; s''. 63; als Bestandteil von Salzquellen wichtig
Calcium	Ca; a. 40,0; d'. 1,57; Kalk CaO (d'. 2,3—3,2)
Chlor	Cl; a. 35,5; d''. 2,449; e. 0,12; nicht atembar
Chlorsaures Kali	$ClKO_3$; giebt bei Erhitzen Sauerstoff ab
Crownglas	$62{,}8\,SiO_2 + 22{,}1\,KO + 12{,}5\,CaO + 2{,}6\,Al_2O_3$; b. 1,50; d'. 2,4—2,9; e. 0,198; l. 8,62
Diamant, adamas	Reine Kohle; b. 2,487; d'. 3,52; e. 0,147
Eisen, ferrum	Fe; a. 55,9; d'. 7,8; e. 0,114; l. 11,82; s'. 1600
Eisenvitriol, vitriolum martis	$FeSO_4 + 7H_2O$; b. 1,49; d'. 1,84
Elfenbein, ebur, ivoire	Aus den Stosszähnen des Elephanten; d'. 1,9
Erde, humus	Zersetzungsprodukte von Gesteinen, Pflanzen- und Tier-Resten
Essigsäure, acetum	$C_2H_4O_2$; b. 1,40; d'. 1,06; s''. 117; Bleizucker $PlC_2H_4O_3 + 3H_2O$
Flintglas	$44{,}3\,SiO_2 + 11{,}7\,KO + 43{,}0\,PbO$; b. 1,6—2,0; d'. 3,2 bis 3,8; e. 0,190
Fluor	Fl.; a. 19,0; Fluorwasserstoff FlH (d''. 0,692)
Flussspath, castine	$CaFl_2$; b. 1,43; d'. 3,1; e. 0,208; l. 20,70
Glaubersalz, sal Glauberii	$NaSO_4 + 10H_2O$; 14 Glaub. + 6 Schwefels. + 4 Wasser (Gew.) Kältemischung
Gold, aurum	Au; a. 197,0; d'. 19,36; e. 0,032; l. 14,66; s'. 1250
Granit, syenites	Gemenge aus Quarz, Feldspat und Glimmer; d'. 2,58 bis 2,96; l. 8,97
Gips, gypsum	$CaSO_4 + 2H_2O$; d'. 2,32; der blätterige Gips heisst, wie auch gewisser russischer Glimmer, Marienglas
Höllenstein, lapis infernalis	$AgNO_3$; giftig und ätzend; durch Auflösen von Silber in Salpetersäure erhalten
Holz, lignum	Hauptbestandteil Pflanzenfaser ($C_{12}H_{10}O_{10}$); d'. 0,5 (Tanne) bis 1,2 (Ebenholz)
Jod	J; a. 127,0; d. 4,9; e. 0,054; s'. 104; s''. 175
Iridium	Ir; a. 192,6; d'. 22,42; s'. 2400
Kalium, potassium	K; a. 39,2; d'. 0,86; e. 0,170; s'. 58; Kali KO
Kalkspat, calx	$CaO + CO_2$; d'. 2,715 (isländ. Doppelspat)
Kiesel, silicium	Si; a. 28,2; d'. 2,35; Kieselsäure (Quarz) SiO_2
Kochsalz, Chlornatrium	NaCl; d'. 2,08; e. 0,214; 33 Salz mit 100 Schnee (Gew.) Kältemischung
Königswasser, aqua regis	Salpetersäure + 3 Salzsäure (Vol.); löst Gold u. Platin
Kohlensäure, acide carbon.	CO_2; b. 1,000449; d''. 1,529; e. 0,221; s'. — 87
Kohlenstoff, carbo	C; a. 6,0; Grubengas C_2H_4; Steinkohlengas 70—80 C, 5—8 O, 5 H (in Proc.)
Kork, cortex subercus	Rinde der Korkeiche (Pantoffelholz); d'. 0,24

Erläuterungen: Für Zeichen, Formeln und Atomgewicht vgl. 118, für Brechungsexponent 136, für Eigenwärme (specifische) und gebundene (latente) Wärme 149.

Name.	Zeichen und Formeln; a. Atomgewicht; b. Brechungsexponent; d. Dichte; e. Eigenwärme; g. Gebundene Wärme; l. Längenausdehnung; s'. Schmelzpunkt; s''. Siedepunkt bei 760^{mm} Druck.
Kreide, creta, craie . . .	$CaCO_3$; d'. 2,25—2,69; mit verdünnter Salzsäure übergossen giebt sie Kohlensäure ab
Kupfer, cuprum, cuivre . .	Cu; a. 63,2; d'. 8,9; e. 0,095; l. 17,17; s'. 1090
Kupfervitriol, vitriol bleu .	$CuSO_4 + 5H_2O$; d'. 2,21; wird (157) durch elektr. Strom reduz. (Galvanoplastik)
Luft, atmosphärische . .	0,21 O + 0,79 N (Vol.) = 0,23 O + 0,77 N (Gew.); b. 1,000294; d'. 0,00129; d''. 1; e. 0,24
Magnesium	Mg; a. 24,0; d'. 1,74; Magnesia (Bittersalz) $MgSO_4$
Mangan	Mn; a. 53,9; d'. 8,0; strengflüssig; in Eisenerzen
Marmor, marbre	$Ca \cdot O + C \cdot O_2$; d'. 2,84; e. 0,208; l. 8,49
Messing, orichalcum . . .	Legierung von 71,5 Cu + 28,5 Zn (Gew.); d'. 8,4; e. 0,094; l. 18,75; s'. 900
Natrium, sodium	Na; a. 23,0; d'. 0,97; e. 0,293; s'. 90
Nickel	Ni; a. 57,9; d'. 8,3; e. 0,109; s'. 1500; sehr haltbar
Petroleum, Erdöl	d'. 0,71 (roh) — 0,85 (raffiniert); s''. 60 (roh) — 150 (raffiniert)
Phosphor	P; a. 31,0; b. 2,224; d'. 1,8; g'. 5,3; s'. 42,8; s''. 290
Platin	Pt; a. 194,4; d'. 21,4; e. 0,032; l. 8,84; s'. 1800
Pottasche, potasse . . .	KCO_3; d'. 2,26; e. 0,216; aus Holzasche ausgelaugt
Quecksilber, hydrargyrum .	Hg; a. 199,7; d'. 13,597; l. 181,53; s'. —39; s''. 350
Salmiakgeist, liquor ammonii	$H_3N + H_2O$; d'. 0,85; s'. —49; dient zur Entfernung von Säureflecken
Salpeter, nitre	KNO_3; d'. 1,62; wird durch Auslaugen von gewissen Erden erhalten
Salpetersäure, acide nitreux	HNO_3; b. 1,41; d'. 1,51; s'. —45; s''. 86; dient als Scheidewasser
Salzsäure, acide muriatique	HCl; b. 1,38; d'. 1,28; Nebenprodukt von Soda
Sandstein, grès	durch Thon u. dgl. gebund. Quarzkörner; d'. 2,2—2,5
Sauerkleesalz, sel d'oseille .	$KO \cdot 2C_2O_3 + H_2O$; oxalsaur. Kali; entfernt Tintenfl.
Sauerstoff, oxygenium . .	O; a. 16,0; b. 1,000272; d''. 1,105; e. 0,218
Schiesspulver, poudre à canon	1 Salpeter + 1 Schwefel + 3 Kohle (Gew.)
Schwefel, sulphur	S; a. 32,0; b. 2,11; d'. 2,0; l. 61,00; s'. 108; s''. 316
Schwefeläther, naphta . .	$C_4H_{10}O$; b. 1,36; d'. 0,72; e. 0,521; s'. —90; s''. 34,9
Schwefelsäure, acide sulfur.	H_2SO_4; b. 1,44; d'. 1,84; s'. — 25; s''. 288
Silber, argentum	Ag; a. 107,7; d'. 10,5; e. 0,057; g'. 21,1; l. 19,09; s'. 1000
Soda, soude	$NaCO_3 + 10H_2O$; meist aus Kochsalz gewonnen
Stahl, chalybs, acier . . .	Eisen mit 1—2 % Kohle; d'. 7,8; e. 0,116; l. 11,8 bis 12,3; s'. 1350
Steinkohle, carbo fossilis .	wahrscheinlich pflanzl. Ursprungs; d'. 1,27; e. 0,201
Stickstoff, nitrog. (azote) .	N; a. 14,0; b. 1,000300; d''. 0,971; e. 0,24
Terpentinöl, oleum terebent.	$C_{10}H_{16}$; b. 1,47; d'. 0,87; e. 0,41; g''. 69; s'. — 10; s''. 293; löst Harze
Turmalin, Schörl	Hauptbest.: Kieselsäure u. Thonerde; b. 1,668; d'. 3,1
Wachs, cera, cire	Verdauungsprodukt der Bienen; d'. 0,97; g'. 42,3; g''. 77; s'. 62
Wasser, aqua	H_2O; b. 1,34; d'. 1; d''. 775; e. 1; g'. 86; g''. 536; s'. 0; s''. 100
Wasserstoff, hydrogenium .	H; a. 1; b. 1,000138; d''. 0,069; e. 3,405; aus Zn in verdünnter Schwefelsäure
Wismuth, bismuthum . .	Bi; a. 208,0; d'. 9,8; e. 0,031; g'. 12,6; l. 13,92; s'. 264
Zink, zincum, zinc . . .	Zn; a. 64,9; d'. 6,9; e. 0,096; g'. 28,1; l. 29,42; s'. 423
Zinkvitriol, vitriol blanc .	$ZnSO_4 + 7H_2O$; bei Wasserstoffgewinnung
Zinn, stannum, étain . . .	Sn; a. 117,7; d'. 7,3; e. 0,056; g'. 14,2; l. 21,73; s'. 228

Erläuterungen: d' u. d'' beziehen sich auf Wasser u. Luft als Einheit, g' u. g'' auf Schmelzen u. Sieden; l giebt die Ausdehnung der Einheit für 1 Mill. Centesimalgrade.

V^c. Tafel für Wasserdampf.

(Hilfstafel zu 151 und 152.)

Temperatur.	Spannkraft.	Temperatur.	Spannkraft.	Temperatur.	Spannkraft.	Temperatur.	Spannkraft.	Temperatur.	Spannkraft.
	mm		mm		mm		mm		mm
— 20°	0,93	27°	25,50	67°	204,37	98°,0	707,17	120°	1491,28
— 15	1,40	28	28,10	68	213,59	1	709,74	121	1539,25
— 12	1,78	29	29,78	69	223,15	2	712,32	122	1588,47
— 10	2,09	30	31,55	70	233,08	3	714,91	123	1638,96
— 9	2,26	31	33,41	71	243,38	4	717,50	124	1690,76
— 8	2,46	32	35,36	72	254,06	98,5	720,10	125	1743,88
— 7	2,67	33	37,41	73	265,13	6	722,71	126	1798,35
— 6	2,89	34	39,56	74	276,61	7	725,31	127	1854,20
— 5	3,13	35	41,83	75	288,50	8	727,93	128	1911,47
— 4	3,39	36	44,20	76	300,82	9	730,56	129	1970,15
— 3	3,66	37	46,69	77	313,58	99,0	733,19	130	2030,28
— 2	3,96	38	49,30	78	326,79	1	735,83	131	2091,90
— 1	4,27	39	52,04	79	340,46	2	738,48	132	2155,03
0	4,60	40	54,91	80	354,62	3	741,14	133	2219,69
1	4,94	41	57,91	81	369,26	4	743,82	134	2285,92
2	5,30	42	61,05	82	384,40	99,5	746,49	135	2353,73
3	5,69	43	64,34	83	400,07	6	749,17	136	2423,16
4	6,10	44	67,79	84	416,26	7	751,86	137	2494,23
5	6,53	45	71,39	85	433,00	8	754,57	138	2567,00
6	7,00	46	75,16	86	450,30	9	757,28	139	2641,44
7	7,49	47	79,09	87	468,17	100	760,00	140	2717,63
8	8,02	48	83,20	88	486,64	101	787,59	141	2795,57
9	8,57	49	87,50	89	505,70	102	816,01	142	2875,30
10	9,16	50	91,98	90	525,39	103	845,28	143	2956,86
11	9,79	51	96,66	91	545,71	104	875,41	144	3040,26
12	10,46	52	101,54	92	566,69	105	906,41	145	3125,55
13	11,16	53	106,63	93	588,33	106	938,31	146	3212,74
14	11,91	54	111,94	94	610,66	107	971,14	147	3301,87
15	12,70	55	117,47	95	633,69	108	1004,91	148	3392,98
16	13,54	56	123,24	96	657,44	109	1039,65	149	3486,09
17	14,42	57	129,25	97,0	681,93	110	1075,37	150	3581,23
18	15,36	58	135,50	1	684,42	111	1112,09	155	4088,56
19	16,35	59	142,01	2	686,92	112	1149,83	160	4651,62
20	17,39	60	148,79	3	689,43	113	1188,61	165	5274,54
21	18,50	61	155,83	4	691,94	114	1228,47	170	5961,66
22	19,66	62	163,16	97,5	694.46	115	1269,41	175	6717,43
23	20,89	63	170,78	6	696,98	116	1311,47	180	7546,39
24	22,18	64	178,71	7	699,51	117	1354,66	185	8453,23
25	23,55	65	186,94	8	702,05	118	1399,02	190	9442,70
26	24,99	66	195,49	9	704,60	119	1444,55	200	11689,0

VI. Bessel'sche Refraktionstafel.

$r = \alpha (1 - \beta - \gamma)$ (vgl. 459).

Zenitdistanz z.	Mittl. Refrakt. α.	Zenitdistanz z.	Mittl. Refrakt. α.	Zenitdistanz z.	Mittl. Refrakt. α.	Barometer bei 0° in Mill.	β	Lufttemperatur in Cent.	γ
0°	0,0''	57° '	1' 28,7''	82° 30'	6' 53,3''	695	0,075	— 15°	— 0,094
5	5,1	58	32,1	40	7 1,7	96	74	— 14	89
10	10,2	59	35,8	50	10,5	97	73	— 13	85
15	15,5	60	39,7	83 0	19,7	98	71	— 12	81
16	16,6	61	43,8	10	29,2	99	70	— 11	77
17	17,7	62	1 48,2	20	7 39,2	700	0,069	— 10	— 0,073
18	18,8	63	52,8	30	49,5	01	67	— 9	69
19	19,9	64	57,8	40	8 0,3	02	66	— 8	65
20	21,0	65	2 3,2	50	11,6	03	65	— 7	61
21	22,2	66	8,9	84 0	23,3	04	63	— 6	57
22	23,3	67	2 15,2	10	8 35,6	705	0,062	— 5	— 0,053
23	24,5	68	21,9	20	48,4	06	61	— 4	49
24	25,7	69	29,3	30	9 1,9	07	59	— 3	45
25	26,9	70	37,3	40	16,0	08	58	— 2	42
26	28,2	71	46,1	50	30,9	09	57	— 1	38
27	29,4	72	2 55,8	85 0	9 46,5	710	0,055	0	— 0,034
28	30,7	73	3 6,6	10	10 3,3	11	54	1	30
29	32,0	74	18,6	20	21,2	12	53	2	26
30	33,3	75	32,1	30	39,6	13	51	3	23
31	34,7	76	47,4	40	58,6	14	50	4	19
32	36,1	77	4 4,9	50	11 18,3	715	0,049	5	— 0,015
33	37,5	78 0	25,0	86 0	38,9	16	47	6	12
34	38,9	20	32,4	10	12 0,7	17	46	7	08
35	40,4	40	40,2	20	23,7	18	45	8	05
36	41,9	79 0	48,5	30	48,3	19	43	9	— 0,001
37	43,5	10	4 52,8	40	13 15,0	720	0,042	10	0,002
38	45,1	20	57,2	50	43,7	21	41	11	06
39	46,7	30	5 1,7	87 0	14 14,6	22	39	12	09
40	48,4	40	6,4	10	47,8	23	38	13	13
41	50,2	50	11,2	20	15 23,4	24	37	14	16
42	51,9	80 0	5 16,2	30	16 0,9	725	0,035	15	0,020
43	53,8	10	21,3	40	40,7	26	34	16	23
44	55,7	20	26,5	50	17 23,0	27	33	17	26
45	57,7	30	32,0	88 0	18 8,6	28	31	18	30
46	59,7	40	37,6	10	58,0	29	30	19	33
47	61,8	50	5 43,3	20	19 51,9	730	0,029	20	0,036
48	64,0	81 0	49,3	30	20 50,9	31	27	21	40
49	66,3	10	55,4	40	21 55,6	32	26	22	43
50	68,7	20	6 1,8	50	23 6,7	33	25	23	46
51	71,2	30	8,4	89 0	24 24,6	34	23	24	49
52	73,8	40	6 15,2	10	25 49,8	735	0,022	25	0,052
53	76,5	50	22,3	20	27 22,7	36	21	26	56
54	79,3	82 0	29,6	30	29 3,5	37	19	27	59
55	82,3	10	37,2	40	30 52,3	38	18	28	62
56	85,4	20	45,1	50	32 49,2	39	17	29	65
57	88,7	30	6 53,3	90 0	34 54,1	740	0,015	30	0,068

VIIa. Ortstafel.

(Zumeist Sternwarten und meteorol. Stationen.)

Ort.	Mittagsunterschied von Greenwich.			Polhöhe φ			Höhe über Meer	Temperatur in C.			Bemerkungen.
	h	m	s	°	'	"	m	Januar	Juli	Jahr	
Aachen	0	24	18	50	46	34	160	2,4	18,7	10,1	Heis, Helmert
Aarau	0	32	—	47	23	—	398	- 1,4	17,9	8,2	J. R. Meyer, Esser, Kern
Albany, U. S.	-4	55	0	42	39	50	40	- 4,7	22,7	9,1	Dudley Observatory
Alexandrien	2	0	—	31	13	—	—	14,9	26,4	20,8	Hipparch, Ptolemäus
Algier	0	12	17	36	44	0	—	12,1	25,0	18,1	Atlas (Ajaschin) 3600
Altona	0	39	46	53	32	45	—	- 0,4	17,3	8,5	Schumacher, Petersen, Peters
Altorf	0	34	—	46	53	—	484	0,2	18,3	9,2	Bristenstock 3074; Surenen 2297
Amsterdam	0	18	—	52	23	—	—	2,4	17,6	9,4	Willem Blacu, Fahrenheit
Andermatt	0	34	—	46	38	—	1448	- 6,4	12,1	2,8	Furka 2436
Ann Arbor	-5	34	55	42	16	48	—	- 5,9	22,3	8,6	in Michigan; Brünnow
Appenzell	0	38	—	47	20	—	781	—	—	—	Weissbad 820, Ebenalp 1600
Athen	1	34	56	37	58	20	120	8,1	26,9	18,5	Sina, Schmidt; Olymp 2000
Bagdad	2	58	—	33	20	—	—	9,7	34,9	23,3	Al Mamum, Abulwefa
Basel	0	30	—	47	33	—	278	0,0	19,3	9,5	Bernoulli, Euler, Merian
Batavia	7	8	—	- 6	9	—	—	25,3	25,6	25,9	Bergsma
Berlin	0	53	35	52	30	17	40	- 0,8	18,8	9,0	Kirch, Bode, Encke, Förster
Bern	0	29	46	46	57	8	573	- 1,7	18,0	8,0	Tralles, Studer; Gurten 866
Bevers	0	39	—	46	33	—	1715	- 9,9	12,0	1,4	Albula 2313
Bex	0	28	—	46	15	—	437	- 0,6	18,9	9,2	Charpentier; Dent du midi 3285
Biel	0	29	—	47	8	—	434	—	—	—	Rosius; Chasseral 1609
Birr Castle	-0	31	41	53	5	47	—	—	—	—	Lord Rosse
Bologna	0	45	25	44	29	47	88	2,0	25,5	13,8	Domenica Maria, Riccioli
Bonn	0	28	24	50	43	45	50	1,3	18,5	9,7	Argelander, Schönfeld
Bordeaux	-0	2	5	44	50	17	—	5,6	20,6	12,8	à Floirac; G. Rayet
Braunschweig	0	44	6	52	16	6	100	—	—	—	Dedekind, C. Koppe
Bremen	0	36	39	53	4	48	—	- 1,4	18,1	9,0	Olbers, Schröter, Bessel
Breslau	1	8	9	51	6	56	147	- 2,2	18,5	8,3	Boguslawski, Galle
Brieg	0	32	—	46	18	—	684	—	—	—	Simplonpass 2010
Brocken	0	42	—	51	48	—	1143	- 5,4	10,7	2,4	Gipfel des Harzgebirges
Brüssel	0	17	29	50	51	11	90	2,0	18,0	9,9	Quetelet, Houzeau, Folie
Buda-Pest	1	16	—	47	30	—	70	- 1,4	22,3	10,7	Pasquich, Littrow, (Konkoly)
Calcutta	5	53	—	22	33	—	25	18,5	28,1	24,8	Dhawalagiri 8176
Cambridge, E.	0	0	23	52	12	52	—	3,7	17,6	10,2	Airy, Adams
— U. S.	-4	44	31	42	22	48	64	- 3,9	22,5	9,2	Bond, Pickering
Cap	1	13	55	-33	56	4	—	20,6	12,6	16,5	Lacaille, Herschel, Gill
Cayenne	-3	29	—	4	56	—	—	26,1	26,9	26,8	Jean Richer
Chamounix (Prieuré)	0	27	—	45	55	—	1052	—	—	—	Saussure; Montblanc 4810
Chaumont (Stat.)	0	28	—	47	1	—	1128	- 2,1	14,6	5,6	bei Neuenburg; Bergh. 1172
Chaux-de-fonds	0	27	—	47	6	—	980	—	—	—	Locle 921
Christiania	0	42	54	59	54	44	24	- 5,1	16,5	5,2	Hansteen, Fearnley
Chur	0	38	—	46	51	—	599	- 0,7	18,4	9,0	Ardüser; Calanda 2589
Clinton, U. S.	-5	1	37	43	3	17	—	- 5,7	22,5	8,2	bei New-York; C. H. Peters
Cordoba	-4	16	48	-31	25	16	—	22,8	9,1	16,6	in Argentinien; Gould
Danzig	1	14	40	54	21	18	—	- 2,5	17,5	7,6	Crüger, Hevel, Anger
Davos-Platz	0	39	—	46	48	—	1560	- 7,0	12,2	2,6	Flüelapass 2405

VIIa. Ortstafel.

(Zumeist Sternwarten und meteorol. Stationen.)

Ort.	Mittagsunterschied von Greenwich.	Polhöhe φ	Höhe über Meer	Temperatur in C. Januar	Juli	Jahr	Bemerkungen.
	h m s	° ' "	m				
Dissentis . . .	0 35 —	46 43 —	1159	—	—	—	Oberalp 2052, Lukmanier 1917
Dorpat . . .	1 46 54	58 22 47	73	- 8,0	17,4	4,3	Struve, Mädler, Schwarz
Dresden (Engelh.)	0 54 55	51 2 17	100	- 0,3	18,5	9,2	Lohrmann, Drechsler, Engelhard
Dublin (Dunsink)	-0 25 22	53 23 13	—	4,7	15,4	9,5	Brinkley, Brünnow, Ball
Düsseldorf (Bilk)	0 27 6	51 12 25	28	2,8	19,1	11,0	Benzenberg, Luther
Edinburgh . .	-0 12 44	55 57 23	71	3,0	14,6	8,2	Piazzi Smyth, Copeland
Einsiedeln . .	0 35 —	47 8 —	910	- 3,8	15,2	5,6	Paracelsus; Hohe Rhone 1232
Engelberg . .	0 34 —	46 49 —	1021	- 3,5	14,4	5,3	Titlis 3239; Jochpass 2243
Ferro (Westspitze)	-1 10 39	27 45 0	—	—	—	—	Canarische Inseln
Florenz (Arcetri)	0 45 3	43 45 14	71	5,0	25,1	14,6	Galileo Galilei
Frauenfeld . .	0 36 —	47 34 —	427	- 1,9	18,1	8,2	Dasypodius, Nötzli
Freiburg i. Br. .	0 29 —	48 0 —	280	0,3	19,8	9,8	Glarean; Feldberg 1490
— i. U. .	0 28 —	46 48 —	598	—	—	7,4	J. Just, Peter Von der Weid
Genf	0 24 37	46 11 59	408	0,3	19,1	9,5	Mallet, Gautier, Plantamour
Glarus . . .	0 36 —	47 3 —	471	- 2,1	17,5	8,0	Glärnisch 2913, Tödi 3623
Godthaab . . .	-3 30 —	64 10 —	—	- 9,7	6,8	- 1,8	in Grönland
Göttingen . .	0 39 47	51 31 48	132	- 0,4	17,7	8,5	Tob. Mayer, Gauss, Schur
Gotha, N. St. .	0 42 51	50 56 38	285	—	—	—	Ernst II., Hansen, Harzer
— (Seeberg)	0 42 55	50 56 5	308	—	—	—	Zach, Lindenau
Greenwich . .	0 0 0	51 28 38	47	3,5	17,9	10,3	Flamsteed, Bradley, Airy
Grimsel (Hospiz)	0 33 —	46 34 —	1874	- 6,6	10,4	1,6	Grimselpass 2183, Sidelhorn 2766
Hamburg . . .	0 39 54	53 33 7	—	- 0,4	17,3	8,5	Seewarte; Repsold, Rümker
Helsingfors . .	1 39 49	60 9 42	16	- 7,0	16,5	3,9	Argelander, Donner
Hobarton . . .	9 49 22	-42 53 12	32	17,3	8,8	13,1	auf Vandiemensland; magn. Stat.
Hongkong . .	7 36 42	22 18 12	—	15,3	29,2	23,1	in China; Doberck
Hveen	0 51 —	55 54 —	—	—	—	—	Tycho Brahe, Longomontan
Jakutsk . . .	8 37 —	62 2 —	93	-42,7	18,8	-11,1	im östl. Sibirien
Jerusalem . .	2 20 —	31 48 —	805	8,5	24,5	17,2	Sinai 2244, Bethlehem 790
Ingolstadt . .	0 46 —	48 46 —	335	—	—	—	Apian, Scheiner, Cysat
Innsbruck . .	0 46 —	47 18 —	570	- 3,1	17,8	8,1	Brenner 1336
Interlaken . .	0 32 —	46 41 —	571	- 1,8	18,9	8,8	Jungfrau 4167, Abendberg 1105
Karlsruhe . .	0 33 41	49 0 10	120	0,1	19,5	10,3	Eisenlohr, Redtenbacher
Kassel . . .	0 37 35	51 18 58	160	0,0	17,3	8,6	Wilhelm IV., Bürgi, Rothmann
Kasan	3 16 29	55 47 24	90	-13,6	19,4	2,8	Littrow, Kowalski, Doubjago
Kiel	0 40 36	54 20 29	—	0,4	17,0	8,3	Peters, Krüger
Kiew	2 2 —	50 26 —	190	- 6,1	9,1	6,9	in Klein-Russland; Khandrikoff
Königsberg . .	1 21 59	54 42 51	22	- 3,9	17,3	6,6	Friedr. Wilh. Bessel, Peters
Konstantinopel .	1 56 —	41 0 —	88	4,3	25,0	15,3	Coumbary
Konstanz (Kreuzl.)	0 37 —	47 40 —	398	- 1,0	18,6	8,7	Castel (Scherer) 509
Kopenhagen . .	0 50 19	55 41 14	27	- 0,4	16,6	7,4	Römer, Horrebow, d'Arrest
Kremsmünster .	0 56 33	48 3 24	—	- 2,4	18,5	7,8	Fixlmillner, Koller, Reslhuber
Lausanne . . .	0 26 —	46 31 —	507	- 0,2	18,8	9,4	Loys de Cheseaux, Develey
Leiden . . .	0 17 56	52 9 20	—	—	—	—	Snellius, Kaiser, Bakhuyzen
Leipzig . . .	0 49 34	51 20 6	100	- 1,2	18,0	8,5	Möbius, Bruhns, Bruns, Zöllner
Leuck (Bad) . .	0 31 —	46 23 —	1411	—	—	—	Gemmi 2302

VIIᵃ. Ortstafel.
(Zumeist Sternwarten und meteorol. Stationen.)

Ort.	Mittagsunterschied von Greenwich.	Polhöhe φ	Höhe über Meer	Temperatur in C. Januar	Juli	Jahr	Bemerkungen.
	h m s	° ′ ″	m				
Lissabon (Roy. Obs.)	- 0 36 45	38 42 31	—	10,3	21,7	15,6	F. A. Oom
Lübeck . . .	0 42 46	53 51 31	—	0,1	17,5	7,9	Alte Hansestadt
Lugano . . .	0 36 —	46 0 —	275	1,4	21,8	11,8	Salvatore 908
Lund	0 52 46	55 41 54	19	- 2,0	17,4	7,5	Möller, Dunèr
Luzern . . .	0 33 —	47 3 —	454	- 0,8	18,5	8,7	Seeh. 438, Pilatus 2123
Lyon	0 19 8	45 41 40	155	2,4	21,2	11,5	C. André
Madras . . .	5 20 59	13 4 8	—	25,6	30,4	28,9	Taylor, Pogson
Madrid . . .	- 0 14 45	40 24 30	663	4,9	24,5	13,5	Aguilar, Ibannez
Mailand (Brera)	0 36 46	45 28 1	130	0,5	24,7	12,8	Oriani, Carlini, Schiaparelli
Mannheim . .	0 33 51	49 29 13	100	0,4	20,0	10,5	Chr. Mayer, Nicolai
Marseille . . .	0 21 35	43 18 19	45	6,4	22,1	14,3	Gambart, Pons, Valz
Martigny . . .	0 28 —	46 6 —	498	- 1,1	19,9	9,7	Tête noire 2972
Meiringen . .	0 33 —	46 44 —	606	—	—	—	Brünigpass 1024; Faulhorn 2683
Melbourne	9 39 54	-37 49 53	—	18,3	9,0	13,9	R. L. J. Ellery
Mexiko . . .	- 6 37 —	19 26 —	2277	12,1	16,9	15,6	M. Barzena
Moskau . . .	2 30 17	55 45 20	146	-11,1	18,9	3,9	Schweizer, Bredichin
Mount Hamilton	- 8 6 34	37 20 24	—	—	—	—	Kalifornien; J. Lick, Holden
München(Bogenh.)	0 46 27	48 8 45	526	- 3,0	17,3	7,5	Fraunhofer, Reichenbach, Lamont
Neapel(Capo d.M.)	0 56 59	40 51 45	55	8,2	24,3	15,9	Vesuv 1198; de Gasparis
Neuenburg . .	0 27 50	46 59 51	488	- 0,8	18,8	8,8	Hirsch; Seehöhe 435
Nizza (Mont-gros)	0 29 12	43 43 17	—	8,4	23,9	15,7	Raph. Bischoffsheim, Perrotin
Nürnberg . .	0 44 —	49 28 —	356	- 2,8	17,8	7,9	Regiomontan, Walther, Eimmart
Odessa . . .	2 3 2	46 28 36	48	- 3,5	22,6	9,6	am schwarz. Meer; Ararat 5263
Oxford (Radcl. O.)	- 0 5 3	51 45 36	—	3,9	16,9	9,8	Johnson, Maine, Stone
Padua	0 47 29	45 24 3	18	2,0	24,1	12,9	Galileo Galilei, Santini, Favaro
Palermo . . .	0 53 24	38 6 44	72	11,0	25,4	17,9	Piazzi, Riccò; Etna 3214
Paramatta . .	- 8 17 —	-33 49 —	—	23,0	11,6	18,0	Rümker, Dunlop
Paris	0 9 21	48 50 11	60	2,0	18,3	10,3	Cassini, Lalande, Leverrier
Peissenberg . .	0 44 —	47 48 —	979	- 2,1	15,9	6,8	Höhenstation in Bayern
Peking . . .	7 46 —	39 54 —	—	- 4,6	26,2	11,8	Mathem. Tribunal
Peterpaulshafen	10 35 —	53 — —	16	- 6,5	14,5	2,9	In Kamtschaka
Petersburg (Ac.)	2 1 14	59 56 30	11	- 9,4	17,7	3,6	Euler, Fuss, Lexell, Schubert
— (Pulkowa)	2 1 19	59 46 19	—	—	—	—	Wilh. und Otto Struve
Pikespeak . .	- 7 0 —	38 50 —	4300	-16,3	4,5	- 7,1	in Colorado
Pola	0 55 23	44 51 48	—	5,8	24,9	15,0	Marine-Sternwarte
Potsdam . . .	0 52 16	52 22 56	98	- 1,2	17,5	8,1	Vogel, Spörer, Lohse
Prag	0 57 42	50 5 19	200	- 1,4	19,6	9,2	Tycho, Kepler, Bürgi
Pruntrut . . .	0 26 —	47 15 —	440	- 0,8	18,7	8,8	Délémont 435
Puy de Dôme .	0 21 —	45 47 —	1467	- 2,2	10,4	3,4	bei Clermont-Ferraud
Quito	- 5 15 —	- 0 14 —	2914	13,6	12,5	13,1	Chimborasso 6530
Riga	1 36 —	56 57 —	37	- 5,2	18,0	5,9	Keussler, Beck
Rio de Janeiro .	- 2 52 41	-22 54 24	—	26,6	20,6	23,6	Liais, Cruls
Rom (Coll. rom.)	0 49 55	41 53 54	29	6,7	24,8	15,3	Secchi, Tacchini, Denza
Säntis	0 37 —	47 15 —	2500	- 8,3	5,8	- 1,8	Höhenstation Brunner
San Fernando .	- 0 24 50	36 27 42	—	11,4	23,7	17,2	Span. Marine-Observat.

VIIa. Ortstafel.

(Zumeist Sternwarten und meteorol. Stationen.)

Ort.	Mittagsunterschied von Greenwich.			Polhöhe φ			Höhe über Meer	Temperatur in C. Januar	Juli	Jahr	Bemerkungen.
	h	m	s	°	'	"	m				
St. Bernhard (Hosp.)	0	29	—	45	52	—	2478	- 8,3	6,9	- 1,6	Marc Auguste Pictet
St. Gallen	0	37	—	47	26	—	648	- 1,7	17,0	7,5	Vadian; Freudenberg 885
St. Moritz	0	39	—	46	31	—	1856	—	—	—	Julier 2287, Pontresina 1808
St. Gotthard (Hosp.)	0	34	—	46	32	—	2100	- 7,7	8,2	- 0,4	J. de Seissa; Piz Lucendro 3161
St. Helena	- 0	23	—	-15	55	—	536	23,0	18,8	21,3	Halley; magn. Stat.
Santiago	- 4	42	46	-33	26	42	—	18,9	7,3	13,1	in Chili; Obrecht
Sarnen	0	33	—	46	54	—	474	—	—	—	Juchli 2586; Lungernsee 659
Schaffhausen	0	34	—	47	42	—	464	- 1,8	19,3	8,9	Hurter, Amsler; Hohentwiel 691
Schwyz	0	35	—	47	1	—	547	- 1,2	17,9	8,5	Mythen 1903
Sitten	0	29	—	46	14	—	536	- 0,9	19,7	9,7	Berchtold; Tscheinen in Grächen
Solothurn	0	30	—	47	13	—	426	- 1,7	18,9	8,7	Röthifluh 1398, Weissenstein 1282
Sonnblick	0	52	—	47	3	—	3100	-13,3	1,1	- 6,6	Österr. Höhenstation
Speyer	0	33	46	49	18	55	—	—	—	—	Fr. M. Schwerd
Splügen (Dorf)	0	37	—	46	38	—	1471	- 6,6	13,8	3,6	Passhöhe 2117; Bernhardin 2070
Stanz	0	33	—	46	57	—	456	—	—	—	Stanzerhorn 1899
Stockholm	1	12	14	59	20	34	20	- 3,7	16,4	5,2	Wargentin, Hugo Gyldèn
Stonyhurst	- 0	9	53	53	50	40	—	3,2	15,4	8,3	S. J. Perry
Strassburg	0	31	2	48	35	0	150	- 0,3	19,2	10,2	Dasypodius, Winnecke, Becker
Stuttgart	0	36	42	48	36	46	270	0,4	18,8	9,6	J. Fr. Wurm
Sydney	10	4	50	-33	51	41	—	21,8	11,2	17,1	R. C. Russell
Teneriffa (St Cruz)	- 1	5	—	28	28	—	—	17,6	25,4	21,6	Pic v. Teneriffa 3710
Thun	0	31	—	46	46	—	565	—	—	—	Niesen 2365; Stockhorn 2198
Tiflis	2	59	22	41	41	4	487	0,6	24,3	12,6	im Kaukasus; Elbrus 5450
Tobolsk	4	33	—	58	12	—	115	-19,0	19,2	- 0,1	in Sibirien
Tornea	1	37	—	65	51	—	—	-10,6	15,9	0,8	Maupertuis, Svanberg
Toronto	- 5	17	27	43	39	35	103	- 4,9	19,6	6,8	in Canada; magn. Stat.
Toulouse	0	5	51	43	36	47	—	4,4	21,1	12,9	Darquier, Boffat, Baillaud
Triest	0	55	2	45	38	34	—	4,4	24,2	14,2	Marine-Observatorium
Trogen	0	36	—	47	25	—	900	- 1,6	15,8	6,7	Gäbris 1252
Tübingen	0	36	—	48	30	—	320	- 1,8	18,0	8,3	Mästlin, Bohnenberger
Turin	0	30	48	45	4	6	250	0,2	23,2	12,0	Plana; Montcénispass 2067
Upsala	1	10	30	59	51	29	—	- 3,9	16,4	4,6	H. Schultz, Dunèr
Utrecht	0	20	31	52	5	11	—	1,5	18,4	9,9	Buys-Ballot, Oudemans
Vuadens	0	34	—	46	37	—	810	- 2,7	16,4	6,6	Berra 1721
Warschau	1	24	7	52	13	6	140	- 4,4	18,6	7,2	Baranowsky, J. Wostokoff
Washington	- 5	8	12	38	53	39	35	0,2	24,4	12,0	A. Hall, Langley, Newcomb
Wien (a. St.)	1	5	32	48	12	36	182	- 1,9	19,6	9,2	Hell, Bürg, J. J. und K. Littrow
— (Währing)	1	5	22	48	13	55	—	—	—	—	Weiss, Palisa
Wilhelmshaven	0	32	35	53	31	52	—	—	—	—	in Oldenburg; Börgen
Winterthur	0	35	—	47	30	—	451	- 1,4	18,2	8,2	Barb. Reinhart; Kyburg 630
Zermatt	0	31	—	46	1	—	1648	—	—	—	Matterhorn 4515, MonteRosa 4638
Zürich (Karlsth.)	0	34	10	47	22	12	—	—	—	—	Waser; Seehöhe 409, Uto 873
— (a. St.)	0	34	11	47	22	28	—	—	—	—	Feer, Eschmann; Zürichberg 679
— (St. d. Pol.)	0	34	12	47	22	40	470	- 1,2	18,6	8,6	Wolf; Lägern 856, Hörnli 1135
Zug	0	34	—	47	10	—	417	- 0,1	18,9	8,9	Rigi 1800, Zugerberg 807

s	d 0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
0^h 0^m	42° 37′	47° 37′	52° 37′	57° 37′	62° 37′	67° 37′	72° 37′	77° 37′	82° 37′
10	42 34	47 33	52 33	57 32	62 32	67 30	72 29	77 26	82 20
20	42 25	47 23	52 22	57 20	62 18	67 15	72 10	77 2	81 44
30	42 10	47 8	52 5	57 2	61 57	66 50	71 40	76 23	80 49
40	41 49	46 46	51 41	56 35	61 27	66 16	71 0	75 33	79 42
50	41 23	46 17	51 10	56 0	60 48	65 32	70 8	74 29	78 22
1 0	40 51	45 42	50 32	55 19	60 2	64 40	69 8	73 19	76 56
10	40 13	45 2	49 49	54 31	59 9	63 41	68 0	72 0	75 24
20	39 31	44 16	48 59	53 37	58 10	62 35	66 47	70 37	73 50
30	38 43	43 25	48 3	52 37	57 5	61 23	65 27	69 8	72 12
40	37 51	42 29	47 3	51 32	55 55	60 7	64 4	67 37	70 34
50	36 55	41 29	45 59	50 24	54 42	58 47	62 37	66 4	68 55
2 0	35 54	40 25	44 51	49 11	53 24	57 24	61 8	64 29	67 15
10	34 50	39 16	43 38	48 14	52 1	55 57	59 35	62 51	65 33
20	33 41	38 4	42 22	46 34	50 36	54 27	58 1	61 12	63 52
30	32 30	36 49	41 4	45 11	49 9	52 56	56 26	59 34	62 12
40	31 15	35 31	39 42	43 45	47 40	51 22	54 49	57 54	60 31
50	29 57	34 10	38 17	42 17	46 7	49 46	53 40	56 13	58 49
3 0	28 36	32 46	36 49	40 46	44 33	48 9	51 30	54 31	57 7
10	27 13	31 20	35 19	39 13	42 57	46 31	49 50	52 50	55 26
20	25 48	29 51	33 48	37 39	41 21	44 52	48 9	51 8	53 45
30	24 21	28 20	32 14	36 3	39 43	43 12	46 28	49 27	52 4
40	22 51	26 48	30 40	34 26	38 4	41 31	44 46	47 45	50 24
50	21 20	25 15	29 4	32 48	36 24	39 50	43 5	46 4	48 44
4 0	19 47	23 40	27 28	31 10	34 44	38 9	41 23	44 23	47 5
10	18 13	22 3	25 50	29 30	33 3	36 28	39 42	42 42	45 27
20	16 38	20 26	24 11	27 50	31 22	34 47	38 1	41 2	43 49
30	15 1	18 48	22 31	26 9	29 41	33 5	36 20	39 22	42 11
40	13 23	17 9	20 51	24 28	27 59	31 23	34 39	37 43	40 34
50	11 45	15 29	19 10	22 47	26 18	29 43	32 59	36 5	38 59
5 0	10 6	13 49	17 29	21 5	24 37	28 2	31 19	34 27	37 24
10	8 26	12 8	15 48	19 24	22 56	26 22	29 40	32 50	35 50
20	6 45	10 27	14 6	17 42	21 14	24 41	28 1	31 14	34 16
30	5 4	8 46	12 25	16 1	19 34	23 2	26 24	29 39	32 44
40	3 23	7 4	10 43	14 20	17 53	21 23	24 46	28 4	31 13
50	1 42	5 23	9 2	12 40	16 14	19 45	23 10	26 31	29 43
6 0	0 0	3 41	7 21	10 59	14 35	18 7	21 35	24 58	28 14

d 45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	s
87° 37′	87° 23′	82° 23′	77° 23′	72° 23′	67° 23′	62° 23′	57° 23′	52° 23′	0^h 0^m
86 50	86 43	82 12	77 17	72 19	67 21	62 22	57 22	52 23	10
85 42	85 42	81 44	77 2	72 10	67 15	62 18	57 20	52 22	20
84 17	84 23	81 2	76 38	71 55	67 5	62 12	57 17	52 20	30
82 43	82 56	80 10	76 6	71 35	66 52	62 4	57 12	52 18	40
81 3	81 22	79 7	75 26	71 9	66 35	61 53	57 6	52 15	50
79 23	79 48	77 58	74 40	70 38	66 14	61 39	56 58	52 12	1 0
77 42	78 12	76 44	73 47	70 2	65 50	61 24	56 49	52 8	10
76 0	76 36	75 25	72 50	69 22	65 23	61 6	56 38	52 3	20
74 17	74 58	74 3	71 49	68 38	64 53	60 46	56 27	51 58	30
72 35	73 21	72 41	70 45	67 51	64 20	60 25	56 14	51 52	40
70 55	71 46	71 19	69 39	67 2	63 45	60 2	56 0	51 46	50
69 14	70 10	69 55	68 31	66 10	63 8	59 37	55 45	51 39	2 0
67 32	68 33	68 29	67 20	65 16	62 29	59 9	55 28	51 32	10
65 51	66 57	67 3	66 9	64 20	61 47	58 41	55 11	51 24	20
64 11	65 23	65 38	64 57	63 21	61 4	58 12	54 53	51 15	30
62 31	63 48	64 12	63 44	62 24	60 20	57 41	54 34	51 6	40
60 51	62 13	62 46	62 30	61 24	59 34	57 9	54 14	50 57	50
59 12	60 38	61 20	61 15	60 23	58 47	56 35	53 53	50 47	3 0
57 33	59 4	59 54	60 0	59 20	57 59	56 0	53 31	50 37	10
55 54	57 31	58 29	58 45	58 18	57 11	55 26	53 9	50 27	20
54 16	55 58	57 3	57 30	57 15	56 21	54 49	52 46	50 16	30
52 39	54 25	55 38	56 15	56 12	55 31	54 13	52 23	50 5	40
51 2	52 54	54 14	55 0	55 9	54 40	53 36	51 59	49 53	50
49 26	51 23	52 50	53 46	54 6	53 50	52 59	51 35	49 42	4 0
47 51	49 53	51 27	52 32	53 2	52 59	52 21	51 10	49 30	10
46 17	48 23	50 5	51 18	51 59	52 8	51 43	50 45	49 18	20
44 43	46 55	48 43	50 5	50 56	51 16	51 4	50 19	49 5	30
43 10	45 27	47 22	48 52	49 53	50 25	50 25	49 54	48 53	40
41 38	44 0	46 2	47 40	48 51	49 34	49 46	49 28	48 40	50
40 7	42 34	44 42	46 28	47 49	48 43	49 8	49 2	48 27	5 0
38 36	41 9	43 23	45 17	46 48	47 52	48 29	48 36	48 14	10
37 7	39 45	42 5	44 7	45 47	47 2	47 50	48 10	48 1	20
35 39	38 22	40 48	42 58	44 47	46 12	47 12	47 44	47 48	30
34 12	36 59	39 33	41 49	43 47	45 22	46 34	47 18	47 35	40
32 46	35 38	38 18	40 42	42 48	44 33	45 56	46 52	47 22	50
31 21	34 19	37 4	39 35	41 50	43 45	45 18	46 27	47 9	6 0

D		φ								
		23½°	40°	45°	47°	48°	50°	55°	60°	66½°
0°	0′	6^h 0^m	6^h 0^m	6^h 0^m	6^h 0^m	6^h 0^m	6^h 0^m	6^h 0^m	6^h 0^m	6^h 0^m
	30	1	2	2	2	2	2	3	3	5
1	0	2	3	4	4	4	5	6	7	9
	30	3	5	6	6	7	7	9	10	14
2	0	3	7	8	9	9	10	11	14	18
	30	4	8	10	11	11	12	14	17	23
3	0	5	10	12	13	13	14	17	21	28
	30	6	12	14	15	16	17	20	24	32
4	0	7	13	16	17	18	19	23	28	37
	30	8	15	18	19	20	22	26	31	42
5	0	9	17	20	22	22	24	29	35	46
	30	10	19	22	24	25	26	32	38	51
6	0	10	20	24	26	27	29	35	42	56
	30	11	22	26	28	29	31	37	46	7 1
7	0	12	24	28	30	31	34	40	49	6
	30	13	25	30	32	34	36	43	53	10
8	0	14	27	32	35	36	39	46	56	15
	30	15	29	34	37	38	41	49	7 0	20
9	0	16	31	36	39	41	43	52	4	26
	30	17	32	39	41	43	46	55	7	30
10	0	18	34	41	44	45	49	58	11	36
	30	18	36	43	46	48	51	7 1	15	41
11	0	19	38	45	48	50	54	4	19	46
	30	20	39	47	50	52	56	8	23	52
12	0	21	41	49	53	55	59	11	26	57
	30	22	43	51	55	57	7 1	14	30	8 3
13	0	23	45	53	57	59	4	17	34	8
	30	24	46	56	7 0	7 2	6	20	38	14
14	0	25	48	58	2	4	9	23	42	20
	30	26	50	7 0	4	7	12	27	46	26
15	0	27	52	2	7	9	15	30	51	32
	30	28	54	4	9	12	17	33	55	38
16	0	29	56	7	12	14	20	37	59	45
	30	30	58	9	14	17	23	40	8 3	52
17	0	31	59	11	17	19	25	44	8	59
	30	32	7 1	14	19	22	28	47	12	9 6
18	0	33	3	16	22	25	31	51	17	13
	30	34	5	18	24	27	34	54	22	21
19	0	34	7	21	27	30	37	58	26	29
	30	35	9	23	29	33	40	8 2	31	38
20	0	36	11	25	32	35	43	5	36	47
	30	37	13	28	35	38	46	9	41	57
21	0	38	15	30	37	41	49	13	47	10 8
	30	39	17	33	40	44	52	17	52	20
22	0	40	19	35	43	47	55	21	58	33
	30	42	21	38	45	50	58	25	9 3	49
23	0	43	23	40	48	53	8 2	29	9	11 10
	30	44	26	43	51	55	5	34	15	12 0

Für negative Deklinationen geht der halbe Tagbogen in den halben Nachtbogen über.

VII^{d}. Tafel für die Gestalt der Erde und Bodes Tafel.

(Vgl. 428.)

φ		$\varphi - v$		log ϱ 9,999	log N 0,000	Grad im Meridian.	Grad des Parallels.
		′	″			m	m
40°	0	11	19,8	4027	5997	111023	85384
	30		21,8	3902	6122	032	4757
41	0		23,6	3777	6247	042	4125
	30		25,2	3651	6373	051	3486
42	0		26,6	3525	6499	061	2841
	30		27,8	3399	6625	071	2189
43	0	11	28,8	3273	6752	111081	81531
	30		29,6	3146	6878	090	0867
44	0		30,1	3019	7005	100	0197
	30		30,5	2892	7132	110	79520
45	0		30,7	2766	7259	119	8837
	30		30,6	2639	7386	129	8149
46	0	11	30,3	2512	7512	111139	77454
	10		30,2	2470	7555	142	7221
	20		30,0	2427	7597	145	6987
	30		29,8	2385	7639	149	6753
	40		29,6	2343	7682	152	6518
	50		29,4	2300	7724	155	6283
47	0	11	29,1	2258	7766	111158	76047
	10		28,8	2216	7808	162	5810
	20		28,5	2174	7850	165	5573
	30		28,2	2132	7893	168	5335
	40		27,9	2089	7935	171	5096
	50		27,5	2047	7977	175	4856
48	0	11	27,1	2005	8019	111178	74616
	10		26,7	1963	8061	181	4376
	20		26,2	1921	8103	184	4134
	30		25,8	1879	8145	187	3892
	40		25,3	1837	8187	191	3650
	50		24,8	1795	8229	194	3407
49	0	11	24,2	1753	8271	111197	73163
	10		23,7	1711	8313	200	2918
	20		23,1	1669	8355	204	2673
	30		22,5	1627	8396	207	2427
	40		21,9	1586	8438	210	2181
	50		21,2	1544	8480	213	1935
50	0	11	20,5	1502	8522	111216	71687
	30		18,4	1377	8647	226	0941
51	0		16,0	1252	8771	236	0189
	30		13,4	1128	8895	245	69432
52	0		10,7	1005	9018	255	8670
	30		7,7	0881	9141	264	7902
53	0	11	4,5	0759	9264	111273	67129
	30		1,1	0637	9386	283	6351
54	0	10	57,5	0515	9507	292	5568
	30		53,7	0395	9627	301	4780
55	0		49,7	0275	9747	311	3986
	30		45,5	0155	9866	320	3188

Bodes Tafel für Auf- und Untergang.

D	Polhöhe		
+ −	46°	47°	48°
	m	m	m
1°	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	2
4	4	3	3
5	5	4	4
6	6	5	4
7	7	6	5
8	9	8	6
9	10	9	7
10	11	10	8
11	12	10	9
12	13	11	9
13	15	12	10
14	16	13	11
15	17	15	13
16	18	16	13
17	20	18	14
18	21	19	15
19	23	20	16
20	24	21	17
21	26	23	19
22	28	25	20
23	30	26	21
24	32	28	23
25	34	30	25
26	37	32	27
27	39	34	29
28	42	37	31
29	45	39	33
30	48	42	35

Diese Tafel giebt an, um wie viel ein nördlicher Stern später auf- und früher unter-, — ein südlicher früher auf- und später untergehe, als in Berlin; so zum Beispiel sagt sie, dass die Sonne am längsten Tage unter 47° um 27^{m} später aufgehe, als in Berlin.

Datum.	1889	Corr. für 90	Corr. für 91	Corr. für 92	Rad.	Datum.	1889	Corr. für 90	Corr. für 91	Corr. für 92	Rad.
	° ′				″		° ′				″
Jan. 0	−23 3	−1	−3	−4	978	Juli 0	23 10	+1	+1	−1	946
5	−22 34	−1	−3	−5	978	5	22 46	+1	+2	−2	946
10	−21 53	−2	−5	−7	978	10	22 12	+2	+3	−2	946
15	−21 2	−3	−6	−8	978	15	21 28	+3	+5	−2	946
20	−20 1	−3	−6	−9	977	20	20 36	+3	+5	−3	947
25	−18 50	−4	−8	−11	977	25	19 35	+3	+6	−4	947
Febr. 0	−17 14	−4	−9	−13	976	Aug. 0	18 10	+4	+8	−4	948
5	−15 46	−5	−9	−13	975	5	16 52	+4	+8	−4	949
10	−14 11	−5	−10	−14	974	10	15 27	+4	+8	−5	949
15	−12 30	−5	−10	−15	973	15	13 56	+4	+9	−6	950
20	−10 44	−5	−11	−16	972	20	12 19	+5	+9	−6	951
25	−8 54	−5	−11	−16	971	25	10 37	+5	+10	−6	952
März 0	−7 46	−6	−11	+6	970	Sept. 0	8 29	+6	+11	−6	953
5	−5 51	−6	−12	+6	969	5	6 39	+6	+11	−6	955
10	−3 54	−6	−12	+6	968	10	4 46	+6	+11	−6	956
15	−1 56	−6	−12	+6	967	15	2 51	+6	+12	−6	957
20	+0 2	−6	−11	+7	965	20	0 55	+6	+11	−6	958
25	+2 0	−5	−11	+7	964	25	−1 2	+6	+12	−6	960
April 0	+4 21	−6	−12	+6	962	Okt. 0	−2 59	+6	+12	−6	961
5	6 15	−5	−11	+7	961	5	−4 55	+6	+11	−6	963
10	8 8	−6	−11	+6	959	10	−6 49	+5	+10	−7	964
15	9 56	−5	−10	+6	958	15	−8 42	+6	+11	−6	965
20	11 41	−5	−10	+6	957	20	−10 31	+5	+10	−6	967
25	13 21	−5	−10	+5	955	25	−12 16	+5	+10	−6	968
Mai 0	14 55	−4	−9	+5	954	Nov. 0	−14 16	+4	+9	−6	970
5	16 23	−4	−8	+5	953	5	−15 50	+4	+9	−5	971
10	17 46	−5	−9	+3	952	10	−17 18	+5	+9	−4	972
15	18 59	−4	−7	+4	951	15	−18 37	+3	+7	−5	973
20	20 5	−3	−6	+3	950	20	−19 49	+3	+7	−4	974
25	21 2	−2	−5	+3	949	25	−20 52	+3	+6	−3	975
Juni 0	21 59	−2	−4	+3	948	Dez. 0	−21 44	+2	+4	−3	976
5	22 36	−1	−3	+2	948	5	−22 27	+2	+4	−2	976
10	23 3	−1	−2	+2	947	10	−22 58	+1	+2	−2	977
15	23 20	0	−1	+1	947	15	−23 18	0	+1	−1	978
20	23 27	0	0	0	946	20	−23 27	0	0	0	978
25	23 23	+1	+1	0	946	25	−23 24	0	−1	+1	978

Je nach 4 Jahren wiederholen sich nahe dieselben Deklinationen.

Sonne.

Distanz 148655000^{km} = 11654 Erdd.
Parallaxe 8″.85
Scheinbarer Halbmesser 961″.2
Durchmesser 1385500^{km} = 108.6 Erdd.
Masse 324000 Erde
Dichte 1¼ = 0.254 Erde
Siderischer Umlauf 365^d.2563
Tropischer „ 365.2422
Neigung des Equators 7°
Länge des aufsteigenden Knotens 74°
Rotationszeit 25^d.234.

Mond.

Distanz 384390^{km} = 30.134 Erdd.
Equat. Parallaxe 57′ 2″.7
Scheinbarer Halbmesser 933″.0
Durchmesser 3477^{km} = 0.2726 Erdd.
Masse = 0.0123 Erde
Dichte = 3.37 = 0.604 Erde
Siderischer Umlauf 27^d.321661
Tropischer „ 27.321582
Synodischer „ 29.530589
Anomalist. „ 27.55460
Draconit. „ 27.21222

VIII^a. Wahre Länge der Sonne, Culminationsdauer ihres Radius und Länge des Mondknotens.

Datum.	1889	Corr. für			Rad.	Datum.	1889	Corr. für			Rad.
		90	91	92				90	91	92	
	° ′	′	′	′	s		° ′	′	′	′	s
Jan. 0	280 19	— 15	— 30	— 45	71	Juli 0	98 49	— 14	— 27	— 44	69
5	285 25	— 15	— 30	— 45	71	5	103 35	— 14	— 27	— 44	69
10	290 31	— 15	— 30	— 45	70	10	108 21	— 14	— 27	— 44	68
15	295 36	— 15	— 30	— 45	70	15	113 7	— 14	— 27	— 44	68
20	300 42	— 15	— 30	— 45	70	20	117 53	— 13	— 27	— 44	68
25	305 47	— 15	— 30	— 45	69	25	122 40	— 14	— 28	— 44	67
Febr. 0	311 52	— 14	— 30	— 44	68	Aug. 0	128 24	— 14	— 27	— 44	67
5	316 57	— 15	— 30	— 45	68	5	133 12	— 15	— 28	— 44	66
10	322 0	— 15	— 29	— 44	67	10	137 59	— 14	— 27	— 44	66
15	327 3	— 15	— 29	— 44	67	15	142 47	— 14	— 27	— 44	65
20	332 6	— 15	— 30	— 45	66	20	147 36	— 14	— 28	— 44	65
25	337 7	— 14	— 29	— 44	66	25	152 25	— 13	— 27	— 43	65
März 0	340 8	— 15	— 29	— 44	65	Sept. 0	158 14	— 14	— 28	— 44	64
5	345 9	— 15	— 30	— 44	65	5	163 4	— 14	— 28	— 43	64
10	350 8	— 14	— 29	— 43	65	10	167 56	— 14	— 28	— 44	64
15	355 7	— 14	— 29	— 44	65	15	172 48	— 14	— 28	— 44	64
20	0 5	— 14	— 28	— 43	64	20	177 41	— 14	— 28	— 43	64
25	5 3	— 15	— 29	— 44	64	25	182 35	— 14	— 28	— 43	64
April 0	10 58	— 14	— 28	— 44	64	Okt. 0	187 30	— 14	— 28	— 43	64
5	15 54	— 15	— 29	— 44	65	5	192 26	— 15	— 29	— 44	65
10	20 48	— 14	— 28	— 44	65	10	197 22	— 14	— 28	— 43	65
15	25 42	— 15	— 28	— 44	65	15	202 20	— 15	— 29	— 44	65
20	30 35	— 14	— 28	— 44	65	20	207 18	— 15	— 29	— 44	66
25	35 27	— 14	— 28	— 44	66	25	212 17	— 15	— 29	— 44	66
Mai 0	40 18	— 14	— 28	— 44	66	Nov. 0	218 17	— 15	— 29	— 44	67
5	45 9	— 14	— 28	— 44	66	5	223 18	— 15	— 30	— 44	67
10	49 59	— 14	— 28	— 44	67	10	228 19	— 15	— 29	— 44	68
15	54 48	— 14	— 27	— 44	67	15	233 21	— 15	— 29	— 43	68
20	59 37	— 14	— 28	— 44	68	20	238 24	— 15	— 30	— 43	69
25	64 25	— 14	— 28	— 44	68	25	243 28	— 15	— 30	— 44	70
Juni 0	70 10	— 14	— 27	— 44	68	Dez. 0	248 32	— 16	— 30	— 44	70
5	74 57	— 14	— 27	— 44	69	5	253 36	— 15	— 30	— 43	71
10	79 44	— 14	— 27	— 44	69	10	258 41	— 15	— 30	— 44	71
15	84 30	— 13	— 27	— 43	69	15	263 46	— 15	— 30	— 43	71
20	89 17	— 14	— 27	— 44	69	20	268 52	— 15	— 30	— 44	71
25	94 3	— 14	— 27	— 44	69	25	273 57	— 15	— 30	— 43	71

Je nach 4 Jahren wiederholen sich nahe dieselben Längen.

Die mittlere Länge des aufsteigenden Mondknotens an I 0 beträgt:

1884	208° 38′.8	1891	73° 14′.5	1898	297° 50′.3
1885	189 15.9	1892	53 54.8	1899	278 30.6
1886	169 56.2	1893	34 32.0	1900	259 10.9
1887	150 36.5	1894	15 12.3	1901	239 51.2
1888	131 16.8	1895	355 52.6	1902	220 31.5
1889	111 53.9	1896	336 32.9	1903	201 11.8
1890	92 34.2	1897	317 10.0	1904	181 52.1

Die Abnahme der Länge in einem julianischen Jahre beträgt 19°.34150, diejenige in einem gemeinen Jahre 19° 19′.71, in einem Schaltjahre 19° 22′.89, in einem Tage 3′.1773.

Gemeine Jahre	Seit Epoche — 4712 I o Jahre	Tage	Eintritt in Zeichen ♈ 0°	♋ 90°	♎ 180°	♑ 270°
— 2000	2713	990558	97,20	191,50	282,27	370,66
— 1900	2813	1 027083	96,40	190,70	281,55	369,95
— 1800	2913	1 063608	95,60	189,89	280,83	369,23
— 1700	3013	1 100133	94,80	189,09	280,12	368,52
— 1600	3113	1 136658	94,00	188,28	279,41	367,80
— 1500	3213	1 173183	93,20	187,48	278,69	367,09
— 1400	3313	1 209708	92,40	186,67	277,97	366,37
— 1300	3413	1 246233	91,60	185,87	277,25	365,66
— 1200	3513	1 282758	90,80	185,06	276,53	364,94
— 1100	3613	1 319283	90,00	184,26	275,81	364,23
— 1000	3713	1 355808	89,20	183,45	275,09	363,51
— 900	3813	1 392333	88,41	182,63	274,36	362,80
— 800	3913	1 428858	87,62	181,81	273,62	362,09
— 700	4013	1 465383	86,82	180,99	272,88	361,37
— 600	4113	1 501908	86,03	180,17	272,14	360,66
— 500	4213	1 538433	85,24	179,34	271,40	359,95
— 400	4313	1 574958	84,45	178,52	270,66	359,24
— 300	4413	1 611483	83,66	177,70	269,92	358,53
— 200	4513	1 648008	82,86	176,88	269,18	357,81
— 100	4613	1 684533	82,07	176,06	268,44	357,10
0	4713	1 721058	81,28	175,24	267,70	356,39
100	4813	1 757583	80,50	174,41	266,94	355,68
200	4913	1 794108	79,72	173,58	266,18	354,96
300	5013	1 830633	78,94	172,75	265,41	354,25
400	5113	1 867158	78,16	171,92	264,65	353,54
500	5213	1 903683	77,38	171,08	263,89	352,83
600	5313	1 940208	76,60	170,25	263,13	352,11
700	5413	1 976733	75,82	169,42	262,37	351,40
800	5513	2 013258	75,04	168,59	261,61	350,69
900	5613	2 049783	74,26	167,76	260,84	349,97
1000	5713	2 086308	73,48	166,93	260,08	349,26
1100	5813	2 122833	72,71	166,10	259,30	348,54
1200	5913	2 159358	71,95	165,26	258,51	347,82
1300	6013	2 195883	71,18	164,43	257,73	347,10
1400	6113	2 232408	70,41	163,59	256,94	346,38
1500	6213	2 268933	69,65	162,76	256,16	345,66
1600	6313	2 305458	68,88	161,92	255,37	344,94
1700	6413	2 341983	68,11	161,09	254,59	344,22
1800	6513	2 378508	67,35	160,25	253,80	343,50
1900	6613	2 415033	66,58	159,42	253,02	342,78
2000	6713	2 451558	65,82	158,58	252,23	342,07

n	t	n	t
1	366	51	18628
2	731	52	18993
3	1096	53	19359
4	1461	54	19724
5	1827	55	20089
6	2192	56	20454
7	2557	57	20820
8	2922	58	21185
9	3288	59	21550
10	3653	60	21915
11	4018	61	22281
12	4383	62	22646
13	4749	63	23011
14	5114	64	23376
15	5479	65	23742
16	5844	66	24107
17	6210	67	24472
18	6575	68	24837
19	6940	69	25203
20	7305	70	25568
21	7671	71	25933
22	8036	72	26298
23	8401	73	26664
24	8766	74	27029
25	9132	75	27394
26	9497	76	27759
27	9862	77	28125
28	10227	78	28490
29	10593	79	28855
30	10958	80	29220
31	11323	81	29586
32	11688	82	29951
33	12054	83	30316
34	12419	84	30681
35	12734	85	31047
36	13149	86	31412
37	13515	87	31777
38	13880	88	32142
39	14245	89	32508
40	14610	90	32873
41	14976	91	33238
42	15341	92	33603
43	15706	93	33969
44	16071	94	34334
45	16437	95	34699
46	16802	96	35064
47	17167	97	35430
48	17532	98	35795
49	17898	99	36160
50	18263	100	36525

Korrektionen innerhalb eines Jahrvierts:

$$\Delta t = 1 \times 365{,}25 - 366 = -0{,}75$$
$$2 \times 365{,}25 - (366 + 1 \times 365) = -0{,}50$$
$$3 \times 365{,}25 - (366 + 2 \times 365) = -0{,}25$$
$$4 \times 365{,}25 - (366 + 3 \times 365) = 0{,}00.$$

Für Erklärung und Beispiele vgl. die Sätze 315 und 320.

Arg: $A_1 + A_2 - 400$			T_1	A_1	B_1	T_1	A_1	B_1	T_1	A_1	B_1
ΔT_1	Neu	Voll									
0	0,44	15,30	983 288,35	4	93	1483 979,64	354	6	1988 657,49	181	284
10	0,38	15,37	993 860,31	273	70	1490 564,97	350	17	1995 242,81	178	296
20	0,32	15,43	1004 432,27	142	48	1501 136,92	220	395	2005 814,77	47	274
30	0,26	15,48	1015 004,22	11	25	1511 708,87	89	372	2016 386,72	317	251
40	0,21	15,53	1021 589,54	8	37	1522 280,83	358	350	2026 958,67	186	228
50	0,16	15,56	1032 161,50	277	14	1532 852,78	227	327	2037 530,62	55	206
60	0,12	15,59	1042 733,45	146	392	1543 424,73	96	305	2048 102,57	325	183
70	0,08	15,60	1053 305,41	15	369	1553 996,69	366	282	2058 674,53	194	161
80	0,06	15,61	1063 877,36	284	347	1560 582,01	362	294	2069 246,48	63	138
90	0,04	15,61	1074 449,32	153	324	1571 153,96	232	271	2079 818,43	332	116
100	0,03	15,59	1081 034,64	150	336	1581 725,91	101	249	2086 403,75	329	127
110	0,03	15,57	1091 606,60	19	313	1592 297,87	370	226	2096 975,70	199	105
120	0,04	15,54	1102 178,55	288	291	1602 869,82	239	204	2107 547,65	68	82
130	0,06	15,50	1112 750,50	157	268	1613 441,77	108	181	2118 119,60	337	60
140	0,09	15,45	1123 322,46	27	246	1624 013,73	378	159	2128 691,56	207	37
150	0,13	15,40	1133 894,41	296	223	1634 585,68	247	136	2139 263,51	76	15
160	0,18	15,35	1140 479,74	292	235	1641 171,00	244	148	2149 835,46	345	392
170	0,24	15,29	1151 051,69	161	212	1651 742,96	113	125	2160 407,41	215	370
180	0,30	15,23	1161 623,64	31	190	1662 314,91	382	103	2170 979,36	84	347
190	0,37	15,18	1172 195,60	300	167	1672 886,86	251	80	2181 551,31	353	325
200	0,44	15,12	1182 767,55	169	145	1683 458,81	121	58	2192 123,26	223	302
210	0,50	15,06	1193 339,51	38	122	1694 030,77	390	35	2198 708,59	219	314
220	0,57	15,00	1203 911,46	307	100	1704 602,72	259	13	2209 280,54	89	291
230	0,63	14,95	1210 496,79	304	111	1715 174,67	128	390	2219 852,49	358	269
240	0,69	14,91	1221 068,74	173	89	1721 759,99	125	2	2230 424,44	228	246
250	0,74	14,87	1231 640,69	42	66	1732 331,95	394	379	2240 996,39	97	224
260	0,78	14,84	1242 212,65	311	44	1742 903,90	264	357	2251 568,34	366	201
270	0,81	14,81	1252 784,60	180	21	1753 475,85	133	334	2262 140,29	236	179
280	0,83	14,80	1263 356,55	49	399	1764 047,80	215	312	2272 712,24	105	156
290	0,84	14,79	1273 928,51	319	376	1774 619,76	271	289	2283 284,19	374	134
300	0,84	14,80	1280 513,83	315	388	1785 191,71	141	267	2293 856,14	244	111
310	0,83	14,81	1291 085,79	184	365	1795 763,66	10	244	2304 428,09	113	88
320	0,81	14,84	1301 657,74	54	343	1806 335,61	279	222	2311 013,42	110	100
330	0,79	14,87	1312 229,69	323	320	1812 920,94	276	233	2321 585,37	379	78
340	0,75	14,92	1322 801,65	192	298	1823 492,89	145	211	2332 157,32	249	55
350	0,71	14,97	1333 373,60	61	275	1834 064,84	14	188	2342 729,27	118	33
360	0,66	15,03	1343 945,56	330	253	1844 636,79	284	166	2353 301,22	387	10
370	0,61	15,09	1350 530,88	327	264	1855 208,75	153	143	2363 873,17	257	387
380	0,55	15,16	1361 102,83	196	242	1865 780,70	22	121	2374 445,12	126	365
390	0,49	15,23	1371 674,79	65	219	1876 352,65	291	98	2385 017,07	396	342
400	0,44	15,30	1382 246,74	334	197	1886 924,60	161	76	2395 589,02	265	320
			1392 818,69	204	174	1893 509,92	158	87	2406 160,97	134	297
			1403 390,65	73	152	1904 081,87	27	65	2416 732,92	4	275
			1413 962,60	342	129	1914 653,83	296	42	2427 304,87	273	252
			1420 547,92	339	141	1925 225,78	165	20	2433 890,20	270	264
			1431 119,88	208	118	1935 797,73	35	397	2444 462,15	139	241
			1441 691,83	77	96	1946 369,68	304	375	2455 034,10	9	219
			1452 263,78	346	73	1956 941,64	173	352	2465 606,05	278	196
			1462 835,74	215	51	1967 513,59	43	329	2476 178,00	148	174
			1473 407,69	85	28	1978 085,54	312	307	2486 749,95	17	151

Für Erklärung und Beispiele vergleiche Satz 320.

T_1	A_1	B_1
2497 321,90	287	129
2507 893,85	156	106
2518 465,80	25	84
2529 037,75	295	61
2539 609,70	164	39
2550 181,65	34	16
2560 753,60	303	394
2571 325,55	173	371
2577 910,87	169	383
2588 482,82	39	360

T_2	A_2	B_2
0,00	0*	0·
147,65	143	162·
177,18	172*	194
324,84	316	356:
354,37	344:	388
502,02	88·	150:
531,55	116:	182
679,20	260·	344*
708,73	288·	376
856,39	32:	138:
885,92	61·	170
1 033,57	204*	332·
1 210,75	376*	126·
1 358,41	120	288·
1 387,94	148*	320
1 535,59	292	82·
1 565,12	320*	114
1 712,77	64	276:
1 742,30	92:	308
1 889,96	236·	70:
1 919,49	265:	102
2 067,14	8:	264:
2 096,67	37·	296
2 244,32	180:	58:
2 421,51	352*	252·
2 598,69	124*	46·
2 746,34	268	208·
2 775,88	296*	240
2 923,53	40	2·
2 953,06	69*	34
3 100,71	212·	196:
3 130,24	241:	228
3 277,90	384·	390*
3 307,43	13·	22
3 455,08	156:	184:
3 484,61	185·	216
3 632,26	328*	378·
3 809,45	100*	172·

T_2	A_2	B_2
3 957,10	244	333·
3 986,63	273*	366
4 134,28	16	127·
4 163,81	45*	160
4 311,47	188	322:
4 341,00	217:	354
4 488,65	360·	116:
4 518,18	389:	148
4 665,83	132:	310*
4 695,36	161·	342
4 843,02	304:	104:
4 872,55	333·	136
5 020,20	77*	298·
5 197,38	249*	92·
5 345,04	392	253·
5 374,57	21*	286
5 522,22	164	47·
5 551,75	193*	80
5 699,40	336·	241:
5 728,93	365:	274
5 876,59	108·	36*
5 906,12	137·	68
6 053,77	281:	230:
6 083,30	309·	262
6 230,95	53:	24:
6 408,14	225*	218·
6 585,32	397*	12·
6 732,97	140	173·
6 762,50	169*	206
6 910,16	312	367·
6 939,69	341:	0
7 087,34	85·	161:
7 116,87	113:	194
7 264,52	257·	355*
7 294,06	285·	388
7 441,71	29:	149:
7 471,24	57·	182
7 618,89	201*	344·
7 796,08	373*	138·
7 943,73	116	299·
7 973,26	145*	332
8 120,91	288	93·
8 150,44	317*	126
8 298,10	61	287:
8 327,63	89:	320
8 475,28	233·	81:
8 504,81	261:	114
8 652,46	5:	275:
8 681,99	34·	308
8 829,65	177:	69:

T_2	A_2	B_2
9 006,83	349*	263·
9 184,01	121*	58·
9 331,67	265	219·
9 361,20	293*	252
9 508,85	37	13:
9 538,38	65*	46
9 686,03	209·	207:
9 715,56	238:	240
9 863,22	381·	1*
9 892,75	10·	34
10 040,40	153:	195:
10 069,93	182·	228
10 217,58	325:	389·
10 394,77	97*	183·
10 542,42	241	345·
10 571,95	269*	377

d	h	m	s	h	d
0,100	2	24	0	1	0,042
200	4	48	0	2	083
300	7	12	0	3	124
400	9	36	0	4	166
500	12	0	0	5	208
600	14	24	0	6	249
700	16	48	0	7	291
800	19	12	0	8	333
900	21	36	0	9	374
0,010	0	14	24	10	416
20	0	28	48	11	458
30	0	43	12	12	500
40	0	57	36	13	541
50	1	12	0	14	583
60	1	26	24	15	625
70	1	40	48	16	667
80	1	55	12	17	708
90	2	9	36	18	750
0,001	0	1	26	19	792
3	0	4	19	20	833
5	0	7	12	21	875
7	0	10	5	22	917
9	0	12	58	23	958

Arg: $B_1 + B_2 - 400$		
ΔT_2	Neu	Voll
0	0,17	0,22
10	0,20	0,25
20	0,23	0,27
30	0,26	0,29
40	0,28	0,31
50	0,30	0,33
60	0,32	0,34
70	0,33	0,35
80	0,34	0,35
90	0,35	0,35
100	0,35	0,34
110	0,35	0,33
120	0,34	0,32
130	0,33	0,30
140	0,31	0,28
150	0,30	0,26
160	0,27	0,24
170	0,25	0,21
180	0,23	0,18
190	0,20	0,16
200	0,17	0,13
210	0,15	0,11
220	0,12	0,08
230	0,10	0,06
240	0,07	0,04
250	0,05	0,03
260	0,04	0,01
270	0,02	0,01
280	0,01	0,00
290	0,00	0,00
300	0,00	0,00
310	0,00	0,01
320	0,01	0,03
330	0,02	0,04
340	0,03	0,06
350	0,05	0,08
360	0,07	0,11
370	0,09	0,14
380	0,12	0,16
390	0,15	0,19
400	0,17	0,22

Ein den A_2 (oder B_2) beigefügter Punkt bedeutet, dass bei der betreffenden Konjunktion (oder Opposition) eine partiale Finsternis möglich ist, — ein Doppelpunkt, dass sicher eine partiale, vielleicht sogar eine centrale Finsternis statt hat, — ein Stern, dass sie central werden muss.

Sternzeit im mittlern Mittage (zu 494).

Æ d. m. Sonne.	h m s	N_1	Æ d. m. Sonne.	h m s	N_1
Jan. 0	18 37 56,7	0	Juli 0	6 31 33,2	27
5	18 57 39,5	1	5	6 51 10,6	27
10	19 17 22,3	1	10	7 10 58,8	28
15	19 37 5,0	2	15	7 30 41,6	29
20	19 56 47,8	3	20	7 50 24,3	30
25	20 16 30,6	4	25	8 10 7,1	30
Febr. 0	20 40 9,9	5	Aug. 0	8 33 46,5	31
5	20 59 52,7	5	5	8 53 29,2	32
10	21 19 35,5	6	10	9 13 12,0	33
15	21 39 18,3	7	15	9 32 54,8	33
20	21 59 1,0	7	20	9 52 37,6	34
25	22 18 43,8	8	25	10 12 20,3	35
März 0	22 30 33,5	9	Sept. 0	10 35 59,7	36
5	22 50 16,2	10	5	10 55 42,4	36
10	23 9 59,0	11	10	11 15 25,2	37
15	23 29 41,8	11	15	11 35 7,9	38
20	23 49 24,5	12	20	11 54 50,7	39
25	0 9 7,3	13	25	12 14 33,5	40
April 0	0 32 46,6	13	Okt. 0	12 34 16,2	40
5	0 52 29,4	14	5	12 53 59,0	41
10	1 12 12,1	15	10	13 13 41,8	42
15	1 31 54,9	15	15	13 33 24,5	42
20	1 51 37,7	16	20	13 53 7,3	43
25	2 11 20,4	17	25	14 12 50,1	44
Mai 0	2 31 3,2	18	Nov. 0	14 36 29,4	45
5	2 50 46,0	18	5	14 56 12,2	45
10	3 10 28,8	19	10	15 15 54,9	46
15	3 30 11,5	20	15	15 35 37,7	47
20	3 49 54,3	21	20	15 55 20,5	48
25	4 9 37,1	21	25	16 15 3,3	48
Juni 0	4 33 16,4	22	Dez. 0	16 34 46,1	49
5	4 52 59,2	23	5	16 54 28,9	50
10	5 12 42,0	24	10	17 14 11,7	51
15	5 32 24,8	24	15	17 33 54,4	51
20	5 52 7,6	25	20	17 53 37,2	52
25	6 11 50,4	26	25	18 13 20,0	53
	m s			m s	
1^d	+ 3 56,6		4^d	+ 15 46,2	
2	+ 7 53,1		5	+ 19 42,8	
3	+ 11 49,7		6	+ 23 39,3	
	m s	N_2		m s	N_2
1881	+ 3 6,1	263	1891	+ 1 26,3	803
1882	+ 2 8,8	317	1892	+ 4 25,6	857
1883	+ 1 11,5	371	1893	+ 3 28,3	911
1884	+ 4 10,8	425	1894	+ 2 31,0	965
1885	+ 3 13,5	479	1895	+ 1 33,7	19
1886	+ 2 16,2	533	1896	+ 4 33,0	73
1887	+ 1 18,9	587	1897	+ 3 35,7	127
1888	+ 4 18,2	641	1898	+ 2 38,4	181
1889	+ 3 20,9	695	1899	+ 1 41,1	235
1890	+ 2 23,6	749	1900	+ 0 34,7	289

$N_1 + N_2$	s
0	+ 0,0
20	+ 0,1
40	+ 0,3
60	+ 0,4
80	+ 0,5
100	+ 0,6
120	+ 0,7
140	+ 0,8
160	+ 0,9
180	+ 1,0
200	+ 1,0
220	+ 1,0
240	+ 1,1
260	+ 1,1
280	+ 1,0
300	+ 1,0
320	+ 1,0
340	+ 0,9
360	+ 0,8
380	+ 0,7
400	+ 0,6
420	+ 0,5
440	+ 0,4
460	+ 0,3
480	+ 0,1
500	— 0,0
520	— 0,1
540	— 0,3
560	— 0,4
580	— 0,5
600	— 0,6
620	— 0,7
640	— 0,8
660	— 0,9
680	— 0,9
700	— 1,0
720	— 1,0
740	— 1,0
760	— 1,0
780	— 1,0
800	— 1,0
820	— 1,0
840	— 0,9
860	— 0,8
880	— 0,7
900	— 0,6
920	— 0,5
940	— 0,4
960	— 0,3
980	— 0,1
1000	0,0

Sternzeit.	Abzug zur Verwandl. in m. Z.
h	m s
1	0 9,830
2	0 19,659
3	0 29,489
4	0 39,318
5	0 49,148
6	0 58,977
7	1 8,807
8	1 18,637
9	1 28,466
10	1 38,296
11	1 48,125
12	1 57,955
13	2 7,784
14	2 17,614
15	2 27,443
16	2 37,273
17	2 47,103
18	2 56,932
19	3 6,762
20	3 16,591
21	3 26,421
22	3 36,250
23	3 46,080
24	3 55,909

Sternzeit.	Abzug zur Verwandl. in m. Z.
1^m	0,164
2	0,328
3	0,491
4	0,655
5	0,819
6	0,983
7	1,147
8	1,311
9	1,474
10^s	0,027
20	0,055
30	0,082
40	0,109
50	0,137

Die Sternzeit im m. M. ist um n . 0^s,0027379 zu vermindern, wenn ein Ort n^s östlich von Bern liegt, für Zürich um 0,73.

In Schaltjahren hat man im Jan. und Febr. v. Datum 1 Tag abzuziehen.

Tage seit 1750. I 0.

I 0	d	I 0	d	I 0	d
1750	0	1795	16436	1840	32871
1	365	6	16801	1	33237
2	730	7	17167	2	33602
3	1096	8	17532	3	33967
4	1461	9	17897	4	34332
1755	1826	1800	18262	1845	34698
6	2191	1	18627	6	35063
7	2557	2	18992	7	35428
8	2922	3	19357	8	35793
9	3287	4	19722	9	36159
1760	3652	1805	20088	1850	36524
1	4018	6	20453	1	36889
2	4383	7	20818	2	37254
3	4748	8	21183	3	37620
4	5113	9	21549	4	37985
1765	5479	1810	21914	1855	38350
6	5844	1	22279	6	38715
7	6209	2	22644	7	39081
8	6574	3	23010	8	39446
9	6940	4	23375	9	39811
1770	7305	1815	23740	1860	40176
1	7670	6	24105	1	40542
2	8035	7	24471	2	40907
3	8401	8	24836	3	41272
4	8766	9	25201	4	41637
1775	9131	1820	25566	1865	42003
6	9496	1	25932	6	42368
7	9862	2	26297	7	42733
8	10227	3	26662	8	43098
9	10592	4	27027	9	43464
1780	10957	1825	27393	1870	43829
1	11323	6	27758	1	44194
2	11688	7	28123	2	44559
3	12053	8	28488	3	44925
4	12418	9	28854	4	45290
1785	12784	1830	29219	1875	45655
6	13149	1	29584	6	46020
7	13514	2	29949	7	46386
8	13879	3	30315	8	46751
9	14245	4	30680	9	47116
1790	14610	1835	31045	1880	47481
1	14975	6	31410	1	47847
2	15340	7	31776	2	48212
3	15706	8	32141	3	48577
4	16071	9	32506	4	48942

Mittlere Zeit im wahren Mittage (Zeitgleichung zu 294).

		h m			h m
Jan. 0	0	0 3	Juli 0	181	0 3
5	5	6	5	186	4
10	10	8	10	191	5
15	15	10	15	196	6
20	20	11	20	201	6
25	25	13	25	206	6
Febr. 0	31	14	Aug. 0	212	6
5	36	14	5	217	6
10	41	15	10	222	5
15	46	14	15	227	4
20	51	14	20	232	3
25	56	13	25	237	2
März 0	59	13	Sept. 0	243	0
5	64	12	5	248	23 59
10	69	11	10	253	57
15	74	9	15	258	55
20	79	8	20	263	53
25	84	6	25	268	52
April 0	90	4	Okt. 0	273	50
5	95	3	5	278	49
10	100	1	10	283	47
15	105	0	15	288	46
20	110	23 59	20	293	45
25	115	58	25	298	44
Mai 0	120	57	Nov. 0	304	44
5	125	57	5	309	44
10	130	56	10	314	44
15	135	56	15	319	45
20	140	56	20	324	46
25	145	57	25	329	47
Juni 0	151	57	Dez. 0	334	49
5	156	58	5	339	51
10	161	59	10	344	53
15	166	0 0	15	349	55
20	171	1	20	354	58
25	176	2	25	359	0 0

In der die Tage des Jahres enthaltenden Kolumne ist für Schaltjahre vom 0ten März an jede Zahl um eine Einheit zu vermehren; so z. B. entspricht nach ihr der 109te Tag des Jahres in gemeinen Jahren dem 19., in Schaltjahren dem 18. April.

1885	49308	1890	51134	1895	52960
6	49673	1	51499	6	53325
7	50038	2	51864	7	53691
8	50403	3	52230	8	54056
9	50769	4	52595	9	54421

A. Epochen (zu 520).

Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.
1609,8	1615,5	1712,0 13,1	1718,2 12,7	1810,6 12,3	1816,4 12,2
1619,0 9,8	1626,0 10,5	1723,5 11,5	1727,5 9,3	1823,3 12,7	1829,9 13,5
1634,0 15,0	1639,5 13,5	1734,0 10,5	1738,7 11,2	1833,9 10,6	1837,2 7,3
1645,0 11,0	1649,0 9,5	1745,0 11,0	1750,3 11,6	1843,5 9,6	1848,1 10,9
1655,0 10,0	1660,0 11,0	1755,2 10,2	1761,5 11,2	1856,0 12,5	1860,1 12,0
1666,0 11,0	1675,0 15,0	1766,5 11,3	1769,7 8,2	1867,2 11,2	1870,6 10,5
1679,5 13,5	1685,0 10,0	1777,5 11,0	1778,4 8,7	1878,9 11,7	1883,9 13,3
1689,5 10,0	1693,0 8,0	1784,7 7,2	1788,1 9,7		
1698,9 9,4	1705,5 12,5	1798,3 13,6	1804,2 16,1		

B. Relativzahlen (zu 520).

Jahr.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	R
1749	—	—	—	—	—	—	81,6	82,8	84,1	86,3	87,8	88,7	80,9
50	89,0	90,2	92,3	**92,6**	88,2	83,8	83,3	81,8	78,6	75,4	72,9	69,6	**83,4**
51	66,8	64,2	59,5	54,6	51,7	48,8	46,2	45,0	46,3	47,5	47,6	47,1	47,7
52	47,2	46,4	45,3	46,4	47,8	48,0	48,2	47,8	46,0	44,1	42,1	40,9	47,8
53	38,2	36,2	36,7	35,8	35,0	32,1	28,8	25,8	22,8	19,9	18,3	17,4	30,7
54	17,1	15,8	13,9	13,0	12,7	12,3	12,6	13,4	14,0	13,9	12,7	10,7	12,2
55	9,2	8,4	**8,4**	8,8	8,5	8,9	9,7	9,6	9,4	9,4	10,0	11,1	**9,6**
56	11,4	11,4	11,3	10,6	10,6	10,6	10,3	10,9	12,4	14,1	16,0	17,1	10,2
57	18,0	20,7	23,8	25,7	28,4	31,4	33,4	35,7	37,9	40,6	42,7	44,4	32,4
58	46,5	46,8	47,2	48,4	47,7	47,2	48,0	48,2	47,7	46,5	45,6	46,0	47,6
1759	46,5	48,1	50,1	51,6	52,7	53,4	54,8	56,2	58,0	60,5	61,9	61,9	54,0
60	62,5	63,3	62,8	61,8	62,0	62,7	63,0	64,4	66,0	66,8	68,8	72,4	62,9
61	75,7	77,5	79,8	83,0	85,8	**86,5**	84,8	82,9	80,7	78,8	75,5	71,7	**85,8**
62	68,3	64,8	62,5	60,4	59,0	59,8	61,7	60,5	58,3	56,7	55,3	53,2	61,1
63	52,4	51,5	49,8	48,8	47,1	45,8	45,3	46,5	47,9	48,3	48,8	49,0	45,1
64	47,8	46,9	45,4	43,0	40,8	37,8	34,9	32,0	29,9	28,8	27,3	25,8	36,3
65	25,3	25,2	24,6	23,6	22,5	21,4	20,4	19,3	19,1	19,0	18,6	18,1	20,9
66	16,4	14,4	12,7	12,0	11,2	**11,1**	12,0	13,5	14,5	15,9	17,2	18,6	**11,4**
67	20,6	22,9	26,0	29,3	32,9	36,4	38,9	41,5	43,1	43,7	46,1	49,9	37,8
68	53,0	55,4	57,8	60,6	63,5	67,4	70,7	71,5	72,1	75,1	77,2	77,7	69,8
1769	81,2	86,2	91,5	98,1	103,8	106,1	107,3	111,9	**115,8**	114,6	112,5	111,9	**106,1**
70	111,1	110,9	109,3	105,2	102,3	101,2	98,0	91,1	85,7	84,9	88,9	93,9	100,8
71	93,6	89,0	86,1	85,4	83,5	81,9	84,3	88,8	90,1	90,5	86,9	79,5	81,6
72	77,3	77,6	75,4	72,8	70,7	67,8	64,6	60,1	58,3	56,7	54,3	53,3	66,5
73	50,0	46,1	43,5	40,4	37,4	35,6	34,5	35,6	37,3	38,0	38,9	39,3	34,8
74	38,8	38,2	37,1	35,6	34,2	31,9	28,9	24,4	19,8	16,6	13,2	10,6	30,6
75	9,3	8,6	8,5	7,9	7,5	**7,2**	7,7	8,9	9,2	9,4	10,2	10,7	**7,0**
76	11,0	11,7	12,9	14,5	16,3	18,5	20,8	22,8	25,2	29,6	35,6	41,0	19,8
77	45,9	55,1	62,9	70,3	78,1	87,6	98,0	106,6	113,5	119,6	128,2	138,6	92,5
78	144,8	148,4	151,9	156,3	**158,5**	156,5	156,0	151,5	153,2	152,5	148,4	141,9	**154,4**
1779	139,0	137,5	133,8	129,9	127,0	125,7	124,1	119,4	115,7	112,8	109,3	106,9	125,9
80	103,5	100,0	98,2	95,5	91,3	86,9	86,0	86,2	83,4	80,4	79,2	79,5	84,8
81	79,4	78,0	75,4	71,5	69,8	69,1	66,2	62,8	60,6	58,8	55,6	51,0	68,1
82	47,0	44,5	42,9	42,0	40,4	38,7	37,4	36,3	36,0	35,0	33,2	31,4	38,5
83	30,6	29,4	27,7	26,4	25,1	23,6	22,2	20,3	18,3	17,0	15,5	14,1	22,8
84	12,3	10,8	10,0	9,7	9,8	10,0	9,9	9,6	**9,5**	9,7	10,5	11,9	**10,2**
85	13,9	15,5	16,9	19,4	22,0	23,5	25,4	28,3	31,6	36,1	42,0	46,3	24,1
86	49,6	54,5	60,7	66,7	72,6	79,3	86,9	93,4	97,5	100,9	104,4	107,9	82,9
87	111,4	115,3	119,2	122,9	125,8	129,5	132,2	133,3	136,6	138,1	136,4	137,8	**132,0**
88	140,6	**141,2**	140,4	139,1	136,6	132,8	129,9	128,7	127,6	127,3	128,3	127,3	130,9

Jahr.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	R
1789	124,9	122,5	119,1	116,5	116,0	117,9	117,6	117,3	116,4	114,2	111,7	109,2	118,1
90	106,0	103,4	101,2	99,6	97,1	92,4	88,6	84,6	80,9	79,3	77,8	75,9	89,9
91	74,8	73,1	70,8	69,4	67,8	66,9	65,9	65,4	65,0	64,5	63,9	63,3	66,6
92	62,1	61,8	62,2	61,8	62,1	61,2	59,9	59,5	58,8	57,5	56,2	55,3	60,0
93	55,1	54,0	51,3	49,3	48,3	47,3	46,4	45,5	44,3	42,6	41,7	41,4	46,9
94	40,7	40,7	40,7	39,1	38,9	40,1	39,4	38,2	37,0	35,5	34,1	32,0	41,0
95	29,8	28,1	27,6	27,6	25,8	22,7	21,3	20,6	20,1	20,8	20,9	20,1	21,3
96	20,2	19,8	19,0	18,9	17,8	16,6	15,7	14,6	13,3	11,6	9,9	9,5	16,0
97	8,8	8,0	7,7	7,0	6,7	6,5	5,9	5,4	5,7	5,9	5,5	4,7	6,4
98	4,1	3,8	3,5	**3,2**	3,2	3,8	4,0	4,4	5,1	5,8	6,5	7,3	**4,1**
1799	7,8	7,8	7,5	7,5	7,3	6,8	7,0	7,1	6,6	6,4	6,3	7,1	6,8
1800	8,0	9,6	10,9	11,7	12,4	14,0	16,2	17,8	19,3	20,8	22,8	24,3	15,3
01	25,2	26,6	28,3	30,0	32,1	33,7	34,9	36,5	37,7	38,9	40,6	42,5	34,0
02	44,4	46,1	48,2	50,5	52,6	54,3	55,7	57,3	59,3	61,2	62,8	64,2	55,0
03	65,6	66,5	67,2	68,4	69,7	70,7	71,7	72,5	73,2	73,9	74,5	74,9	71,2
04	75,1	75,5	**75,7**	75,3	74,7	73,7	72,5	71,2	69,6	67,5	64,6	61,9	**73,1**
05	59,6	57,4	55,2	52,9	50,6	48,6	46,7	44,6	42,2	40,5	39,4	37,9	47,6
06	36,3	34,9	33,6	32,2	30,9	29,6	27,8	25,9	24,4	23,0	21,7	20,3	28,9
07	18,9	17,5	15,8	14,1	12,4	10,4	8,9	8,1	7,4	6,8	6,4	6,5	9,4
08	6,3	5,9	5,9	6,1	6,3	7,2	8,0	8,5	8,7	8,3	7,7	7,2	7,7
1809	6,8	6,2	5,4	4,7	4,0	3,0	2,2	1,6	1,1	1,0	0,8	0,4	2,5
10	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	**0,0**	0,0	0,0	0,0	0,0	**0,0**
11	0,0	0,3	0,5	0,6	1,3	1,4	2,0	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	1,4
12	2,7	3,2	4,1	4,2	4,5	5,1	5,0	4,8	5,1	5,9	6,8	7,3	5,5
13	8,4	8,6	8,7	10,3	11,7	12,4	13,8	14,8	15,0	15,4	15,7	15,9	12,8
14	16,2	16,0	15,5	14,9	14,4	14,3	14,3	15,0	16,7	17,9	18,4	20,3	14,4
15	22,7	25,3	27,9	29,3	30,7	33,5	35,7	37,5	41,0	44,1	46,7	47,6	35,4
16	47,3	46,6	46,5	48,2	**49,2**	47,8	46,8	46,7	47,5	47,5	45,1	43,9	**46,4**
17	44,1	45,2	45,4	43,5	42,1	41,8	41,5	39,9	34,8	31,7	33,5	34,8	41,5
18	33,8	32,4	31,4	31,4	30,8	29,9	29,9	30,0	29,3	27,9	25,8	24,3	30,0
1819	24,6	24,6	23,9	23,1	23,3	24,0	23,4	22,7	22,9	22,9	23,8	22,7	24,2
20	21,2	20,7	20,4	19,2	17,6	15,9	15,4	14,8	13,8	13,4	11,7	10,2	15,0
21	8,9	7,2	6,3	6,7	6,9	6,4	5,2	4,3	4,6	5,3	5,7	5,8	6,1
22	6,1	6,3	6,0	5,0	4,1	4,0	4,0	3,9	3,2	2,0	1,5	1,2	4,0
23	0,6	0,2	0,1	**0,1**	0,1	0,9	2,7	4,0	4,5	5,3	6,2	6,3	**1,8**
24	6,3	6,3	7,2	9,2	10,2	9,4	7,9	7,4	8,2	8,0	7,7	8,9	8,6
25	10,8	13,1	13,9	13,3	13,4	14,7	16,1	16,8	17,8	19,8	21,5	23,1	15,6
26	24,9	26,4	27,1	28,7	31,4	34,2	36,9	38,5	40,5	42,1	44,0	45,8	36,0
27	46,2	46,3	48,2	49,8	50,4	50,1	50,1	51,6	52,8	53,8	55,8	58,9	49,4
28	61,2	62,5	63,6	62,7	62,0	62,4	62,1	61,1	60,7	62,6	63,2	61,3	62,5
1829	61,9	63,5	63,5	64,6	66,1	66,9	67,6	68,8	70,2	71,1	**71,5**	70,9	67,3
30	68,5	65,5	64,9	66,3	67,9	69,7	70,6	69,6	69,1	67,3	63,4	61,4	**70,7**
31	60,1	60,4	59,6	57,0	53,8	50,0	47,1	46,6	45,3	42,5	41,5	41,3	47,8
32	39,8	36,5	33,4	31,1	28,9	27,5	26,7	24,2	20,7	17,9	15,7	13,5	27,5
33	12,0	11,6	11,6	11,2	10,3	9,2	8,2	8,0	7,9	7,6	**7,3**	7,4	**8,5**
34	7,7	7,7	7,7	8,4	10,2	12,2	13,3	13,7	14,6	17,8	21,7	24,2	13,2
35	27,4	31,9	37,9	41,5	50,4	55,1	60,2	67,0	73,8	80,5	86,7	93,2	56,9
36	99,5	103,9	105,7	107,2	109,8	116,0	125,6	132,0	136,9	138,2	138,0	139,4	121,8
37	142,7	145,7	**146,9**	146,3	145,2	141,4	136,4	130,9	127,4	127,1	127,7	126,2	**138,2**
38	125,4	120,8	113,4	111,2	108,6	105,3	101,6	100,7	98,8	93,5	87,3	82,2	103,1

Jahr.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	R
1839	79,5	80,7	85,4	87,9	87,5	86,5	84,7	83,0	81,5	80,7	81,5	81,9	85,8
40	80,6	76,5	71,0	66,9	64,6	63,6	60,8	56,0	52,5	50,5	49,5	49,6	63,2
41	48,7	46,7	44,3	41,8	39,5	37,4	36,8	36,2	35,5	34,5	32,1	28,8	36,8
42	26,7	25,3	24,1	23,8	25,0	25,0	23,9	22,8	21,5	20,1	19,3	18,7	24,2
43	18,0	17,3	16,1	14,2	11,9	10,8	**10,4**	10,7	11,5	12,2	12,3	11,7	**10,7**
44	11,9	12,9	13,5	14,2	14,6	14,7	15,7	17,6	20,0	22,7	25,7	28,3	15,0
45	29,9	30,6	31,9	33,7	34,8	37,7	40,6	41,4	42,7	44,0	45,0	46,9	40,1
46	49,0	50,6	54,7	58,7	60,1	61,2	62,5	63,2	63,8	63,8	63,4	64,8	61,5
47	65,9	69,8	75,6	83,0	91,5	96,7	102,5	109,3	113,1	116,6	120,3	123,0	98,4
48	128,2	**131,5**	128,6	124,1	121,1	122,2	124,2	124,9	125,2	124,5	123,4	120,7	**124,3**
1849	116,4	110,9	107,6	104,8	101,7	98,5	92,6	87,6	85,2	82,8	78,8	77,7	95,9
50	75,6	74,0	73,7	73,4	71,5	68,1	66,4	67,0	66,9	66,7	67,2	67,0	66,5
51	66,6	66,3	65,3	64,2	63,7	64,0	64,2	62,3	60,6	60,8	60,9	59,7	64,5
52	59,4	58,9	57,0	55,9	56,2	55,3	53,1	50,9	48,9	47,2	45,6	44,5	54,2
53	44,4	44,9	45,2	44,0	41,9	40,0	38,0	35,9	34,3	32,7	31,4	30,1	39,0
54	28,2	25,7	23,7	22,0	20,7	20,6	20,4	20,0	19,4	18,4	16,9	15,5	20,6
55	14,1	12,8	11,4	10,4	9,2	7,5	6,2	5,5	4,5	3,9	3,5	**3,2**	6,7
56	3,3	3,6	3,9	3,9	3,8	4,1	4,8	5,5	5,8	6,2	7,6	9,2	**4,3**
57	10,4	11,6	13,7	16,8	19,3	21,5	23,8	26,0	29,3	32,6	34,3	36,0	22,8
58	38,6	41,7	44,8	48,5	51,4	53,5	56,7	60,7	64,3	67,6	71,7	75,5	54,8
1859	78,9	82,6	85,9	87,9	90,8	93,2	93,7	93,7	94,0	93,8	93,9	95,4	93,8
60	97,2	**97,9**	97,0	95,4	94,4	95,1	94,9	93,7	93,3	94,5	93,6	90,6	**95,7**
61	88,1	85,8	84,5	83,1	80,3	77,8	77,2	76,7	73,7	69,5	67,9	68,1	77,2
62	67,7	66,7	65,3	63,7	62,5	60,8	58,5	57,6	58,2	58,6	57,6	55,3	59,1
63	51,9	49,6	47,1	45,2	44,5	44,0	44,4	44,4	44,0	43,8	43,0	43,2	44,0
64	44,8	46,0	46,6	46,6	47,2	47,5	46,6	45,9	44,4	43,0	42,5	41,3	46,9
65	39,1	37,2	36,2	35,2	33,2	31,1	29,8	29,0	28,4	27,2	25,9	24,2	30,5
66	22,8	21,0	19,4	18,7	17,9	16,8	15,0	12,1	9,9	8,7	7,8	6,8	16,3
67	5,9	5,4	**5,2**	5,3	5,3	6,3	7,9	9,2	10,5	12,6	14,9	17,1	**7,3**
68	19,3	21,5	24,2	27,6	31,7	35,5	39,2	42,9	45,8	47,0	50,4	56,9	37,3
1869	61,4	64,5	68,0	69,4	70,1	72,4	74,6	77,6	84,3	93,7	101,7	105,8	73,9
70	110,0	116,2	121,6	127,5	134,0	138,0	139,6	**140,5**	140,2	139,6	138,5	135,4	**139,1**
71	132,3	129,3	125,1	120,4	116,3	112,9	110,8	110,3	107,8	103,0	98,9	98,0	111,2
72	98,9	98,3	99,0	101,0	101,9	101,9	102,0	101,8	101,6	100,9	97,3	92,1	101,7
73	87,8	85,2	81,4	75,4	70,7	67,8	65,2	62,3	58,4	54,4	52,4	52,0	66,3
74	51,8	51,5	50,4	49,1	47,4	45,5	42,7	39,0	36,8	36,1	34,6	32,7	44,6
75	29,8	25,5	22,5	20,5	19,3	17,9	17,1	16,8	16,3	15,1	13,7	12,5	17,1
76	11,7	11,6	11,7	12,0	11,8	11,4	11,7	11,9	10,8	10,6	11,8	13,0	11,3
77	13,1	12,6	12,7	12,7	12,6	12,5	11,4	10,4	10,1	9,8	8,0	7,1	12,3
78	6,5	6,0	5,3	4,6	4,0	3,4	3,3	3,0	2,4	2,3	2,4	**2,2**	**3,4**
1879	2,5	3,2	3,7	4,2	5,0	5,7	6,9	9,0	10,9	12,3	13,7	15,8	6,0
80	17,7	19,8	23,9	26,8	29,7	31,3	32,8	34,4	36,5	39,5	41,6	43,6	32,3
81	46,9	49,7	49,6	49,9	51,8	54,2	54,6	55,6	57,0	59,5	62,2	62,4	54,2
82	60,4	58,4	57,9	57,8	58,9	59,9	60,4	60,1	58,1	56,5	54,6	54,5	59,6
83	57,3	59,0	59,0	59,8	60,8	62,3	65,0	67,9	71,4	73,0	74,2	**74,6**	**63,7**
84	72,4	71,7	72,4	71,3	67,8	64,6	61,4	58,8	56,6	54,2	53,6	55,2	63,4
85	57,1	57,4	56,2	51,9	54,4	53,2	51,6	49,2	47,6	47,4	45,2	41,1	52,2
86	37,2	31,3	32,2	30,2	27,5	25,8	24,6	23,2	20,5	16,7	15,0	13,8	25,4
87	13,1	13,0	12,6	11,9	12,1	12,7	13,1	13,0	12,9	13,0	12,4	11,4	12,6
88	10,3	8,6	7,9	7,8	7,8	7,3	6,2	5,8	5,8	5,8	5,6	5,3	7,0

C. Spörers Tafel der hel. Breiten (zu 520).

	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	Σ	Mittl. Breite	
K	8	37	24	3					72	9°,3	
A	4	11	4				1		20	7,7	33°
B	1	5	3	16	21	14	4		64	6,2	23
C		6	25	79	66	41	13	5	235		21
D	5	40	96	114	50	44	8	4	361		18
E	12	64	114	103	64	30	7	3	397		15,8
F	25	108	127	84	35	8	4	1	392		13,2
G	25	74	96	37	12	1			245		11,6
H	19	48	53	21	1				142		10,8
I	12	45	52	9	1				119		10,3
K	8	37	24	3					72		9,3
A	4	11	4						19		7,7

D. Deklinations-Variationen (zu 522).

Mannheim		Paris		Göttingen		Toronto		Hobarton		Trevandrum	
1781	9,12	1821	9,10	1834	7,79	1841	9,50	1841	- 8,28	1856	0,42
82	**8,11**	22	8,83	35	9,57	42	**8,67**	42	- 7,75	57	0,56
83	8,77	23	**8,18**	36	12,34	43	8,90	43	**- 7,66**	58	0,79
84	**6,98**	24	8,20	37	12,27	44	8,87	44	- 7,84	59	**0,91**
85	8,56	25	9,67	38	**12,74**	45	9,41	45	- 8,39	60	0,84
86	12,01	26	9,76	39	11,03	46	9,27	46	- 9,06	61	0,67
87	**12,84**	27	11,31	40	9,91	47	10,40	47	- 9,93	62	0,47
88	11,18	28	11,52	41	8,87	48	**12,11**	48	**-10,63**	63	0,42
89	8,75	29	**13,74**	42	8,13	49	11,77	49	- 8,13	64	0,54
90	8,33	30	12,40	43	8,20	50	10,88	50	- 8,57	65	0,31

Jahr	Christiania	Greenwich	Prag	München	Mailand	Jahr	Christiania	Greenw.	Prag	München	Mailand
1841	6,28	9,67	7,43	7,82	8,32	1865	5,75	9,15	7,93	7,68	5,85
42	5,48	9,04	6,34	7,08	7,50	66	5,70	8,49	7,46	**7,17**	**4,21**
43	5,75	9,01	6,58	7,15	7,36	67	**5,69**	**7,95**	**6,95**	7,21	4,94
44	**5,23**	**8,68**	**5,96**	**6,61**	**6,98**	68	6,64	8,93	8,02	7,96	6,81
45	5,82	9,32	7,00	8,13	7,61	69	7,83	10,11	9,22	9,42	8,42
46	6,10	9,62	7,65	8,81	7,93	70	**10,01**	12,52	11,23	**12,11**	**11,52**
47	7,39	11,01	8,68	9,55	9,72	71	9,86	**12,53**	**11,42**	11,70	10,70
48	**9,10**	**12,22**	**10,75**	**11,15**	**11,38**	72	9,21	11,91	10,70	10,96	10,32
49	8,62	11,38	10,34	10,64	9,92	73	7,72	10,31	9,05	9,12	8,64
50	8,50	10,77	9,97	10,44	8,91	74	7,09	9,07	7,98	8,33	7,77
51	6,89	9,16	8,32	9,04	7,17	75	5,66	7,58	6,73	7,05	5,78
52	7,17	9,24	8,09	9,47	7,58	76	5,48	7,45	6,47	6,79	6,31
1853	6,58	8,06	7,09	8,95	7,59	1877	5,20	6,85	5,95	6,61	5,68
54	6,00	8,50	6,81	7,87	5,76	78	**5,19**	**6,79**	**5,65**	**6,28**	**5,30**
55	5,16	7,79	6,41	7,81	5,60	79	5,54	6,84	5,99	6,75	6,16
56	**5,02**	6,85	**5,98**	**7,28**	**5,12**	80	6,50	7,98	6,85	7,69	7,21
57	5,50	**6,62**	6,95	8,08	5,41	81	7,00	9,15	7,90	**8,58**	8,33
58	7,55	9,37	7,41	9,83	7,71	82	7,30	8,80	7,92	8,46	8,23
59	**9,20**	**11,22**	**10,36**	**11,76**	**10,01**	83	7,49	9,22	**8,34**	8,55	8,68
60	8,42	11,16	10,10	11,32	8,04	84	**7,99**	**9,72**	8,27	**9,33**	**9,11**
61	7,82	10,55	9,17	10,38	7,51	85	7,06	8,82	7,83	7,80	7,95
62	6,87	8,47	8,60	8,82	7,61	86	6,41	8,44	7,00	7,20	6,72
63	7,00	9,53	8,84	8,57	7,26	87	5,31	7,84	6,72	6,57	6,61
64	5,99	9,34	8,02	7,91	7,19	88	5,44	7,23	6,64	—	6,21

IXᵃ. Tafeln von Halley und Encke.

(Zu 76 : c und 488.)

f	v (° ′ ″)	$\mathrm{Lg}\,\frac{r}{q}$	f	v (° ′ ″)	$\mathrm{Lg}\,\frac{r}{q}$
1	1 31 40	0,000077	52	63 13 50	0,139541
2	3 3 15	0309	54	64 48 38	147029
3	4 34 43	0694	56	66 20 14	154482
4	6 6 0	1231	58	67 48 22	161890
5	7 37 1	1921	60	69 14 16	169254
6	9 7 44	0,002759	62	70 36 56	0,176557
7	10 38 2	3745	64	71 56 56	183803
8	12 7 53	4876	66	73 14 15	190978
9	13 37 17	6151	68	74 29 6	198085
10	15 6 6	7564	70	75 41 35	205122
11	16 34 20	0,009115	72	76 51 43	0,212080
12	18 1 54	10798	74	77 59 41	218963
13	19 28 47	12609	76	79 5 35	225769
14	20 54 53	14550	78	80 9 23	232488
15	22 20 14	16607	80	81 11 16	239127
16	23 44 43	0,018783	82	82 11 19	0,245684
17	25 8 22	21072	84	83 9 34	252159
18	26 31 7	23470	86	84 6 8	258552
19	27 52 55	25969	88	85 1 5	264865
20	29 13 52	28551	90	85 54 27	271092
21	30 33 39	0,031263	92	86 46 20	0,277239
22	31 52 31	34045	94	87 36 45	283306
23	33 10 23	36916	96	88 25 49	289293
24	34 27 12	39864	98	89 13 32	295201
25	35 42 59	42892	100	90 0 0	301030
26	36 57 41	0,045989	102	90 45 14	0,306782
27	38 11 20	49154	104	91 29 18	312469
28	39 23 56	52383	106	92 12 14	318060
29	40 35 26	55668	108	92 54 4	323587
30	41 45 50	59010	110	93 34 52	329042
31	42 55 7	0,062400	112	94 14 40	0,334424
32	44 3 16	65835	114	94 53 30	339736
33	45 10 26	69316	116	95 31 22	344979
34	46 16 35	72839	118	96 8 22	350153
35	47 21 36	76396	120	96 44 30	355262
36	48 25 33	0,079984	130	99 33 11	0,379842
37	49 28 29	83601	140	102 4 19	402930
38	50 30 23	87249	150	104 20 43	424676
39	51 31 11	90912	160	106 24 23	445178
40	52 30 54	94594	170	108 17 14	464208
41	53 29 42	0,098298	180	110 0 40	0,482937
42	54 27 32	102019	190	111 35 55	500384
43	55 24 22	105752	200	113 4 0	516984
44	56 20 11	109490	300	123 26 36	648893
45	57 15 5	113240	400	129 38 4	742186
46	58 9 2	0,116995	500	133 52 20	0,813969
47	59 2 5	120756	600	137 0 57	872155
48	59 54 13	124518	700	139 28 25	921012
49	60 45 26	128278	800	141 28 3	963082
50	61 35 45	132035	900	143 7 48	1,000000

x (° ′)	u (′ ″)	D (″)	x (° ′)	u (′ ″)	D (″)
0 0	0 0,00	0,00	8 0	1 33,49	5,96
10	0,00	01	10	39,45	6,21
20	0,01	02	20	45,66	6,46
30	0,03	03	30	52,12	6,72
40	0,06	05	40	58,84	6,99
50	0,11	0,07	50	2 5,83	7,25
1 0	0 0,18	11	9 0	13,08	7,53
10	0,29	14	10	20,61	7,80
20	0,43	18	20	28,41	8,09
30	0,61	23	30	36,50	8,37
40	0,84	28	40	44,87	8,67
50	1,12	0,34	50	53,54	8,96
2 0	0 1,46	40	10 0	3 2,50	9,27
10	1,86	46	10	11,77	9,58
20	2,32	53	20	21,35	9,89
30	2,85	61	30	31,24	10,21
40	3,46	69	40	41,45	10,53
50	4,15	0,78	50	51,98	10,85
3 0	0 4,93	0,87	11 0	4 2,83	11,19
10	5,80	0,97	10	14,02	11,53
20	6,77	1,07	20	25,55	11,87
30	7,84	1,17	30	37,42	12,22
40	9,01	1,29	40	49,64	12,57
50	10,30	1,40	50	5 2,21	12,93
4 0	0 11,70	1,52	12 0	15,14	13,30
10	13,22	1,65	10	28,44	13,66
20	14,87	1,78	20	42,10	14,04
30	16,65	1,92	30	56,14	14,41
40	18,57	2,06	40	6 10,55	14,79
50	20,63	2,21	50	25,34	15,18
5 0	0 22,84	2,36	13 0	40,52	15,57
10	25,20	2,52	10	56,09	15,97
20	27,72	2,68	20	7 12,06	16,37
30	30,40	2,85	30	28,43	16,78
40	33,25	3,02	40	45,21	17,20
50	36,27	3,19	50	8 2,41	17,61
6 0	0 39,46	3,38	14 0	20,02	18,04
10	42,84	3,56	10	38,06	18,46
20	46,40	3,76	20	56,52	18,90
30	50,16	3,95	30	9 15,42	19,33
40	54,11	4,16	40	34,75	19,77
50	58,27	4,37	50	54,52	20,22
7 0	1 2,64	4,58	15 0	10 14,74	20,67
10	7,22	4,80	10	35,41	21,13
20	12,02	5,02	20	56,54	21,59
30	17,04	5,25	30	11 18,13	22,06
40	22,29	5,48	40	40,19	22,52
50	27,77	5,72	50	12 2,71	23,00
8 0	1 33,49		16 0	25,71	

Name und Zeichen.	Mittl. Länge 1850 I 1·0.	Länge des Perihels.	Länge des aufst. Knotens	Neigung.	Mittl. tägl. Bewegung.
Merkur ☿	327° 15′ 20″	75° 7′ 14″	46° 33′ 9″	7° 0′ 8″	14732″.42
Venus ♀	245 33 15	129 27 15	75 19 52	3 23 35	5767.67
Erde ♁	100 46 44	100 21 22	0 0 0	0 0 0	3548.19
Mars ♂	83 40 31	333 17 54	48 23 53	1 51 2	1886.52
Asteroiden	—	0—360	0—360	0°41′—34°43′	448—1139
Jupiter ♃	160 1 10	11 54 58	98 56 17	1 18 41	299.13
Saturn ♄	14 52 28	90 6 38	112 20 53	2 29 40	120.45
Uranus ♅	29 17 51	170 50 7	73 13 54	0 46 20	42.23
Neptun ♆	334 33 29	45 59 43	130 6 25	1 47 2	21.54

IX^c. Kometen-

	Perihel-Durchgang.	Länge des Perihels.	Länge des aufst. Knotens	Neigung.	Bewegung.
Encke	1786 I 31	156° 38′	334° 8′	13° 36′	Dir.
	1835 VIII 26	157 23	334 35	13 21	
	1862 II 6	158 0	334 31	13 5	
	1888 VI 28	158 36	334 39	12 53	
$Tempel_2$ . . .	1889 II 2	306 8	121 9	12 45	„
$Tempel_3$-Swift .	1886 V 9	43 10	297 1	5 24	„
Brorsen . . .	1890 II 24	116 23	101 28	29 24	„
Winnecke . .	1886 IX 4	276 10	104 8	14 32	„
$Tempel_1$ . . .	1885 IX 26	241 22	72 24	10 50	„
Biela $Kern_1$ . .	1852 IX 24	109 5	245 50	12 33	„
„ „ 2 . .	1852 IX 23	108 58	245 58	12 34	„
D'Arrest . . .	1884 I 14	319 11	146 7	15 42	„
Faye	1881 I 23	50 49	209 35	11 20	„
Tuttle	1885 IX 11	116 29	269 42	55 14	„
Pons-Brooks .	1884 I 26	93 21	254 6	74 3	„
Olbers	1887 X 8	149 46	84 30	44 34	„
Halley . . .	1682 IX 15	301 56	51 11	17 45	Retr.
	1759 III 13	303 10	53 50	17 37	
	1835 XI 16	304 32	55 10	17 45	
1861 II Tebutt	1861 VI 11	249 5	278 59	85 26	Dir.
1861 I „	1861 VI 3	243 22	29 56	79 46	„
1858 VI Donati	1858 IX 30	36 13	165 19	63 2	Retr.
1881 III Tebutt	1881 VI 16	265 13	270 58	63 26	Dir.
1811 I Flaugerg.	1811 IX 12	75 1	140 25	73 2	Retr.
1874 III Coggia	1874 VII 9	271 6	118 44	66 21	Dir.
1882 II „	1882 IX 17	276 25	346 1	38 0	Retr.

Sider. Umlaufszeit in m. Tagen	Sider. Umlaufszeit in Jahren	Synod. Umlauf.	Halbe grosse Axe	Excentricität.	Durchmesser. Kilom.	Masse. Sonne = 1	Dichte. Erde = 1
87.97	0.2408	$115^d.9$	0.38710	0.20560	4800	$\frac{1}{5310000}$	1.17
224.70	0.6152	583.7	0.72333	0.00684	12700	$\frac{1}{412150}$	0.81
365.26	1.0000	—	1.00000	0.01677	12756	$\frac{1}{324439}$	1.00
687.68	1.8808	779.0	1.52369	0.09326	6700	$\frac{1}{3093500}$	0.71
1138—2887	3.12–7.90	—	2.13—3.97	0.012-0.380	0—400	—	—
4432.59	11.8620	398.6	5.20280	0.04825	141100	$\frac{1}{1050}$	0.24
10759.24	29.4572	377.8	9.53886	0.05607	118600	$\frac{1}{3500}$	0.13
30688.39	84.0202	369.3	19.18329	0.04634	54000	$\frac{1}{24000}$	0.20
60181.11	164.7669	367.2	30.05508	0.00896	48400	$\frac{1}{19700}$	0.30

Tafel. (Zu 485 und XXII.)

Halbe grosse Axe.	Excentricität.	Perihel-Distanz.	Aphel-Distanz.	Umlaufszeit.	Berechner.
2.2080	0.8484	0.3348	4.0812	$3^a.281$	Encke
2.2228	0.8450	0.3444	4.1012	3.314	"
2.2174	0.8467	0.3399	4.0949	3.302	"
2.2202	0.8455	0.3431	4.0973	3.308	Backlund
3.0059	0.5521	1.3463	4.6654	5.211	Schulhof
3.1177	0.6560	1.0726	5.1627	5.505	Bossert
3.0991	0.8103	0.5878	5.6104	5.456	E. Lamp
3.2338	0.7262	0.8855	5.5822	5.815	Haerdtl
3.4853	0.4051	2.0733	4.8973	6.507	Gautier
3.5137	0.7552	0.8602	6.1673	6.587	D'Arrest
3.5287	0.7551	0.8606	6.1969	6.629	D'Arrest
3.5492	0.6263	1.3264	5.7720	6.686	Villarceau u. Leveau
3.8541	0.5490	1.7381	5.9701	7.566	Möller
5.7422	0.8215	1.0247	10.4596	13.760	Rahts
17.2232	0.9550	0.7751	33.6713	71.48	Schulhof u. Bossert
17.4078	0.9311	1.1996	33.6159	72.63	Ginzel
18.1699	0.9679	0.5829	35.7569	77.5	Rosenberger
18.0854	0.9677	0.5845	35.5863	76.9	"
17.9887	0.9674	0.5866	35.3908	76.4	"
	0.9851	0.8224		409	Kreutz
	0.9835	0.9207		415	Oppolzer
	0.9963	0.5785		ca. 1900	Hill
	0.9964	0.7345		2954	Bossert
	0.9955	1.0354		ca. 3000	Argelander
	0.9988	0.6758		—	Hepperger
	0.9999	0.0078		—	Kreutz

Stern.	Grösse	Rektasc. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.	Deklination. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.
		h m s	s	s	° ′ ″	″	″
α Andromedæ	2.0	0 2 26.65	+ 3.090	+ 0.018	+28 27 19.8	+19.90	—0.01
γ Pegasi	2.6	7 18.86	+ 3.083	+ 0.010	+14 32 38.9	+20.03	—0.02
ι Ceti	3.3	13 34.09	+ 3.056	— 0.002	— 9 27 42.0	+19.99	—0.03
12 Ceti	6.0	24 10.20	+ 3.061	+ 0.001	— 4 35 34.6	+19.93	—0.06
ζ Cassiopejæ	4.0	30 34.09	+ 3.313	+ 0.049	+53 15 49.7	+19.86	—0.07
δ Andromedæ	3.3	33 10.81	+ 3.195	+ 0.022	+30 13 53.6	+19.77	—0.07
β Ceti	2.0	37 49.01	+ 3.013	— 0.006	—18 37 5.7	+19.82	—0.08
21 Cassiopejæ	6.0	38 4.23	+ 3.853	+ 0.161	+74 21 33.1	+19.74	—0.10
ζ Andromedæ	4.1	41 14.61	+ 3.168	+ 0.018	+23 38 28.9	+19.66	—0.09
μ Andromedæ	4.0	50 22.39	+ 3.313	+ 0.031	+37 52 31.4	+19.62	—0.11
43 Cephei	4.3	53 12.19	+ 7.174	+ 1.337	+85 38 22.5	+19.51	—0.24
ε Piscium	4.0	56 58.49	+ 3.107	+ 0.009	+ 7 16 14.8	+19.48	—0.12
β Andromedæ	2.3	1 3 17.71	+ 3.342	+ 0.029	+35 0 38.3	+19.21	—0.14
υ Piscium	4.1	13 8.79	+ 3.283	+ 0.022	+26 39 33.2	+19.04	—0.16
α Ursæ min.	2.0	16 36.44	+22.446	+14.967	+88 41 43.8	+18.95	—0.96
θ Ceti	3.0	18 16.53	+ 2.997	+ 0.002	— 8 46 37.8	+18.70	—0.15
η Piscium	3.6	25 19.79	+ 3.200	+ 0.014	+14 45 9.1	+18.68	—0.18
ν Persei	3.6	30 56.21	+ 3.652	+ 0.048	+48 2 42.4	+18.39	—0.21
φ Persei	4.0	36 27.36	+ 3.727	+ 0.053	+50 6 31.7	+18.28	—0.23
τ Ceti	3.3	38 43.51	+ 2.784	— 0.000	—16 32 37.2	+19.08	—0.18
ο Piscium	4.1	39 19.25	+ 3.160	+ 0.011	+ 8 34 42.6	+18.25	—0.20
ζ Ceti	3.0	45 47.03	+ 2.958	+ 0.002	—10 54 13.3	+17.93	—0.20
β Arietis	2.8	48 17.27	+ 3.302	+ 0.018	+20 14 43.4	+17.76	—0.23
50 Cassiopejæ	4.0	53 37.93	+ 5.003	+ 0.187	+71 51 50.3	+17.66	—0.35
γ Andromedæ	2.4	56 50.55	+ 3.657	+ 0.039	+41 46 38.2	+17.45	—0.27
β Trianguli	3.0	2 2 42.16	+ 3.552	+ 0.030	+34 26 33.8	+17.22	—0.27
μ Fornacis	5.2	7 50.56	+ 2.642	— 0.003	—31 15 50.5	+17.00	—0.21
67 Ceti	6.0	11 14.85	+ 2.988	+ 0.005	— 6 57 9.3	+16.75	—0.24
ξ² Ceti	4.0	22 2.70	+ 3.182	+ 0.012	+ 7 56 38.4	+16.32	—0.28
36 Cassiopejæ	5.6	27 7.21	+ 5.578	+ 0.204	+72 18 50.9	+16.07	—0.49
ν Arietis	5.6	32 17.21	+ 3.395	+ 0.019	+21 27 48.5	+15.78	—0.31
δ Ceti	4.0	33 35.30	+ 3.070	+ 0.008	— 0 10 6.1	+15.71	—0.28
θ Persei	4.0	36 20.92	+ 4.066	+ 0.051	+48 44 28.1	+15.47	—0.38
π Ceti	4.0	38 38.95	+ 2.851	+ 0.003	—14 20 47.0	+15.43	—0.27
41 Arietis	3.8	43 12.93	+ 3.517	+ 0.023	+26 47 8.6	+15.06	—0.34
τ Persei	4.0	46 6.49	+ 4.217	+ 0.058	+52 17 27.1	+15.00	—0.41
η Eridani	3.0	50 48.57	+ 2.927	+ 0.005	— 9 21 23.6	+14.53	—0.30
α Ceti	2.3	56 16.06	+ 3.129	+ 0.010	+ 3 38 16.2	+14.34	—0.32
β Persei	2.2-3.7	3 0 41.28	+ 3.881	+ 0.036	+40 30 42.0	+14.15	—0.41
δ Arietis	4.1	5 3.21	+ 3.420	+ 0.017	+19 17 27.3	+13.87	—0.36
12 Eridani	3.3	7 11.18	+ 2.547	+ 0.001	—29 26 28.1	+14.39	—0.27
α Persei	2.0	16 6.95	+ 4.254	+ 0.048	+49 27 2.8	+13.12	—0.47
ο Tauri	3.6	18 37.50	+ 3.222	+ 0.012	+ 8 37 24.0	+12.91	—0.36
f Tauri	4.0	24 31.45	+ 3.304	+ 0.013	+12 32 30.1	+12.60	—0.38
ε Eridani	3.0	27 30.73	+ 2.822	+ 0.006	— 9 50 54.4	+12.39	—0.34
δ Persei	3.1	34 44.37	+ 4.246	+ 0.042	+47 25 7.2	+11.84	—0.50

Stern.	Grösse	Rektasc. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.	Deklination. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.
		h m s	s	s	° ′ ″	″	″
5 H. Camelop.	4.3	3 38 13.94	+ 6.230	+ 0.160	+70 58 34.2	+11.58	—0.74
η Tauri	3.0	40 38.93	+ 3.555	+ 0.018	+23 44 54.9	+11.42	—0.43
ζ Persei	3.0	46 54.25	+ 3.758	+ 0.022	+31 32 27.9	+11.00	—0.46
ξ Persei	4.0	51 30.26	+ 3.878	+ 0.025	+35 27 33.2	+10.65	—0.48
γ Eridani	3.0	52 39.83	+ 2.796	+ 0.005	—13 50 11.6	+10.47	—0.35
ν Tauri	4.0	57 2.35	+ 3.187	+ 0.009	+ 5 40 9.3	+10.24	—0.40
c Persei	4.0	4 0 18.87	+ 4.334	+ 0.037	+47 24 15.0	+ 9.97	—0.55
Groomb. 750	6.4	0 47.88	+17.037	+ 1.811	+85 15 0.9	+ 9.98	—2.12
o′ Eridani	4.4	6 15.14	+ 2.925	+ 0.006	— 7 8 17.9	+ 9.63	—0.38
δ Tauri	4.0	16 18.18	+ 3.453	+ 0.012	+17 16 18.3	+ 8.74	—0.46
ε Tauri	3.6	21 54.11	+ 3.497	+ 0.012	+18 55 27.3	+ 8.30	—0.47
α Tauri	1	29 19.30	+ 3.436	+ 0.011	+16 16 37.2	+ 7.55	—0.47
53 Eridani	4.0	32 54.78	+ 2.743	+ 0.004	—14 31 47.6	+ 7.28	—0.38
τ Tauri	4.3	35 20.57	+ 3.594	+ 0.012	+22 44 6.9	+ 7.23	—0.49
4 Camelop.	5.8	38 25.54	+ 4.973	+ 0.041	+56 33 4.7	+ 6.83	—0.68
9 Camelop.	4.3	42 37.35	+ 5.922	+ 0.069	+66 8 43.7	+ 6.64	—0.82
π^5 Orionis	4.0	48 15.68	+ 3.122	+ 0.006	+ 2 15 4.7	+ 6.17	—0.44
ε Aurigæ	3.0–4.5	53 43.03	+ 4.293	+ 0.020	+43 39 6.4	+ 5.71	—0.60
ι Tauri	5.0	56 13.32	+ 3.581	+ 0.010	+21 25 28.3	+ 5.47	—0.50
η Aurigæ	3.6	58 27.07	+ 4.198	+ 0.017	+41 4 39.6	+ 5.26	—0.59
ε Leporis	3.5	5 0 35.57	+ 2.537	+ 0.003	—22 31 35.6	+ 5.07	—0.36
β Eridani	3.0	2 11.77	+ 2.947	+ 0.005	— 5 14 9.7	+ 4.95	—0.42
μ Aurigæ	5.6	5 33.54	+ 4.096	+ 0.014	+38 20 48.8	+ 4.65	—0.58
α Aurigæ	1	8 11.66	+ 4.424	+ 0.017	+45 52 46.4	+ 4.07	—0.63
β Orionis	1	9 0.66	+ 2.880	+ 0.004	— 8 20 7.9	+ 4.43	—0.41
γ Orionis	2.0	18 57.75	+ 3.215	+ 0.005	+ 6 14 39.9	+ 3.56	—0.46
β Tauri	2.0	19 1.34	+ 3.789	+ 0.010	+28 30 32.6	+ 3.39	—0.55
δ Orionis	2.2–2.7	26 7.86	+ 3.062	+ 0.004	— 0 23 7.3	+ 2.95	—0.44
α Leporis	3.0	27 39.48	+ 2.644	+ 0.003	—17 54 20.1	+ 2.83	—0.38
ι Orionis	3.1	29 48.46	+ 2.933	+ 0.003	— 5 59 11.0	+ 2.64	—0.43
o Aurigæ	5.8	36 59.49	+ 4.642	+ 0.010	+49 46 27.6	+ 1.98	—0.68
ζ Leporis	3.6	41 44.68	+ 2.717	+ 0.003	—14 51 56.6	+ 1.60	—0.40
α Orionis	1–1.4	48 56.73	+ 3.246	+ 0.003	+ 7 23 4.4	+ 0.99	—0.47
β Aurigæ	2.0	51 5.60	+ 4.399	+ 0.004	+44 56 3.4	+ 0.77	—0.64
θ Aurigæ	3.0	51 52.79	+ 4.090	+ 0.003	+37 12 11.7	+ 0.63	—0.60
ν Orionis	4.6	6 1 0.36	+ 3.425	+ 0.002	+14 46 52.0	— 0.10	—0.50
η Geminorum	3.2–4.2	7 56.16	+ 3.622	+ 0.001	+22 32 20.4	— 0.70	—0.53
ψ′ Aurigæ	5.1	16 2.48	+ 4.625	— 0.004	+49 20 42.3	— 1.41	—0.67
β Canis maj.	2.6	17 38.12	+ 2.641	+ 0.002	—17 53 59.1	— 1.54	—0.38
10 Monocerotis	5.0	22 16.84	+ 2.962	+ 0.001	— 4 41 32.0	— 1.93	—0.43
8 Lyncis	6.0	27 10.68	+ 5.495	— 0.017	+61 34 49.9	— 2.65	—0.80
ξ^2 Canis maj.	5.1	30 14.20	+ 2.515	+ 0.002	—22 52 28.3	— 2.61	—0.36
ε Geminorum	3.3	36 51.38	+ 3.693	— 0.004	+25 14 37.8	— 3.22	—0.53
α Canis maj.	1	40 4.95	+ 2.644	+ 0.001	—16 33 33.5	— 4.69	—0.38
θ Geminorum	3.3	45 12.56	+ 3.960	— 0.007	+34 5 55.5	— 3.96	—0.57
51 H. Cephei	5.1	64 16.92	+30.044	— 2.085	+87 13 26.0	— 4.07	—4.35

Stern.	Grösse	Rektasc. 1885 · 0	Jährl. Var.	Säc. Var.	Deklination. 1885 · 0	Jährl. Var.	Säc. Var.
		h m s	s	s	° ' "	"	"
θ Canis maj.	4.3	6 48 50.81	+ 2.787	0.000	—11 53 44.0	— 4.25	—0.40
ε Canis maj.	1.6	54 6.36	+ 2.356	+ 0.001	—28 48 59.2	— 4.67	—0.33
ζ Geminorum	3.7-4.5	57 17.29	+ 3.562	— 0.005	+20 44 16.5	— 4.96	—0.50
63 Aurigæ	5.0	7 3 44.68	+ 4.135	— 0.013	+39 30 25.0	— 5.49	—0.58
λ Geminorum	3.8	11 29.03	+ 3.451	— 0.006	+16 44 48.6	— 6.18	—0.48
δ Geminorum	3.3	13 15.26	+ 3.588	— 0.007	+22 11 35.0	— 6.30	—0.50
ι Geminorum	4.0	18 35.01	+ 3.733	— 0.010	+28 1 31.9	— 6.82	—0.51
β Canis min.	3.0	20 54.85	+ 3.256	— 0.004	+ 8 31 12.4	— 6.96	—0.44
α Geminorum	2.3	27 15.48	+ 3.837	— 0.013	+32 8 22.3	— 7.53	—0.52
25 Monocerotis	5.3	31 33.53	+ 2.981	— 0.002	— 3 51 18.6	— 7.77	—0.39
α Canis min.	1	33 16.91	+ 3.144	— 0.004	+ 5 31 7.9	— 8.97	—0.42
κ Geminorum	3.6	37 30.25	+ 3.629	— 0.011	+24 40 21.7	— 8.33	—0.48
β Geminorum	1.3	38 16.69	+ 3.679	— 0.013	+28 18 10.6	— 8.39	—0.49
Groomb. 1374	5.4	46 24.53	+ 7.293	— 0.182	+74 13 23.0	— 9.01	—0.95
χ Geminorum	5.0	56 27.26	+ 3.694	— 0.015	+28 6 56.8	— 9.80	—0.47
27 Lyncis	4.6	59 48.14	+ 4.537	— 0.041	+51 50 13.1	—10.01	—0.57
ι Navis	3.0	8 2 38.78	+ 2.554	+ 0.001	—23 58 24.9	—10.17	—0.32
20 Navis	6.0	8 2.83	+ 2.757	— 0.000	—15 26 33.8	—10.64	—0.34
β Cancri	3.6	10 16.69	+ 3.257	— 0.007	+ 9 32 20.7	—10.84	—0.40
31 Lyncis	5.0	14 57.67	+ 4.130	— 0.031	+43 33 21.4	—11.25	—0.50
Br. 1197	3.6	19 54.82	+ 2.999	— 0.003	— 3 31 55.2	—11.49	—0.36
η Cancri	5.8	26 3.48	+ 3.477	— 0.013	+20 49 51.6	—11.98	—0.40
δ Cancri	4.0	38 8.93	+ 3.416	— 0.013	+18 34 34.4	—12.99	—0.38
ι Cancri	4.1	39 44.24	+ 3.643	— 0.019	+29 10 47.2	—12.91	—0.40
ζ Hydræ	3.3	49 18.87	+ 3.176	— 0.007	+ 6 22 57.0	—13.48	—0.34
ι Ursæ maj.	3.0	51 19.86	+ 4.136	— 0.045	+48 29 32.3	—13.88	—0.44
α Cancri	4.0	52 11.82	+ 3.287	— 0.010	+12 18 7.8	—13.71	—0.35
κ Ursæ maj.	3.3	55 46.27	+ 4.123	— 0.043	+47 36 37.3	—13.98	—0.43
σ¹ Ursæ maj.	5.0	9 0 15.76	+ 5.364	— 0.134	+67 36 0.9	—14.26	—0.55
θ Hydræ	4.0	8 22.85	+ 3.125	— 0.006	+ 2 47 55.6	—15.00	—0.30
83 Cancri	5.8	12 33.75	+ 3.357	— 0.013	+18 11 31.7	—15.07	—0.32
40 Lyncis	3.3	14 2.83	+ 3.670	— 0.027	+34 52 41.1	—15.00	—0.35
1 H. Draconis	4.3	20 36.38	+ 9.024	— 0.796	+81 49 59.2	—15.42	—0.85
α Hydræ	2.0	21 56.17	+ 2.949	— 0.001	— 8 9 38.5	—15.42	—0.27
θ Ursæ maj.	3.0	25 9.70	+ 4.046	— 0.056	+52 12 2.3	—16.21	—0.37
10 Leonis min.	4.8	27 10.60	+ 3.694	— 0.030	+36 54 26.9	—15.77	—0.33
ε Leonis	3.0	39 19.36	+ 3.416	— 0.018	+24 18 11.5	—16.40	—0.28
υ Ursæ maj.	3.6	42 48.33	+ 4.316	— 0.082	+59 34 44.6	—16.72	—0.35
Groomb. 1586	6.0	48 4.77	+ 5.494	— 0.225	+73 25 32.1	—16.86	—0.44
π Leonis	5.0	54 8.15	+ 3.174	— 0.008	+ 8 35 43.7	—17.12	—0.24
η Leonis	3.3	10 1 3.81	+ 3.281	— 0.013	+17 19 22.5	—17.41	—0.23
α Leonis	1.3	2 14.81	+ 3.200	— 0.010	+12 31 43.7	—17.45	—0.22
λ Hydræ	4.0	4 58.91	+ 2.923	+ 0.001	—11 47 10.1	—17.65	—0.20
λ Ursæ maj.	3.3	10 9.51	+ 3.641	— 0.039	+43 29 17.0	—17.85	—0.24
ζ Leonis	3.0	10 17.59	+ 3.347	— 0.018	+23 59 24.1	—17.78	—0.22
μ Ursæ maj.	3.0	15 28.54	+ 3.596	— 0.036	+42 4 38.6	—17.97	—0.23

Stern.	Grösse	Rektasc. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.	Deklination. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.
		h m s	s	s	° ′ ″	″	″
μ Hydræ	4.0	10 20 31.73	+ 2.899	+ 0.004	−16 14 58.9	−18.26	−0.17
9 H. Draconis	4.6	25 17.43	+ 5.260	− 0.280	+76 18 17.4	−18.37	−0.31
42 Leonis min.	5.0	39 28.12	+ 3.349	− 0.023	+31 17 16.1	−18.85	−0.16
l Leonis	5.1	43 12.74	+ 3.158	− 0.008	+11 9 12.2	−18.96	−0.14
β Ursæ maj.	2.3	54 53.79	+ 3.658	− 0.063	+56 59 55.1	−19.21	−0.14
α Ursæ maj.	2.0	56 37.44	+ 3.752	− 0.082	+62 22 17.9	−19.36	−0.14
χ Leonis	4.8	59 5.07	+ 3.096	− 0.006	+ 7 57 27.0	−19.37	−0.11
ψ Ursæ maj.	3.1	11 3 11.74	+ 3.395	− 0.037	+45 7 19.8	−19.48	−0.12
β Crateris	4.0	6 0.12	+ 2.943	+ 0.010	−22 11 54.1	−19.59	−0.09
δ Leonis	2.3	7 59.51	+ 3.199	− 0.013	+21 9 13.1	−19.65	−0.10
δ Crateris	3.3	13 35.46	+ 2.994	+ 0.006	−14 9 23.4	−19.44	−0.08
σ Leonis	4.1	15 12.39	+ 3.096	− 0.004	+ 6 39 33.8	−19.67	−0.08
λ Draconis	3.3	24 34.08	+ 3.630	− 0.112	+69 57 56.5	−19.84	−0.08
ξ Hydræ	4.0	27 20.81	+ 2.941	+ 0.017	−31 13 17.6	−19.88	−0.05
υ Leonis	4.8	31 3.63	+ 3.070	+ 0.000	− 0 11 20.1	−19.85	−0.05
3 Draconis	5.3	36 3.13	+ 3.401	− 0.087	+67 22 52.9	−19.91	−0.05
χ Ursæ maj.	3.8	39 58.52	+ 3.189	− 0.036	+48 25 1.2	−19.95	−0.05
β Leonis	2.0	43 11.60	+ 3.063	− 0.007	+15 12 53.5	−20.10	−0.03
β Virginis	3.3	44 42.27	+ 3.124	− 0.000	+ 2 24 45.7	−20.27	−0.02
γ Ursæ maj.	2.3	47 46.69	+ 3.182	− 0.043	+54 20 2.8	−20.02	−0.02
ο Virginis	4.0	59 21.07	+ 3.057	− 0.003	+ 9 22 18.2	−20.01	+0.01
ε Corvi	3.0	12 4 12.66	+ 3.077	+ 0.014	−21 58 49.0	−20.03	+0.02
4 H. Draconis	4.6	6 47.98	+ 2.883	− 0.125	+78 15 19.5	−20.02	+0.02
δ Ursæ maj.	3.4	9 43.88	+ 2.996	− 0.042	+57 40 17.8	−20.03	+0.03
η Virginis	3.3	14 1.33	+ 3.067	+ 0.003	− 0 1 39.9	−20.04	+0.04
δ Corvi	2.3	23 54.91	+ 3.098	+ 0.012	−15 52 31.0	−20.09	+0.06
β Corvi	2.3	28 20.78	+ 3.138	+ 0.016	−22 45 39.0	−19.95	+0.06
24^2 Comæ	5.2	29 21.68	+ 3.013	− 0.006	+19 0 37.1	−19.86	+0.06
76 Ursæ maj.	6.0	36 32.28	+ 2.643	− 0.039	+63 20 40.4	−19.82	+0.07
ε Ursæ maj.	2.0	48 58.03	+ 2.655	− 0.027	+56 35 2.5	−19.63	+0.09
δ Virginis	3.0	49 48.62	+ 3.019	+ 0.003	+ 4 1 21.4	−19.63	+0.10
12^2 Canum	2.9	50 38.85	+ 2.814	− 0.015	+38 56 22.8	−19.50	+0.10
ε Virginis	2.6	56 27.14	+ 2.986	− 0.001	+11 34 38.8	−19.42	+0.11
θ Virginis	4.3	13 3 59.73	+ 3.100	+ 0.008	− 4 55 29.1	−19.31	+0.13
43 Comæ	4.1	6 30.41	+ 2.805	− 0.008	+28 27 40.7	−18.32	+0.13
γ Hydræ	3.2	12 40.17	+ 3.248	+ 0.019	−22 33 52.7	−19.09	+0.16
α Virginis	1	19 8.08	+ 3.152	+ 0.012	−10 33 38.9	−18.89	+0.16
ζ′ Ursæ maj.	2.1	19 17.62	+ 2.426	− 0.017	+55 31 34.3	−18.89	+0.13
Groomb. 2001	5.7	23 12.14	+ 1.518	+ 0.008	+72 59 20.0	−18.77	+0.09
ζ Virginis	3.3	28 49.99	+ 3.052	+ 0.006	− 0 0 27.2	−18.51	+0.18
τ Bootis	4.6	41 47.85	+ 2.851	− 0.001	+18 1 49.1	−18.07	+0.19
η Ursæ maj.	2.0	43 0.55	+ 2.372	− 0.010	+49 53 15.2	−18.08	+0.16
89 Virginis	5.0	43 37.42	+ 3.249	+ 0.016	−17 33 40.2	−18.07	+0.21
η Bootis	3.0	49 12.55	+ 2.857	− 0.001	+18 58 28.7	−18.16	+0.20
τ Virginis	4.0	55 47.63	+ 3.018	+ 0.006	+ 2 6 4.7	−17.58	+0.22
α Draconis	3.3	14 1 16.56	+ 1.621	+ 0.005	+64 55 32.8	−17.30	+0.13

Stern.	Grösse	Rektasc. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.	Deklination. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.
		h m s	s	s	° ′ ″	″	″
d Bootis	5.0	14 5 9.26	+ 2.737	— 0.002	+25 38 12.5	—17.22	+0.21
ι Virginis	4.0	9 59.04	+ 3.138	+ 0.010	— 5 27 4.9	—17.33	+0.25
α Bootis	1	10 24.96	+ 2.733	+ 0.000	+19 46 53.8	—18.87	+0.23
λ Bootis	4.0	12 0.69	+ 2.282	— 0.005	+46 37 0.2	—16.67	+0.19
θ Bootis	3.8	21 16.91	+ 2.042	— 0.003	+52 22 57.6	—16.76	+0.18
ρ Bootis	3.6	26 52.44	+ 2.586	— 0.002	+30 52 36.0	—15.95	+0.23
π' Bootis	4.3	35 19.29	+ 2.816	+ 0.003	+16 54 42.0	—15.64	+0.26
μ Virginis	4.0	36 59.99	+ 3.154	+ 0.010	— 5 9 27.6	—15.83	+0.30
109 Virginis	3.6	40 26.09	+ 3.027	+ 0.007	+ 2 22 41.0	—15.36	+0.29
α Libræ	2.3	44 31.02	+ 3.308	+ 0.016	—15 33 48.2	—15.18	+0.32
Groomb. 2164	5.8	48 31.28	+ 1.517	+ 0.009	+59 45 42.3	—14.70	+0.16
β Ursæ min.	2.0	51 3.01	— 0.236	+ 0.102	+74 37 31.6	—14.73	—0.02
γ Scorpii	3.4	57 20.40	+ 3.498	+ 0.021	—24 49 45.5	—14.38	+0.36
ψ Bootis	4.3	59 31.07	+ 2.569	+ 0.001	+27 23 47.5	—14.22	+0.27
β Libræ	2.0	15 10 49.14	+ 3.220	+ 0.012	— 8 57 28.5	—13.51	+0.35
μ Bootis	3.8	20 8.73	+ 2.264	+ 0.001	+37 46 51.2	—12.80	+0.26
γ Ursæ min.	3.0	20 55.20	— 0.132	+ 0.075	+72 14 35.7	—12.81	—0.01
β Coronæ	3.8	23 5.29	+ 2.473	+ 0.002	+29 30 9.3	—12.61	+0.29
ν' Bootis	4.5	26 47.94	+ 2.154	+ 0.002	+41 13 31.8	—12.44	+0.25
α Coronæ	2.0	29 49.14	+ 2.539	+ 0.002	+27 6 8.2	—12.31	+0.30
α Serpentis	2.3	38 36.21	+ 2.951	+ 0.006	+ 6 47 17.1	—11.55	+0.35
β Serpentis	3.3	40 52.78	+ 2.765	+ 0.004	+15 46 56.8	—11.48	+0.34
μ Serpentis	3.3	43 37.11	+ 3.124	+ 0.009	— 3 4 38.9	—11.24	+0.38
ε Serpentis	3.3	45 4.99	+ 2.985	+ 0.007	+ 4 49 28.4	—11.08	+0.37
ζ Ursæ min.	4.3	48 10.99	— 2.270	+ 0.203	+78 8 51.9	—10.91	—0.28
ε Coronæ	4.0	52 49.59	+ 2.481	+ 0.003	+27 12 41.2	—10.63	+0.31
δ Scorpii	2.3	53 32.05	+ 3.538	+ 0.016	—22 17 36.9	—10.54	+0.44
β Scorpii	2.0	58 45.03	+ 3.478	+ 0.014	—19 29 23.7	—10.15	+0.44
θ Draconis	3.6	59 44.21	+ 1.120	+ 0.015	+58 52 21.6	— 9.70	+0.15
δ Ophiuchi	3.0	16 8 19.14	+ 3.138	+ 0.008	— 3 23 50.6	— 9.53	+0.41
ε Ophiuchi	3.3	12 14.19	+ 3.168	+ 0.008	— 4 24 41.3	— 9.05	+0.42
τ Herculis	3.3	16 16.99	+ 1.797	+ 0.005	+46 35 15.6	— 8.73	+0.24
γ Herculis	3.1	16 50.81	+ 2.643	+ 0.004	+19 25 25.9	— 8.68	+0.35
α Scorpii	1.3	22 21.40	+ 3.669	+ 0.015	—26 10 33.4	— 8.32	+0.49
β Herculis	2.3	25 16.56	+ 2.575	+ 0.004	+21 44 26.9	— 8.07	+0.35
A Draconis	5.0	28 12.59	— 0.146	+ 0.041	+69 1 1.0	— 7.78	—0.02
ζ Ophiuchi	2.6	30 49.59	+ 3.297	+ 0.009	—10 19 59.8	— 7.57	+0.45
η Herculis	3.1	38 57.24	+ 2.055	+ 0.004	+39 8 29.6	— 7.03	+0.28
Groomb. 2377	5.0	43 7.07	+ 1.135	+ 0.011	+56 59 15.4	— 6.55	+0.16
49 Herculis	6.0	46 50.73	+ 2.729	+ 0.004	+15 10 4.6	— 6.29	+0.38
κ Ophiuchi	3.3	52 13.48	+ 2.836	+ 0.004	+ 9 33 16.7	— 5.83	+0.40
ε Herculis	3.3	55 53.39	+ 2.293	+ 0.003	+31 5 46.7	— 5.51	+0.32
ε Ursæ min.	4.3	57 47.14	— 6.351	+ 0.308	+82 13 29.4	— 5.38	—0.90
η Ophiuchi	2.3	17 3 46.96	+ 3.434	+ 0.007	—15 34 53.6	— 4.77	+0.49
α Herculis	3.2–4.0	9 24.23	+ 2.733	+ 0.004	+14 31 19.5	— 4.36	+0.39
θ Ophiuchi	3.4	14 56.82	+ 3.679	+ 0.008	—24 53 1.7	— 3.95	+0.53

Stern.	Grösse	Rektasc. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.	Deklination. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.
		h m s	s	s	° ′ ″	″	″
β Draconis	2.6	17 27 50.09	+ 1.352	+ 0.005	+52 23 12.7	− 2.80	+0.20
α Ophiuchi	2.0	29 35.77	+ 2.782	+ 0.003	+12 38 40.3	− 2.87	+0.40
ι Herculis	3.3	36 13.16	+ 1.692	+ 0.004	+46 4 4.5	− 2.08	+0.25
β Ophiuchi	3.0	37 47.48	+ 2.961	+ 0.003	+ 4 36 58.4	− 1.77	+0.43
μ Herculis	3.3	41 57.50	+ 2.346	+ 0.003	+27 47 18.7	− 2.32	+0.35
ψ Draconis	4.6	43 59.06	− 1.083	+ 0.016	+72 12 17.9	− 1.67	−0.16
θ Herculis	4.0	52 18.52	+ 2.054	+ 0.002	+37 15 58.7	− 0.65	+0.30
67 Ophiuchi	4.0	54 53.19	+ 3.006	+ 0.002	+ 2 56 16.9	− 0.45	+0.44
γ Draconis	2.3	53 56.15	+ 1.390	+ 0.003	+51 30 9.7	− 0.56	+0.20
γ Sagittarii	3.3	58 25.25	+ 3.852	+ 0.002	−30 25 27.9	− 0.35	+0.50
72 Ophiuchi	3.3	18 1 53.84	+ 2.842	+ 0.002	+ 9 32 53.9	+ 0.26	+0.42
ο Herculis	3.8	3 3.41	+ 2.338	+ 0.002	+28 44 50.3	+ 0.27	+0.34
μ Sagittarii	4.0	6 53.16	+ 3.586	+ 0.001	−21 5 16.6	+ 0.60	+0.56
δ Ursæ min.	4.3	9 24.90	−19.452	− 0.369	+86 36 37.8	+ 0.86	−2.83
η Serpentis	3.0	15 21.53	+ 3.101	+ 0.001	− 2 55 39.7	+ 0.67	+0.46
109 Herculis	4.0	18 47.86	+ 2.555	+ 0.002	+21 43 5.1	+ 1.39	+0.37
χ Draconis	3.8	23 7.74	− 1.081	− 0.015	+72 40 57.6	+ 1.64	−0.17
α Lyræ	1	33 2.70	+ 2.031	+ 0.002	+38 40 38.0	+ 3.18	+0.29
110 Herculis	4.0	40 42.75	+ 2.579	+ 0.001	+20 26 12.7	+ 3.20	+0.37
β Lyræ	3.4-4.5	45 50.06	+ 2.213	+ 0.002	+33 13 47.3	+ 4.00	+0.32
σ Sagittarii	2.3	48 8.06	+ 3.722	− 0.005	−26 26 18.5	+ 4.11	+0.53
θ¹ Serpentis	4.2	50 30.14	+ 2.981	− 0.000	+ 4 3 17.8	+ 4.43	+0.42
γ Lyræ	3.3	54 38.49	+ 2.242	+ 0.001	+32 31 56.7	+ 4.75	+0.32
ζ Aquilæ	3.0	19 0 7.45	+ 2.755	+ 0.000	+13 41 35.6	+ 5.11	+0.39
π Sagittarii	3.1	2 55.48	+ 3.570	− 0.006	−21 12 20.0	+ 5.40	+0.50
ω Aquilæ	5.6	12 25.11	+ 2.815	− 0.000	+11 23 19.5	+ 6.26	+0.39
κ Cygni	4.0	14 26.71	+ 1.388	− 0.003	+53 9 23.6	+ 6.51	+0.19
τ Draconis	4.8	17 45.57	− 1.119	− 0.056	+73 8 30.2	+ 6.78	−0.15
δ Aquilæ	3.3	19 42.00	+ 3.024	− 0.002	+ 2 53 10.4	+ 6.93	+0.41
β Cygni	3.0	26 5.02	+ 2.417	+ 0.001	+27 43 7.1	+ 7.34	+0.33
h Sagittarii	4.6	29 42.48	+ 3.654	− 0.010	−25 8 11.1	+ 7.64	+0.49
θ Cygni	4.6	33 21.46	+ 1.609	− 0.002	+49 57 18.5	+ 8.18	+0.21
λ Ursæ min.	6.4	38 55.71	−63.582	−29.694	+88 57 19.5	+ 8.39	−7.85
γ Aquilæ	3.0	40 47.53	+ 2.851	− 0.001	+10 20 1.3	+ 8.55	+0.37
δ Cygni	2.8	41 22.87	+ 1.875	+ 0.000	+44 51 1.6	+ 8.62	+0.24
α Aquilæ	1.3	45 10.33	+ 2.927	− 0.001	+ 8 33 55.0	+ 9.27	+0.38
β Aquilæ	4.0	49 39.84	+ 2.946	− 0.002	+ 6 7 12.9	+ 8.76	+0.38
γ Sagittæ	3.6	53 38.57	+ 2.666	+ 0.000	+19 10 49.7	+ 9.58	+0.34
θ Aquilæ	3.0	20 5 22.24	+ 3.096	− 0.004	− 1 9 42.9	+10.45	+0.38
ο² Cygni	4.5	10 0.64	+ 1.888	+ 0.000	+46 23 34.4	+10.78	+0.23
α² Capricorni	3.3	11 40.41	+ 3.332	− 0.009	−12 54 2.0	+10.91	+0.40
κ Cephei	4.3	12 44.56	− 1.920	− 0.165	+77 21 52.3	+10.99	−0.24
γ Cygni	2.4	18 6.10	+ 2.152	+ 0.002	+39 53 20.6	+11.39	+0.25
ε Delphini	4.0	27 43.13	+ 2.866	− 0.001	+10 54 46.7	+12.03	+0.33
β Delphini	3.3	32 9.36	+ 2.812	− 0.001	+14 11 44.2	+12.33	+0.32
α Delphini	3.6	34 17.79	+ 2.786	− 0.000	+15 30 24.8	+12.50	+0.31

Stern.	Grösse	Rektasc. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.	Deklination. 1885·0	Jährl. Var.	Säc. Var.
		h m s	s	s	° ′ ″	″	″
α Cygni	1.6	20 37 30.72	+ 2.043	+ 0.002	+44 52 11.1	+12.73	+0.23
ε Aquarii	3.6	41 27.01	+ 3.250	— 0.008	— 9 54 58.2	+12.96	+0.36
32 Vulpeculæ	5.3	49 39.56	+ 2.554	+ 0.003	+27 37 14.3	+13.52	+0.27
76 Draconis	6.0	50 50.69	— 4.025	— 0.523	+82 6 16.0	+13.61	—0.43
ν Cygni	4.0	52 53.18	+ 2.234	+ 0.004	+40 43 29.3	+13.73	+0.23
61¹ Cygni	5.7	21 1 44.48	+ 2.679	+ 0.004	+38 11 3.4	+17.51	+0.23
ν Aquarii	4.3	3 19.76	+ 3.272	— 0.010	—11 50 12.4	+14.38	+0.33
ζ Cygni	3.0	8 2.51	+ 2.550	+ 0.004	+29 45 20.1	+14.60	+0.25
α Equulei	4.0	10 4.49	+ 2.999	— 0.003	+ 4 46 22.5	+14.71	+0.29
α Cephei	2.6	15 50.07	+ 1.436	— 0.007	+62 5 54.3	+15.15	+0.13
1 Pegasi	4.3	16 46.06	+ 2.773	+ 0.002	+19 18 46.5	+15.25	+0.26
ζ Capricorni	4.1	20 6.04	+ 3.434	— 0.017	—22 54 32.8	+15.38	+0.32
β Aquarii	3.0	25 30.27	+ 3.161	— 0.007	— 6 4 35.9	+15.67	+0.28
β Cephei	3.0	27 10.42	+ 0.795	— 0.035	+70 3 21.4	+15.75	+0.07
74 Cygni	5.0	32 20.40	+ 2.400	+ 0.007	+39 53 49.4	+16.04	+0.20
ε Pegasi	2.3	38 32.27	+ 2.946	— 0.001	+ 9 20 53.4	+16.36	+0.24
δ Capricorni	3.0	40 41.58	+ 3.317	— 0.013	—16 38 55.4	+16.16	+0.27
16 Pegasi	5.3	47 49.80	+ 2.726	+ 0.005	+25 23 3.7	+16.81	+0.21
α Aquarii	3.0	59 52.62	+ 3.082	— 0.004	— 0 52 41.4	+17.36	+0.22
θ Pegasi	3.3	22 4 23.93	+ 3.026	— 0.001	+ 5 37 56.7	+17.60	+0.21
ζ Cephei	3.4	6 51.87	+ 2.071	+ 0.011	+57 38 4.5	+17.65	+0.14
θ Aquarii	4.3	10 45.91	+ 3.168	— 0.008	— 8 21 20.0	+17.80	+0.21
γ Aquarii	3.4	15 42.97	+ 3.099	— 0.004	— 1 57 59.5	+18.03	+0.19
3 Lacertæ	4.4	19 2.31	+ 2.348	+ 0.015	+51 39 11.0	+17.94	+0.14
7 Lacertæ	4.0	26 33.27	+ 2.461	+ 0.017	+49 41 29.0	+18.41	+0.13
η Aquarii	3.8	29 26.80	+ 3.083	— 0.003	— 0 42 36.1	+18.46	+0.17
ζ Pegasi	3.3	35 43.60	+ 2.990	+ 0.002	+10 13 52.3	+18.70	+0.15
λ Pegasi	4.0	40 59.54	+ 2.884	+ 0.008	+22 57 38.5	+18.87	+0.14
ι Cephei	3.4	45 35.27	+ 2.118	+ 0.022	+65 35 44.2	+18.87	+0.09
δ Aquarii	3.0	48 32.78	+ 3.188	— 0.011	—16 25 56.0	+19.08	+0.14
α Piscis austr.	1.3	51 17.65	+ 3.326	— 0.021	—30 13 54.1	+19.00	+0.14
o Andromedæ	3.6	56 37.86	+ 2.748	+ 0.019	+41 42 29.0	+19.29	+0.10
α Pegasi	2.0	59 1.95	2.984	+ 0.006	+14 35 12.1	+19.32	+0.11
o² Aquarii	4.0	23 3 18.88	+ 3.205	— 0.014	—21 47 47.5	+19.50	+0.11
π Cephei	4.6	4 14.53	+ 1.894	+ 0.024	+74 45 57.1	+19.42	+0.06
Br. 3077	6.0	7 44.88	+ 2.864	+ 0.030	+56 32 0.4	+19.82	+0.08
τ Pegasi	4.6	14 56.73	+ 2.962	+ 0.011	+23 6 39.1	+19.65	+0.08
κ Piscium	5.3	21 2.21	+ 3.074	— 0.000	+ 0 37 33.9	+19.66	+0.07
70 Pegasi	5.0	23 20.32	+ 3.028	+ 0.006	+12 7 33.7	+19.83	+0.06
ι Andromedæ	4.0	32 29.88	+ 2.927	+ 0.025	+42 37 52.9	+19.90	+0.04
ι Piscium	4.3	34 2.11	+ 3.083	+ 0.003	+ 5 0 10.6	+19.48	+0.04
γ Cephei	3.3	34 38.10	+ 2.414	+ 0.075	+76 59 25.5	+20.07	+0.03
ω² Aquarii	4.6	36 45.49	+ 3.114	— 0.008	—15 10 50.9	+19.90	+0.04
δ Sculptoris	4.4	42 56.03	+ 3.131	— 0.016	—28 45 58.6	+19.90	+0.03
φ Pegasi	5.6	46 38.27	+ 3.043	+ 0.011	+18 28 53.4	+19.98	+0.02
ω Piscium	4.0	53 24.35	+ 3.077	+ 0.005	+ 6 13 35.8	+19.94	+0.01

Stern.	Rektasc. 1885.	Deklin. 1885.	Grösse. Max.	Min.	Farbe.	Spektr. Typus.	Periode.
	h m	° '					
T Cassiopejæ	0 17.0	55 9	6	11	R.	III a	436^d
B Cassiopejæ	18.4	63 31	> 1	?	—	—	Nova 1572
Andromedæ	36.4	40 38	6	?	G. R.	—	Nova 1885
S Cassiopejæ	1 11.2	72 0	7	< 13	R.	-	615
R Arietis	2 9.6	24 31	8	12	G. R.	—	186
ο Ceti	13.5	— 3 30	2	9	R.	III a	331
β Persei	3 0.7	40 31	2.2	3.7	W.	—	$2^d.8673$
R Tauri	4 22.0	9 54	7	< 13	R.	III a	326
ε Aurigæ	53.7	43 39	3	4.5	G. W.	—	Irregulär
R Aurigæ	5 8.0	53 27	6	13	R.	—	465
α Orionis	48.9	7 24	1	1.4	R.	III a	Irregulär
Orionis	49.0	20 9	6	?	G. R.	—	Nova 1885
η Geminorum	6 7.9	22 32	3	4	G.	—	229
ζ Geminorum	57.3	20 44	3.7	4.5	G.	—	$10^d.155$
S Can. min.	7 26.5	8 34	7	< 11	G. R.	III a	332
T Geminorum	42.4	24 1	8	< 13	R.	—	288
R Cancri	8 10.2	12 5	6	< 12	G. R.	III a	354
S Cancri	37.4	19 27	8.2	9.8	W. G.	I a	$9^d.484$
T Hydræ	50.1	— 8 42	7	< 12	G. R.	—	289
R Urs. maj.	10 36.5	69 23	6	12	G. R.	III a	303
η Argus	40.6	— 59 5	> 1	6	R.	—	Irregulär
R Comæ	11 58.4	19 26	7	< 13	G. R.	—	363
R Virginis	12 32.7	7 37	7	11	R. G.	III a	146
U Virginis	45.3	6 11	8	13	G. R.	III a	207
R Hydræ	13 23.4	— 22 41	4	10?	R.	III a	437
δ Libræ	14 54.8	— 8 4	4.9	6.1	G. W.	—	2.3273
S Coronæ	15 16.7	31 47	6	13	R. G.	III a	361
R Coronæ	43.8	28 31	6	13	R.	—	Irregulär
T Coronæ	54.7	26 15	2	10	W. G.	—	Nova 1866
T Scorpii	16 10.2	— 22 42	7	< 10	—	—	Nova 1860
U Herculis	20.7	19 9	6	12	R. G.	III a	408
S Herculis	46.7	15 8	6	12	R.	III a	303
α Herculis	17 9.4	14 31	3	4	R.	III a	Irregulär
Ophiuchi	23.8	— 21 23	> 1	?	—	—	Nova 1604
T Herculis	18 4.8	31 0	7	12	R.	—	165
R Scuti	41.4	— 5 50	5	9	R.	—	71
R Aquilæ	19 0.8	8 4	6	11	R.	III a	345
χ Cygni	46.2	32 38	4	13	R.	III a	407
η Aquilæ	46.6	0 43	3.5	4.7	G.	II a	7.1764
R Sagittæ	20 8.8	16 23	8	10	G. R.	—	70.4
T Aquarii	43.9	— 5 34	7	13	R.	—	203
S Cephei	21 36.7	78 6	7	11	R.	III b	485
Cygni	37.2	42 19	3	< 12	G. R.		Nova 1876
δ Cephei	22 24.9	57 50	3.7	4.9	G. R.		5.3664
R Pegasi	23 0.9	9 55	7	12?	R.		382
R Cassiopejæ	52.6	50 45	5	< 12	R.		426

X[e]. Verzeichnis von Doppelsternen.

(Nach den Katalogen von W. und O. Struve und J. Herschel.)

Stern.	Rektasc. 1885.		Deklination. 1885.		Distanz.	Grössen.		Farben.	
	h	m	°	′	″				
η Cassiopejæ	0	42.1	57	12	5.7	4.0	7.6	g.	r.
α Urs. min.	1	16.6	88	42	18.6	2.0	9.0	g.	blch.
γ Arietis		47.2	18	44	8.5	4.2	4.4	w.	w.
γ Andromedæ		56.8	41	47	10.3	3.0	5.0	g.	bl.
ι Cassiopejæ	2	19.6	66	53	2.0	4.2	7.1	g.	bl.
32 Eridani	3	48.6	− 3	18	6.8	4	6	g.	bl.
β Orionis	5	9.0	− 8	20	9.2	1	8	w.	—
λ Orionis		28.8	9	52	4.2	3.5	6.0	g.	r.
ζ Orionis		35.0	− 2	0	2.5	2.0	5.7	g.	rch.
α Geminorum	7	27.3	32	8	5.7	2.3	3.3	grch.	grch.
ζ Cancri	8	5.6	18	0	0.6	5.0	5.7	g.	g.
ι² Cancri		47.3	31	1	1.4	5.9	6.4	g.	g.
38 Lyncis	9	11.7	37	17	2.8	4.0	6.7	grch.	bl.
γ Leonis	10	13.6	20	25	3.4	2.0	3.5	g.	grch.
ξ Urs. maj.	11	12.0	32	11	1.6	4.0	4.9	g.	aschf.
α Crucis	12	20.2	− 62	28	4.8	2	2.5	—	
δ Corvi		23.9	− 15	53	23.5	3.0	8.5	gch.	r.
γ Virginis		35.8	− 0	49	5.0	3.0	3.0	g.	g.
ζ Urs. maj.	13	19.3	55	32	14.5	2.1	4.2	w.	w.
α Centauri	14	31.8	− 60	22	1	1	2	w.	w.
ε Bootis		40.0	27	34	2.8	3.0	6.3	g.	bl.
ξ Bootis		46.1	19	34	4.8	4.7	6.6	g.	r.
η Coronæ	15	18.5	30	42	0.8	5.2	5.7	g.	g.
δ Serpentis		29.4	10	55	3.3	3.2	4.3	g.	aschf.
ζ Coronæ		35.0	37	1	6.3	4.1	5.0	grch.	grch.
β Scorpii		58.8	− 19	29	13.8	2.0	4.0	w.	rch.
σ Coronæ	16	10.4	34	9	3.6	5.0	6.1	gch.	blch.
α Scorpii		22.3	− 26	11	3.2	1.0	7.0	r.	gr.
λ Ophiuchi		25.1	2	14	1.6	4.0	6.1	g.	blch.
α Herculis	17	9.4	14	31	4.7	3.0	6.1	g.	r.
ρ Herculis		19.7	37	15	3.9	4.0	5.1	grch.	grch.
τ Ophiuchi		56.9	− 8	11	1.8	5.0	5.7	gch.	gch.
70 p Ophiuchi		59.7	2	32	2.6	4.1	6.1	g.	r.
ε¹ Lyræ	18	40.5	39	33	3.1	4.6	6.3	grch.	blch.
ε² Lyræ		40.5	39	29	2.5	4.9	5.2	w.	w.
β Cygni	19	26.1	27	43	34.5	3.0	5.5	g.	bl.
γ Delphini	20	41.3	15	43	11.3	3.5	5.0	g.	bl.
λ Cygni		42.9	36	4	0.7	5.0	6.3	w.	—
61 Cygni	21	1.7	38	11	19.8	5.3	5.9	g.	g.
τ Cygni		10.2	37	33	1.2	4.8	7.6	g.	bl.
β Cephei		27.2	70	3	13.4	3.0	8.0	grch.	bl.
μ Cygni		39.0	28	14	3.8	4.0	5.0	w.	blch.
ξ Cephei	22	0.4	64	4	6.6	5.0	6.8	gch.	bl.
ζ Aquarii		23.0	− 0	36	3.5	4.0	4.1	grch.	grch.
π Cephei	23	4.2	74	46	1.3	5.2	7.5	g.	r.
σ Cassiopejæ		53.2	55	6	3.0	5.5	7.5	gr.	bl.

Bedeutung der Farbenbezeichnungen: w. = weiss; g. = gelb; gch. = gelblich; gr. = grün; grch. = grünlich; bl. = blau; blch. = bläulich; r. = rot; rch. = rötlich.

X^d. Verzeichnis von Nebelflecken und Sternhaufen.

(Nach dem Gen.-Kat. von John Herschel.)

Rektasc. 1885.		Deklination. 1885.		Bemerkungen.	
h	m	°	′		
0	36	40	38	neb.	Sehr gross und hell. (Androm.)
0	42	— 25	55	„	Hell. Mitte verdichtet.
2	11	56	37	cum.	Zieml. gross und reich. Sterne 7.—14. Grösse.
3	29	— 36	31	neb.	Hell; sternartige Anhäufung in der Mitte.
3	39	23	25	„	„ Veränderlich. (Tempel.)
5	10	— 40	11	cum.	Kugelförmig, auflösbar, Mitte verdichtet.
5	29	— 5	8	neb.	Sehr gross und hell. (Orion.)
5	29	— 4	55	„	Nebelstern.
5	39	— 69	10	„	Hell und gross.
5	45	32	31	cum.	Reich, Mitte verdichtet.
6	57	— 8	11	„	Gross und reich.
7	18	29	43	neb.	Kl. Doppelnebel mit 2 sternartigen Kernen.
7	26	65	57	„	Hell und gross, centrale Verdichtung.
8	34	20	22	cum.	Gross und reich. (Cancer.)
8	45	12	14	„	Gross und hell, Sterne 10.—15. Grösse.
9	46	70	19	neb.	Gross, ziemlich hell.
10	2	— 39	52	„	Planetarisch, Stern 9^m in der Mitte.
10	41	— 59	5	„	Sehr gross und hell. (η Argus.)
11	8	55	38	„	Planetarisch.
12	13	15	4	„	Hell. 3 spiralförmige Arme.
12	17	16	28	„	Schwach. 2 spiralförmige Arme.
12	26	15	3	„	Heller Doppelnebel.
12	33	— 26	7	cum.	Kugelförmig, reich, auflösbar. Sterne 12^m.
13	7	18	47	„	Coma Berenices.
13	19	— 42	25	neb.	Hell und gross.
13	25	47	47	„	Spiralförmig, oder Kern und Ring.
13	31	— 29	17	„	Hell, 3-armig. Spiralnebel.
13	37	28	57	cum.	Kugelförmig, hell. Sterne 11^m.
15	13	2	31	„	„ „ Mitte verdichtet.
16	10	— 22	41	„	„ „ „ „
16	17	— 26	15	„	Gross, auflösbar.
16	37	36	41	„	„ ; hell und reich.
17	12	— 51	37	neb.	Planetarisch, rund, klein.
17	14	— 38	22	„	Ringförmig, sehr schwach.
17	14	43	15	cum.	Hell, gross, auflösbar. Centrale Verdichtung.
17	22	— 23	39	neb.	Ringförmig; ziemlich hell.
17	55	— 23	2	„	Sehr hell und gross. (Trifid nebula.)
17	57	— 24	21	„	„ „ , unregelmässige Form.
18	12	— 18	28	cum.	Reich, centrale Verdichtung.
18	14	— 16	13	neb.	Hell, sehr gross. (Scut. Sob.)
18	49	32	53	„	Ringförmig. (Lyra.)
19	55	22	24	„	Sehr hell und gross. (Dumb-bell nebula.)
20	17	19	44	„	Klein, rund, planetarisch.
20	58	— 11	49	„	Klein, planetarisch, elliptisch.
21	28	— 1	20	cum.	Hell, gross, kugelförmig; auflösbar.
23	20	41	54	neb.	Hell, klein, planetarisch.

(Zu 380; $\varphi = 47^\circ\,22'\,40''$)

D	Si (φ — D) / Co D	Diff.	Co (φ — D) / Co D	Diff.	Se D	Diff.
°						
−30	1.127	2.6	0.252	2.8	1.155	1.9
−29	1.111	2.5	0.269	2.8	1.143	1.8
−28	1.096	2.5	0.286	2.7	1.133	1.7
−27	1.081	2.5	0.302	2.7	1.122	1.6
−26	1.066	2.4	0.318	2.6	1.113	1.5
−25	1.052	2.4	0.334	2.6	1.103	1.5
−24	1.037	2.3	0.349	2.5	1.095	1.4
−23	1.023	2.3	0.365	2.5	1.086	1.3
−22	1.009	2.3	0.380	2.5	1.078	1.2
−21	0.996	2.2	0.395	2.4	1.071	1.1
−20	0.982	2.2	0.409	2.4	1.064	1.1
−19	0.969	2.2	0.424	2.4	1.058	1.0
−18	0.956	2.2	0.438	2.3	1.051	1.0
−17	0.943	2.1	0.452	2.3	1.046	0.9
−16	0.930	2.1	0.466	2.3	1.040	0.8
−15	0.917	2.1	0.480	2.3	1.035	0.8
−14	0.905	2.1	0.494	2.8	1.031	0.7
−13	0.892	2.1	0.507	2.2	1.026	0.7
−12	0.880	2.0	0.521	2.2	1.022	0.6
−11	0.867	2.0	0.534	2.2	1.019	0.5
−10	0.855	2.0	0.547	2.2	1.015	0.5
−9	0.843	2.0	0.560	2.2	1.012	0.4
−8	0.831	2.0	0.574	2.2	1.010	0.4
−7	0.819	2.0	0.587	2.2	1.007	0.3
−6	0.807	2.0	0.600	2.2	1.005	0.3
−5	0.795	2.0	0.613	2.1	1.004	0.2
−4	0.783	2.0	0.626	2.1	1.002	0.2
−3	0.771	2.0	0.638	2.1	1.001	0.1
−2	0.759	2.0	0.651	2.1	1.001	0.1
−1	0.748	2.0	0.664	2.1	1.000	0.0
0	0.736	2.0	0.677	2.1	1.000	0.0
+1	0.724	2.0	0.690	2,1	1.000	0.1
2	0.712	2.0	0.703	2.1	1.001	0.1
3	0.700	2.0	0.716	2.1	1.001	0.2
4	0.689	2.0	0.728	2.2	1.002	0.2
+5	0.677	2.0	0.741	2.2	1.004	0.3
6	0.665	2.0	0.754	2.2	1.005	0.3
7	0.653	2.0	0.767	2.2	1.007	0.4
8	0.641	2.0	0.780	2.2	1.010	0.4
9	0.629	2.0	0.794	2.2	1.012	0.5
+10	0.616	2.0	0.807	2.2	1.015	0.5
11	0.604	2.0	0.820	2.2	1.019	0.6
12	0.592	2.1	0.833	2.2	1.022	0.7
13	0.580	2.1	0.847	2.3	1.026	0.7
14	0.567	2.1	0.861	2.3	1.031	0.8

D	Si (φ — D) / Co D	Diff.	Co (φ — D) / Co D	Diff.	Se D	Diff.
°						
+15	0.554	2.1	0.874	2.3	1.035	0.8
16	0.512	2.1	0.888	2.3	1.040	0.9
17	0.529	2.2	0.902	2.3	1.046	1.0
18	0.516	2.2	0.916	2.4	1.051	1.0
19	0.503	2.2	0.930	2.4	1.058	1.1
+20	0.489	2.2	0.945	2.4	1.064	1.1
21	0.476	2.3	0.960	2.5	1.071	1.2
22	0.462	2.3	0.974	2.5	1.078	1.3
23	0.448	2.4	0.989	2.5	1.086	1.4
24	0.434	2.4	1.005	2.6	1.095	1.5
+25	0.420	2.4	1.020	2.6	1.103	1.5
26	0.406	2.5	1.036	2.7	1.113	1.6
27	0.391	2.5	1.052	2.7	1.122	1.7
28	0.376	2.5	1.068	2.8	1.133	1.8
29	0.361	2.6	1.085	2.8	1.143	1.9
+30	0.345	2.6	1.102	2.9	1.155	2.0
31	0.329	2.7	1.119	2.9	1.167	2.1
32	0.313	2.8	1.137	3.0	1.179	2.2
33	0.296	2.8	1.155	3.1	1.192	2.3
34	0.279	2.9	1.173	3.1	1.206	2.4
+35	0.262	3.0	1.192	3.2	1.221	2.5
36	0.244	3.0	1.212	3.3	1.236	2.7
37	0.226	3.1	1.232	3.4	1.252	2.8
38	0.207	3.2	1.252	3.5	1.269	3.0
39	0.188	3.3	1.273	3.6	1.287	3.1
+40	0.168	3.4	1.295	3.7	1.305	3.3
41	0.147	3.5	1.317	3.8	1.325	3.4
42	0.126	3.6	1.340	3.9	1.346	3.6
43	0.104	3.7	1.363	4.1	1.367	3.8
44	0.082	3.8	1.388	4.2	1.390	4.0
+45	0.059	4.0	1.413	4.3	1.414	4.2
46	0.035	4.1	1.439	4.5	1.440	4.4
47	0.010	4.3	1.466	4.7	1.466	4.7
48	−0.016	4.5	1.494	4.9	1.494	5.0
49	−0.043	4.7	1.524	5.1	1.524	5.3
+50	−0.071	4.9	1.554	5.3	1.556	5.6
51	−0.100	5.1	1.586	5.5	1.589	5.9
52	−0.131	5.3	1.619	5.7	1.624	6.2
53	−0.163	5.5	1.654	6.0	1.662	6.6
54	−0.196	5.8	1.690	6.3	1.701	7.0
+55	−0.231	6.1	1.728	6.6	1.743	7.5
56	−0.268	6.4	1.768	7.0	1.788	8.0
57	−0.307	6.8	1.810	7.4	1.836	8.5
58	−0.348	7.2	1.855	7.8	1.887	9.1
59	−0.391	7.7	1.902	8.3	1.942	9.7

Die beigeschriebenen Differenzen beziehen sich auf 10 Minuten.

X°. Hilfstafel für die Mayer'sche Formel.

($\varphi = 47^\circ\ 22'\ 40''$)

D	$\frac{\text{Si}(\varphi - D)}{\text{Co } D}$		$\frac{\text{Co}(\varphi - D)}{\text{Co } D}$		Se D		D	$\frac{\text{Si}(\varphi - D)}{\text{Co } D}$		$\frac{\text{Co}(\varphi - D)}{\text{Co } D}$		Se D	
° ′							° ′						
60 0	— 0.437	0.8	1.952	0.8	2.000	1.0	70 0	— 1.125	1.7	2.699	1.9	2.924	2.4
30	— 0.461	0.8	1.978	0.9	2.031	1.1	30	— 1.176	1.8	2.755	2.0	2.996	2.5
61 0	— 0.486	0.9	2.005	0.9	2.063	1.1	71 0	— 1.231	1.9	2.814	2.1	3.072	2.7
30	— 0.511	0.9	2.032	1.0	2.096	1.1	30	— 1.288	2.0	2.876	2.2	3.152	2.8
62 0	— 0.538	0.9	2.061	1.0	2.130	1.2	72 0	— 1.348	2.1	2.942	2.3	3.236	3.0
30	— 0.565	0.9	2.091	1.0	2.166	1.2	30	— 1.412	2.2	3.011	2.4	3.326	3.2
63 0	— 0.593	1.0	2.121	1.1	2.203	1.3	73 0	— 1.479	2.4	3.084	2.6	3.420	3.4
30	— 0.622	1.0	2.153	1.1	2.241	1.3	30	— 1.550	2.5	3.161	2.7	3.521	3.6
64 0	— 0.653	1.0	2.186	1.1	2.281	1.4	74 0	— 1.626	2.7	3.243	2.9	3.628	3.8
30	— 0.684	1.1	2.220	1.2	2.323	1.4	30	— 1.706	2.8	3.331	3.1	3.742	4.1
65 0	— 0.716	1.1	2.255	1.2	2.366	1.5	75 0	— 1.791	3.0	3.423	3.3	3.864	4.3
30	— 0.750	1.2	2.292	1.3	2.411	1.6	30	— 1.883	3.3	3.522	3.5	3.994	4.7
66 0	— 0.785	1.2	2.330	1.3	2.459	1.6	76 0	— 1.980	3.5	3.628	3.8	4.134	5.0
30	— 0.822	1.3	2.370	1.4	2.508	1.7	30	— 2.085	3.7	3.742	4.1	4.284	5.4
67 0	— 0.860	1.3	2.411	1.4	2.559	1.8	77 0	— 2.197	4.0	3.864	4.4	4.445	5.8
30	— 0.899	1.4	2.454	1.5	2.613	1.9	30	— 2.319	4.4	3.996	4.8	4.620	6.3
68 0	— 0.940	1.4	2.498	1.6	2.669	2.0	78 0	— 2.450	4.8	4.139	5.2	4.810	6.9
30	— 0.983	1.5	2.545	1.6	2.729	2.1	30	— 2.593	5.2	4.291	5.6	5.016	7.5
69 0	— 1.028	1.6	2.594	1.7	2.790	2.2	79 0	— 2.748	5.7	4.463	6.2	5.241	8.2
30	— 1.075	1.6	2.645	1.8	2.855	2.3	30	— 2.918	6.2	4.647	6.8	5.488	9.0

Die beigeschriebenen Differenzen beziehen sich auf 1 Minute.

Polsterne.	D	$\frac{\text{Si}(\varphi - D)}{\text{Co } D}$		$\frac{\text{Co}(\varphi - D)}{\text{Co } D}$		Se D		$\frac{\text{Si}(\varphi + D)}{\text{Co } D}$		$\frac{\text{Co}(\varphi + D)}{\text{Co } D}$	
	° ′										
1 Draconis	81 49	— 3.973	1.7	5.794	1.8	7.025	2.5	5.445	1.7	— 4.440	1.7
	50	— 3.983		5.805		7.040		5.445		— 4.450	
76 Draconis	82 6	— 4.144	1.8	5.980	1.8	7.276	2.5	5.616	1.7	— 4.626	1.8
	7	— 4.155		5.991		7.291		5.626		— 4.637	
ε Urs. min.	82 13	— 4.218	1.8	6.061	1.8	7.384	2.7	5.690	1.8	— 4.706	2.0
	14	— 4.229		6.072		7.400		5.701		— 4.718	
750 Groomb.	85 15	— 7.414	4.8	9.533	5.2	12.076	7.0	8.885	4.8	— 8.178	5.3
	16	— 7.443		9.564		12.118		8.914		— 8.210	
43 Cephei	85 38	— 8.132	5.7	10.314	6.2	13.134	8.3	9.601	5.7	— 8.959	6.2
	39	— 8.166	5.8	10.351	6.2	13.184	8.5	9.638	5.7	— 8.996	6.3
	40	— 8.201		10.388		13.235		9.672		— 9.034	
δ Urs. min.	86 36	—10.662	9.3	13.063	10.2	16.862	13.8	12.134	9.3	—11.708	10.3
	37	—10.718		13.124		16.945		12.190		—11.770	
51 Cephei	87 13	—13.193	14.0	15.813	15.2	20.593	20.7	14.664	14.2	—14.458	15.3
	14	—13.277		15.904		20.717		14.749		—14.550	
α Urs. min.	88 41	—28.726	63.0	32.692	68.5	43.520	92.8	30.198	63.0	—31.338	68.3
	42	—29.104	64.7	33.103	70.2	44.077	95.5	30.576	64.5	—31.748	70.2
	43	—29.492		33.524		44.650		30.963		—32.169	
λ Urs. min.	88 57	—36.211	99.3	40.825	108.0	54.570	146.7	37.683	97.7	—39.471	108.0
	58	—36.807	102.7	41.473	111.5	55.450	151.7	38.279	102.5	—40.119	111.5
	59	—37.423		42.142		56.360		38.894		—40.788	

Die beigeschriebenen Differenzen beziehen sich auf 10 Sekunden.

XI^a. Immerwährender Gregor. Kalender.

(g gemeine, s Schaltjahre.)

	Januar.			Februar.			März.			April.			Mai.			Juni.		
	g		s	g		s	g		s	g		s	g		s	g		s
1	a	29	0	d	28	29	d	29	e	g	28	a	b	27	c	e	26	f
2	b	28	29	e	27	28	e	28	f	a	27	b	c	26	d	f	*24	g
3	c	27	28	f	26	27	f	27	g	b	26	c	d	25	e	g	23	a
4	d	26	27	g*	24	26	g	26	a	c	*24	d	e	24	f	a	22	b
5	e	25	26	a	23	24*	a	25	b	d	23	e	f	23	g	b	21	c
6	f	24	25	b	22	23	b	24	c	e	22	f	g	22	a	c	20	d
7	g	23	24	c	21	22	c	23	d	f	21	g	a	21	b	d	19	e
8	a	22	23	d	20	21	d	22	e	g	20	a	b	20	c	e	18	f
9	b	21	22	e	19	20	e	21	f	a	19	b	c	19	d	f	17	g
10	c	20	21	f	18	19	f	20	g	b	18	c	d	18	e	g	16	a
11	d	19	20	g	17	18	g	19	a	c	17	d	e	17	f	a	15	b
12	e	18	19	a	16	17	a	18	b	d	16	e	f	16	g	b	14	c
13	f	17	18	b	15	16	b	17	c	e	15	f	g	15	a	c	13	d
14	g	16	17	c	14	15	c	16	d	f	14	g	a	14	b	d	12	e
15	a	15	16	d	13	14	d	15	e	g	13	a	b	13	c	e	11	f
16	b	14	15	e	12	13	e	14	f	a	12	b	c	12	d	f	10	g
17	c	13	14	f	11	12	f	13	g	b	11	c	d	11	e	g	9	a
18	d	12	13	g	10	11	g	12	a	c	10	d	e	10	f	a	8	b
19	e	11	12	a	9	10	a	11	b	d	9	e	f	9	g	b	7	c
20	f	10	11	b	8	9	b	10	c	e	8	f	g	8	a	c	6	d
21	g	9	10	c	7	8	c	9	d	f	7	g	a	7	b	d	5	e
22	a	8	9	d	6	7	d	8	e	g	6	a	b	6	c	e	4	f
23	b	7	8	e	5	6	e	7	f	a	5	b	c	5	d	f	3	g
24	c	6	7	f	4	5	f	6	g	b	4	c	d	4	e	g	2	a
25	d	5	6	g	3	4	g	5	a	c	3	d	e	3	f	a	1	b
26	e	4	5	a	2	3	a	4	b	d	2	e	f	2	g	b	0	c
27	f	3	4	b	1	2	b	3	c	e	1	f	g	1	a	c	29	d
28	g	2	3	c	0	1	c	2	d	f	0	g	a	0	b	d	28	e
29	a	1	2	d		0	d	1	e	g	29	a	b	29	c	e	27	f
30	b	0	1				e	0	f	a	28	b	c	28	d	f	26	g
31	c	29	0				f	29	g				d	27	e			

XI^b. Epakte, Sonntagsbuchstabe und Ostern.

1801	15 d	5 A	1814	9 b	10 A	1827	3 g	15 A	† 1840	26 e	19 A
02	26 c	18 A	15	20 a	26 M	† 28	14 f	6 A	41	7 c	11 A
03	7 b	10 A	† 16	1 g	14 A	29	25 d	19 A	42	18 b	27 M
† 04	18 a	1 A	17	12 e	6 A	30	6 c	11 A	43	0 a	16 A
05	0 f	14 A	18	23 d	22 M	31	17 b	3 A	† 44	11 g	7 A
06	11 e	6 A	19	4 c	11 A	† 32	28 a	22 A	45	22 e	23 M
07	22 d	29 M	† 20	15 b	2 A	33	9 f	7 A	46	3 d	12 A
† 08	3 c	17 A	21	26 g	22 A	34	20 e	30 M	47	14 c	4 A
09	14 a	2 A	22	7 f	7 A	35	1 d	19 A	† 48	25 b	23 A
10	25 g	22 A	23	18 e	30 M	† 36	12 c	3 A	49	6 g	8 A
11	6 f	14 A	† 24	0 d	18 A	37	23 a	26 M	50	17 f	31 M
† 12	17 e	29 M	25	11 b	3 A	38	4 g	15 A	51	28 e	20 A
13	28 c	18 A	26	22 a	26 M	39	15 f	31 M	† 52	9 d	11 A

NB. Die der Epakte entsprechenden Zahlen des Kalenders fallen auf Tage mit Neumond. (Vgl. 314 und 317.)

XI[a]. Immerwährender Gregor. Kalender.

(g gemeine, s Schaltjahre.)

	Juli.			August.			September.			Oktober.			November.			Dezember.		
	g		s	g		s	g		s	g		s	g		s	g		s
1	g	25	a	c	23	d	f	22	g	a	21	b	d	20	e	f	19	g
2	a	24	b	d	22	e	g	21	a	b	20	c	e	19	f	g	18	a
3	b	23	c	e	21	f	a	20	b	c	19	d	f	18	g	a	17	b
4	c	22	d	f	20	g	b	19	c	d	18	e	g	17	a	b	16	c
5	d	21	e	g	19	a	c	18	d	e	17	f	a	16	b	c	15	d
6	e	20	f	a	18	b	d	17	e	f	16	g	b	15	c	d	14	e
7	f	19	g	b	17	c	e	16	f	g	15	a	c	14	d	e	13	f
8	g	18	a	c	16	d	f	15	g	a	14	b	d	13	e	f	12	g
9	a	17	b	d	15	e	g	14	a	b	13	c	e	12	f	g	11	a
10	b	16	c	e	14	f	a	13	b	c	12	d	f	11	g	a	10	b
11	c	15	d	f	13	g	b	12	c	d	11	e	g	10	a	b	9	c
12	d	14	e	g	12	a	c	11	d	e	10	f	a	9	b	c	8	d
13	e	13	f	a	11	b	d	10	e	f	9	g	b	8	c	d	7	e
14	f	12	g	b	10	c	e	9	f	g	8	a	c	7	d	e	6	f
15	g	11	a	c	9	d	f	8	g	a	7	b	d	6	e	f	5	g
16	a	10	b	d	8	e	g	7	a	b	6	c	e	5	f	g	4	a
17	b	9	c	e	7	f	a	6	b	c	5	d	f	4	g	a	3	b
18	c	8	d	f	6	g	b	5	c	d	4	e	g	3	a	b	2	c
19	d	7	e	g	5	a	c	4	d	e	3	f	a	2	b	c	1	d
20	e	6	f	a	4	b	d	3	e	f	2	g	b	1	c	d	0	e
21	f	5	g	b	3	c	e	2	f	g	1	a	c	0	d	e	29	f
22	g	4	a	c	2	d	f	1	g	a	0	b	d	29	e	f	28	g
23	a	3	b	d	1	e	g	0	a	b	29	c	e	28	f	g	27	a
24	b	2	c	e	0	f	a	29	b	c	28	d	f	27	g	a	26	b
25	c	1	d	f	29	g	b	28	c	d	27	e	g	26	a	b	25	c
26	d	0	e	g	28	a	c	27	d	e	26	f	a	*24	b	c	24	d
27	e	29	f	a	27	b	d	26	e	f	25	g	b	23	c	d	23	e
28	f	28	g	b	26	c	e	*24	f	g	24	a	c	22	d	e	22	f
29	g	27	a	c	25	d	f	23	g	a	23	b	d	21	e	f	21	g
30	a	26	b	d	24	e	g	22	a	b	22	c	e	20	f	g	20	a
31	b	*24	c	e	23	f				c	21	d				a	19	b

XI[b]. Epakte, Sonntagsbuchstabe und Ostern.

1853	20 b	27 M	1865	3 a	16 A	1877	15 g	1 A	1889	28 f	21 A
54	1 a	16 A	66	14 g	1 A	78	26 f	21 A	90	9 e	6 A
55	12 g	8 A	67	25 f	21 A	79	7 e	13 A	91	20 d	29 M
† 56	23 f	23 M	† 68	6 e	12 A	† 80	18 d	28 M	† 92	1 c	17 A
57	4 d	12 A	69	17 c	28 M	81	0 b	17 A	93	12 a	2 A
58	15 c	4 A	70	28 b	17 A	82	11 a	9 A	94	23 g	25 M
59	26 b	24 A	71	9 a	9 A	83	22 g	25 M	95	4 f	14 A
† 60	7 a	8 A	† 72	20 g	31 M	† 84	3 f	13 A	† 96	15 e	5 A
61	18 f	31 M	73	1 e	13 A	85	14 d	5 A	97	26 c	18 A
62	0 e	20 A	74	12 d	5 A	86	25 c	25 A	98	7 b	10 A
63	11 d	5 A	75	23 c	28 M	87	6 b	10 A	99	18 a	2 A
† 64	22 c	27 M	† 76	4 b	16 A	† 88	17 a	1 A	1900	0 g	15 A

NB. Die dem Sonntagsbuchstaben entsprechenden Buchstaben des Kalenders bezeichnen Sonntage. — M bezeichnet März, A April. (Vgl. 314 und 317.)

XIe. Römischer und französischer Kalender.

(Vgl. 305, 306 und 310.)

	I (Januar.)	II	III	IV	V
1	Calendæ (Januariæ)	Cal.	Cal.	Cal.	Cal.
2	a. d. IV Nonas (Jan.)	IV	IV	IV	VI
3	III —	III	III	III	V
4	Pridie —	Prid.	Prid.	Prid.	IV
5	Nonæ (Januariæ)	Non.	Non.	Non.	III
6	a. d. VIII Idus (Jan.)	VIII	VIII	VIII	Prid.
7	— VII —	VII	VII	VII	Non.
8	— VI —	VI	VI	VI	VIII
9	V —	V	V	V	VII
10	— IV	IV	IV	IV	VI
11	— III —	III	III	III	V
12	Pridie —	Prid.	Prid.	Prid.	IV
13	Idus (Januariæ)	Idus	Idus	Idus	III
14	a. d. XIX Cal. (Febr.)	XVI	XVII	XVIII	Prid.
15	XVIII —	XV	XVI	XVII	Idus
16	— XVII —	XIV	XV	XVI	XVII
17	— XVI —	XIII	XIV	XV	XVI
18	— XV —	XII	XIII	XIV	XV
19	— XIV —	XI	XII	XIII	XIV
20	— XIII —	X	XI	XII	XIII
21	XII —	IX	X	XI	XII
22	XI —	VIII	IX	X	XI
23	— X —	VII	VIII	IX	X
24	IX —	VI	VII	VIII	IX
25	— VIII	V	VI	VII	VIII
26	VII —	IV	V	VI	VII
27	VI —	III	IV	V	VI
28	— V —	Prid.	III	IV	V
29	— IV —		Prid.	III	IV
30	— III			Prid.	III
31	Pridie —				Prid.

de l'an	0 Vendémiaire			
1	1792	Sept.	21	265
2	1793	—	21	264
3	1794	—	21	264
4	1795	—	22	265
5	1796	—	21	265
6	1797	—	21	264
7	1798	—	21	264
8	1799	—	22	265
9	1800	—	22	266
10	1801	—	22	265
11	1802	—	22	265
12	1803	—	23	266
13	1804	—	22	266
14	1805	—	22	265

0 Vendémiaire . .	0
0 Brumaire . . .	30
0 Frimaire . . .	60
0 Nivôse	90
0 Pluviôse	120
0 Ventôse	150
0 Germinal . . .	180
0 Floréal	210
0 Prairial	240
0 Messidor . . .	270
0 Termidor . . .	300
0 Fructidor . . .	330

Diesen 12 Monaten à 30 Tagen folgten 5 bis 6 jours complémentaires. Die 30 Tage waren in 3 Dekaden geteilt, deren Tage: Primidi, Duodi, Tridi, Quartidi, Quintidi, Sextidi, Septidi, Octidi, Nonidi, Decadi hiessen.

Januar geht nach	I
Februar	II od. III
März	V
April	IV
Mai	V
Juni	IV
Juli	V
August	I
September	IV
Oktober	V
November	IV
Dezember	I

Die Tage II bis XVI, XVII oder XVIII vor den Calenden eines Monats werden bereits nach diesem Monat benannt. So z. B. bedeutet: „Scripsi ante diem decimum sextum Calendas Februarias", dass ich am 17. Jan. geschrieben habe. — Für den römischen Kalender wurde Idelers Chronologie zu Grunde gelegt.

Mit Hilfe von Tafel VIII^c hat man z. B. 17 Messidor de l'an 7
$= 270 + 17 + 264 = 551$
$=$ 0 Jan. 1798 $+ 551$
$=$ 0 Jan. 1799 $+ 186$
$=$ 5. Juli 1799.

—4713	Anfang der julianischen Periode Scaligers.
—4179	Schöpfung nach alter jüdischer Zeitrechnung.
—2697	Älteste erhaltene chinesische Beobachtung einer Finsternis.
—1100	Tschu-Kong bestimmt die Schiefe der Ekliptik.
— 776	Beginn der griechischen Zeitrechnung nach Olympiaden.
— 753	Jahr der Erbauung Roms (Beginn römischer Zeitrechnung.)
— 720	Älteste erhaltene chaldäische Beobachtung.
— 585	Sonnenfinsternis nach Thales Voraussage.
— 540	Pythagoras bereist Indien, lehrt die Kugelgestalt der Erde und die Mehrheit der Welten.
— 433	Meton'scher Cyklus von 235 auf 19 Jahre verteilten Monden.
— 400	Plato (Kegelschnitte; Würfelverdopplung).
— 360	Aristoteles, der Naturphilosophe und Meteorologe.
— 300	Euklid, der Geometer (Elemente; s. 1533, 1814).
— 300	Timocharis und Aristill, Sternkatalog.
— 270	Aristarch lehrt die Bewegung der Erde um die Sonne.
— 250	Archimedes (π, Quadratur, Hebel, Dichte; s. 1807).
— 240	Apollonius von Perga, der Geometer (s. 1861).
— 220	Eratosthenes misst die Erde (Sieb, Hungertod).
— 150	Hipparch: Präcession, Theorie der Sonne, Parallaxe.
— 46	Julius Cäsars Kalenderreform (Jahr der Verwirrung).
— 7	Konjunktionen von Jupiter und Saturn (Geburt Christi?).
34	III 25 mutmasslicher Todestag des Erlösers.
150	Ptolemäus schreibt den Almagest (s. 1538, 1813).
321	befiehlt Konstantin den Sonntag zu feiern.
350	Diophantos Alexandr., der Arithmetiker (s. 1575).
380	Pappos Alexandr., der Sammler (s. 1660).
415	Hypatia ermordet; Verfall von Alexandrien.
525	Dionysius führt das Jahr 754 von Rom als Jahr 1 ein.
622	Flucht Mahommeds (Aera für die muselmännische Zeitrechnung).
640	Omar verheizt die Reste der Bibliothek in Alexandrien.
751	sollen die Araber das erste Papier aus Hadern erstellt, und bald darauf auch mittelst Holzmodeln bedruckt haben.
820	Mohammed ben Musa führt nach Vorgang der Indier den Sinus ein.
827	Al Mamum, Gradmessung bei Bagdad.
829	Sternwarte Bagdad, 1000 Kairo, 1259 Meragah, 1279 Peking, etc.
1088	Universität Bologna, 1206 Paris, 1221 Padua, 1249 Oxford, 1288 Coimbra, 1365 Wien, 1385 Heidelberg, 1409 Leipzig, 1460 Basel, 1477 Upsala, 1575 Leyden, 1737 Göttingen, 1810 Berlin, 1833 Zürich, 1834 Bern, 1872 Strassburg, 1876 Genf, etc.
1099	Gottfried v. Bouillon erobert die heilige Stadt.
1181	Der Kompass wird in Europa bekannt.
1202	Fibonacci, Liber Abaci et Practica geometriæ.
1217	Erste Papiermühle in Deutschland.
1300	Salvino degli Armati fabriziert Brillen.
1307	XI 7 Bundesschwur auf dem Rütli; 1315 Schlacht am Morgarten, 1339 Laupen, 1386 Sempach, 1444 St. Jakob, 1476 Grandson und Murten, 1515 Marignano; 1351 Eintritt von Zürich in den Schweizerbund, 1353 Bern, etc.

1356	Basel wird durch ein Erdbeben zerstört.
1364	Heinrich v. Wick konstruiert eine Gewichtuhr.
1415	wurde Huss zu Konstanz verbrannt, — 1416 Hieronymus von Prag.
1436	VI 6 wurde bei Königsberg in Franken Joh. Müller geboren.
1438	Guttenberg (1397—1468) erfindet die Buchdruckerkunst.
1460	Peurbachii (1423—1461) theoricæ planetarum.
1471	Regiomontan und Walther, Sternwarte in Nürnberg.
1471	Erste Ausgabe der Divina Comedia von Dante (1265—1321).
1473	II 19 wurde zu Thorn Nikolaus Coppernicus geboren.
1474	Joh. Müller gen. Regiomontan (1436—1476), Ephemerides.
1476	VII 6 starb zu Rom Johannes Müller Regiomontanus.
1484	Nic. Chuquet, Le Triparty en la science des nombres.
1484	Bernhard Walther beobachtet an einer Räderuhr.
1489	Joh. Widman, Rechenung auf allen Kauffmannschaft (+ —).
1492	Chr. Columbus (1435—1506) entdeckt Amerika.
1498	Vasco de Gama (1460?—1524) schifft nach Indien.
1517	schlug Luther (1483—1546) seine 95 Streitsätze in Wittenberg an.
1519	Antrittpredigt von Zwingli (1484—1531) in Zürich.
1519	bis 1522 Magelhaens Reise um die Welt.
1524	Christoph Rudolph, Die Coss (1554 Ausgabe Stifel).
1528	Joh. Fernelii Cosmotheoria. (Angebliche Gradmessung.)
1530	R. Gemma, De principiis astronomiæ et cosmographiæ.
1531	Paracelsus (1493—1541), Usslegung des Cometen.
1532	VI 24 wurde zu Kassel Wilhelm IV. geboren.
1533	*Εὐκλείδου στοιχείων βιβλ. ιε.* (Ausgabe von Grynæus.)
1533	Regiomontan, De triangulis omnimodis libri quinque.
1536	erscheint in Venedig die erste gedruckte Zeitung, welche mit einer Gazetta bezahlt wurde; daher der Name Gazette.
1537	wurde durch Loyola der Jesuitenorden gegründet; 1773 aufgehoben, erstand er 1814 neuerdings.
1538	*Πτολεμαίου συντάξεως βιβλ. ιγ.* (Ausgabe von Grynæus.)
1540	P. Apian (1495—1552), Astronomicum Cæsareum.
1542	Nonius (1497—1577), De crepusculis.
1543	starb (V 14 zu Frauenburg?) Nikolaus Coppernicus während dem Drucke seiner 6 Bücher: De revolutionibus (s. 1873).
1544	Mich. Stifel (1487—1567), Arithmetica integra.
1544	Georg Hartmann (1489—1564) entdeckt die Inklination.
1545	Konrad Gessner (1516—1565), Bibliotheca universalis.
1545	Cardano (1501—1576), De regulis Algebræ liber.
1546	XII 14 wurde zu Knudstrup Tycho Brahe geboren.
1546	Nic. Tartaglia (1506—59), Quesiti ed invenzioni diverse.
1550	Gerh. Mercator (1512—1594), Kartenprojektion.
1552	II 28 wurde Joost Bürgi zu Lichtensteig geboren.
1557	Recorde führt das Gleichheitszeichen ein.
1561	Wilhelm IV. Sternwarte Kassel, 1576 Tycho auf Hwen.
1564	II 15 wurde Galileo Galilei zu Pisa geboren.
1571	XII 27 wurde zu Weil Johannes Kepler geboren.
1572	VIII 24 wurde zu Paris Peter Ramus ermordet.
1572	Tycho beobachtet einen neuen Stern in der Cassiopeia.

1575	Diophant, Rerum arithmethicarum libri VI.
1576	Robert Normann konstruiert ein Inklinatorium.
1577	Egn. Danti, Le scienze matematiche ridotte in tavole.
1579	A. Piccolomini, La sfera del mondo (Sternbezeichnung).
1582	Gregor XIII. (1512—1585), Kalenderreform.
1585	Stevin (1548—1620), Decimalbruchrechnung, Statik.
1590	Zach. Jansen erfindet das zusammengesetzte Mikroskop.
1591	Vieta (1540—1603), Algebra nova. (Ars magna.)
1592	VIII 25 starb zu Kassel Landgraf Wilhelm IV.
1596	Georg Joachim gen. Rhäticus (1514—76), Opus Palatinum.
1596	Kepler, Prodromus (Mysterium cosmographicum).
1596	Ludolph van Colen (1539—1610), Van den Circkel.
1596	Dav. Fabricius (1564—1617) entdeckt die Mira im Wallfisch.
1597	Galilei konstruiert ein Luftthermometer.
1598	Henri IV. erlässt das Edikt von Nantes.
1598	Tycho Brahe, Astronomiæ instauratæ mechanica.
1598	Kepler teilt die Corona der Sonne zu.
1600	II 17 wurde Giordano Bruno in Rom verbrannt.
1600	Will. Gilbert (1540—1603), De magnete.
1601	X 23 starb zu Prag Tycho Brahe.
1602	Galilei entdeckt das Fallgesetz (Isochronismus).
1603	Joh. Bayer (1572—1625), Uranometria.
1603	Scheiner (1575—1650) erfindet den Pantographen.
1604	Kepler, Ad Vitellionem paralipomena; neuer Stern im Serpentarius.
1608	Hans Lippershey legt den Generalstaaten das erste Fernrohr vor.
1609	Kepler, De motibus stellæ Martis. (Gesetz 1—2.)
1610	Galilei, Sidereus nuncius (Phasen, Trabanten).
1610	Mich. Mästlin (1550—1631), Epitome astronomiæ copernicanæ.
1611	Jo. Fabricius (1587—1615), De maculis in Sole observatis.
1611	Joh. Kepler, Dioptrice (astron. Fernrohr).
1611	Joh. Prätorius (1537—1616) erfindet sein Messtischlein.
1612	Marius (1570—1624) entdeckt den Nebel in der Andromeda.
1614	Neper (1550—1617), Logarithmorum canonis descriptio.
1615	Sal. de Caus (1576—1626), Les raisons des forces mouvantes.
1616	Zucchius (1586—1670) empfiehlt ein Spiegelteleskop.
1617	Willebrord Snellius (1580—1626), Eratosthenes batavus.
1618	Kepler, Epitome astronomiæ copernicanæ. (Schluss 1621.)
1619	Kepler, Harmonices mundi libri V. (Gesetz 3.)
1619	J. B. Cysat (1586—1657), Mathemata astronomica de Cometa 1618. (Nebel im Orion erwähnt.)
1620	Willebrord Snellius entdeckt das Brechungsgesetz.
1620	Joost Bürgi, Arithm. und geometr. Progress-Tabul (Reduktionszirkel).
1620	Fr. Baco (1561—1626), Novum organum scientiarum.
1620	Schlacht bei Prag, 1632 bei Lützen; 1648 westphälischer Friede (dreissigjähriger Krieg).
1624	Gunter (1581—1626) erfindet den logarithmischen Rechenstab.
1624	Briggs (1556—1630), Arithmetica logarithmica. (2. A. 1628.)
1626	X 30 starb zu Leyden Willebrord Snellius.
1627	Jul. Schiller (1580?—1627), Coelum stellatum christianum.

1629	A. Girard (1590?—1633) führt die Klammer ein.
1630	Scheiner, Rosa ursina, sive Sol. (Darin Helioskop beschrieben.)
1630	XI 15 starb zu Regensburg Johannes Kepler.
1631	Vernier (1580—1637), Construction du quadrant nouveau.
1631	Th. Harriot (1560—1621), Artis analyticæ praxis.
1632	I 31 starb zu Kassel Joost Bürgi von Lichtensteig.
1633	VI 22 musste Galilei, infolge seines „Dialogo sopra i due sistemi del mondo", in Rom die coppernicanische Lehre abschwören.
1633	Adr. Vlacq (1600—1667), Trigonometria artificialis; 1636 Handtafel.
1635	Guldin (1577—1643), De centro gravitatis libri IV.
1637	René Descartes (1596—1650), Dioptrique et Géométrie.
1638	Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche. (Mechanik.)
1640	Blaise Pascal (1623—1662), Essai pour les coniques.
1641	erbaute sich Joh. Hevel eine Sternwarte in Danzig.
1642	wurde auf öffentliche Kosten die Sternwarte Kopenhagen erbaut, 1667 Paris, 1675 Greenwich, 1678 Nürnberg, 1706 Berlin, 1714 Bologna, 1725 Petersburg, 1734 Göttingen, 1739 Upsala, 1755 Wien, 1765 Mailand, 1772 Mannheim und Oxford, 1787 Leipzig, 1788 Seeberg b. Gotha, 1790 Palermo, 1792 Coimbra, etc.
1642	I 8 starb zu Arcetri bei Florenz Galileo Galilei.
1642	XII 25 a. St. wurde zu Whoolstorpe Isaak Newton geboren.
1644	Toricelli (1618—1647) erfindet das Barometer.
1646	VII 1 wurde zu Leipzig Gottfr. Wilh. Leibnitz geboren.
1647	Pascal lässt auf Puy de Dome das Barometer beobachten.
1647	Joh. Hevelius (1611—1687), Selenographia.
1650	Grimaldi (1618—1663) entdeckt die Beugung.
1651	Riccioli (1598—1671), Almagestum novum.
1652	Gründung der Academia naturæ curiosorum; 1662 Royal Society, 1666 Académie des Sciences, etc.
1654	Otto v. Guerike (1602—1686) experimentiert in Regensburg.
1654	XII 27 a. St. wurde zu Basel Jakob Bernoulli geboren.
1655	Huygens (1629—1695) erfindet die Pendeluhr.
1655	John Wallis (1616—1703), Arithmetica infinitorum.
1657	Huygens, De ratiociniis in ludo aleæ.
1659	Huygens, Systema Saturnium. (Ring und Mond.)
1660	Pappi Alexandrini collectiones. Ed. Commandini.
1661	Thévenot teilt Viviani seine Erfindung der Röhrenlibelle mit.
1662	Boyle (1627—1691), Spring and Weight of the Air.
1665	Borelli (1608—1679), Cometa di 1664. (Elliptische Bahn.)
1665	Beginn des Journal des Savants, 1666 der Philosophical Transactions, 1682 der Acta Eruditorum, etc.
1666	Isaak Newton entdeckt die Farbenzerstreuung und das Gesetz der allgemeinen Gravitation, — bald darauf auch die Fluxionsrechnung.
1666	D. Cassini (1625—1712), De maculis Jovis et Martis. (Rotation.)
1666	A. Borelli, Theoricæ mediceorum planetarum.
1667	VII 27 a. St. wurde zu Basel Johannes Bernoulli geboren.
1668	D. Cassini bestimmt die Länge aus den Jupitertrabanten.
1668	Nic. Mercator (1620?—1687), Logarithmotechnia.
1669	Is. Barrow (1630—1677), Lectiones opticæ. (Linsen-Gesetz.)

1669	Montanari (1633—1687) entdeckt die Veränderlichkeit von β Persei.
1669	E. Bartholinus (1625—1698) entdeckt die doppelte Brechung.
1669	Becher (1635—1682), Physica subterranea (Phlogist. Theorie).
1671	Morland (1625—1695) erfindet das Sprachrohr.
1671	Jean Picard (1620—1682), Mesure de la terre.
1672	Guerike, Experimenta magdeburgica de vacuo spatio.
1672	Jean Richer reist nach Cayenne (Pendel, Marsparallaxe).
1672	wurde zu Haag Joh. de Witt gemeuchelt.
1673	Leibnitz stellt der Fluxions- die Differential-Rechnung gegenüber.
1673	Huygens, Horologium oscillatorium; 1888 Oeuvres.
1675	Ol. Römer (1644—1716), Geschwindigkeit des Lichtes.
1679	Conn. des temps, 1767 Naut. Alman., 1776 Berl. Jahrbuch, etc.
1679	Fermat (1595—1665), Varia opera mathematica; 1891 Oeuvres.
1681	Papin (1647—1714?) erfindet den nach ihm benannten Topf.
1681	Dörfl (1643—1688), Astronomische Betrachtung des grossen Cometen.
1681	D. J. Richard in La Sagne konstruiert seine erste Uhr.
1683	Dom. Cassini und Nic. Fatio beobachten das Zodiakallicht.
1683	Erstes öffentliches chemisches Laboratorium (Altorf).
1685	Ludwig XIV. hebt das Edikt von Nantes auf.
1686	Fontenelle (1657—1757), Sur la pluralité des mondes.
1687	P. Varignon (1654—1722), Nouvelle mécanique. (2 éd. 1725.)
1687	Newton, Philosophiæ naturalis principia mathematica.
1687	G. Kirch (1639—1710) entdeckt die Veränderlichkeit von χ Cygni.
1689	Römer konstruiert das Passageninstrument.
1692	wurde zu Shireborn James Bradley geboren.
1696	L'Hopital (1661—1704), Analyse des infiniment petits.
1700	I 29 wurde zu Gröningen Daniel Bernoulli geboren.
1701	Einführung des Reichskalenders in Bern, Zürich, etc.
1704	Newton, Treatise of light and colours.
1705	Edm. Halley (1656—1722) publiziert seine „Astronomy of Comets" und zeigt, dass die Höhendifferenz der Differenz der Logarithmen der Barometerstände proportional ist.
1705	VIII 16 starb zu Basel Jakob Bernoulli.
1706	V 12 totale Sonnenfinsternis in der Schweiz.
1707	IV 15 wurde zu Basel Leonhard Euler geboren.
1710	Chr. Wolf (1679—1754), Anfangsgründe der Mathematik.
1712	J. J. Scheuchzer (1672—1733), Schweizerkarte.
1713	Jak. Bernoulli, Ars conjectandi, 1744 Opera.
1714	konstruiert Fahrenheit (1686—1736) ein erstes Quecksilberthermometer.
1715	Taylor (1685—1731) entdeckt seinen Lehrsatz.
1716	Halley lehrt die Sonnenparallaxe durch Beobachtung von Venusdurchgängen zu finden (vgl. 1761).
1716	XI 14 starb zu Hannover Freiherr v. Leibnitz.
1717	Joh. Bernoulli entdeckt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.
1718	Abr. de Moivre (1667—1754), Doctrine of Chances.
1721	Grahams Quecksilberkompensation; Variation in Deklination.
1723	II 17 wurde zu Marbach Tobias Mayer geboren.
1725	Flamsteed, Historia coelestis britannica. (Neue Ausg. in Account 1835.)
1726	Harrisons Rostpendel. (Zink-Eisen-Kompensation.)

1727	Grey unterscheidet Konduktoren und Isolatoren.
1727	III 31 starb zu London Isaak Newton.
1728	Bradley entdeckt die Aberration, 1748 die Nutation.
1728	VIII 26 wurde zu Mühlhausen Joh. Heinrich Lambert geboren.
1729	Bouguer (1698—1758), Essai d'optique (Photometrie).
1729	John Flamsteed (1646—1720), Atlas cœlestis.
1730	Thermometer von Réaumur (1683—1755); 1742 von Celsius (1701—44).
1731	Clairault (1713—1765), Courbes à double courbure.
1731	Hadley (1682—1744) giebt Newtons Spiegelsextant seine jetzige Form.
1732	VII 11 wurde zu Bourg-en-Bresse Lalande geboren.
1733	Mairan (1678—1771), Traité de l'aurore boréale.
1733	V 13 bemerkt Vassenius (1687—1771) während der Totalität Protuberanzen.
1735	bis 1745 Gradmessungen in Peru und Lappland.
1736	Leonhard Euler, Mechanica; 1746—51 und 1783—85 Opuscula.
1736	I 25 wurde zu Turin Joseph-Louis Lagrange geboren.
1738	Dan. Bernoulli (1700—1782), Hydrodynamica.
1738	XI 15 wurde zu Hannover Fr. Wilhelm Herschel geboren.
1738	Voltaire (1694—1778), Elémens de la philosophie de Newton.
1739	Boscovich (1711—1787) empfiehlt den leeren Kreis als Mikrometer.
1740	Celsius, Einfluss des Nordlichts auf die Magnetnadel.
1741	Bose erfindet den Konduktor der Elektrisiermaschine.
1741	Weidler (1692—1755), Historia astronomiæ.
1742	Joh. Bernoulli (1667—1748), Opera omnia.
1743	Jean-le-Rond d'Alembert (1717—1783), Dynamique.
1744	Euler, Solutio problematis isoperimetrici.
1744	Newtoni opuscula. Ed. Castillioneus (1708—91).
1745	Entdeckung der Leydnerflasche (Kunäus, Kleist).
1745	Leibnitii et Bernoullii, Commercium epistolicum.
1745	Tob. Mayer, Mathematischer Atlas; 1750 Kosmogr. Nachrichten.
1745	II 19 wurde zu Como Alessandro Volta geboren.
1746	Lacaille, Leçons élémentaires d'astronomie. (Viele spät. Aufl.)
1747	La Condamine (1701—1774), Projet d'une mesure invariable.
1748	I 1 starb zu Basel Johannes Bernoulli.
1748	Euler, Introductio in Analysin infinitorum.
1749	Staudach beginnt seine Sonnenfleckenbeobachtungen.
1749	III 23 wurde zu Beaumont Pierre-Simon Laplace geboren.
1750	Cramer (1704—1752), Analyse des lignes courbes.
1750	Simson (1687—1768), Sectionum conicarum libri V.
1750	bis 1754 Kap-Expedition von Lacaille (1713—1762).
1752	Benjamin Franklin (1706—1790) erfindet den Blitzableiter.
1752	Sam. König (1712—1757), Appel au public. (Streit mit Maupertuis.)
1753	Euler, Institutiones Calculi differentialis.
1753	wurde in Petersburg Richmann bei Versuchen über atmosphärische Elektricität erschlagen.
1753	Short und Dollond, Heliometer durch Bisection.
1755	Kant (1724—1804), Naturgeschichte des Himmels.
1757	Schlacht bei Rossbach, 1759 Kunersdorf; 1763 Friede zu Hubertsburg (siebenjähriger Krieg).
1758	Montucla (1725—1799), Histoire des mathématiques (2. A. 1799).

1758	Kästner (1719—1800), Mathematische Anfangsgründe.
1758	J. Dollond (1706—1761) verfertigt, durch Euler veranlasst, sein erstes achromatisches Fernrohr.
1758	Palitzsch (1723—1788) findet den Halley'schen Kometen auf.
1760	J. H. Lambert, Photometria; 1761 Kosmologische Briefe.
1760	Joh. Georg Sulzer (1720—1779) entdeckt, dass Blei und Silber, unter sich und mit der Zunge in Berührung, einen besondern Geschmack haben.
1761	gründet Tschiffeli die ökonomische Gesellschaft in Bern.
1761	und 1769 beobachtet man Venusdurchgänge.
1762	II 20 starb zu Göttingen Tob. Mayer, VII 13 zu Chalford Jam. Bradley.
1762	Harrison erhält für seinen Chronometer 20000 Pfund.
1763	Berthoud, Essai sur l'horlogerie; 1773 Traité des horloges marines.
1763	Lacaille, Coelum australe stelliferum. (Neue Ausg. 1847.)
1764	Black entdeckt die latente Wärme des Wassers und Dampfes.
1764	Lalande (1732—1807), Astronomie. (3 éd. 1792.)
1764	Dampfmaschinen von James Watt (1736—1819).
1768	Euler, Institutiones calculi integralis Petrop. (3 éd. 1824.)
1768	Bode (1747—1826), Kenntniss des gestirnten Himmels.
1768	bis 1779 führte Jam. Cook (1728—1779) drei Reisen um die Welt aus.
1769	IX 14 wurde zu Berlin Alexander v. Humboldt geboren.
1769	Euler, Dioptrica (1771 Vol. 3), 1770 Lettres und 1771 Algebra.
1771	Messier (1730—1817), Catalogue des nébuleuses et amas d'étoiles.
1772	J. A. Deluc (1726—1817), Sur les modifications de l'atmosphère.
1772	Rutherford (1749—1819) entdeckt den Stickstoff.
1773	Laplace, Sur l'invariabilité des grands axes.
1774	III 21 wurde zu Zürich Joh. Kaspar Horner geboren.
1774	Priestley (1733—1804) entdeckt den Sauerstoff.
1774	Wilson, Observations on the solar spots. [Schülen.]
1774	Maskelyne und Hutton bestimmen die Dichte der Erde.
1775	Volta erfindet den Elektrophor, 1783 den Condensator, 1799 seine Säule.
1775	Lavoisier findet die Zusammensetzung der Luft.
1775	Bailly (1736—1793), Histoire de l'astronomie. (5. Bd. 1785.)
1775	Felice Fontana (1730—1805) empfiehlt die Spinnefaden für Mikrometer.
1775	Erdbeben von Lissabon; 1783 Calabrien; 1855 Wallis.
1777	Lichtenberg (1744—1799) entdeckt die elektrischen Figuren.
1777	IV 30 wurde zu Braunschweig Karl Friedrich Gauss geboren.
1777	IX 25 starb zu Berlin Joh. Heinrich Lambert.
1778	Christian Mayer (1719—1783), Fixsterntrabanten.
1779	Lambert, Pyrometrie oder vom Masse der Wärme.
1779	II 14 wird Jam. Cook auf Owaihi von den Wilden erschlagen.
1779	D. Melanderhjelm (1726—1810), Conspectus prælectionum academicarum continens fundamenta astronomiæ.
1781	III 13 wurde zu Bischof-Teinitz Jos. Joh. Littrow geboren.
1781	Wilhelm Herschel entdeckt den Uranus.
1782	III 17 starb zu Basel Daniel Bernoulli.
1782	S. Lhuilier, De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum.
1782	Wedgewood (1730—1795) erfindet sein Pyrometer.
1782	Herschel, Catalogue of double stars. (Suppl. 1785—1822.)
1783	Vega (1754—1802), Logarithmen. (Bremiker 1856.)

1783	Aerostaten von Montgolfier (1740—1810) und Charles (1746—1823).
1783	P. A. Argand von Genf (1755—1803) verbessert die Lampe.
1783	Watt erkennt die Zusammensetzung des Wassers.
1783	Pingré (1711—1796), Cométographie.
1783	Saussure (1740—1799) konstruiert Haarhygrometer.
1783	Herschel, On the proper motion of the Sun.
1783	IX 18 starb zu Petersburg Leonhard Euler.
1784	Coulomb (1736—1806) erfindet die Torsionswage.
1784	Atwood (1745—1807) erfindet die Fallmaschine.
1784	Ed. Pigott (1750? — 1810?) und John Goodricke (1765? — 1786) beobachten die Veränderlichen η Aquilæ und β Lyræ.
1784	Herschel, Appearances at the polar regions of Mars.
1784	VII 22 wurde zu Minden Friedrich Wilhelm Bessel geboren.
1786	S. Lhuilier, Principes des calculs supérieurs.
1786	Herschel, Catalogue of Nebulæ and Clusters (Suppl. 1789, 1802).
1787	Saussure beobachtet auf dem Gipfel des Montblanc.
1787	Chladni (1756—1827) entdeckt die Klangfiguren.
1788	Lagrange (1736—1813), Mécanique analytique (3 éd. 1853).
1789	Beginn der Annales de chimie et de physique (Gay-Lussac, Arago, etc.).
1789	Lavoisier (1743—1794), Traité de Chimie.
1789	Sim. Lhuilier (1750—1840), Polygonométrie et Isopérimétrie.
1789	Herschels Riesenteleskop (40' auf 49½").
1790	Annalen der Physik (Gren, Gilbert, Poggendorf, Wiedemann).
1791	Galvani (1737—1798) entdeckt den Galvanismus.
1791	Schröter (1745—1816), Selenotopographische Fragmente.
1792	Guglielmini (1740?—1817), De diurno terræ motu.
1792	Mich. Taylor (1756—1789), Tables of logarithms of all numbers from 1 to 101000 and of the sines and tangents of every second.
1792	wurde nach Überwältigung der Schweizergarde der französische Königsthron umgestürzt und die Republik ausgerufen; bald darauf auch der republikanische Kalender eingeführt.
1793	IV 15 wurde zu Altona Wilhelm Struve geboren.
1793	Cl. Chappe (1763—1805) erfindet den optischen Telegraphen.
1793	wurde der edle Bailly guillotiniert, — 1794 der geniale Lavoisier.
1794	Chladni, Ursprung der von Pallas gefundenen Eisenmassen.
1794	Vega, Thesaurus Logarithmorum. (10-stellig.)
1794	Legendre, Géométrie. (15 ed. 1853.)
1795	Bohnenberger (1765—1831), Geographische Ortsbestimmung.
1795	Journal de l'école polytechnique (1889 cah. 59).
1795	Callet (1744—1798), Logarithmes. (Ed. stér.)
1795	Monge (1746—1818), Géométrie descriptive.
1796	Laplace, Exposition du système du monde (6 éd. 1835).
1796	Polytechnische Schule Paris, 1815 Wien, 1825 Karlsruhe, 1827 München, 1855 Zürich, 1871 Aachen, etc.
1796	Schlacht bei Lodi, 1798 Abukir, 1799 Zürich, 1800 Marengo, 1805 Austerlitz, 1806 Jena, 1809 Aspern und Wagram, 1812 Beresina, 1813 Leipzig, 1815 Waterloo.
1797	Cavendish (1731—1810) bestimmt die Dichte der Erde.
1797	Olbers (1753—1840), Methode einen Kometen zu berechnen.

1797	Tralles (1763—1822) und Hassler messen bei Aarberg eine Basis unter erstmaliger Anwendung optischer Berührung.
1798	Legendre (1752—1833), Théorie des nombres. (3 éd. 1830.)
1798	Benzenberg und Brandes beobachten Sternschnuppen.
1798	Th. Schubert (1758—1825), Theoretische Astronomie (franz. 1822).
1799	Laplace, Mécanique céleste. (5 Vol. 1825.)
1799	XI 11 beobachten Humboldt und Bonpland einen Sternschnuppenregen.
1800	Zach (1754—1832), Monatliche Correspondenz (28 vol. 1813).
1800	Nicholson (1753—1815) zerlegt Wasser durch Galvanismus.
1800	Fr. Wollaston (1731—1815), Fasciculus astronomicus.
1800	J. T. Bürg (1766—1834) löst die Mond-Preisaufgabe.
1801	Gauss, Disquisitiones arithmeticæ. (Franz. 1807 par Poullet-Delisle.)
1801	Gius. Piazzi (1746—1826) entdeckt die Ceres.
1801	J. D. Reuss (1750—1837), Repertorium commentationum (1821 Bd. 16).
1802	Young (1773—1829), Theory of Light and Colours.
1802	Will. Wollaston (1766—1828), Refractive and dispersive powers. Er sieht im Sonnenspektrum dunkle Linien.
1802	Berthoud (1727—1807), Histoire de la mesure du temps.
1802	IX 26 wurde Vega beraubt und in die Donau geworfen.
1803	Carnot (1753—1823), Géométrie de position.
1803	Klügel (1739—1812), Mathematisches Wörterbuch. (Fortsetzung durch Mollweide, Grunert und Jahn.)
1803	Lalande, Bibliographie astronomique. (Histoire 1781—1802.)
1803	Erstes Dampfschiff von Fulton (1765—1815).
1803	Piazzi, Præcipuarum stellarum positiones mediæ.
1803	Steinregen bei l'Aigle, Départ. de l'Orne.
1803	Herschel, Changes in the relative situation of double stars.
1803	bis 1806 Krusenstern und Horner, Reise um die Welt.
1803	Grundsteinlegung der neuen Sternwarte in Göttingen, 1811 Königsberg, 1812 Dorpat, 1817 München, 1821 Paramatta, 1828 Brüssel, 1829 Genf, 1832 Berlin und Moskau, 1833 Pulkowa, 1834 Christiania, 1842 Bonn und Washington, 1843 Cambridge U. S., 1846 Athen, 1858 Neuenburg, 1859 Leyden, 1860 Leipzig und Kopenhagen, 1861 Zürich, 1873 Strassburg, 1879 Nizza, 1880 Mount Hamilton, 1886 Bamberg, etc.
1804	Poinsot (1777—1859), Statique (9 éd. 1848).
1804	Reichenbach (1772—1826), mechanisch-optisches Institut München.
1804	Leslie (1766—1832) erfindet den Differential-Thermometer.
1804	Luftreisen von Biot und Gay-Lussac.
1804	Benzenberg (1777—1846), Umdrehung der Erde.
1805	Puissant (1769—1843), Traité de Géodésie (3 éd. 1842).
1805	Biot (1774—1862), Astronomie physique (3 éd. 1841).
1805	Monge, Application de l'analyse à la géométrie.
1806	R. Argand (1768—1822), Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géometriques.
1806	Erster Versuch mit Lokomotiven auf Eisenbahnen.
1806	Méchain et Delambre, Base du système métrique.
1807	Peyrard (1760—1822), Oeuvres d'Archimède.
1808	Fr. Baily (1774—1844), Doctrine of Interest and Annuities.
1808	Malus (1775—1812) entdeckt die Polarisation des Lichtes.

1808	Dalton (1766—1844), Chemical Philosophy (Atomgewicht).
1809	Berzelius (1779—1848), Lärbok i Kemien. (Wöhlers Übers.)
1809	Gauss, Theoria motus corporum cœlestium solem ambientium.
1809	Wollaston, Camera lucida und Goniometer.
1810	Meier-Hirsch (1769—1851), Integraltafeln.
1810	Gergonne (1771—1859), Annales des Mathématiques (1831 Vol. 21).
1811	Poisson (1781—1840), Mécanique (2 éd. 1833).
1811	Gottl. Fr. Bohnenberger, Astronomie.
1812	Laplace, Théorie analytique des probabilités.
1812	Lehmann (1765—1811), Situationszeichnung (3. A. 1819).
1813	Halma (1755—1828), Composition mathématique de Ptolémée.
1813	IV 10 starb zu Paris Joseph-Louis Lagrange.
1814	Peyrard, Les oeuvres d'Euclide. (3. Bd. 1818.)
1814	Volta, L'identità del fluido elettrico e galvanico.
1814	Jos. Delambre (1749—1822), Astronomie théorique et pratique.
1815	Fresnel (1788—1827), Diffraction de la lumière.
1815	Fraunhofer (1787—1826), Brechung und Farbenzerstreuung.
1815	Bessel, Untersuchung des Einflusses des Vorrückens der Nachtgleichen.
1816	Davy (1779—1829) erfindet die Sicherheitslampe.
1816	Biot, Physique expérimentale et mathématique.
1816	Van Swinden (1746—1823), Grondbeginsels der Meetkunde.
1817	Delambre, Histoire de l'astronomie (1827, vol. 6).
1818	Lesage (1724—1803), Traité de physique.
1818	Kater (1777—1835) erfindet den Reversionspendel.
1818	Bessel, Fundamenta Astronomiæ deducta ex observ. Bradleyi.
1819	Beginn des Philosophical Magazine (Brewster, R. Taylor, etc.).
1819	Hansteen (1784—1873), Magnetismus der Erde.
1819	Oersted (1777—1851) entdeckt die Ablenkung der Magnetnadel durch den galvanischen Strom.
1819	Erste Versammlung schweizerischer Studierender in Zofingen.
1820	Gründung der Astronomical Society, 1865 der deutschen astronomischen Gesellschaft.
1820	IX 7 ringf. Sonnenf. für die Schweiz. (Meine erste astron. Wahrnehmung.)
1821	Schumacher (1780—1850), Astronomische Nachrichten. (Seither Petersen, Peters und Krüger; 1890 Nro. 3000.)
1821	Cauchy (1789—1857), Cours d'analyse, — 1840 Calcul différentiel.
1821	Rom hebt das Verbot des Coppernicanischen Weltsystems auf.
1821	Seebeck (1770—1831) entdeckt die Thermo-Elektricität.
1821	J. J. Littrow (1781—1840), Astronomie. (3. Bd. 1827.)
1822	Struve, Catalogus 795 stellarum duplicium.
1822	Poncelet (1788—1868), Propriétés projectives des figures. (2 éd. 1865.)
1822	Fourier (1768—1830), Théorie analytique de la chaleur.
1822	Memoirs of the Astr. Society. (1888 Vol. 49.) Seit 1831 auch Monthly Not.
1822	Harding (1765—1834), Atlas novus cœlestis. (Jahn 1856.)
1822	Encke (1791—1865), Entfernung der Sonne von der Erde. (Forts. 1824.)
1822	VIII 25 starb zu Slough Fr. Wilhelm Herschel.
1822	Erste vorausberechnete Wiedererscheinung des Encke'schen Kometen.
1823	Argelander, Untersuchung über den Kometen von 1811.
1823	Gauss, Theoria combinationis observationum. (Suppl. 1828.)

1824	F. R. Hassler (1770—1843), Papers on various subjects.
1825	Gehlers phys. Wörterbuch in neuer Auflage von Brandes, Horner, Littrow, Muncke und Pfaff (11 Th. in 20 Vol.).
1825	Arago (1786—1853) entdeckt den Rotationsmagnetismus.
1825	Legendre, Fonctions elliptiques (1828, vol. 3).
1825	Ad. Quetelet, Correspondance math. et phys. (1839 Vol. 11).
1826	Airy (1801), Mathematical Tracts (3 éd. 1842).
1826	Schwabe (1789—1875) beginnt seine Sonnenfleckenbeobachtungen.
1826	Crelle (1780—1855), Journal der Mathematik (1855, Bd. 50; seither Borchardt und Kronecker; 1890 Vol. 107).
1826	H. Dutrochet (1776—1847) entdeckt die Endosmose.
1827	Pouillet (1791—1868), Elémens de physique. (7 éd. 1856; Müller.)
1827	Wöhler (1800—1882) stellt Aluminium aus Thonerde dar.
1827	Simon Ohm (1787—1854), Die galvanische Kette.
1827	Wilh. Struve, Catalogus novus stellarum duplicium.
1827	Savary (1797—1841) berechnet die Doppelsterne.
1827	Möbius (1790—1868), Der barycentrische Calcul; 1885—87 Werke.
1827	J. C. Horner (1774—1834), Tables hypsométriques.
1827	III 5 starb zu Paris Pierre-Simon Laplace, zu Como Alessandro Volta.
1828	Péclet (1793—1857), Traité de la chaleur (nouv. édit. 1859).
1828	August (1795—1870), Über die Anwendung des Psychrometers.
1829	K. G. Jacobi (1803—1851), Fund. theoriæ functionum ellipticarum.
1830	begann mit der Revolution in Paris eine neue Zeit.
1830	Berliner akademische Sternkarten (24 Blätter).
1831	Mary Sommerville (1780—1872), Mechanism of the heavens.
1831	Wilh. Struve (1793—1864), Russische Breitengradmessung.
1831	Fourier, Analyse des équations déterminées.
1831	Poisson, Nouvelle théorie de l'action capillaire.
1831	Kämtz (1801—1867), Lehrbuch der Meteorologie. (3. Bd. 1836.)
1831	Faraday (1791—1867) entdeckt die Induktionsströme.
1832	Steiner (1796—1863), Abhängigkeit geometrischer Gestalten.
1832	wurde Buchwalder (1792—1883) auf dem Sentis vom Blitze getroffen, sein Gehilfe Gobat sogar erschlagen.
1832	A. Plana (1781—1864), Théorie du mouvement de la Lune.
1833	Sawitsch (1811—1883), Prakt. Astronomie (russisch; deutsch 1840).
1833	Littrow, Chorographie; 1836 Anleitung zur höhern Mathematik.
1833	Gauss, Intensitas vis magneticæ terrestris; Werke 1863—74, 7 Bde.
1833	John Herschel (1792—1871), Astronomy (8 éd. 1865).
1834	XI 3 starb in Zürich Joh. Casp. Horner, mein väterl. Freund und Berater.
1834	Littrow, Die Wunder des Himmels (7. Ausg. 1886 durch Weiss).
1834	Beer (1797—1850) und Mädler, Mappa selenographica.
1834	Sédillot, Traité des instruments astronomiques des Arabes composé par Aboul Hhassan; 1841 Instruments astronomiques des Arabes.
1834	Eschmann, Wild und Wolf wiederholen die Basismessung bei Aarberg.
1835	Beginn der Comptes rendus de l'Académie des Sciences.
1835	Poisson, Théorie mathématique de la chaleur.
1835	Schwerd (1792—1871), Die Beugungserscheinungen.
1836	Liouville, Résal, etc.: Journal des Mathématiques (1889, vol. 54).
1836	Wilh. Eisenlohr (1799—1872), Lehrbuch der Physik. (Viele spät. Aufl.)

1837	Bessel bestimmt die Parallaxe von 61 Cygni.
1837	Argelander, Über die Bewegung des Sonnensystems.
1837	Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements.
1837	Gräffe (1799—1873), Auflösung der höhern numerischen Gleichungen.
1837	Grunert (1797—1871), Ebene, sphärische und sphäroidische Trigonometrie.
1837	Dove, Repertorium der Physik (1849, Bd. 8).
1837	Chasles (1793—1880), Des méthodes en géométrie.
1837	Whewell, History of the inductive sciences (deutsch von Littrow).
1837	W. Struve, Stellarum duplicium mensuræ micrometricæ.
1838	Libri (1803—1869), Histoire des sciences mathématiques en Italie.
1838	Wilde (1793—1859), Geschichte der Optik (1843, Bd. 2).
1838	Steinheil (1801—1870) entdeckt die Leitungsfähigkeit der Erde und damit die Lebensader der Telegraphie.
1838	Wheatstone (1802—1875) erfindet das Stereoskop.
1838	Groombridge (1755—1832), Catalogue of circumpolar Stars. Ed. Airy.
1838	Erfindung der Reibzündhölzchen, — 1841 durch Böttger verbessert.
1839	Raabe (1801—1859), Differential- und Integralrechnung. (3. Bd. 1847.)
1839	Faraday, Experimental researches on Electricity.
1839	Nièpce u. Daguerre erfinden die Daguerreotypie, Talbot die Photographie.
1839	Schönbein (1799—1868) entdeckt das Ozon, 1845 die Schiessbaumwolle und das Collodium.
1839	N. H. Abel (1802—1829), Oeuvres complètes.
1839	Mor. Herm. Jacobi (1801—1874) entdeckt die Galvanoplastik.
1840	J. Eschmann (1808—1852), Ergebnisse der schweizer. Triangulation.
1840	Navier (1785—1836), Leçons d'analyse (deutsch von Wittstein 1848).
1840	Einführung der Briefmarken in England, — 1843 in Zürich.
1840	XI 30 starb zu Wien mein lieber Lehrer Littrow.
1840	Dove, Gesetz der Stürme; 1849 erste Monatsisothermen.
1841	Grunert, Archiv der Mathematik und Physik. (1870 Vol. 50.)
1841	Bessel, Astronomische Untersuchungen (1842, Bd. 2).
1841	Mädler (1791—1874), Populäre Astronomie (8. A. durch Klein 1885).
1841	Graham (1805—1869), Chemistry (2 éd. 1850; deutsch von Otto).
1841	Quetelet (1796—1874), Catalogue d'étoiles filantes.
1841	R. Wolf, Die Lehre von den geradl. Gebilden in der Ebene. (2. Ausg. 1847.)
1842	C. A. Peters (1806—1880), Numerus constans nutationis.
1842	VII 7 totale Sonnenfinsternis (Überraschung durch Protuberanzen).
1843	Gerling (1788—1864), Die Ausgleichungsrechnungen.
1843	Argelander (1799—1875), Uranometria nova.
1843	Kopp (1817), Geschichte der Chemie (4. Bd. 1847).
1844	B. Studer (1794—1887), Physikalische Geographie. (2. Bd. 1847.)
1844	Fr. Kaiser (1808—1872), De Sterrenhemel. (4. A. 1884.)
1845	A. v. Humboldt, Kosmos. (4. Bd. 1858; auch franz. u. engl.)
1845	Catalogue of Stars of the British Association.
1845	Hencke (1793—1866) beginnt mit der Entdeckung der Astræa die Reihe neuer Funde von Asteroiden. (Luther, Peters, Palisa, etc.)
1845	Jul. Weisbach (1806—71), Ingenieurmechanik (1860 Bd. 3; spät. Aufl.).
1846	Leverrier und Adams bestimmen, Galle findet Neptun.
1846	Weisse (1798—1863), Catalogus stellarum ex zonis regiomontanis.
1846	III 17 starb zu Königsberg Friedr. Wilhelm Bessel.

1846	Walker (1805—1853) leitet eine erste telegraphische Längenbestimmung.
1847	Doppler (1803—53) spricht das seinen Namen tragende Princip aus.
1847	Die Fortschritte der Physik im Jahre 1845. Seither fortgesetzt.
1847	J. Herschel, Astronomical Observations at the Cape.
1848	Redtenbacher (1809—1863), Resultate für den Maschinenbau.
1849	Heis (1806—1877), Die periodischen Sternschnuppen.
1849	Euler, Opera minora, — 1862 Opera posthuma.
1850	Wittmann proponiert telegraphische Witterungsprognosen.
1850	Fizeau und Foucault bestimmen die Geschwindigkeit des Lichtes auf physikalischem Wege.
1850	Clausius, Die Lichterscheinungen der Atmosphäre.
1850	Gould (1824), The Astronomical Journal. (1890 Nro. 224.)
1850	O. F. Mossotti (1791—1863), Lezioni di meccanica rationale.
1851	C. A. Peters (1806—1880), Über die eigene Bewegung des Sirius.
1851	Brünnow (1821), Sphärische Astronomie. (3. A. 1881.)
1851	Foucault (1819—1868), Pendelversuch; 1878 Recueil des travaux.
1851	VII 28 totale Sonnenfinsternis in Ostpreussen: Beginn des Streites über die Natur der Protuberanzen.
1852	Rob. Grant, History of physical astronomy.
1852	Sabine, Gautier und Wolf weisen bei den magnetischen Variationen und Sonnenflecken eine gemeinschaftliche 11jährige Periode nach.
1852	Dove (1803—1879), Verbreitung der Wärme auf der Erde.
1852	Chasles, Traité de Géométrie supérieure.
1852	Liagre (1815—1891), Calcul des probabilités. (2 éd. 1879.)
1852	Bremiker, Logarithmorum VI decimalium nova tabula.
1852	Ferd. Redtenbacher, Principien der Mechanik.
1852	Moigno (1804—1884), Cosmos; 1863 Les Mondes.
1853	Aug. Beer (1825—1863), Höhere Optik.
1853	Th. Riess (1805—83), Lehre von der Reibungselektricität.
1854	De la Rive (1801—1873), Traité de l'électricité. (3. Bd. 1858.)
1854	Lamont (1805—1879), Magnet. Karte von Deutschland.
1854	Arago, Astronomie populaire (deutsch mit Noten von d'Arrest).
1855	Salmon (1819), Conic Sections (deutsch von Fiedler).
1855	Leverrier (1811—1877), Annales de l'Observatoire de Paris.
1855	II 23 starb zu Göttingen Karl Friedrich Gauss.
1855	Schlacht bei Sebastopol, 1859 Solferino, 1866 Königsgrätz, 1870 Sédan.
1856	Bauernfeind (1818), Vermessungskunde (6. Ausg. 1879).
1856	Duhamel (1797—1872), Calcul infinitésimal.
1856	Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik (1890 Vol. 35).
1856	J. Amsler (1823), Der Polarplanimeter.
1856	Mädler, Eigenbewegung der Fixsterne.
1856	R. Wolf, Astronomische Mittheilungen (1890 Nro. 76).
1857	Buys-Ballot (1817—1890) publiziert sein barisches Windgesetz.
1857	Carrington (1826—1875), Catalogue of circumpolar Stars.
1857	Argelander, Atlas des nördlichen Himmels.
1857	Hansen (1795—1874), Tables de la lune.
1857	Ch. Sturm (1803—55), Cours d'analyse. (8 éd. 1887.)
1857	Kepler, Opera omnia. Ed. Frisch. (8. Bd. 1871.)
1858	Poggendorf, Biographisch-litterarisches Wörterbuch. (2. Bd. 1863.)

1858	R. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. (4. Bd. 1862.)
1858	Mousson (1805—90), Physik auf Grundlage der Erfahrung. (3. A. 1879.)
1858	Tortolini e Brioschi, Annali di Matematica (1890 Vol. 25).
1858	Dubois (1822), Cours d'Astronomie. (3. A. 1876.)
1858	Elie Ritter (1801—62), Manuel de la méthode des moindres carrés.
1858	VI 2 entdeckt G. Donati (1826—73) den nach ihm benannten Kometen.
1859	V 6 starb zu Berlin Alexander v. Humboldt.
1860	E. E. Schmid (1815), Lehrbuch der Meteorologie.
1860	Ph. Reis (1834—74) konstruiert ein erstes Telephon.
1860	Zeuner (1828), Mech. Wärmetheorie (2. A. 1865); 1887 Thermodynamik.
1860	VII 18 weist Bruhns (1830—81) die Realität der Protuberanzen nach.
1860	Johnson (1805—59), The Radcliffe Catalogue. Ed. R. Main.
1860	Ch. Delaunay (1816—72), Théorie du mouvement de la Lune.
1860	R. de Sousa Pinto, Elementos de astronomia.
1861	Balsam, Apollonius' acht Bücher über Kegelschnitte.
1861	Hesse (1811—1874), Analytische Geometrie des Raumes. (3. A. 1876.)
1861	Sturm, Cours de mécanique. Ed. par Prouhet. 2 Vol.
1862	Kirchhoff (1824—1887), Untersuchung über die Sonnenspektren.
1862	Baeyer (1794—1885) ruft die internationale Erdmessung ins Leben.
1862	Auwers (1838), Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen.
1863	Dirichlet (1805—1859), Vorlesungen über Zahlentheorie. (3. A. 1879.)
1863	Chauvenet (1819—1870), Spherical and practical Astronomy. (5. ed. 1885.)
1863	G. Spörer (1822), Die Stürme auf der Sonne.
1863	R. C. Carrington, Observations of the Spots on the Sun.
1863	B. Studer, Geschichte der physischen Geographie der Schweiz.
1863	Eröffnung der schweizerischen meteorologischen Centralanstalt.
1863	H. v. Helmholtz (1821), Die Lehre von den Tonempfindungen (4. A. 1877).
1863	Gottfr. Schweizer (1816—73), Untersuchungen über die in der Nähe von Moskau stattfindende Lokal-Attraktion.
1863	wird die unter Leitung von Joh. Wild (1814) erstellte, in der Kartographie Epoche machende Karte des Kantons Zürich vollendet.
1864	Clausius (1822—1888), Abhandl. über die mechanische Wärmetheorie.
1864	J. Herschel, Catalogue of Nebulæ and Clusters.
1864	Karl Culmann (1821—1881), Graphische Statik. (Forts. durch W. Ritter.)
1864	Bremiker (1801—77), Crelles Rechentafeln in neuer Ausgabe.
1864	XI 11 starb zu Petersburg Wilhelm v. Struve.
1864	Jos. Bertrand (1822), Traité de calcul différentiel (1870 Vol. 2).
1865	Publikat. deutsch. astr. Ges. (19 von 1889). Seit 1866 auch Viertelj.
1865	Fr. Zöllner (1831—1882), Photometrische Untersuchungen.
1865	Lew. Rutherford (1816) erstellt eine vorzügliche Photographie des Mondes.
1865	Osc. Peschel (1826—75), Geschichte der Erdkunde. (2. A. 1877.)
1866	Plantamour (1815—1882), Expériences avec le pendule à réversion.
1866	The transatlantic longitude (Report Gould 1869).
1866	K. G. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik; Werke 1881 (5. Bd. 1890).
1867	Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie; Werke 1881.
1867	Schiaparelli (1835), Teoria delle stelle cadenti.
1867	Catalog of scientific papers (1800—63) publ. by the Roy. Soc. (1872 Vol. 6).
1867	Ad. Hirsch (1830) et Plantamour, Nivellement de précision de la Suisse.
1868	Balth. Boncompagni (1821), Bulletino (1887 Tom 20).

1868	Jam. Watson (1838—1880), Theoretical Astronomy.
1868	Lockyer und Janssen sehen mit dem Spektroskop Protuberanzen.
1869	R. Wolf, Handbuch der Mathematik, Phys., Geod. und Astr. (2. Bd. 1872.)
1869	H. Klein (1842), Himmelsbeschreibung. (2. Th. 1872.)
1869	Zeuner, Abhandlungen aus der mathematischen Statistik.
1870	Ang. Secchi (1818—1878), Le Soleil. (2 éd. 1875—77.)
1870	Th. Oppolzer (1841—1886), Lehrbuch der Bahnbestimmung. (2. A. 1882.)
1870	Lagrange, Oeuvres (14 Vol. bis 1890), Laplace (8 Vol. bis 1890).
1870	Rich. Rühlmann, Die barometrischen Höhenmessungen.
1870	u. f. Heinr. Wild (1833), Repertorium für Meteorologie, — 1881 Temperaturverhältnisse des russischen Reiches.
1871	W. Fiedler (1832), Darstellende Geometrie. (3. A. 1888.)
1871	Thomson and Tait, Natural philosophy (deutsch von Helmholtz).
1872	Fr. Zöllner, Über die Natur der Kometen; Abhandlungen 1878.
1872	Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani (1890 Vol. 19).
1873	N. Coppernicus, De revolutionibus. Ed. M. Curtze.
1873	H. Fritz (1830), Verzeichnis beobachteter Polarlichter.
1873	Aug. Ritter, Lehrbuch der analytischen Mechanik.
1873	A. H. Résal (1828), Traité de mécanique générale (1881 Vol. 6).
1873	H. Suter (1848), Geschichte der mathemat. Wissenschaften (1875 Bd. 2).
1874	H. C. Vogel (1842), Untersuchungen über die Spectra der Planeten.
1874	Ph. v. Jolly (1809—84) vervollkommnet das Luftthermometer.
1874	H. Hankel (1839—73), Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter.
1875	Bessel, Abhandlungen. Herausgeg. von Engelmann. (3. Bd. 1876.)
1875	Errichtung der deutschen Seewarte in Hamburg.
1875	F. Reuleaux (1820), Theoretische Kinematik.
1876	B. Riemann (1826—66), Gesammelte mathematische Werke.
1877	R. Wolf (1816), Geschichte der Astronomie.
1877	Asaph Hall (1829) findet zwei Marsmonde auf.
1877	Ed. Ott (1848), Elemente der Mechanik. (2. A. 1891.)
1877	Hugo Gyldèn (1841), Die Grundlehren der Astronomie.
1878	D. E. Hughes erfindet das Mikrophon.
1878	J. Hoüel (1823—86), Cours de calcul infinitésimal. (4. Bd. 1881.)
1878	Schiaparelli, Sulla topografia del pianeta Marte (Forts. 1881—86).
1878	Jul. Schmidt (1825—84), Karte der Gebirge des Mondes.
1878	Sim. Newcomb (1835), Popular astronomy. (2. ed. 1883.)
1878	Houzeau, Uranométrie générale.
1878	Yarnall, Catal. of Stars observ. at the U. S. Naval Observat. (3. ed. 1889.)
1878	Bierens de Haan (1822), Bouwstoffen voor de Geschiedenis der Wis- en natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden. (2. Bd. 1887.)
1878	W. H. M. Christie (1845) beginnt die Herausg. d. Zeitschr.: The Observatory.
1878	Beginn des American Journal of Mathematics by Sylvester.
1879	Poggendorf (1796—1877), Geschichte der Physik.
1879	B. A. Gould, Uranometria argentina.
1879	R. Wolf, Geschichte der Vermessungen in der Schweiz.
1880	F. R. Helmert (1843), Höhere Geodäsie, und: A. R. Clarke, Geodesy.
1880	M. Cantor (1829), Geschichte der Mathematik.
1880	Ibannez (1825—91) und Dumur messen bei Aarberg eine neue Basis.

1881	Faye, Cours d'astronomie de l'école polytechnique (1883 Vol. 2).
1882	Houzeau et Lancaster, Bibliographie de l'astronomie.
1882	C. A. Young (1834), The Sun (franz. 1883); 1888 General Astronomy.
1882	J. Ch. Houzeau (1820—88), Vademecum de l'astronome.
1882	Cauchy, Oeuvres complètes (8 Vol. bis 1890).
1882	Astronomical papers prepared by S. Newcomb (4. Bd. 1890).
1882	E. Holden (1846), Monograph of the Nebula of Orion.
1882	Auwers, Neue Reduktion der Bradley'schen Beobachtungen.
1882	Aug. Weilenmann (1843), Der geometrische Unterricht.
1883	Jul. Hann (1839), Handbuch der Klimatologie.
1883	N. v. Konkoly (1842), Anleitung zu astronomischen Beobachtungen.
1884	H. Faye (1814), Sur l'origine du monde. (2. éd. 1885.)
1884	S. Günther (1848), Geophysik und phys. Geogr. (2. Bd. 1885.)
1884	Tisserand, Bulletin astronomique (7 Vol. 1890).
1884	Langley (1834), Researches on solar heat.
1884	Internationale Meridiankonferenz in Washington.
1884	Wilh. Meyer (1858), Le système de Saturne.
1885	Paul (1848) und Prosper Henry (1849), Photographische Sternkarten.
1885	Agn. Clerke, History of astronomy during the 19. century.
1885	Ch. M. Rühlmann (1811), Vorträge über Geschichte der Mechanik.
1886	Gravelius, Fünfstellige log. trig. Tafeln für Decimalteilung.
1886	Charles Wolf (1827), Les hypothèses cosmogoniques.
1886	B. Weinstein, Handbuch der physik. Massbestimmungen (1888 Bd. 2).
1887	G. H. Halphen (1844—89), Traité des fonctions elliptiques (2. Bd. 1888).
1887	Beginn der Publikation: Catalogue de l'Observatoire de Paris.
1887	Internationaler astrophotographischer Kongress in Paris.
1888	Dreyer, New general catalogue of nebula and clusters.
1888	Beginn der Monatschrift: Himmel und Erde.
1888	W. Förster (1832), Studien zur Astrometrie.
1888	E. Caspari, Cours d'astronomie pratique (1889 Vol. 2).
1889	F. Tisserand (1845), Traité de mécanique céleste. (2. Bd. 1891.)
1889	K. Braun (1831), Über Kosmogonie.
1889	G. A. Hirn (1815—90), Constitution de l'espace céleste.
1889	Schiaparelli, Sulla rotazione di Mercurio, — 1890 di Venere.
1890	Galilei, Opere. Edizione nazionale Dir. A. Favaro.
1890	Tables météorologiques internationales.
1890	N. C. Dunèr, Sur la rotation du Soleil.
1890	Janssen (1824) trägt sein Spektroskop auf den Montblanc.
1890	Clark Maxwell (1831—79), The scientific papers.
1890	Beginn der Publikation: Katalog der astronomischen Gesellschaft.
1890	Seeliger (1849) und Bauschinger (1860), Münchener Sternverzeichnis.
1890	S. Günther, Handbuch der mathematischen Geographie.
1890	Jul. Scheiner (1858), Die Spectralanalyse der Gestirne.

